Математическа теория на потребителите

Целта на настоящия раздел е да се покаже как се формира функцията на потребителско търсене. Тъй като, очевидно пазарното търсене се получава вследствие на сумиране на търсенията на отделните потребители, то задачата се свежда до изучаване на поведението на отделния потребител на пазара.

Класическата теория се опира на предположението за рационалност в потребителското поведение. Този принцип на рационалност на потребителя може да се формулира така:

Потребителят се стреми да извлече **максимална полза при ограничение в разходите** за закупуване на стоки или да направи **минимални разходи за постигането на определена полза.** (Тези две задачи на потребителя са взаимно дуални.)

Следователно, за да развием теорията за поведението на потребителя на пазара се нуждаем от формализиране на ползата, която той очаква да получи при придобиването на определени количества стоки които го интересуват. Има два класичесли подхода при това формализиране:

1. Кардиналистки, опиращ се на така наречената функция на полезност (играеща ролята на целева функция). Исторически това е първият подход за изграждане на математически модел на потребителското поведение.
2. Ординалистки, състоящ се в построяване на релация на предпочитане, позволяваща да се сравняват всички набори от стоки без значение от цените на стоките.

Най-забележителен резултат от математическата теория на потреблението е твърдението, че на всяка релация на предпочитане съответства (и то нееднозначно) функция на потребителска полезност. Това позволява комбинирането на двата подхода, а именно – да се тръгне от характерната за ординалисткия подход релация на предпочитане, на базата на нея да се построи функция на полезност, позволяваща използването на методите на математическия анализ при изследванетои и решаване на задачите на потребителя.

1. Аксиоматика на релацията на потребителско предпочитане.

Предполагаме, че потребителят се интересува (без оглед на финансовите си възможности) от n на брой стоки. Под потребителски набор от стоки ще разбираме наредената n-торка $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, където $x_i, i = 1,2, \dots, n$ е количеството от i-тата стока. Очевидно, $x_i \geq 0$ (в частност може за някои номера

i да имаме $x_i = 0$ ако i-тата стока не присъства в набора). Така наборите от стоки ще бъдат елементи на множеството

$$\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \,/ x_i \geq 0; i = 1,2, \dots, n\}$$

Забележка: Множеството $\mathbb{R}_+^n$ е подмножеството на векторното пространство $\mathbb{R}^n$, състоящо се от векторите с неотрицателни координати. То не е векторно подпространство на $\mathbb{R}^n$, защото не е затворено по отношение на операцията изваждане.

Това множество $\mathbb{R}_+^n$ ще наричаме **пространство на потребителските набори**. В него ще въведем частична наредба:

$$x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i \text{ за } \forall i = 1,2, \dots, n$$

Така например, $(2,4) \leq (3,5)$ но $(2,5)$ и $(3,4)$ не могат да се сравняват. За тази релация на частична наредба важи „правилото на североизточния ъгъл“ – краищата на радиус-векторите, които са по-големи от даден радиус-вектор са разположени североизточно (горе и вдясно) от края на дадения вектор.

Ще считаме че в пространсрвото на потребителските набори $\mathbb{R}_+^n$ е зададена **релация на нестрого предпочитание** (preference relation) $\succcurlyeq$. Записът $x \succcurlyeq y$ означава, че от потребителска гледна точка наборът x е предпочитан пред набора y или двата набора са равнозначни. Тази релация $\succcurlyeq$ удовлетворява следните аксиоми:

Аксиома 1. (рефлексивност). $x \succcurlyeq x$ за $\forall x \in \mathbb{R}_+^n$.

Аксиома 2. (транзитивност). От $x \succcurlyeq y$ и $y \succcurlyeq z$ следва, че $x \succcurlyeq z$ за $\forall x, y, z \in \mathbb{R}_+^n$.

Аксиома 3. (съвършенство). За всяка двойка набори $x, y \in \mathbb{R}_+^n$ е изпълнена една от трите възможности:

i. $x \succcurlyeq y$, но не и $y \succcurlyeq x$
ii. $y \succcurlyeq x$, но не и $x \succcurlyeq y$
iii. $x \succcurlyeq y$ и $y \succcurlyeq x$.

Аксиома 4. (непрекъснатост). За всяко $x \in \mathbb{R}_+^n$ множеството от набори предпочитани пред x и множеството от набори непредпочитани пред x, т.е.

$$P_x = \{y \in \mathbb{R}_+^n : y \succcurlyeq x\} \text{ и } NP_x = \{y \in \mathbb{R}_+^n : x \succcurlyeq y\}$$

са затворени множества в $\mathbb{R}_+^n$ (т.е. всяко от тези множества съдържа и границата си).

Аксиома 5. (ненаситеност). За всяка двойка набори $x, y \in \mathbb{R}_+^n$ за които е изпълнено $x \leq y$ следва $x \preccurlyeq y$.

Тази аксиома показва, че за потребителя не съществува точка на насищане, т.е. такъв набор, който да е най-предпочитан от всички.

Аксиома 6. (изпъкналост). Ако наборът y е предпочитан пред x ($y \succcurlyeq x$) и $t \in [0,1]$ то набора $ty + (1-t)x$ е също предпочитан пред x ($ty + (1-t)x \succcurlyeq x$).

Пример. Ако един потребител предпочита 5 буркана сусамов тахан пред 5 буркана лютеница. Тогава, (според Аксиома 6. при $\alpha = \frac{2}{5}$) той ще предпочита 2 буркана сусамов тахан и 3 буркана лютеница пред 5 буркана лютеница.

Да отбележим, че горните аксиоми се базират на опита – правени са многократни наблюдения на конкретни потребители, вследствие от което са извлечени свойства на техните потребителски предпочитания, част от които формират горната аксиоматика.

Забележка 1. Ако за два набора x и y е валидна третата възможност от Аксиома 3., т.е. $x \succcurlyeq y$ и $y \succcurlyeq x$, ще наричаме тази двойка набори безразлични един спрямо друг и ще бележим $x \sim y$. Лесно се вижда, че **релацията на безразличие** е релация на еквивалентност, т.е. изпълнени са свойствата:

1) $x \sim x$ за $\forall x \in \mathbb{R}_+^n$;
2) от $x \sim y$ следва, че $y \sim x$ и обратното;
3) от $x \sim y$ и $y \sim z$ следва, че $x \sim z$.

Тогава пространството на потребителските набори чрез факторизация по релацията на безразличие се разбива на класове на еквивалентност. Всеки такъв клас на еквивалентност се нарича **множество на безразличие** (indifference set). За произволен набор x множеството от набори, безразлични спрямо x е сечение от множеството от предпочитаните и множеството на непредпочитаните набори, т.е.

$$I_x = \{y \in \mathbb{R}_+^n : y \sim x\} = P_x \cap NP_x$$

Забележка 2. На базата на релацията на (нестрого) предпочитание можем да дефинираме **релация на строго предпочитание**: наборът y е строго предпочитан пред набора x (бележи се $y \succ x$), ако той е нестрого предпочитан без да е безразличен.

$$y \succ x \Leftrightarrow \text{е изпълнено } y \succcurlyeq x \text{ но не е изпълнено } y \sim x$$

За релацията на строго предпочитание са валидни свойства, аналогични на аксиомите от втора до седма.

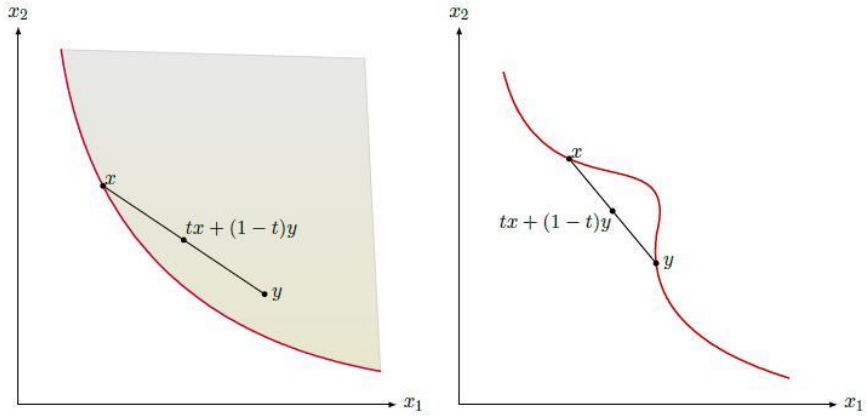


Рис.1. Аксиома 6. (изпъкналост)

Нека сега (за по-голяма нагледност) да разгледаме множеството от потребителски набори от две стоки $\mathbb{R}^2_+$. Тогава, за произволен набор $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$ множеството на безразличие, съдържащо x ще представлява линия, минаваща през точката x – **линия на безразличие**. Тогава свойствата на потребителските предпочитания ще имат нагледна геометрична интерпретация. Така например Аксиома 6. се илюстрира с левия чертеж от Рис.1.

На базата на горната аксиоматика можем да стигнем доизвода, че всяка линия на безразличие притежава свойствата:

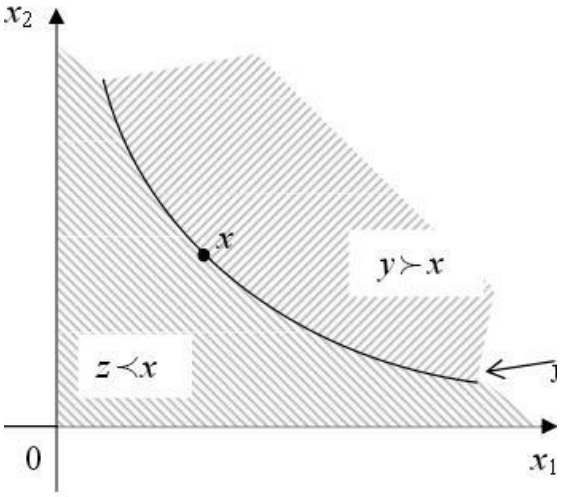


Рис.2. Линия на безразличие и областите на които разделя $\mathbb{R}^2_+$

A. Линията на безразличие, минаваща през точка x разделя $\mathbb{R}^2_+$ на две области – първата се състои от набори y, строго предпочитани пред x, а втората – от набори z – строго непредпочитани пред x. Първата област – разположена нагоре и надясно от линията на безразличие е **изпъкнала**, а втората – надолу и наляво – вдлъбната (Рис.2.).

Да припомним, че изпъкнала област се нарича такава област, за която, ако x и y са две произволни нейни точки, точката $ty + (1-t)x$ за $t \in [0,1]$ е също нейна точка. С други думи, изпъкналата област заедно с две произволни точки съдържа отсечката, която ги съединява.

B. С нарастването на всеки от аргументите, линията на безразличие се приближава до (по-точно, не се отдалечава от) съответната координатна ос.

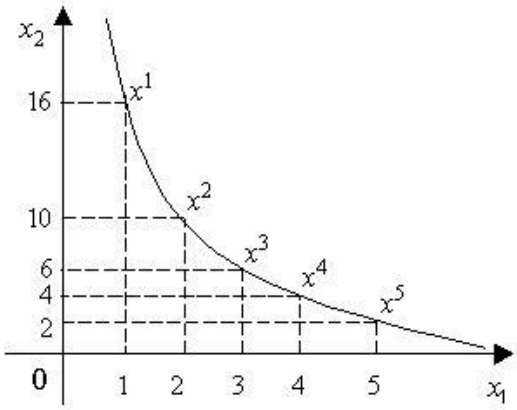


Рис.3. Промяна на координатите върху линия на безразличие

Свойствата A и B показват, че, ако за произволна линия на безразличие намаляме (нарастваме) едната координата с равни стъпки, то другата координата ще нараства (намалява) с ненамаляващи (ненарастващи) стъпки. На Рис.3. е изобразена типична линия на безразличие. Тя съединява точки с координати $(1,16), (2,10), (3,6), (4,4)$ и $(5,2)$. Вижда се, че стъпката за x_1 е една и съща - $\Delta x_1 = 1$, а Δx_2 е равно на $-6, -4, -2$ и -2 съответно.

Всички линии на безразличие за дадено потребителско предпочитание формират **карта на безразличие**. Картите на безразличие имат свойствата:

C. Ако през всяка точка $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$ минава линия на безразличие, тя е единствена.

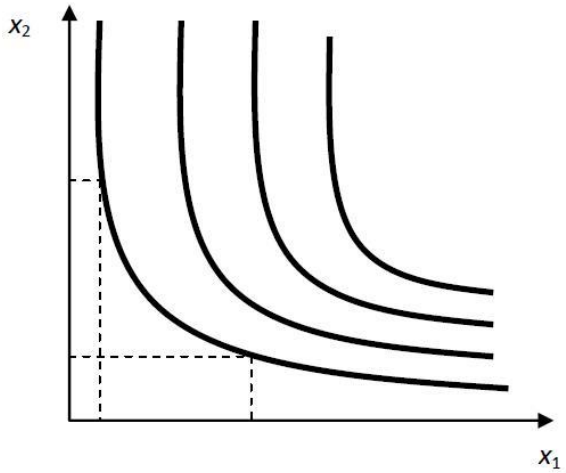


Рис.4. Карта на безразличие.

D. Линиите на безразличие, разположени нагоре и надясно от дадената линия на безразличие отговарят на по-предпочитани набори от стоки.

2. Функция на полезност

Нека $\succcurlyeq$ е дадено потребителско предпочитание, удовлетворяващо горната аксиоматика. Функцията $U(x) = U(x_1, x_2, \dots, x_n)$, дефинирана в $\mathbb{R}^n_+$ наричаме **функция на полезност** (utility function), съответстваща на $\succcurlyeq$, ако

$$U(y) \geq U(x) \iff y \succcurlyeq x\,.$$

Функцията на полезност измерва „ползата“, която получава потребителя от даден стоков набор (цигарите са „полезни“ за пушача). Полезността на стоковите набори може да се измерва както в абсолютни единици (характерно за кардиналисткото направление), така и в относителни (в ординалисткото направление).

През 1954 г. американският икономист от френски произход Жерар Дебрьо е доказал, че **за всяко потребителско предпочитание, удовлетворяващо**

аксиоми 1 – 4 съществува функция на полезност. В термините на функцията на полезност аксиоми 5 и 6 добиват вида:

Аксиома 5а. От $x \leq y$ следва $U(x) \leq U(y)$, като при $x \leq y$ и $x \neq y$, то $U(x) < U(y)$.

Аксиома 6а. За всяко $\alpha \in \mathbb{R}_+$ множеството $U_\alpha = \{x \in \mathbb{R}_+^n : U(x) \geq \alpha\}$ е изпъкнало.

Сега ще установим от какъв вид трябва да бъде функцията на полезност. За целта ще се ограничим с функции на полезност, съответстващи на гладки предпочитания (т.е. такива, за които линиите на безразличие са гладки).

