Тема 1. ИКОНОМИЧЕСКИ ФУНКЦИИ

ТЕОРИЯ

1. Определение за икономически функции. Икономическите величини (разглеждани като функции на други аргументи – също икономически величини) приемат неотрицателни стойности при неотрицателност на аргументите. Освен това, сумарните икономически величини са монотонни функции.

2. Средната величина $\boldsymbol{Af(x)}$ се определя като съотношение между сумарната величина $f(x)$ и аргумента и x. Означава се също и с $\bar{f}(x)$. Ясно е, че

$$\bar{f}(x) = Af(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

3. Маргиналната величина $\boldsymbol{Mf(x)}$ се определя като производната на сумарната величина $f(x)$ по отношение на аргумента и, т.е.

$$Mf(x) = f'(x)$$

4. Теорема за абсолютен минимум на средната величина. Ако $f(x)$ е растяща, изпъкнала и $f(0) > 0$ като при $x = x_0$ маргиналната и средната величини са равни, т.е. $x_0 : Mf(x_0) = Af(x_0)$, то при тази стойност $Af(x)$ има абсолютен минимум.

5. Еластичност се нарича границата на отношението на относителните изменения на y и на x. Нестрого казано, еластичността показва с колко процента се е изменило y при промяната на x с 1%.

$$E\big(y(x)\big) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\%\Delta y}{\%\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}{\frac{y}{x}} = \frac{dy}{dx}\frac{x}{y} = y'\frac{x}{y} = \frac{y'}{\frac{y}{x}} = \frac{My(x)}{Ay(x)}$$

, т.е. еластичността на една икономическа функция е частното на маргиналната и средната величина.

6. Възстановяване на функция по дадена еластичност. Нека $y = f(x)$ е неизвестна функция на икономическата величина x, но е известна еластичността и по x, т.е. дадена е $g(x) = E\big(y(x)\big)$. Тогава y се определя по формулата

$$y = ce^{\int \frac{g(x)}{x} dx}$$

7. Дискретно зададена икономическа функция. Нека x и y са икономически величини. В случай, че не е известна функционална зависимост, зададена чрез

аналитичен израз $y = f(x)$, но се подозира (от икономически съображения) функционална връзка между тях, може да се измерят стойности на $x: x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n$ и съответните им стойности на $y: y_1, y_2, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots, y_n$. Тогава можем да определим средните стойности

$$Ay_k = \frac{y_k}{x_k}; k = 1,2, \dots, n,$$

маргиналните стойности

$$My_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}; k = 1,2, \dots, n-1$$

и еластичностите

$$Ey_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}\frac{x_k}{y_k} = \frac{My_k}{Ay_k}; k = 1,2, \dots, n-1.$$

8. Икономическа функция на две независими променливи. При икономическа величина, зависеща функционално от две променливи ще има две средни величини

$$A_x f = \frac{f}{x} \text{ и } A_y f = \frac{f}{y}$$

две маргинални

$$M_x f = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \text{ и } M_y f = f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

и две еластичности

$$E_x f = f_x \frac{x}{f} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{x}{f} \text{ и } E_y f = f_y \frac{y}{f} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{y}{f}.$$

РЕШЕНИ ЗАДАЧИ

1. Нека *x* и *y* са икономически величини и $y = f(x)$.

а) Да се намери средната величина *Ay*;

б) да се намери маргиналната величина *My*;

в) да се намери еластичността на y по x ако:

1) $f(x) = 100 - 0{,}5x$; 2) $f(x) = \sqrt{100 - 0{,}5x}$; 3) $f(x) = -4 + \frac{160}{x}$.