Въвеждаме обозначенията

$$U_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1}, \qquad U_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2}, \qquad U_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}, \qquad U_{12} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2}, \qquad U_{22} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}$$

Ясно е, че ако y е произволен стоков набор и $U(y) = \alpha$, то линията на безразличие, съдържаща y ще се състои от такива стокови набори x, за които $U(x) = \alpha$. В равнината уравнението $U(x) = \alpha$ задава линия на ниво (α е нивото) за функцията U. Като варираме α получаваме еднопараметрична фамилия от линии за U, съвпадаща с картата на безразличие за предпочитанието $\succcurlyeq$. На линиите на безразличие, които са по-отдалечени от началото на координатната система ще отговарят по-големи стойности на функцията на полезност (така, както е показано на Рис.5.). В случай, че $n > 2$ се говори за повърхнини на ниво с уравнения $U(x) = \alpha$, които съвпадат с повърхнините на безразличие за съответното на U предпочитание.

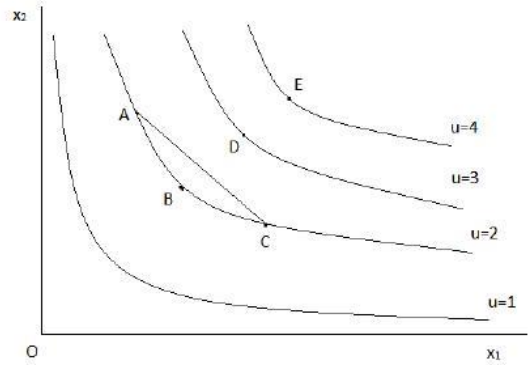


Рис.5. Линиите на безразличие като линии на ниво на функцията на полезност

Свойство D показва, че функциите $U(x_1, x_2 = const)$ и $U(x_1 = const, x_2)$ са растящи, следователно $U_1 > 0$ и $U_2 > 0$. От свойствата A и B следва, че ще съществуват взаимно обратните функции $x_1 = x_1(x_2)$ и $x_2 = x_2(x_1)$, чиято графика е линията на ниво $U(x_1, x_2) = \alpha$, като тези функции са намаляващи и изпъкнали, т.е.

$$x_1'(x_2) < 0\,, x_2'(x_1) < 0 \text{ и } x_1''(x_2) \geq 0\,, x_2''(x_1) \geq 0$$

Ако приложим формулата за пълния диференциал на U

$$dU = U_1 dx_1 + U_2 dx_2$$

и вземем под внимание, че върху линията на ниво $U = \alpha$ имаме $dU = 0$ получаваме

$$\frac{dx_1}{dx_2} = x_1'(x_2) = -\frac{U_2}{U_1} \text{ и } \frac{dx_2}{dx_1} = x_2'(x_1) = -\frac{U_1}{U_2},$$

което показва, че от $U_1 > 0$ и $U_2 > 0$ автоматично следва $x_1'(x_2) < 0$ и $x_2'(x_1) < 0$.

Нека да диференцираме още веднъж по x_2 израза $x_1'(x_2) = -\frac{U_2}{U_1}$. Получаваме

$$x_1''(x_2) = -\frac{(U_{21}x_1' + U_{22})U_1 - U_2(U_{11}x_1' + U_{12})}{U_1^2}$$

Заместваме в горния израз x_1' с $-\frac{U_2}{U_1}$ и окончателно ще имаме

$$x_1''(x_2) = \frac{2U_1U_2U_{12} - U_1^2U_{22} - U_2^2U_{11}}{U_1^3}$$

Аналогично

$$x_2''(x_1) = \frac{2U_1U_2U_{12} - U_1^2U_{22} - U_2^2U_{11}}{U_2^3}$$

Така получихне, че условията $x_1''(x_2) \geq 0$, $x_2''(x_1) \geq 0$ са изпълнени точно тогава, когато е налице

$$2U_1U_2U_{12} - U_1^2U_{22} - U_2^2U_{11} \geq 0$$

Функция, удовлетворяваща горното условие се нарича **квазивдлъбната функция** (quasi-concave function). Тя е обобщение на известната от курса по математически анализ вдлъбната функция. Да припомним определенията за изпъкнала и вдлъбната функция.

Функцията $f(x)$, $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ се нарича изпъкнала, ако за произволни $x_1, x_2 \in X$ и $t \in [0,1]$ е изпълнено неравенството

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

Функцията $f(x)$, $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ се нарича вдлъбната, ако за произволни $x_1, x_2 \in X$ и $t \in [0,1]$ е изпълнено неравенството

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

С други думи, отсечката свързваща $f(x_1)$ и $f(x_2)$ е разположена над графиката на изпъкналата функция и под графиката на вдлъбнатата функция.

С тези термини могат да се дадат определения на квазиизпъкнала и квазивдлъбната функция.

Функцията $f(x)$, $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ се нарича квазиизпъкнала, ако за произволни $x_1, x_2 \in X$ и $t \in [0,1]$ е изпълнено неравенството

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq max\{f(x_1), f(x_2)\}$$

Функцията $f(x)$, $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ се нарича квазивдлъбната, ако за произволни $x_1, x_2 \in X$ и $t \in [0,1]$ е изпълнено неравенството

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq min\{f(x_1), f(x_2)\}$$

Може да се докаже, че функцията $f(x)$ е квазиизпъкнала (квазивдлъбната) точно тогава, когато множествата $f_\alpha^- = \{x: f(x) \leq \alpha\}$ $(f_\alpha^+ = \{x: f(x) \geq \alpha\})$ са изпъкнали множества. Това свойство на квазивдлъбнатата функция е в основата на използването и за моделиране на потребителската полезност.

Да припомним и аналитичните критерии за изпъкналост и вдлъбнатост. Ще използваме означенията

$$f' = gradf = (f_1, f_2) \text{ и}$$

$$f'' = H(f) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{pmatrix},$$

като терминологията е: за първата производна на функция на много променливи $gradf$ – градиент на f (вектор-ред, чиито координати са първите производни), а за втората производна $H(f)$ – хесиан на f (симетрична матрица, чиито елементи са вторите производни).

За изпъкналите функции са изпълнени условията

$$f_{11} \geq 0\,, f_{22} \geq 0 \text{ и } |H(f)| = f_{11}f_{22} - f_{12}^2 \geq 0\,,$$

а за вдлъбнатите

$$f_{11} \leq 0\,, f_{22} \leq 0 \text{ и } |H(f)| = f_{11}f_{22} - f_{12}^2 \geq 0\,.$$

За да запишем аналогичните условия за квазиизпъкнали и квазивдлъбнати функции ще използваме така наречения **обрамчен хесиан** на f:

$$\bar{H}(f) = \begin{pmatrix} 0 & f' \\ f'^T & f'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{12} & f_{22} \end{pmatrix} \Longrightarrow |\bar{H}(f)| = 2f_1f_2f_{12} - f_1^2f_{22} - f_2^2f_{11}$$

Тогава, за квазиизпъкналите функции е в сила

$$|\bar{H}(f)| = 2f_1f_2f_{12} - f_1^2f_{22} - f_2^2f_{11} \leq 0\,,$$

а за квазивдлъбнатите:

$$|\bar{H}(f)| = 2f_1f_2f_{12} - f_1^2f_{22} - f_2^2f_{11} \geq 0$$

Тези резултати могат лесно да бъдат обобщени и за $n > 2$. При $n = 3$ обрамченият хесиан ще изглежда така

$$\bar{H}(f) = \begin{pmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_3 & f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{pmatrix}$$

Тогава условието за квазиизпъкналост е всички главни минори (без първия) на $\bar{H}(f)$ да са отрицателни, а условието за квазивдлъбнатост – да менят знаците си, т.е.

$$\bar{H}_2(f) = -f_1^2 \leq 0\,, \bar{H}_3(f) = 2f_1f_2f_{12} - f_1^2f_{22} - f_2^2f_{11} \geq 0 \text{ и } \bar{H}_4(f) = |\bar{H}(f)| \leq 0$$

Случаят $n = 1$ е различен – всяка монотонно растяща функция е квазивдлабната (дори и да е изпъкнала). И наистина, нека $f(x)$ е растяща функция на един аргумент и интервала $[a, b]$ е от дефиниционното и множество. Тогава, тъй като $ta + (1-t)b > a$ за $t \in (0,1)$, то $f(ta + (1-t)b) > f(a) = min\{f(a), f(b)\}$.

Забележка 1. Ако неравенствата, чрез които се дефинират съответните функции са строги, тогава говорим за строга изпъкналост, строга вдлъбнатост, строга квазиизпъкналост и строга квазивдлъбнатост съответно.

Забележка 2. Лесно се вижда че всички изпъкнали функции са квазиизпъкнали, а всички вдлъбнати – квазивдлъбнати, но не и обратното.

Забележка 3. От аксиома 5. следва, че производните по всички направления са положителни. И наистина, нека $l(l_1, l_2)$ е произволно направление, тогава за производната по това направление е в сила

$$\frac{\partial U}{\partial l} = gradU.l = l_1U_1 + l_2U_2 > 0$$

Това означава, че ако се потребяват стоки във фиксирано съотношение $x_1 : x_2 = l_1 : l_2 = const$, то полезността на наборите ще нараства с нарастването на количествата им. Това позволява да считаме че функцията на полезност е растяща функция.

След това отклонение в математическия анализ, да се върнем към потребителските предпочитания и свързаните с тях финкции на полезност. Окончателно, можем да формулираме твърдението.

За всяко потребителско предпочитание $\succcurlyeq$, удовлетвораващо аксиоми 1-6 съществува растяща квазивдлъбната функция на полезност U. Всяка растяща квазивдлъбната функция определя потребителско предпочитание, за което тя се явява функция на полезност.

Да отбележим, че за дадено потребителско предпочитание $\succcurlyeq$ **съответстващата функция на полезност не е единствена.** Нека $\widehat{U} = h(U)$ като $h(.)$ е монотонно растяща функция. Тогава, тъй като $\widehat{U}(x) \geq \widehat{U}(y) \Leftrightarrow U(x) \geq U(y) \Leftrightarrow x \succcurlyeq y$ функцията $\widehat{U}(x)$ ще бъде функция на полезност за същото предпочитание. От друга страна $\left|\overline{H}(\widehat{U})\right| = h'^3 |\overline{H}(U)|$, $\widehat{U}_1 = h'U_1, \widehat{U}_2 = h'U_2$, което показва, че $\widehat{U}(x)$ също е квазивдлъбната функция с положителни първи частни производни.

3. Неокласическа функция на полезност

Определение. Нека U е функция на полезност. Тогава i-тата първа частна производна U_i ще наричаме маргинална полезност (marginal utility) на i-тата стока от потребителския набор и ще бележим с $M_i U$.

Един от водещите представители на кардиналистката школа, немският икономист Херман Госен, на базата на емпирични изследвания на потребителските предпочитания е формулирал през 1854 г. **първия закон на Госен: маргиналната полезност на всяка стока не нараства с нарастването на количеството на стоката.** Математически, това означава, че за вторите частни производни е изпълнено условието $U_{ii} \leq 0$. Квазивдлъбната функция удовлетворяваща горното условие се нарича **неокласическа функция**. Функциите $U(x_i) = U\left(x_j = const : j \neq i\right)$ са вдлъбнати функции на една променлива и графиките им имат вида показан на Рис.6. Тези функции са функции на полезност на една стока, при положение, че другите стоки се потребяват във фиксирани количества. Очевидно, всяка вдлъбната

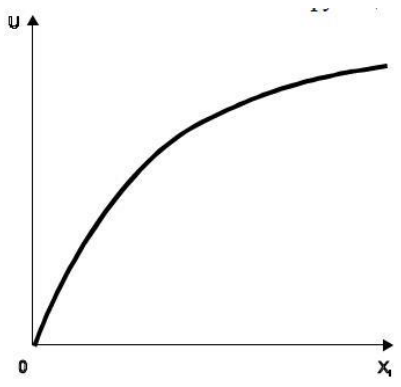


Рис.6. Графика на функция на полезност за една стока при неокласическа функция

функция е неокласическа. Има квазивдлъбнати функции, които не са от неокласически тип.

Пример. Мултипликативна функция. Разглеждаме функцията

$$U = a{x_1}^{b_1}{x_2}^{b_2}$$

За частните и производни получаваме

$$U_1 = ab_1{x_1}^{b_1-1}{x_2}^{b_2} \ , \qquad U_2 = ab_2{x_1}^{b_1}{x_2}^{b_2-1}$$

$$U_{11} = ab_1(b_1-1){x_1}^{b_1-2}{x_2}^{b_2},\ U_{12} = ab_1b_2{x_1}^{b_1-1}{x_2}^{b_2-1},$$
$$U_{22} = ab_2(b_2-1){x_1}^{b_1}{x_2}^{b_2-2}$$

Тогава, за хесиана $H(U)$ и обрамчения хесиан $\overline{H}(U)$ ще имаме

$$H(U) = a^2b_1b_2[1-(b_1+b_2)]{x_1}^{2b_1-2}{x_2}^{2b_2-2} \text{ и}$$

$$\overline{H}(U) = a^3b_1b_2(b_1+b_2){x_1}^{3b_1-2}{x_2}^{3b_2-2}$$

На базата на тези пресмятания получаваме, че мултипликативната функция е:

строго вдлъбната при $b_1 > 0, b_2 > 0$ и $b_1 + b_2 < 1$

вдлъбната при $b_1 > 0, b_2 > 0$ и $b_1 + b_2 \leq 1$

неокласическа при $0 < b_1 \leq 1$ и $0 < b_2 \leq 1$

квазивдлъбната (и то строго) при $b_1 > 0, b_2 > 0$

Вдлъбнатите, неокласическите и квазивдлъбнатите функции се различават по характера на сеченията, които повърхнините, които те задават образуват с два вида вертикални равнини:

- равнините $x_i = const, i = 1,2$
- равнините $x_1 : x_2 = const$

Тези различия са дадени в таблицата

Вид на функцията	Сечения с равнините $x_i = const, i = 1,2$	Сечения с равнините $x_1 : x_2 = const$
строго вдлъбната	строго вдлъбнати линии	строго вдлъбнати линии
нестрого вдлъбната	строго вдлъбнати линии	прави линии
строго неокласическа	строго вдлъбнати линии	изпъкнали линии
нестрого неокласическа	поне едната фамилия са прави линии	изпъкнали линии
квазивдлъбната	поне едната фамилия са изпъкнали линии	изпъкнали линии

Приликите между тези функции е във вида, който имат хоризонталните сечения $U = const$ (линиите на безразличие).

На рис.7. Са изобразени характерните сечения на: a) $U = {x_1}^{0,25}{x_2}^{0,25}$, b) $U = {x_1}^{0,5}{x_2}^{0,5}$, c) $U = {x_1}^{0,75}{x_2}^{0,75}$, d) $U = x_1x_2$, e) $U = {x_1}^{1,25}{x_2}^{1,25}$

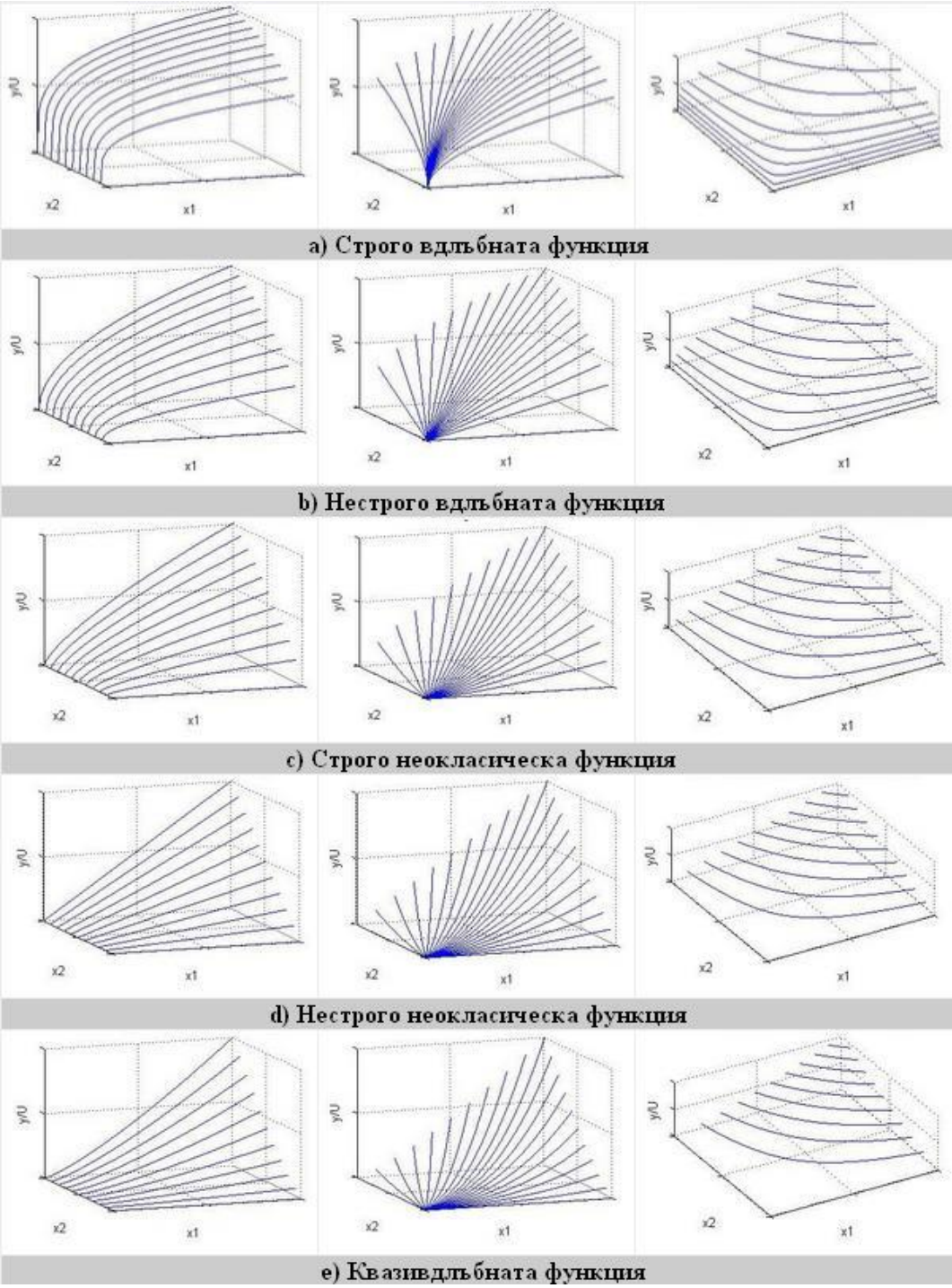


Рис.7. Характерни сечения на функции на полезност

Всички функции на полезност, чиито характерни сечения са изобразени на Рис.7. са на симетрични функции на полезност. На рис. 8. са дадени характерните сечения и графиката на несиметричната квазивдлъбната функция $U = {x_1}^{1,75}{x_2}^{0,25}$.

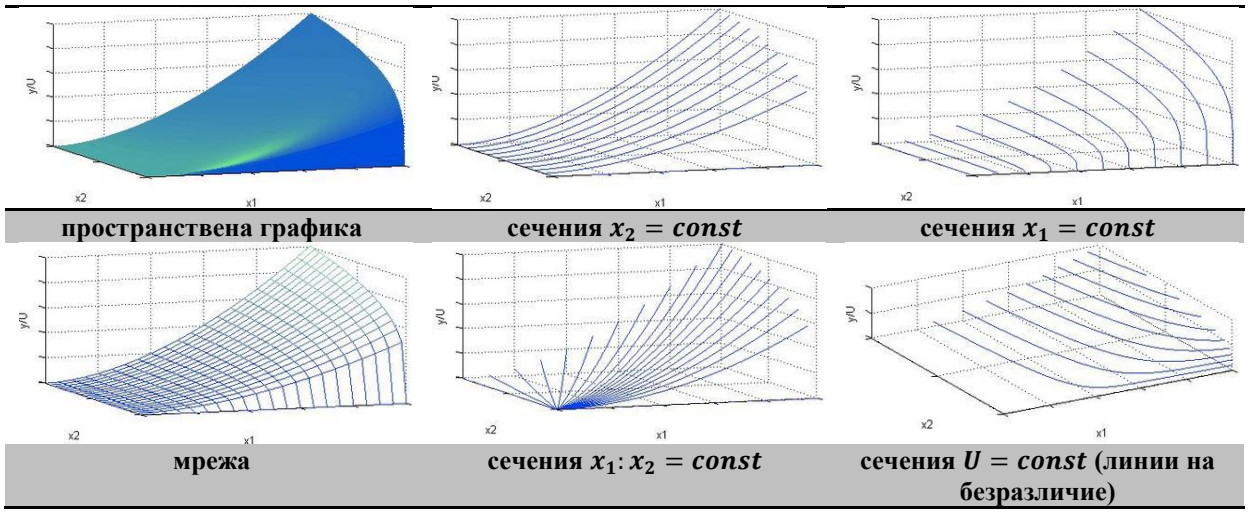


Рис.8. Несиметрична квазивдлъбната функция – характерни сечения

На Рис.9. е изобразена пространствената графика на типична мултипликативна функция на полезност $U = \sqrt{x_1 x_2}$ (която е нестрого вдлъбната). На равнинния чертеж е показана част от картата на безразличие, формирана от линиите на ниво $U = 4,6,8,10$.

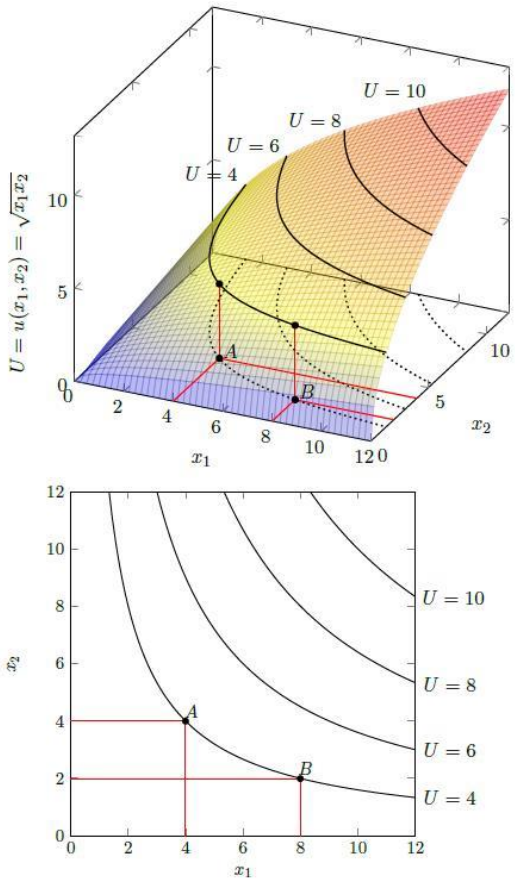


Рис.9. Пространствена графика на функция на полезност и линии на безразличие

Графиките на линиите на ниво за мултипликативните функции се наричат **квазихиперболи**, защото приличат на хиперболи.

Оказва се, че чрез монотонна трансформация с растяща функция h произволна квазивдлъбната функция U може да се трансформира до неокласическа и даже до вдлъбната функция $\widehat{U} = h(U)$ еквивалентна на U (т.е. съответстваща на същото потребителско предпочитание). Например, нека $U = {x_1}^2{x_2}^3$ е квазивдлъбната функция, която не е неокласическа. Ако $\widehat{U} = h(U) = \sqrt[6]{U}$, то $\widehat{U} = {x_1}^{\frac{1}{3}}{x_2}^{\frac{1}{2}}$ е неокласическа и дори

вдлъбната функция. При $\breve{U} = h(U) = \ln U$ получаваме $\breve{U} = 2\ln x_1 + 3\ln x_2$ която е също вдлъбната функция.

Примери за функции на полезност

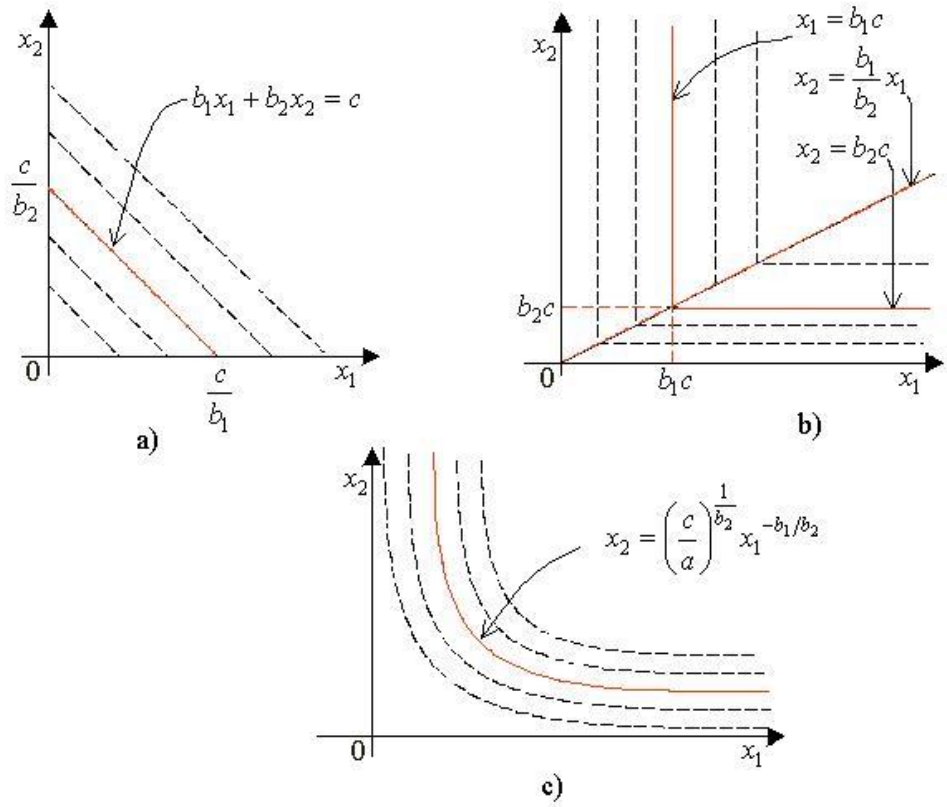


Рис.10. Линии на безразличе на: a) Линейна функция на полезност; b) Функция на полезност на Леонтиев; c) Мултипликативна функция на полезност

1. **Линейна функция на полезност** или функция на полезност за напълно взаимозаменяеми стоки. Видът и е

$$U(x) = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n$$

2. **Функция на полезност на Леонтиев** – нарича се още функция на полезност за напълно взаимодопълващи се стоки. Има вида

$$U(x) = min\left\{\frac{x_1}{b_1}, \frac{x_2}{b_2}, \dots, \frac{x_n}{b_n}\right\}$$

3. **Мултипликативна функция на полезност** или функция на полезност от Кооб-Дъгласов тип. При $n = 2$ видът и е

$$U(x) = a{x_1}^{b_1}{x_2}^{b_2}, b_1 > 0 \text{ и } b_2 > 0$$

При $b_1 + b_2 = 1$ тя се нарича функция на Кооб-Дъглас. На Рис.10. са изобразени линии на безразличие за тези три функции на полезност.

4. **Функция на полезност на Стоун**. Има вида (при $n = 2$)

$$U(x) = a(x_1 - c_1)^{b_1}(x_2 - c_2)^{b_2}$$

Тъй като $U(c_1, x_2) = U(x_1, c_2) = U(c_1, c_2) = 0$ за потребителското предпочитание, моделирано с тази функция на полезност се предполага, че c_1 и c_2 са минималните количества от стоките, необходими на потребителя.

5. **Обобщена мултипликативна функция**. Тъй като

$$U(x) = a(x_1 + c_1)^{b_1}(x_2 + c_2)^{b_2} \text{ и } U(x) = a(x_1 + c_1)^{b_1}(x_2 - c_2)^{b_2}$$

са функции на полезност, то можем да обобщим мултипликативната функция на полезност, функцията на полезност на Стоун и горните две функции на полезност чрез

$$U(x) = a(x_1 + \varepsilon_1 c_1)^{b_1}(x_2 + \varepsilon_2 c_2)^{b_2},\ \varepsilon_i = 0, +1, -1, i = 1,2$$

6. **Функция на полезност на Бернули** или логаритмична функция на полезност. Има вида (при $n = 2$)

$$U(x) = b_1 \ln(x_1 - c_1) + b_2 \ln(x_2 - c_2),\ b_i > 0, x_i \geq c_i, i = 1,2$$

Предложена е през 1738 г. от швейцарския математик Даниил Бернули като пръв опит за математическо моделиране на потребителските предпочитания. Лесно се вижда, че тя е еквивалентна на функцията на полезност на Стоун.

7. **Квазилинейна функция на полезност**. В случая, когато $n = 2$, тя има вида

$$U(x) = f(x_1) + x_2\ ,$$

където $f(x_1)$ е произволна растяща вдлъбната функция (т.е. неокласическа функция на полезност за една стока).