Решение:

1) По дефиниция имаме

$$Ay = \frac{f(x)}{x} = \frac{100 - 0{,}5x}{x} = \frac{100}{x} - 0{,}5;$$

$$My = f'(x) = (100 - 0{,}5x)' = -0{,}5;$$

$$E\big(f(x)\big) = f'(x)\frac{x}{f(x)} = -0{,}5\frac{x}{100 - 0{,}5x}.$$

2) Аналогично получаваме

$$Ay = \frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{100 - 0{,}5x}}{x} = \sqrt{\frac{100}{x^2} - \frac{0{,}5}{x}};$$

$$My = f'(x) = \left(\sqrt{100 - 0{,}5x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{100 - 0{,}5x}}(100 - 0{,}5x)' = -\frac{0{,}25}{\sqrt{100 - 0{,}5x}};$$

$$E\big(f(x)\big) = f'(x)\frac{x}{f(x)} = -\frac{0{,}25}{\sqrt{100 - 0{,}5x}}\frac{x}{\sqrt{100 - 0{,}5x}} = -\frac{0{,}25x}{100 - 0{,}5x}.$$

3)

$$Ay = \frac{f(x)}{x} = \frac{-4 + \frac{160}{x}}{x} = -\frac{4}{x} + \frac{160}{x^2};$$

$$My = f'(x) = \left(-4 + \frac{160}{x}\right)' = -\frac{160}{x^2};$$

$$E\big(f(x)\big) = f'(x)\frac{x}{f(x)} = -\frac{160}{x^2}\frac{x}{-4 + \frac{160}{x}} = -\frac{160}{160 - 4x} = \frac{160}{4x - 160}.$$

2. Да се намери абсолютния минимум на средната величина Ay, ако $y = f(x)$

а) $f(x) = 0{,}25x^2 + 5x + 100$;

б) $f(x) = 0{,}5x^3 + 80x + 1000$.

Решение:

а) За средната величина Ay ще имаме

$$Ay = \frac{f(x)}{x} = \frac{0{,}25x^2 + 5x + 100}{x} = 0{,}25x + 5 + \frac{100}{x}.$$

Тогава за производната ѝ $(Ay)'$ получаваме

$$(Ay)' = \left(0{,}25x + 5 + \frac{100}{x}\right)' = 0{,}25 - \frac{100}{x^2}.$$

За да получим критичната стойност за x трябва да нулираме първата производна:

$$(Ay)' = 0 \Leftrightarrow 0{,}25 - \frac{100}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 20 \ (x > 0).$$

В тази критична стойност ще имаме (абсолютен) минимум, защото втората производна е положителна (за всяко $x > 0$). Пресмятаме този абсолютен минимум:

$$(Ay)_{min} = (Ay)(20) = 0{,}25 \cdot 20 + 5 + \frac{100}{20} = 15.$$

Същият резултат бихме получили, ако използваме теоремата. Тогава ще имаме

$$Ay = My \Leftrightarrow 0{,}25x + 5 + \frac{100}{x} = 0{,}5x + 5 \Leftrightarrow x = 20.$$

б) Като използваме теоремата получаваме

$$Ay = \frac{f(x)}{x} = \frac{0{,}5x^3 + 80x + 1000}{x} = 0{,}5x^2 + 80 + \frac{1000}{x};$$

$$My = f'(x) = (0{,}5x^3 + 80x + 1000)' = 1{,}5x^2 + 80.$$

$$Ay = My \Leftrightarrow 0{,}5x^2 + 80 + \frac{1000}{x} = 1{,}5x^2 + 80 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1000}{x} \Leftrightarrow x = 10.$$

Тогава за абсолютния минимум на средната величина получаваме

$$(Ay)_{min} = (Ay)(10) = 0{,}5 \cdot 10^2 + 80 + \frac{1000}{10} = 230.$$

3. Да се намери функцията $f(x)$, ако е дадена нейната еластичност $g(x)$, като $g(x) = -\frac{0{,}25x}{100-0{,}5x}$.

Решение:

Ще имаме диференциалното уравнение

$$g(x) = -\frac{0{,}25x}{100 - 0{,}5x} = f'(x)\frac{x}{f(x)} = y'\frac{x}{y} = \frac{dy}{dx}\frac{x}{y}.$$

Умножаваме с dx и делим на x двете страни на горното уравнение и получаваме

$$\frac{dy}{y} = -\frac{0{,}25xdx}{100 - 0{,}5x}.$$

Интегрираме двете страни на горното равенство

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{0{,}25xdx}{100 - 0{,}5x}$$

и получаваме

$$\ln y = \frac{1}{2}\int \frac{d(100 - 0{,}5x)}{100 - 0{,}5x} = \frac{1}{2}\ln(100 - 0{,}5x) + \ln C = \ln C\sqrt{100 - 0{,}5x}.$$

Сравняваме двете страни на това равенство и окончателно получаваме $y = C\sqrt{100 - 0{,}5x}$.