8. **Адитивна функция на полезност**. За $n = 2$ има вида

$$U(x) = f(x_1) + g(x_2),$$

като $f(x_1)$ и $g(x_2)$ са произволни растящи вдлъбнати функции. Такива функции на полезност са били използвани от основоположниците на количествената (кардиналистката) теория на потребителското поведение Уилям Джевонс и Леон Валрас, въз основа на допускането им, че полезностите на стоките са независими една от друга. Адитивната функция на полезност е обобщение на линейната, квазилинейната и бернулиевата функция на полезност.

4. Маргинална норма на заместване

Нека $U(x_1, x_2) = c$ е линия на безразличие на потребителско предпочитание, зададено с функцията на полезност U. Нека $x^0(x_1^0, x_1^0)$ и $x^0 + \Delta x(x_1^0 + \Delta x_1, x_1^0 + \Delta x_2)$ са две точки (два стокови набора) от тази линия на безразличие. Ясно е, че ако количеството от първата стока нараства ($\Delta x_1 > 0$) количеството от втората стока ще намалява ($\Delta x_2 < 0$) и обратното, така че $\Delta x_2/\Delta x_1 < 0$. **Норма на заместване** (rate of substitution) на втората стока с първата е величината

$$RS_{12} = -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \mid_{U=const} > 0,$$

която показва с колко единици трябва да намалее количеството на втората (заместваната) стока, ако количеството на първата (заместващата) стока е нарастнало с една единица, така че потребителя да запази нивото на полезност. **Маргинална норма на заместване** (marginal rate of substitution) е границата на нормата на заместване при $\Delta x \to 0$

$$MRS_{12} = \lim_{\Delta x \to 0} -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \mid_{U=const} = -\frac{dx_2}{dx_1} \mid_{U=const}$$

От формулата за пълния диференциал на U $dU = U_1 dx_1 + U_2 dx_2$ и $dU = 0$ върху линията на безразличие получаваме

$$MRS_{12} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{M_1 U}{M_2 U},$$

т.е. стоките се заместват в пропорция, обратна на маргиналните им полезности.

Ще бележим MRS_{12} съкратено S_{12}. Очевидно, ще имаме $S_{12}S_{21} = 1$.

Забележка. В случай, че линията на безразличие притежава участък, перпендикулярен на една от координатните оси, x^0 и $x^0 + \Delta x$ са от този участък, тогава $\Delta x_2 . \Delta x_1 = 0$, стоките не могат да се заместват и маргинална норма на заместване не може да се дефинира. Такъв е случая с функцията на полезност на Леонтиев.

Геометрична интерпретация. Гладката линия на ниво $U(x_1, x_2) = c$ на функцията U има допирателна във всяка точка $x^0(x_1^0, x_2^0)$. Ролята на нормален вектор на тази допирателна се изпълнява от градиента на U в точката - $gradU(x^0) = U'(x^0) = \big(U_1(x^0), U_2(x^0)\big)$. Тогава, в точка $x^0(x_1^0, x_2^0)$ уравнението на допирателната ще бъде

$$U'(x^0)(x - x^0) = 0 \text{ или в координати}$$

$$U_1(x_1^0, x_2^0)(x_1 - x_1^0) + U_2(x_1^0, x_2^0)(x_2 - x_2^0) = 0$$

Декартовото уравнение на допирателната е

$$x_2 = -\frac{U_1(x^0)}{U_2(x^0)}x_1 + \frac{a}{U_2(x^0)} = -S_{12}(x^0)x_1 + \frac{a}{U_2(x^0)}$$

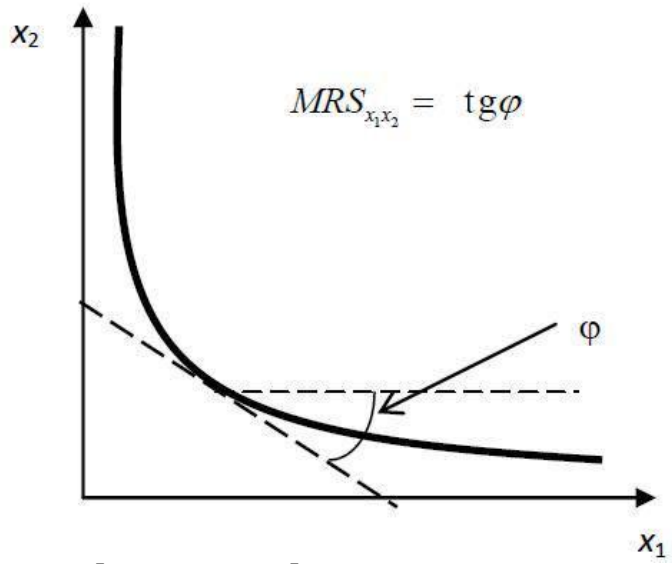


Рис.11. Геометрична интерпретация на маргиналната норма на заместване

където сме положили $a = U_1(x^0)x_1^0 + U_2(x^0)x_2^0$. Тъй като ъгловия коефициент $k = -S_{12}(x^0)$ тангенса на ъгъла, сключван от допирателната с абсцисата, то $S_{12}(x^0)$ е тангенса на допълнителния ъгъл. На рис.11. този ъгъл е означен с φ.

В случая, когато $U(x_1, x_2) = c$ е линия на безразличие $S_{12}(x^0)$ е тангенса на острия ъгъл между допирателната и абсцисата.

Пример. Разглеждаме потребителско предпочитание, зададено с функцията на полезност $U = x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}$ и потребителски набор $x^0 = (4,9)$. Тъй като $U(4,9) = 6$, то през точката x^0 минава линия на безразличие – квазихиперболата $x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} = 6$. Нормалният вектор към линията в произволна точка е $(U_1, U_2) = \left(\frac{1}{2}x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{-\frac{1}{2}}\right)$, а в точка x^0 - $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{3}\right)$. Тогава, уравнението на допирателната към линията в точка x^0 е

$$\frac{3}{4}(x_1 - 4) + \frac{1}{3}(x_2 - 9) = 0 \text{ или}$$

$$x_2 = -\frac{9}{4}x_1 + 8 = -S_{12}(x^0)x_1 + 8$$

Поради характера на линиите на безразличие с нарастването на x_1 ъгълът между допирателната и абсцисата намалява – валиден е **законът на намаляващата маргинална норма на заместване**: при стремеж за поддържане на постоянно ниво на полезност чрез заместване на малки количества от втората стока с малки количества от първата, субективното удовлетворение от новите количества на първата стока намалява с нарастването на количеството и. Този закон е следствие от първия закон на Госен: тъй като $S_{12} = \frac{U_1}{U_2}$, и с нарастването на x_1

количеството x_2 намалява, то според първия закон на Госен числителят на S_{12} намалява, а знаменателят – нараства.

В случай, когато става дума за различни предпочитания, формата на линиите на безразличие показва различни степени на желанието да се замени едната стока с другата. Нека линиите на безразличие за двама потребители по отношение на банани $(i = 1)$ и портокали $(i = 2)$ имат следния вид (рис.12.)

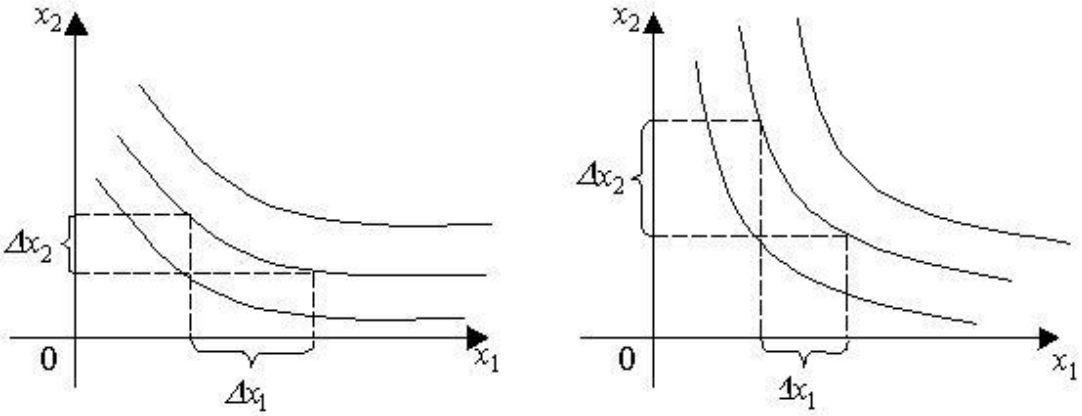


Рис.12. Маргинални норми на заместване за две различни предпочитания.

При първия потребител нормата на заместване на портокалите с банани е по-малка от единица и $|\Delta x_2| < \Delta x_1$, а при втория е обратното - $|\Delta x_2| > \Delta x_1$. В общия случай, ако линията на безразличие е по-стръмна спрямо една от осите, това ще означава, че тази стока е по-значима за потребителя – той ще я замества с по-големи количества от другата.

Пример. Да се пресметнат маргиналните норми на заместване S_{12} в произволна точка $x(x_1, x_2)$ за функциите на полезност: (1) $U = b_1x_1 + b_2x_2$; (2) $U = a{x_1}^{b_1}{x_2}^{b_2}$; (3) $U = b_1 \ln(x_1 - c_1) + b_2 \ln(x_2 - c_2)$; (4) $U = x_1 + 4\sqrt{x_2}$; (5) $U = \ln x_1 + 2\sqrt{x_2}$; (6) $U = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$; (7) $U = 10x_1 + 6x_2 + x_1x_2$; (8) $U = \frac{x_1x_2}{x_1+x_2}$.

Решение: (1) За линейната функция на полезност получаваме $S_{12} = \frac{b_1}{b_2} = const$; (2) за мултипликативната функция на полезност ще имаме $S_{12} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{ab_1{x_1}^{b_1-1}{x_2}^{b_2}}{ab_2{x_1}^{b_1}{x_2}^{b_2-1}} = \frac{b_1x_2}{b_2x_1}$; (3) за бернулиевата функция на полезност - $S_{12} = \frac{b_1(x_2-c_2)}{b_2(x_1-c_1)}$; (4) за квазилинейната функция на полезност - $S_{12} = \frac{\sqrt{x_2}}{2}$; (5) за адитивната функция на полезност - $S_{12} = \frac{\sqrt{x_2}}{x_1}$; (6) тази функция на полезност също е адитивна, получаваме $S_{12} = \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}$; (7) $S_{12} = \frac{10+x_2}{6+x_1}$; (8) $S_{12} = \frac{{x_2}^2}{{x_1}^2}$.

В случая, когато n е произволно, за да пресметнем маргиналната норма на заместване на j-тата стока с i-тата стока S_{ij}, трябва да фиксираме количествата на всички останали стоки. Тогава

$$S_{ij} = \lim_{\Delta x \to 0} -\frac{\Delta x_j}{\Delta x_i} \mid_{U=const} = -\frac{dx_j}{dx_i} \mid_{U=const} = \frac{U_i}{U_j} = \frac{M_i U}{M_j U} \text{ и}$$

$$S_{ij}.S_{ji} = 1$$

5. Модел на поведението на потребителя на стоковия пазар

Нека $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ са цените на стоките. Тогава, ако $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ са количествата им в един произволен стоков набор, то скаларното произведение $px = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n$ на ценовия вектор с количествения вектор е сумата, която потребителят изразходва, за да придобие набора x. Нека m е дохода на потребителя (бюджета, заделен за придобиването на тези стоки). Условието стойността на набора от стоки x да не надвиши бюджета m е

$$px = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n \leq m$$

Множеството от стокови набори, достъпни за потребителя

$$B(m, p) = \{x \in \mathbb{R}_+^{\boldsymbol{n}} / px \leq m\}$$

се нарича **бюджетно множество**, а границата му

$$L(m, p) = \{x \in \mathbb{R}_+^{\boldsymbol{n}} / px = m\}$$

бюджетна равнина.

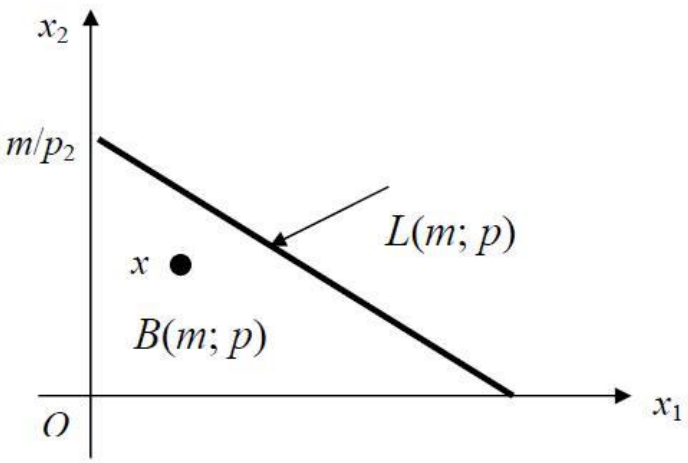


Рис.13. Бюджетно ограничение на потребителя

В случай, че $n = 2$ говорим за **бюджетната права** (рис.13.) $p_1x_1 + p_2x_2 = m$. Тя съединява точките $\left(\frac{m}{p_1}, 0\right)$ и $\left(0, \frac{m}{p_2}\right)$, получаващи се при похарчването на целия бюджет само за една от стоките. Ако варираме m, но запазваме цените $p = (p_1, p_2)$ ще получаваме бюджетни прави, успоредни помежду си. За всяка от тях ценовия вектор p

ще бъде нормален вектор. Ако за набора $x = (x_1, x_2)$ е похарчена сумата c_1 $(p_1x_1 + p_2x_2 = c_1)$ и $y = (y_1, y_2)$ е друг набор, за който $x \leq y$, освен това за y е похарчено c_2 $(p_1y_1 + p_2y_2 = c_2)$, то $c_1 \leq c_2$.

Сега можем да формулираме задачата, стояща пред потребителя на стоковия пазар. Съдържателно, основната задача се формулира така: какви количества от стоките трябва да закупи потребителя, за да удовлетвори максимално потребностите си, без да надвишава своя бюджет. Наред с тази задача, може да се формулира и друга: какви количества от стоките трябва да закупи потребителя, за да похарчи минимум средства, като постигне определена степен на удовлетвореност. Първата задача се нарича **основна задача** на потребителя, а втората – **дуална задача.** Двете задачи са взаимно дуални. От решенията на тези задачи ще се определя неговото оптимално поведение на стоковите пазари – така наречения потребителски избор.