4. Да се намери намери функцията $f(x)$, ако тя е

а) с постоянна еластичност $\frac{3}{2}$ и $f(4) = 40$;

б) с линейна еластичност 1 при $x = 1$ и 4 при $x = 2$, като $f(1) = 1$;

Решение:

а) Нека (в общия случай) постоянната еластичност да е α. Тогава ще имаме

$$\frac{dy}{dx}\frac{x}{y} = \alpha.$$

След умножаване с dx и делене на x на двете страни на горното уравнение и получаваме

$$\frac{dy}{y} = \frac{\alpha dx}{x} \Longrightarrow \int \frac{dy}{y} = \alpha \int \frac{dx}{x} \Longrightarrow \ln y = \alpha \ln x + \ln C = \ln Cx^{\alpha} \Longrightarrow y = Cx^{\alpha}.$$

В нашия случай ($\alpha = \frac{3}{2}$) функцията ще бъде $y = Cx^{\frac{3}{2}}$. Интеграционната константа C ще определим от другото условие: $f(4) = C4^{\frac{3}{2}} = 8C = 40 \Longrightarrow C = 5$ и окончателният вид на функцията ще бъде $y = 5x^{\frac{3}{2}}$.

б) Нека (в общия случай) линейната еластичност да е $\alpha x + \beta$. Тогава ще имаме

$$\frac{dy}{dx}\frac{x}{y} = \alpha x + \beta$$

и след умножаване с dx и делене на x на двете страни на горното уравнение и получаваме

$$\frac{dy}{y} = \left(\alpha + \frac{\beta}{x}\right) \Longrightarrow \int \frac{dy}{y} = \alpha \int dx + \beta \int \frac{dx}{x} \Longrightarrow \ln y = \alpha x + \beta \ln x + \ln C.$$

След антилогаритмуване ще имаме

$$y = Ce^{\alpha x}x^{\beta}.$$

От първите две условия определяме коефициентите на линейната еластичност α и β: $1 = \alpha + \beta$, $4 = 2\alpha + \beta \Longrightarrow \alpha = 3, \beta = -2$, тогава функцията ще бъде

$$y = C\frac{e^{3x}}{x^2}.$$

От последното условие определяме интеграционната константа C:

$$f(1) = C\frac{e^3}{1^2} = Ce^3 = 1 = e^0 \Longrightarrow C = e^{-3} \quad \text{и} \quad y = \frac{e^{3x-3}}{x^2}.$$

5. Да се намери намери функцията $f(x)$, ако тя е от вида

а) $ax + b$, еластичността ѝ при $x = 80$ е 2 и $f(80) = 80$;

б) $\sqrt{ax + b}$, еластичността ѝ при $x = 72$ е $-\frac{9}{32}$ и $f(72) = 8$;

Решение:

а) Еластичността на линейната функция $y = ax + b$ е

$$E\big(f(x)\big) = E(ax + b) = (ax + b)'\frac{x}{ax + b} = \frac{ax}{ax + b}.$$

Тогава ще имаме

$$E\big(f(80)\big) = \frac{80a}{80a + b} = 2 \Longrightarrow 80a = 160a + 2b \Longrightarrow b = -40a \Longrightarrow y = ax - 40a.$$

От другото условие получаваме

$$f(80) = 80a - 40a = 40a = 80 \Longrightarrow a = 2 \Longrightarrow y = 2x - 80.$$

б) Еластичността на функцията $y = \sqrt{ax + b}$ е

$$E\big(f(x)\big) = E\big(\sqrt{ax+b}\,\big) = \big(\sqrt{ax+b}\,\big)' \frac{x}{\sqrt{ax+b}} = \frac{ax}{2\sqrt{ax+b}}.$$

Първо ще използваме второто условие:

$$f(72) = \sqrt{72a+b} = 8 \Longrightarrow 72a + b = 64 \Longrightarrow b = 64 - 72a.$$

Тогава от първото условие ще имаме

$$E\big(f(72)\big) = \frac{72a}{2\sqrt{72a+64-72a}} = -\frac{9}{32} \Longrightarrow \frac{36a}{8} = -\frac{9}{32} \Longrightarrow a = -\frac{1}{16}.$$

Тогава получаваме $64 + 72\frac{1}{16} = \frac{137}{2}$ и $y = \sqrt{\frac{137}{2} - \frac{x}{16}}$.