На езика на потребителското предпочитание $\succcurlyeq$ формулировките на задачите изглеждат така: основна задача – да се намери най-предпочитания набор от бюджетното множество $B(m,p)$, т.е. $x^* \in B(m,p): x^* \succcurlyeq x$ за $\forall x \in B(m,p)$; дуална задача – да се намери намери най-евтиния набор от множеството на предпочитане $P_z = \{y \in \mathbb{R}^n_+ : y \succcurlyeq z\}$, т.е. $x^{**} \in P_z: px^{**} \leq px$ за $\forall x \in P_z$. Нека $U(x)$ е функция на полезност, съответстваща на предпочитанието $\succcurlyeq$. В термините на функциите на полезност формулировките на потребителските задачи изглеждат така:

основна задача: $\boldsymbol{U(x) \to \max}$	при $\boldsymbol{px \leq m}$
дуална задача: $\boldsymbol{px \to \min}$	при $\boldsymbol{U(x) \geq u}$

Това са задачи за условен екстремум с ограничения от тип неравенства. Ще решим тези задачи при $n = 2$. Първо ще покажем, че ограниченията лесно могат бъдат сведени до равенства. Нека да допуснем, че решението на основната задача $x^0({x_1}^0, {x_2}^0)$ е такова, че част от бюджета не е похарчен, т.е. $px^0 = p_1{x_1}^0 + p_2{x_2}^0 < m$. Съгласно свойството за ненаситеност $U(x_1, x_2) > U({x_1}^0, {x_2}^0)$ при $(x_1, x_2) > ({x_1}^0, {x_2}^0)$. Такива $x(x_1, x_2)$ ще могат да се намерят в бюджетното множество, което е противоречие с допускането, че $U({x_1}^0, {x_2}^0) \geq U(x_1, x_2)$ за $\forall x \in B(m,p)$. Така получихме, че **необходимо условие потребителят да постигне максимална полезност е да похарчи целия си бюджет**. Аналогично, и дуалната задача се свежда до задача за условен минимум с ограничение от тип равенство. Нека минималните разходи са достигнати при $x^0({x_1}^0, {x_2}^0)$, за което $U({x_1}^0, {x_2}^0) > u$. Тъй като при $(x_1, x_2) < ({x_1}^0, {x_2}^0)$ е изпълнено $p_1x_1 + p_2x_2 < p_1{x_1}^0 + p_2{x_2}^0$ и такива точки могат да се намерят в множеството на предпочитане $\{x(x_1, x_2): U(x_1, x_2) \geq u\}$, отново стигаме до противоречие.

Така показахме, че задачите на потребителя могат да се сведат до

основна задача: $\boldsymbol{U(x)} \to \mathbf{max}$	при $\boldsymbol{px} = \boldsymbol{m}$
дуална задача: $\boldsymbol{px} \to \mathbf{min}$	при $\boldsymbol{U(x)} = \boldsymbol{u}$

Тези задачи се решават по **метода на Лагранж** (за вариране на множителите). Образуваме функцията на Лагранж за основната задача

$$\mathcal{L}(x_1, x_2; \lambda) = U(x_1, x_2) + \lambda\big(m - p_1 x_1 - p_2 x_2\big)$$

Чрез диференциране на функцията на Лагранж по x_1, x_2 и λ получаваме **условията от първи ред**

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = U_1(x_1, x_2) - \lambda p_1 = 0 \Leftrightarrow U_1(x_1, x_2) = \lambda p_1$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = U_2(x_1, x_2) - \lambda p_2 = 0 \Leftrightarrow U_2(x_1, x_2) = \lambda p_2 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \Leftrightarrow p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$$

За да имаме максимум, трябва да е изпълнено и **условието от втори ред**

$$d^2\mathcal{L} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial {x_1}^2} d{x_1}^2 + 2\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial {x_2}^2} d{x_2}^2 < 0$$

където x_1 и x_2 са обвързани с условието $p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \Longrightarrow p_1 dx_1 + p_2 dx_2 = 0$. Тогава, като вземем под внимание и, че $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial {x_1}^2} = U_{11}$, $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_2} = U_{12}$ и $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial {x_2}^2} = U_{22}$, получаваме

$$d^2\mathcal{L} = \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 U_{11} - 2\frac{p_2}{p_1} U_{12} + U_{22}\right] d{x_2}^2$$

Сега, тъй като $\frac{p_2}{p_1} = \frac{U_2}{U_1}$

$$d^2\mathcal{L} = \left[\left(\frac{U_2}{U_1}\right)^2 U_{11} - 2\frac{U_2}{U_1} U_{12} + U_{22}\right] d{x_2}^2,$$

Тогава

$$d^2\mathcal{L} < 0 \Leftrightarrow 2U_1 U_2 U_{12} - U_1^2 U_{22} - U_2^2 U_{11} > 0$$

т.е. **основната задача на потребителя притежава еднозначно решение точно тогава, когато функцията на полезност е строго квазивдлъбната.**

При зададени цени p_1, p_2 и доход m (екзогенните величини за модела) след решаване на системата (1) получаваме равновесните стойности на количествата от стоките ${x_1}^*, {x_2}^*$ и множителя на Лагранж λ^*(ендогенните величини), за които е в сила:

$$U_1({x_1}^*, {x_2}^*) = \lambda^* p_1\ ,\ \ U_2({x_1}^*, {x_2}^*) = \lambda^* p_2\ , \qquad p_1 {x_1}^* + p_2\, {x_2}^* = m \qquad (2)$$

По аналогичен начин се решава и дуалната задача. Образуваме нейната функция на Лагранж

$$\mathcal{L}(x_1, x_2; \mu) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \mu\big(u - U(x_1, x_2)\big)$$

Условията от първи род за тази функция на Лагранж са следните

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = p_1 - \mu U_1(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow p_1 = \mu U_1(x_1, x_2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = p_2 - \mu U_2(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow p_2 = \mu U_2(x_1, x_2) \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = u - U(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow U(x_1, x_2) = u$$

По аналогичен начин се убеждаваме, че условието от втори род $d^2\mathcal{L} > 0$ е изпълнено при строга квазивдлъбнатост на функцията $U(x_1, x_2)$. Тогава, при задаване на стойностите на екзогенните величини p_1, p_2 и u ще получим равновесните значения на ендогенните величини за модела ${x_1}^{**}, {x_2}^{**}$ и μ^{**}, за които е в изпълнено

$$p_1 = \mu^{**} U_1({x_1}^{**}, {x_2}^{**})\ , \qquad p_2 = \mu^{**} U_2({x_1}^{**}, {x_2}^{**})\ , \qquad U({x_1}^{**}, {x_2}^{**}) = u \quad (4)$$

Да отбележим, че намирайки решенията на основната и дуалната задача можем да пресметнем както максималната полезност, достигната от потребителя, максимализиращ полезността, така и минималните разходи на потребителя, минимализиращ бюджета си

$$u^* = U({x_1}^*, {x_2}^*) \text{ за основната задача и } c^{**} = p_1 {x_1}^{**} + p_2 {x_2}^{**} \text{ за дуалната}$$

В случай на произволно n еавновесните условия (2) и (4) добиват вида

$$\frac{U_1(x^*)}{p_1} = \frac{U_2(x^*)}{p_2} = \cdots = \frac{U_n(x^*)}{p_n} = \lambda^*\ , \qquad px^* = m \qquad (5)$$

$$\frac{p_1}{U_1(x^{**})} = \frac{p_2}{U_2(x^{**})} = \cdots = \frac{p_n}{U_n(x^{**})} = \mu^{**}, \qquad U(x^{**}) = u \qquad (6)$$

Изводи:

1) Равенството

$$\frac{U_1}{p_1} = \frac{U_2}{p_2} = \lambda \quad \text{или} \quad \frac{M_1U}{p_1} = \frac{M_2U}{p_2} = \lambda$$

показва, че за оптималния набор е характерно изравняването на отношението на маргиналната полезност към цената за всички стоки от набора. Множителят на Лагранж може да се интерпретира като маргинална полезност на похарчените пари. Тогава можем да кажем, че в условие на оптимален избор, потребителят разпределя бюджета си така, че маргиналната полезност на похарчените пари е еднаква за всички стоки. В икономиката това свойство носи името **втори закон на Госен.** В случай на неокласическа функция на полезност, вторият закон на Госен е следствие от първия. И наистина, нека

$$\frac{U_1(x_1, x_2)}{p_1} > \frac{U_2(x_1, x_2)}{p_2}$$

Тогава потребителят ще има по-голяма полза от похарчването на допълнителни пари за първата стока, отколкото за втората. Следователно, за да увеличи полезността си, той ще увеличава количеството от първата стока за сметка на намаляване количеството на втората. Но тогава, според първия закон на Госен $U_1(x_1, x_2)$ ще намалява, а $U_2(x_1, x_2)$ ще расте. Така маргиналните полезности на похарчените пари за двете стоки ще се изравняват и ще се достигне до нивото на максимална полезност на потребителя.

2) Тъй като маргиналната норма на заместване на втората стока с първата е равна на частното на маргиналните полезности на първата и втората стока, а в условие на оптимален избор е изпълнено

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{p_1}{p_2} \quad \text{или} \quad \frac{M_1U}{M_2U} = \frac{p_1}{p_2}$$

получаваме, че същата маргинална норма на заместване е равна на отношението на цените на стоките, т.е.

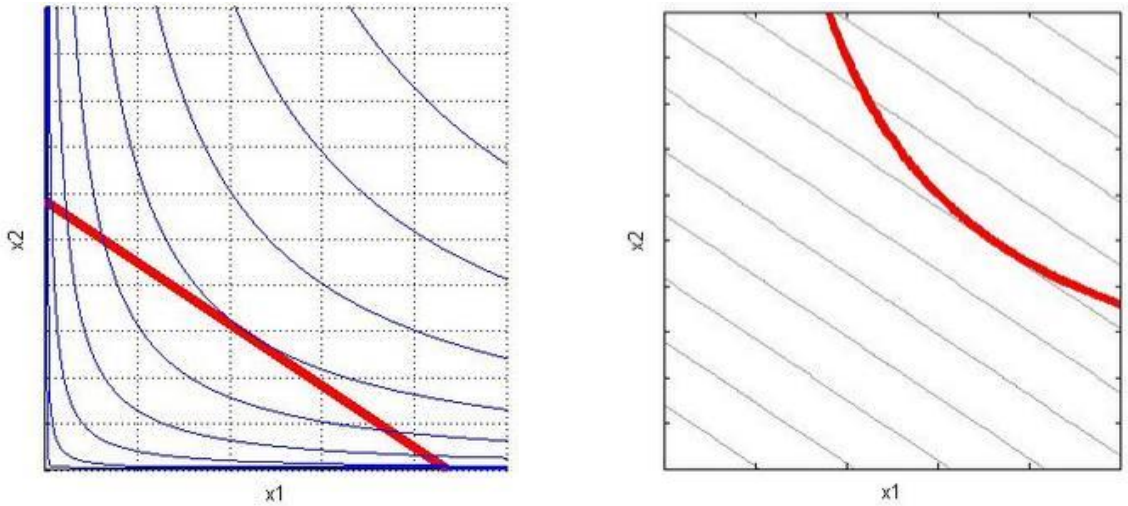
$$S_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i} \Big|_{U=const} = \frac{p_i}{p_j}$$

Тогава, за решението на дуалната задача можем да кажем, че върху линията на безразличие $U(x_1, x_2) = u$ потребителят избира (единствената) точка, в която маргиналната норма на заместване е равна на отношението на цените на стоките.

3) **Геометрична интерпретация**. Ценовия вектор $p(p_1, p_2, \dots, p_n)$ е нормален вектор за бюджетната равнина (права при $n = 2$) във всяка нейна точка. От друга страна, градиентът $U'(x) = gradU(x) = \left(U_1(x), U_2(x), \dots, U_n(x)\right)$ е нормален вектор за повърхнината (линията) на безразличие в произволна нейна точка. В точките на равновесие за двете задачи е изпълнено

$$U'(x) = \lambda p \text{ за основната задача и } p = \mu U'(x) \text{ за дуалната,}$$

т.е. ценовият вектор и градиентът са колинеарни. Тогава можем да кажем, че в условие на оптимален избор потребителят избира такива точки от пространството на стоките, в които бюджетната равнина (права) е допирателна равнина (права) към повърхнината (линията) на безразличие. На рис.14. са показани геометричните интерпретации на решенията на основната и дуалната задача.



Геометрична интерпретация на решението на основната задача	Геометрична интерпретация на решението на дуалната задача

Рис.14

При основната задача е фиксирана бюджетната права $p_1x_1 + p_2x_2 = m$, тогава измежду линиите на безразличие $U(x_1, x_2) = \alpha, \alpha > 0$ ние избираме тази, за която бюджетната права е допирателна. При дуалната задача е фиксирана линията на безразличие $U(x_1, x_2) = u$ и от всички бюджетни прави $p_1x_1 + p_2x_2 = \beta, \beta > 0$ се избира тази, която е допирателна към линията на безразличие.

4) **Линия на оптимално разпределение на стоките**. Условието $\frac{U_1}{p_1} = \frac{U_2}{p_2} = \dots = \frac{U_n}{p_n}$ е общо за решенията на двете задачи. То се нарича **условие за оптимално**

разпределение на (количествата от) стоките. Тъй като то представлява $(n-1)$ уравнения за n неизвестни - $x_1, x_2, \dots, x_n$, точките $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$ които го удовлетворяват ще задават гладка линия в $\mathbb{R}_+^n$ – линия на оптимално разпределение на стоките. Всички решения на основната задача x^* ще се получават от пресичането на тази линия с всевъзможните бюджетни равнини (успоредни помежду си), а решенията на дуалната задача x^{**} - от пресичането на линията с всевъзможните повърхнини на безразличие.

Принцип на дуалност в потребителската теория. Нека да разгледаме двете задачи на потребителя

$$\text{основна: } U(x) \to \max \text{ при } px = m \text{ и дуална: } px \to \min \text{ при } U(x) = u$$

Ако максималната полезност, която се достига при решаването на основната задача е u (ограничението на дуалната задача), то минималният бюджет, получаващ се при решаване на дуалната задача е m (ограничението на основната задача) и обратното. Освен това, решенията на двете задачи съвпадат, т.е.

$$x_1{}^* = x_1{}^{**} \text{ и } x_2{}^* = x_2{}^{**}$$

Функции на потребителското търсене. При решаването на основната потребителска задача се предполагаше, че цените p_1, p_2 и бюджетът m са екзогенни величини – конкретни числа или евентуално параметри. Тогава от решението на модела се получиха количествата на стоките $x_1{}^*, x_2{}^*$, такивая, че потребителят да получи максимална полезност. Ако приемем обаче, че p_1, p_2 и m са независими променливи, то за всека тройка (p_1, p_2, m) ще се получават стойности за x_1 и x_2. Така, в условие на потребителски избор, максимализиращ полезността се получават **маршаловите функции на потребителско търсене**

$$x_1{}^M = x_1{}^M(p_1, p_2, m) \text{ и } x_2{}^M = x_2{}^M(p_1, p_2, m), \text{ такива че}$$

$$U(x_1{}^M, x_2{}^M) = U_{max} \text{ и } p_1 x_1{}^M + p_2 x_2{}^M = m$$

По аналогичен начин от решението на дуалната задача се определят **хиксовите функции на потребителско търсене**

$$x_1{}^H = x_1{}^H(p_1, p_2, u) \text{ и } x_2{}^H = x_2{}^H(p_1, p_2, u), \text{ такива че}$$

$$p_1 x_1{}^H + p_2 x_2{}^H = (p_1 x_1 + p_2 x_2)_{min} \text{ и } U(x_1{}^H, x_2{}^H) = u$$

Очевидно, ще са изпълнени равновесните условия

$$\frac{U_1(x_1{}^M, x_2{}^M)}{p_1} = \frac{U_2(x_1{}^M, x_2{}^M)}{p_2} \text{ и } \frac{U_1(x_1{}^H, x_2{}^H)}{p_1} = \frac{U_2(x_1{}^H, x_2{}^H)}{p_2}$$

Тези функции на търсене носят имената на двамата забележителни икономисти, поставили важни икономически закони на математическа основа – англичаните Алфред Маршал (1842-1924) и Джон Хикс (1904-1989).