6. Нека x, y, z са икономически величини и $z = f(x, y)$. Да се намерят

а) средните величини на z по x и y;

б) маргиналните величини на z по x и y;

в) еластичностите на z по x и y, ако $f(x, y) = Ax^{\alpha}y^{\beta}$; $\alpha, \beta \in (0,1]$.

Решение:

а) За средните величини z по x и y Az_x и Az_y съответно ще имаме

$$Az_x = \frac{z}{x} = \frac{Ax^{\alpha}y^{\beta}}{x} = Ax^{\alpha-1}y^{\beta} \quad \text{и} \quad Az_y = \frac{z}{y} = \frac{Ax^{\alpha}y^{\beta}}{y} = Ax^{\alpha}y^{\beta-1}.$$

б) За маргиналните величини на z по x и y Mz_x и Mz_y получаваме

$$Mz_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\big(Ax^{\alpha}y^{\beta}\big) = A\alpha x^{\alpha-1}y^{\beta} \quad \text{и} \quad Mz_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\big(Ax^{\alpha}y^{\beta}\big) = A\beta x^{\alpha}y^{\beta-1}.$$

в) Пресмятаме и съответните еластичности Ez_x и Ez_y:

$$Ez_x = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{x}{z} = A\alpha x^{\alpha-1}y^{\beta}\frac{x}{Ax^{\alpha}y^{\beta}} = \frac{A\alpha x^{\alpha}y^{\beta}}{Ax^{\alpha}y^{\beta}} = \alpha.$$

$$Ez_y = \frac{\partial z}{\partial y}\frac{y}{z} = A\beta x^{\alpha}y^{\beta-1}\frac{y}{Ax^{\alpha}y^{\beta}} = \frac{A\beta x^{\alpha}y^{\beta}}{Ax^{\alpha}y^{\beta}} = \beta.$$

7. Да се намери функция от вида $z = Ax^{\alpha}y^{\beta}$; $\alpha, \beta \in (0,1]$, ако:

1) z нараства с 3% при нарастване на x с 6% (без да се променя y) или z нараства с 2% при нарастване на y с 6% (без да се променя x);

2) при $x = y = 64$ $z = 3200$.

Решение:

От една страна (от дефиницията за еластичност) получаваме

$$Ez_x = \frac{\frac{\Delta z}{z}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{3\%}{6\%} = \frac{1}{2}.$$

От друга страна (съгласно решението на предишната задача) ще имаме

$$Ez_x = \alpha \Longrightarrow \alpha = \frac{1}{2}.$$

Аналогично получаваме

$$Ez_y = \frac{\frac{\Delta z}{z}}{\frac{\Delta y}{y}} = \frac{2\%}{6\%} = \frac{1}{3} \quad \text{и} \quad Ez_y = \beta \Longrightarrow \beta = \frac{1}{3}.$$

Така за функцията z ще имаме

$$z = Ax^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}.$$

От условието 3) определяме константата A: $3200 = A64^{\frac{1}{2}}64^{\frac{1}{3}} \Longrightarrow 3200 = 32A$ и $A = 100$. Така окончателно търсената функция ще има вида

$$z = 100x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}.$$

8. Нека x и y са дискретно зададени икономически величини, като y зависи от x. Намерете средната величина Ay, маргиналната величина My и еластичността на y по x, ако

x	10	15	20	25	30
y	20	12	8	5	3

Решение:

Пресмятаме средните величини $Ay(x_i)$, маргиналните величини $My(x_i)$ и еластичностите $Ey(x_i)$ по формулите

$$Ay(x_i) = \frac{y_i}{x_i}\ ,\ \ My(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}\ ,\ \ Ey(x_i) = \frac{My(x_i)}{Ay(x_i)}$$

и попълваме таблицата

x	10	15	20	25	30
y	20	12	8	5	3
Ay	2	0,8	0,4	0,2	0,1
My	-1,6	-0,8	-0,6	-0,4	-
Ey	-0,8	-1	-1,5	-2	-