Функция на относителна полезност – получава се, когато във функцията на полезност заместим аргумента $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с маршаловите функции на търсене. Тогава ще имаме

$$V(p,m) = U\big(x^M(p,m)\big) = \max_{x:px\le m} U(x)$$

Функция на потребителските разноски – получава се, когато в $px = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_1x_n$ аргумента $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$ се замести с хиксовите функции на търсене, т.е.

$$e(p,u) = px^H(p,u) = \min_{x:U(x)\ge u} px$$

Пример. Да разгледаме потребителско предпочитание, зададено с мултипликативна функция на полезност $U = a{x_1}^{b_1}{x_2}^{b_2}$. Условието за оптимално разпределение на стоките (според полезността и цените) в този случай е:

$$\frac{b_1x_2}{b_2x_1} = \frac{p_1}{p_2} \Longrightarrow \frac{p_2x_2}{p_1x_1} = \frac{b_2}{b_1}$$

В случай на набори от n стоки ще имаме

$$p_1x_1 : p_2x_2 : \dots : p_nx_n = b_1 : b_2 : \dots : b_n$$

Така получаваме, че **потребителят, чиято функция на полезност е мултипликативна, разпределя бюджетите си за покупка на отделните стоки** (в условие на оптимален избор) **в същото отношение, което имат степенните им показатели.**

Пример. Да се намерят маршаловите функции на търсене, функцията на относителна полезност, хиксовите функции на търсене и функцията на потребителски разноски за потребител, чиято функция на полезност е: (1) $U = a{x_1}^{b_1}{x_2}^{b_2}, b_1 + b_2 = 1$; (2) $U = (x_1 - c_1)^{b_1}(x_2 - c_2)^{b_2}, b_1 + b_2 = 1$; (3) $U = x_1 + 4\sqrt{x_2}$; (4) $U = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$; (5) $U = x_1 + x_1x_2$; (6) $U = \frac{x_1x_2}{x_1+x_2}$.

Решение. (1) За функцията на полезност на Кооб-Дъглас условието за оптимално разпределение на стоките е $\frac{x_1p_1}{x_2p_2} = \frac{b_1}{b_2}$, откъдето $x_2 = \frac{p_1}{p_2}\frac{b_2}{b_1}x_1$ (това условие е изпълнено както за маршаловите, така и за хиксовите функции на търсене). Като заместим x_2 в бюджетното ограничение $p_1x_1 + p_2x_2 = m$ за x_1

намираме $x_1 = \frac{b_1}{p_1}m$, а за x_2 - $x_2 = \frac{b_2}{p_2}m$. Да отбележим, че от тук нататък с x_1 и x_2 ще бележим маршаловите функции на търсене ${x_1}^M$ и ${x_2}^M$. Като заместим получените маршалови функции на тъсене в израза за функцията на полезност, получаваме функцията на относителна полезност $V = am\left(\frac{b_1}{p_1}\right)^{b_1}\left(\frac{b_2}{p_2}\right)^{b_2}$. Полученият израз за x_2 чрез x_1 заместваме в ограничителното условие на дуалната задача $U(x_1, x_2) = u$ и намираме хиксовата функция на търсене на първата стока - ${x_1}^H = \frac{u}{a}\left(\frac{p_2 b_1}{p_1 b_2}\right)^{b_2}$, а след това и ${x_2}^H = \frac{u}{a}\left(\frac{p_1 b_2}{p_2 b_1}\right)^{b_1}$. За да намерим функцията на потребителските разоски заместваме получените ${x_1}^H$ и ${x_2}^H$ във формулата $e = p_1{x_1}^H + p_2{x_2}^H$ и получаваме $e = \frac{u}{a}\left(\frac{p_1}{b_1}\right)^{b_1}\left(\frac{p_2}{b_2}\right)^{b_2}$. За отбелязване е, че за Кооб-Дъгласовата функция на полезност получихме тъждеството $V(p, m)e(p, u) = mu$.

(2) За функцията на полезност на Стоун получаваме условие за оптимално разпределение на стоките, аналогично на това при функцията на Кооб-Дъглас - $\frac{p_1(x_1 - c_1)}{p_2(x_2 - c_2)} = \frac{b_1}{b_2}$, от което ще имаме $x_2 = c_2 + \frac{p_1 b_2}{p_2 b_1}(x_1 - c_1)$. След заместване в бюджетното ограничение намираме маршаловата функция на търсене на първата стока - $x_1 = \frac{b_1}{p_1}(m - p_1 c_1 - p_2 c_2) + c_1$, а оттам на втората - $x_2 = \frac{b_2}{p_2}(m - p_1 c_1 - p_2 c_2) + c_2$. Това изисква предварително да е изпълнено условието $m > p_1 c_1 + p_2 c_2$. Като заместим намерените x_1 и x_2 във функцията на полезност, намираме функцията на относителна полезност - $V = \left(\frac{b_1}{p_1}\right)^{b_1}\left(\frac{b_2}{p_2}\right)^{b_2}(m - p_1 c_1 - p_2 c_2)$. След заместването на $x_2 = c_2 + \frac{p_1 b_2}{p_2 b_1}(x_1 - c_1)$ в $U(x_1, x_2) = u$ намираме ${x_1}^H = c_1 + u\left(\frac{p_2 b_1}{p_1 b_2}\right)^{b_2}$ и ${x_2}^H = c_2 + u\left(\frac{p_1 b_2}{p_2 b_1}\right)^{b_1}$. За да намерим функцията на потребителските разноски, заместваме ${x_1}^H$ и ${x_2}^H$ във формулата за $e(p, u)$ и получаваме $e = p_1 c_1 + p_2 c_2 + u\left(\frac{p_1}{b_1}\right)^{b_1}\left(\frac{p_2}{b_2}\right)^{b_2}$.

(3) За квазилинейната функция на полезност условието за оптимално разпределение на стоките е $S_{12} = \frac{\sqrt{x_2}}{2} = \frac{p_1}{p_2}$, откъдето получаваме . Характерно за всички квазилинейни функции на полезност е, че маршаловата функция на търсене за квазилинейната променлива не зависи от дохода. След заместване на намереното x_2 в бюджетното уравнение, намираме и другата маршалова функция на търсене - $x_1 = \frac{m}{p_1} - 4\frac{p_1}{p_2}$. Необходимостта от неотрицателност на x_1 налага ограничение върху екзогенните величини $m \geq \frac{4{p_1}^2}{p_2}$. Това ни позволява да

намерим функцията на относителна полезност $V = \frac{m}{p_1} + 4\frac{p_1}{p_2}$. Ясно е, че хиксовата функция за квазилинейната променлива е същата - ${x_2}^H = \frac{4{p_1}^2}{{p_2}^2}$. Като заместим в ограничението за полезността, намираме ${x_1}^H = u - 8\frac{p_1}{p_2}$, от чиято неотрицателност виждаме, че $u \geq 8\frac{p_1}{p_2}$. За функцията на потребителските разноски получаваме $e = p_1 u - \frac{4{p_1}^2}{p_2}$.

(4) Условието за оптимално разпределение на стоките $S_{12} = \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}} = \frac{p_1}{p_2}$ води до връзката между количествата на стоките във всеки оптимален набор $x_2 = \frac{{p_1}^2}{{p_2}^2} x_1$. За маршаловите функции на търсене получаваме $x_1 = \frac{mp_2}{p_1(p_1+p_2)}$ и $x_2 = \frac{mp_1}{p_2(p_1+p_2)}$, а за функцията на относителна полезност $V = \frac{\sqrt{m(p_1+p_2)}}{\sqrt{p_1}+\sqrt{p_2}}$. като използваме, че $x_2 = \frac{{p_1}^2}{{p_2}^2} x_1$ е валидно и при хиксовите функции на търсене, получаваме ${x_1}^H = \frac{u^2{p_2}^2}{(p_1+p_2)^2}$ и ${x_2}^H = \frac{u^2{p_1}^2}{(p_1+p_2)^2}$. За функцията на потребителски разноски ще имаме $e = \frac{u^2 p_1 p_2}{(p_1+p_2)}$.

(5) Отговор. $x_1 = \frac{m+p_2}{2p_1}$, $x_2 = \frac{m-p_2}{2p_2}$ за $m \geq p_2$, $V = \frac{(m+p_2)^2}{4p_1p_2}$; ${x_1}^H = \sqrt{\frac{up_2}{p_1}}$, ${x_2}^H = \sqrt{\frac{up_1}{p_2}} - 1$; $e = 2\sqrt{up_1p_2} - p_2$.

(6) Отговор. $x_1 = \frac{m}{\sqrt{p_1}(\sqrt{p_1}+\sqrt{p_2})}$, $x_2 = \frac{m}{\sqrt{p_2}(\sqrt{p_1}+\sqrt{p_2})}$, $V = \frac{m}{(\sqrt{p_1}+\sqrt{p_2})^2}$, ${x_1}^H = u\frac{\sqrt{p_1}+\sqrt{p_2}}{\sqrt{p_1}}$, ${x_2}^H = u\frac{\sqrt{p_1}+\sqrt{p_2}}{\sqrt{p_2}}$, $e = u\left(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2}\right)^2$. За отбелязване е, че и при тази функция на полезност се получава тъждеството $V(p,m)e(p,u) = mu$.

6. Сравнителна статика в теория на потреблението

В основната задача на потребителя екзогенни величини са цените на стоките p и бюджета на потребителя m , а ендогенни – маршаловите функции на търсене x^M и функцията на относителна полезност V. В дуалната задача екзогенни са p и u, а ендогенни – хиксовите функции на търсене x^H и функцията на потребителски разноски e. В предишния параграф се предполагаше, че екзогенните величини са числа или параметри, в резултат от решението на двата модела се получават стойностите на ендогенните величини. В сравнителната статика се предполага, че екзогенните величини са вече независими променливи, в резултат на това ендогенните величини се разглеждат като функции от тези променливи. т.е. ще

имаме: $x^M = x^M(p,m)$, $V = V(p,m)$, $x^H = x^H(p,u)$, $e = e(p,m)$. Предмет на сравнителната статика е изучаване на реакцията, която имат ендогенните величини при изменението на екзогенните.

Линия доход – потребление. Линия на Енгел. Разглеждаме основната задача на потребителя при $n = 2$, като предполагаме, че цените p_1 и p_2 са фиксирани, а доходът m е променлива величина. Тогава решението на тази задача, маршаловите функции на търсене ще зависят само от m. Геометрично картината в ${\mathbb{R}_+}^2$ с абсциса x_1-оста и ордината x_2-оста изглежда така: при различните стойности на $m \in \mathcal{D}_m \subset \mathbb{R}_+$ бюджетните прави ще бъдат успоредни помежду си – всички те ще имат за нормален вектор ценовия вектор $p(p_1, p_2)$. За всяка от тези прави ще съществува единствена линия на безразличие, на която бюджетната права да е допирателна. Като съединим всевъзможните точки на допиране на бюджетните прави с линиите на безразличие получаваме лията доход – потребление. Очевидно, това е линията на оптимално разпределение на стоките. Върху тази линия се реализира взаимно-еднозначно съответствие, при което на всяко $m \in \mathcal{D}_m \subset \mathbb{R}_+$ се съпоставя $x^M(m) = \big(x_1(m), x_2(m)\big) \in {\mathbb{R}_+}^2$. Ако в ${\mathbb{R}_+}^2$ с абсциса x_1-оста и ордината m-оста се нанесът всички точки $(x_1(m), m)$ за всевъзможните стойности на $m \in \mathcal{D}_m \subset \mathbb{R}_+$ ще получим графиката на функцията ${x_1}^M = x_1(m)$ – линия на Енгел за първата стока от набора. На Рис.15. (горния чертеж) са избрани три различни бюджета $m^B < m^C < m^D$ и са построени бюджетните прави, съответстващи на тях. Показани са трите линии на безразличие, за които тези прави са допирателни; точките $B({x_1}^B, {x_2}^B), C({x_1}^C, {x_2}^C)$ и $D({x_1}^D, {x_2}^D)$ са съответните точки на допиране. От съединяването на тези точки (и на всички, получаващи се по този начин) се получава линията доход – потребление. На долния чертеж е построена линията на Енгел за първата стока, като са съединени точките с координати $({x_1}^B, m^B), ({x_1}^C, m^C)$ и $({x_1}^D, m^D)$. За отбелязване е, че на Рис.15. и двете линии са наклонени под остър ъгъл

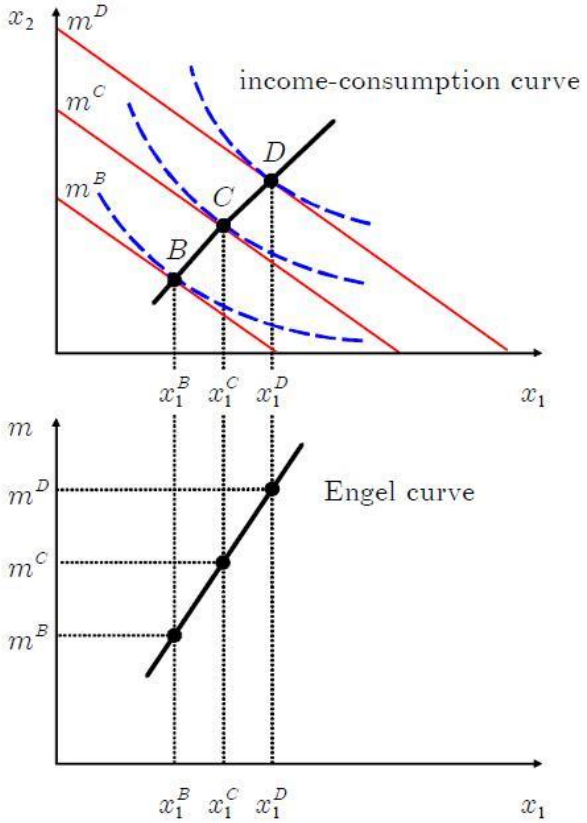


Рис.15. Линия доход - потребление и линия на Енгел

към координатните оси – това е така, защото и двете функции $x_1(m), x_2(m)$ са растящи. (Наклоните на една линия $\left(x_1(m), x_2(m)\right)$ към координатните оси се измерва с ъглите, които сключва допитателната и с осит, а те са - $\gamma_1 = arctg\frac{x_1{}'}{x_2{}'}$ и $\gamma_2 = arctg\frac{x_2{}'}{x_1{}'}$ съответно с x_1-оста и x_2-оста)

Пример. За функциите на полезност, разгледани в предишния параграф имаме: (1) $\boldsymbol{x_1} = \frac{b_1}{p_1}\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{x_2} = \frac{b_2}{p_2}\boldsymbol{m}$ като $\boldsymbol{m} > 0$; (2) $\boldsymbol{x_1} = \frac{b_1}{p_1}(\boldsymbol{m} - p_1c_1 - p_2c_2) + c_1$, $\boldsymbol{x_2} = \frac{b_2}{p_2}(\boldsymbol{m} - p_1c_1 - p_2c_2) + c_2$, като $\boldsymbol{m} > p_1c_1 + p_2c_2$; (3) $\boldsymbol{x_1} = \frac{\boldsymbol{m}}{p_1} - 4\frac{p_1}{p_2}$, $\boldsymbol{x_2} = \frac{4{p_1}^2}{{p_2}^2}$ като $\boldsymbol{m} \geq \frac{4{p_1}^2}{p_2}$; (4) $\boldsymbol{x_1} = \frac{\boldsymbol{m}p_2}{p_1(p_1+p_2)}$, $\boldsymbol{x_2} = \frac{\boldsymbol{m}p_1}{p_2(p_1+p_2)}$ като $\boldsymbol{m} > 0$; (5) $\boldsymbol{x_1} = \frac{\boldsymbol{m}+p_2}{2p_1}$, $\boldsymbol{x_2} = \frac{\boldsymbol{m}-p_2}{2p_2}$ като $\boldsymbol{m} \geq p_2$; (6) $x_1 = \frac{\boldsymbol{m}}{\sqrt{p_1}(\sqrt{p_1}+\sqrt{p_2})}$, $x_2 = \frac{\boldsymbol{m}}{\sqrt{p_2}(\sqrt{p_1}+\sqrt{p_2})}$ като $\boldsymbol{m} > 0$.

Ясички линии доход – потребление са прави линии – в (3) правата е успоредна на абсцисата, а в останалите случаи – наклонен под остър ъгъл и към двете оси. Вижда се, че с едно изключение всички маршалови функции на търсене от примера са растящи функции от дохода. Това изключение е в (3) $\boldsymbol{x_2} = \frac{4{p_1}^2}{{p_2}^2} = const$,т.е. нелинейната променлива от квазилинейната функция на полезност има маршалова функция, независеща от дохода. В общия случай, обаче са има три възможности:

- Потреблението на стоката да се увеличава с нарастването на дохода - $\frac{\partial {x_i}^M}{\partial m} > 0$ – стоката се нарича ценна;
- Потреблението на стоката да намалява с нарастването на дохода - $\frac{\partial {x_i}^M}{\partial m} < 0$ – стоката се нарича малоценна или стока от първа необходимост;
- Потреблението на стоката да не зависи от дохода - $\frac{\partial {x_i}^M}{\partial m} = 0$ – стоката се нарича стока от втора необходимост.

Възможно е потреблението на една стока да нараства с нарастване на дохода при ниски стойности на последния, а при по-високи да има обратното поведение. С други думи: бедните потребители възприемат стоката като предмет на разкош, а богатите – като стока от първа необходимост.

Линия цена – потребление. Линия на търсене. Сега разглеждаме основната задача на потребителя, но с предположението, че p_2 и m са фиксирани, а p_1 е променлива. Тъй като бюджетната права пресича координатните оси в точките $\left(\frac{m}{p_1}, 0\right)$ и $\left(0, \frac{m}{p_2}\right)$, то при варирането на p_1 ще получим фамилия от прави,

минаващи през фиксираната точка $\left(0, \frac{m}{p_2}\right)$. За всяка от правите от тази фамилия ще съществува единствена линия на безразличие, за която правата ще е допирателна. От съединяването на всички точки на допиране на бюджетните прави с линиите на безразличие се получава линията цена – потребление. Върху тази линия се реализира взаимно-еднозначно съответствие, при което на всяко $p_1 \in \mathbb{R}_+$ се съпоставя $x^M(p_1) = \left(x_1(p_1), x_2(p_1)\right) \in {\mathbb{R}_+}^2$. Ако в ${\mathbb{R}_+}^2$ с абсциса x_1-оста и ордината p_1-оста се нанесът всички точки $(x_1(p_1), p_1)$ за всевъзможните стойности на $p_1 \in \mathbb{R}_+$ ще получим графиката на функцията ${x_1}^M = x_1(p_1)$ – линия на търсене от собствената цена (D-линия) за първата стока от набора. На Рис.16. (горния чертеж) са избрани три различни стойности за p_1 - ${p_1}^B > {p_1}^C > {p_1}^D$; построени са съответните бюджетни прави и линиите на безразличие, за които тези прави са допирателни; точките $B({x_1}^B, {x_2}^B), C({x_1}^C, {x_2}^C)$ и $D({x_1}^D, {x_2}^D)$ са съответните точки на допиране. От съединяването на тези точки (и на всички, получаващи се по този начин) се получава линията цена – потребление. За отбелязване е, че тъй като във всяка точка от линията (например в точка D) е изпълнено условието $\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{{p_1}^D}{p_2}$ (освен това $\gamma_1 = arctg\frac{dx_1}{dx_2} = arctg\left(-\frac{p_2}{{p_1}^D}\right) \Longrightarrow \gamma_1 \in (90^o, 180^o)$), то линията цена – потребление е наклонена под тъп ъгъл към абсцисата. На долния чертеж е построена линията на търсене за първата стока, като са съединени точките с координати $({x_1}^B, {p_1}^B), ({x_1}^C, {p_1}^C)$ и $({x_1}^D, {p_1}^D)$.

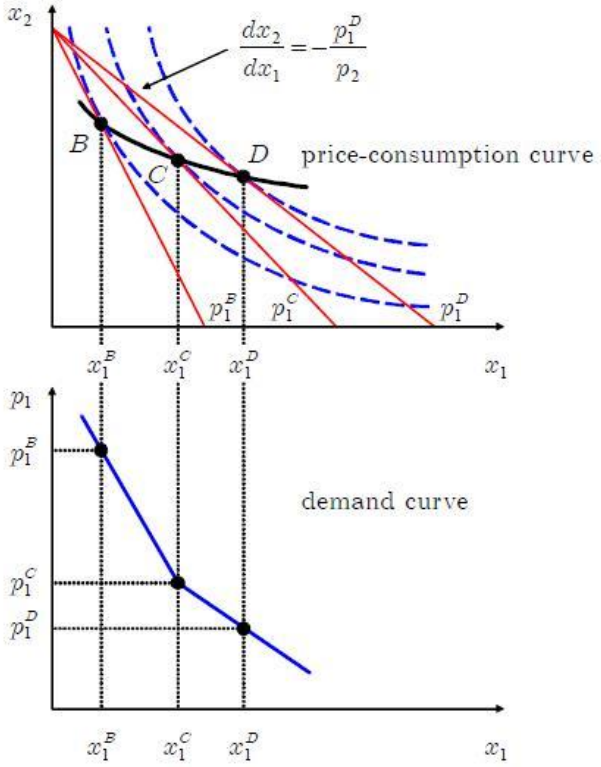


Рис.16. Линия цена - потребление и линия на търсене от собствената цена

Теоретично за маршаловата функция на търсене на една стока като функция на собствената и цена са възможни два случая:

- Тя да е ненарастваща функция от цената - $\frac{\partial {x_i}^M}{\partial p_i} \leq 0$, тогава стоката се нарича нормална стока;

- Тя да е нарастваща функция от цената - $\frac{\partial x_i{}^M}{\partial p_i} > 0$, тогава стоката се нарича стока на Гифен;

Разбира се, на практика повече от стоките са нормални, стоките на Гифен са незначително изключение, затова се говори за парадокс на Гифен. В примера от предишния параграф може да се види, че всички стоки са нормални.

Така показахме характерните линии, породени от маршаловите функции на една променлива $\boldsymbol{x_1}^{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{m}) = \boldsymbol{x_1}^{\boldsymbol{M}}(p_1 = const, p_2 = const, \boldsymbol{m})$ и $\boldsymbol{x_1}^{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{p_1}) = \boldsymbol{x_1}^{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{p_1}, p_2 = const, m = const)$. По аналогичен начин могат да се изследват и функциите $\boldsymbol{x_1}^{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{p_2}) = \boldsymbol{x_1}^{\boldsymbol{M}}(p_1 = const, \boldsymbol{p_2}, m = const)$, $\boldsymbol{x_1}^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{x_1}^{\boldsymbol{H}}(p_1 = const, p_2 = const, \boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{x_1}^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{p_1}) = \boldsymbol{x_1}^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{p_1}, p_2 = const, u = const)$ и $\boldsymbol{x_1}^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{p_2}) = \boldsymbol{x_1}^{\boldsymbol{H}}(p_1 = const, \boldsymbol{p_2}, u = const)$.

Диференциални тъждества на сравнителната статика. Те се получават чрез диференциране на некоя от ендогенните за двата модела величини по една от екзогенните. По този начин се добива най-добра представа за реакцията на ендогенната величина при изменение на екзогенната.

Величината $\frac{\partial}{\partial m} V(p, m)$ се нарича **маргинална относителна полезност по дохода**. Нека да я пресметнем за $n = 2$. Ще имаме

$$\frac{\partial}{\partial m} V(p_1, p_2, m) = \frac{\partial}{\partial m} U\left(x_1(p_1, p_2, m), x_2(p_1, p_2, m)\right) = U_1 \frac{\partial x_1}{\partial m} + U_2 \frac{\partial x_2}{\partial m}.$$

Тъй като $x_1(p_1, p_2, m)$ и $x_2(p_1, p_2, m)$са решенията на основната задача на потребителя, то $U_1 = \lambda p_1$ и $U_2 = \lambda p_2$, където λ е множителя на Лагранж за тази задача. Като заместим в горния израз получаваме

$$\frac{\partial}{\partial m} V(p_1, p_2, m) = \lambda \left(p_1 \frac{\partial x_1}{\partial m} + p_2 \frac{\partial x_2}{\partial m}\right).$$

За $x_1(p_1, p_2, m)$ и $x_2(p_1, p_2, m)$ е изпълнено и бюджетното ограничение $p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$, което след диференциране по m добива вида $p_1 \frac{\partial x_1}{\partial m} + p_2 \frac{\partial x_2}{\partial m} = 1$, откъдето окончателно ще имаме

$$\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial m} V(p_1, p_2, m) = \lambda},$$

т.е. маргиналната относителна полезност по дохода съвпада с маргиналната полезност на парите.

При доказването на горното тъждество използвахме формулата $p_1 \frac{\partial x_1}{\partial m} + p_2 \frac{\partial x_2}{\partial m} = 1$, чието обобщение за произволно n ще изглежда така

$$\boldsymbol{p_1 \frac{\partial x_1}{\partial m} + p_2 \frac{\partial x_2}{\partial m} + \cdots + p_n \frac{\partial x_n}{\partial m} = p \frac{\partial x}{\partial m} = 1}$$

Това диференциално тъждество на сравнителната статика е известно под името **условие за агрегация на Енгел**. То показва, че във всеки потребителски набор трябва да съществува стока i, за която да е изпълнено $\frac{\partial x_i}{\partial m} > 0$, т.е. **във всеки оптимален набор има поне една ценна стока**.

Нека да пресметнем частната производна на функцията на относителна полезност по една от цените, т.е. $\frac{\partial}{\partial p_i} V(p, m)$. Отново, за $n = 2$ и $i = 1$ получаваме

$$\frac{\partial}{\partial p_1} V(p_1, p_2, m) = \frac{\partial}{\partial p_1} U\left(x_1(p_1, p_2, m), x_2(p_1, p_2, m)\right) = U_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + U_2 \frac{\partial x_2}{\partial p_1}$$
$$= \lambda \left(p_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial x_2}{\partial p_1}\right).$$

Сега диференцираме бюджетното ограничение $p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$ по p_1, ще имаме $x_1 + p_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial x_2}{\partial p_1} = 0$ или $p_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial x_2}{\partial p_1} = -x_1$, което след заместване в последния израз за $\frac{\partial V}{\partial p_1}$, показва, че е изпълнено равенството

$$\frac{\partial}{\partial p_1} V(p_1, p_2, m) = -\lambda x_1.$$

Тъй като получихме, че $\lambda = \frac{\partial}{\partial m} V(p_1, p_2, m)$, то за маршаловата функция на търсене $x_1(p_1, p_2, m)$ получаваме

$$x_1(p_1, p_2, m) = -\frac{\frac{\partial}{\partial p_1} V(p_1, p_2, m)}{\frac{\partial}{\partial m} V(p_1, p_2, m)},$$

или в общия случай

$$\boldsymbol{x_i(p, m) = -\frac{\frac{\partial}{\partial p_i} V(p, m)}{\frac{\partial}{\partial m} V(p, m)}}$$

Това е така нареченото **тъждество на Рой**. При доказателството на тъждеството на Рой използвахме междинния резултат $x_1 = -\left(p_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial x_2}{\partial p_1}\right)$, който в общия случай изглежда така

$$\boldsymbol{x_i = -\left(p_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_i} + p_2 \frac{\partial x_2}{\partial p_i} + \cdots + p_n \frac{\partial x_n}{\partial p_i}\right) = -p \frac{\partial x}{\partial p_i}}.$$

Последното диференциално тъждество е известно като **условие за агрегация на Курно.** Това означава, че потреблението на всяка стока от един набор е равно на отрицателната претеглена сума от измененията на потреблението на всички стоки по отношение на цената на дадената стока, като за тегла са взети цените на всички стоки.

Величината $\frac{\partial}{\partial u} e(p, u)$ се нарича **маргинални потребителсли разноски по полезността**. Нека да я пресметнем за $n = 2$. Ще имаме

$$\frac{\partial}{\partial u} e(p_1, p_2, u) = \frac{\partial}{\partial u}(p_1 {x_1}^H + p_2 {x_2}^H) = p_1 \frac{\partial {x_1}^H}{\partial u} + p_2 \frac{\partial {x_2}^H}{\partial u}.$$

Тъй като за решението на дуалната задача е изпълнено условието $p_1 = \mu U_1$, $p_2 = \mu U_2$, то след като заместим p_1 и p_2 в последното равенство, получаваме

$$\frac{\partial}{\partial u} e(p_1, p_2, u) = \mu \left(U_1 \frac{\partial {x_1}^H}{\partial u} + U_2 \frac{\partial {x_2}^H}{\partial u}\right).$$

Сега диференцираме ограничителното условие на дуалната задача $U({x_1}^H, {x_2}^H) = u$ по u, което ни дава равенството $U_1 \frac{\partial {x_1}^H}{\partial u} + U_2 \frac{\partial {x_2}^H}{\partial u} = 1$. Така, окончателно ще имаме

$$\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial u} e(p_1, p_2, u) = \mu(p_1, p_2, u)}$$

Следователно, множителят на Лагранж за дуалната потребителска задача е равен на маргиналните потребителсли разноски по полезността.

И накрая, нека да пресметнем частната производна на функцията на потребителските разноски по една от цените, т.е. $\frac{\partial}{\partial p_i} e(p, u)$. Отново, за $n = 2$ и $i = 1$ получаваме

$$\frac{\partial}{\partial p_1} e(p_1, p_2, u) = \frac{\partial}{\partial p_1}(p_1 {x_1}^H + p_2 {x_2}^H) = {x_1}^H + p_1 \frac{\partial {x_1}^H}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial {x_2}^H}{\partial p_1}.$$

Като заместим p_1 и p_2 с μU_1 и μU_2 съответно, полследното равенство се преобразува до

$$\frac{\partial}{\partial p_1} e(p_1, p_2, u) = {x_1}^H + \mu \left(U_1 \frac{\partial {x_1}^H}{\partial p_1} + U_2 \frac{\partial {x_2}^H}{\partial p_1} \right).$$

Чрез диференциране на ограничителното условие $U({x_1}^H, {x_2}^H) = u$ по p_1 получаваме $U_1 \frac{\partial {x_1}^H}{\partial p_1} + U_2 \frac{\partial {x_2}^H}{\partial p_1} = 0$. Така, накрая стигаме до

$$\frac{\partial}{\partial p_1} e(p_1, p_2, u) = {x_1}^H(p_1, p_2, u)$$

Очевидно, в общия случай ще имаме

$$\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial p_i} e(p, u) = {x_i}^H(p, u)}$$

Това е **тъждеството на Шепърд** в теорията на потреблението. То показва, че хиксовата функция на търсене на дадена стока е равна на производната на функцията на потребителските разноски по цената на тази стока. Този резултат е забележителен по следната причина: ако, вместо да бъдат функции от цените, всички ${x_j}^H$ бяха константи, то резултатът от диференцирането на тъждеството $e = p_1{x_1}^H + p_2{x_2}^H + \cdots + p_n{x_n}^H$ по p_i би бил абсолютно същия. Но всяко ${x_j}^H$ зависи от всички цени, включително от p_i, така че e получава n на брой влияния от цената p_i. Доказахме, че тези влияния се унищожават взаимно.

При доказателството на тъждеството на Шепърд получихме междинния резултат $p_1 \frac{\partial {x_1}^H}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial {x_2}^H}{\partial p_1} = 0$, чието обобщение изглежда така

$$\boldsymbol{p_1 \frac{\partial {x_1}^H}{\partial p_i} + p_2 \frac{\partial {x_2}^H}{\partial p_i} + \cdots + p_n \frac{\partial {x_n}^H}{\partial p_i} = p \frac{\partial x^H}{\partial p_i} = 0}$$

Това диференциално тъждество на сравнителната статика се нарича **условие за агрегация на Хикс.** То показва, че претеглената сума от изменението на хиксовото търсене на всички стоки по отношение на цената на една от стоките, като за тегла са взети цените на всички стоки е равно на нула.

Компенсационна матрица. Това е якобианът на Хиксовите функции на търсене по отношение на цените, т.е.

$$Comp(U,p) = \frac{\partial x^H}{\partial p} = \left(\frac{\partial {x_i}^H}{\partial p_j}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial {x_1}^H}{\partial p_1} & \frac{\partial {x_1}^H}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial {x_1}^H}{\partial p_n} \\ \frac{\partial {x_2}^H}{\partial p_1} & \frac{\partial {x_2}^H}{\partial p_2} & & \frac{\partial {x_2}^H}{\partial p_n} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial {x_n}^H}{\partial p_1} & \frac{\partial {x_n}^H}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial {x_n}^H}{\partial p_n} \end{pmatrix}$$

Ясно е, че за всяка функция на полезност и всеки ценови вектор може да се пострпои такава матрица, която функционално ще зависи от нивото на достигната полезност u. Като използваме тъждеството на Шепърд, получаваме

$$\frac{\partial {x_i}^H}{\partial p_j} = \frac{\partial}{\partial p_j}\left(\frac{\partial}{\partial p_i} e(p,u)\right) = \frac{\partial^2 e(p,u)}{\partial p_j \partial p_i} = \frac{\partial^2 e(p,u)}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\partial}{\partial p_j} e(p,u)\right) = \frac{\partial {x_j}^H}{\partial p_i}.$$

Следователно **компенсационната матрица** е равна на хесиана на функцията на потребителски разноски $e(p,u)$ и **е симетрична матрица**. Това означава, че за всяка двойка стоки от потребителския набор важи правилото: изменението на хиксовото търсене на първата стока по цената на втората стока съвпада с изменението на хиксовото търсене на втората стока по цената на първата. Да отбележим, че в общия случай това не е така при маршаловото търсене.

За да получим други важни свойства на компенсационната матрица, ще трябва да покажем, че функцията на потребителски разноски е (нестрого) вдлъбната функция. И наистина, нека p и p'са два различни ценови вектора, като x и x' са съответните решения на дуалната задача, т.е. $x = x^H(p,u)$ и $x' = x^H(p',u)$ за произволно u. Нека p'' е линейна комбинация на p и p': за $t \in (0,1)$ е изпълнено $p'' = tp + (1-t)p'$. Ще имаме

$$e(p'',u) = p''x'' = tpx'' + (1-t)p'x''$$

за x'' - решение на дуалната задача при ценови вектор p'',т.е. $x'' = x^H(p'',u)$. Но тъй като x'' не е решение на дуалните задачи за p и p', то $px'' \geq e(p,u) = px$ и $p'x'' \geq e(p',u) = p'x'$. Тогава

$$e(p'',u) = e(tp + (1-t)p',u) \geq te(p,u) + (1-t)e(p',u)\,,$$

което е условие за вдлъбнатост на функцията $e(p,u)$.

Сега можем да твърдим, че компенсационната матрица е (нестрого) отрицателно определена и като приложим критерия на Силвестър за отрицателна определеност получаваме, че главните минори на матрицата трябва да бъдат с алтерниращи занаци, т.е.

$$\frac{\partial {x_1}^H}{\partial p_1} \leq 0, \begin{vmatrix} \frac{\partial {x_1}^H}{\partial p_1} & \frac{\partial {x_1}^H}{\partial p_2} \\ \frac{\partial {x_2}^H}{\partial p_1} & \frac{\partial {x_2}^H}{\partial p_2} \end{vmatrix} \geq 0, \begin{vmatrix} \frac{\partial {x_1}^H}{\partial p_1} & \frac{\partial {x_1}^H}{\partial p_2} & \frac{\partial {x_1}^H}{\partial p_3} \\ \frac{\partial {x_2}^H}{\partial p_1} & \frac{\partial {x_2}^H}{\partial p_2} & \frac{\partial {x_2}^H}{\partial p_3} \\ \frac{\partial {x_3}^H}{\partial p_1} & \frac{\partial {x_3}^H}{\partial p_2} & \frac{\partial {x_3}^H}{\partial p_3} \end{vmatrix} \leq 0, \text{и т. н.}$$

В частност, тъй като можем да преномерираме стоките, получаваме че всички диагонални елементи на матричата, т.е. всички изменения на хиксовото търсене на стоките по собствените им цени са неположителни

$$\frac{\partial {x_i}^H}{\partial p_i} \leq 0, i = 1,2, \dots, n$$

Следователно, при хиксовите функции на търсене не може да се говори за парадокс на Гифен – всички те са монотонно намаляващи функции от собствената си цена.

Равенството $\frac{\partial {x_i}^H}{\partial p_j} = \frac{\partial {x_j}^H}{\partial p_i}$ на дава възможност да направим класификация на двойките стоки от един оптимален набор. Стоките i и j се наричат:

- **заместители** (субститути, сублементи), ако е изпълнено $\frac{\partial {x_i}^H}{\partial p_j} = \frac{\partial {x_j}^H}{\partial p_i} > 0$;
- **допълващи се** (комплементи) при $\frac{\partial {x_i}^H}{\partial p_j} = \frac{\partial {x_j}^H}{\partial p_i} < 0$;
- **неутрални**, ако $\frac{\partial {x_i}^H}{\partial p_j} = \frac{\partial {x_j}^H}{\partial p_i} = 0$.

Например, маслото и маргаринът е двойка заместващи се стоки, маслото и хлябът се допълват, а маслото и циментът са взаимно неутрална двойка. Сега да се върнем към агрегационното условие на Хикс, което за набор от две стоки изглежда така $p_1 \frac{\partial {x_1}^H}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial {x_2}^H}{\partial p_1} = 0$. Тъй като $\frac{\partial {x_1}^H}{\partial p_1} \leq 0$, то $\frac{\partial {x_2}^H}{\partial p_1} > 0$, следователно **ако стоките са две, то те са заместители** една на друга. Това твърдение се обобщава лесно: в потребителски набор, състоящ се от произволен брой стоки, всяка стока притежава поне един заместител.

Тъй като за маршаловите функции на търсене в общия случай имаме $\frac{\partial {x_i}^M}{\partial p_j} \neq \frac{\partial {x_j}^M}{\partial p_i}$, такава класификация на двойки стоки не може да се направи. Ще дадем следните определения:

- i-тата стока се нарича **основен заместител** на j-тата, ако $\frac{\partial {x_i}^M}{\partial p_j} > 0$;

- i-тата стока се нарича **основна допълваща стока** на j-тата, ако $\frac{\partial x_i{}^M}{\partial p_j} < 0$;
- i-тата стока се нарича **основна неутрална стока** за j-тата, ако $\frac{\partial x_i{}^M}{\partial p_j} = 0$

Пример. Да разгледаме функциите на полезност от примера от предния параграф и на база пресметнатите маршалови функции на търсене да определим какви се явяват стоките една за друга. Що се отнася за случаи (1), (2), (4) и (6) – при тях има симетрия, затова е достатъчно да се определи каква е първата стока за втората, такава ще е и втората за първата. (1) При функцията на полезност на Кооб-Дъглас $U = ax_1{}^{b_1}x_2{}^{b_2}, b_1 + b_2 = 1$ имаме $x_1 = \frac{b_1}{p_1}m \Longrightarrow \frac{\partial x_1}{\partial p_2} = 0$, следователно стоките са основно неутрални една за друга. (2) При функцията на полезност на Стоун $U = (x_1 - c_1)^{b_1}(x_2 - c_2)^{b_2}, b_1 + b_2 = 1$ $x_1 = \frac{b_1}{p_1}(m - p_1c_1 - p_2c_2) + c_1 \Longrightarrow \frac{\partial x_1}{\partial p_2} = -\frac{b_1}{p_1}c_2 < 0$ – стоките се явяват основно допълващи се една за друга. (4) За адитивната функция на полезност $U = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ $x_1 = \frac{mp_2}{p_1(p_1+p_2)} \Longrightarrow \frac{\partial x_1}{\partial p_2} = \frac{m}{(p_1+p_2)^2} > 0$, значи стоките са основни заместители една на друга. (6) При функция на полезност $U = \frac{x_1x_2}{x_1+x_2}$ имаме $x_1 = \frac{m}{\sqrt{p_1}(\sqrt{p_1}+\sqrt{p_2})} \Longrightarrow \frac{\partial x_1}{\partial p_2} = -\frac{m}{2\sqrt{p_1p_2}(\sqrt{p_1}+\sqrt{p_2})^2} < 0$ и стоките са основно попълващи се. В случаи (3) и (5), поради липса на симетрия е възможно стоките да са в различно качество една спрямо друга. (3) За квазилинейната функция на полезност $U = x_1 + 4\sqrt{x_2}$ имаме $x_1 = \frac{m}{p_1} - 4\frac{p_1}{p_2}$ и $x_2 = \frac{4p_1{}^2}{p_2{}^2}$, тогава $\frac{\partial x_1}{\partial p_2} = 4\frac{p_1}{p_2{}^2} > 0$ и $\frac{\partial x_2}{\partial p_1} = 8\frac{p_1}{p_2{}^2} > 0$ – стоките са основни заместители една на друга. (5) За функцията на полезност $U = x_1 + x_1x_2$ маршаловите функции на търсене са $x_1 = \frac{m+p_2}{2p_1}$, $x_2 = \frac{m-p_2}{2p_2}$, тогава $\frac{\partial x_1}{\partial p_2} = \frac{1}{2p_1} > 0$ – първата стока е основен заместител на втората; $\frac{\partial x_2}{\partial p_1} = 0$ – втората е основно неутрална спрямо първата.

7. Уравнение на Слуцки

Разглеждаме взаимно дуалните задачи $U(x) \to \max$ при $px = m$ и $px \to \min$ при $U(x) = u$, като $U_{\max} = u$, тогава $px_{\min} = e(p, u) = m$. С други думи, ако потребителят решава проблема за максимализиране на полезността си при бюджет m и достига ниво на полезност u, тогава същият набор от стоки минимализира разходите му за покупка при ниво на полезност u, като този минимум е m. (Геометрично изразено: точката на допиране на линията $U = u$ и правата $px = m$ за линията на безразличие $U = u$ представлява най-високото ниво на полезност за точките от бюджетната права $px = m$, а тази права

представлява най-ниското ниво на разходи върху линията $U = u$). Тогава маршаловите и хиксовите функции съвпадат. При $n = 2$ например $x_2(p_1, p_2, m) = x_2{}^H(p_1, p_2, u)$, но $m = e(p_1, p_2, u)$, тогава

$$x_2\left(p_1, p_2, e(p_1, p_2, u)\right) = x_2{}^H(p_1, p_2, u)\,.$$

Диференцираме горното равенство по p_1 и получаваме

$$\frac{\partial x_2}{\partial p_1} + \frac{\partial x_2}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial p_1} = \frac{\partial x_2}{\partial p_1} + \frac{\partial x_2}{\partial m}\frac{\partial e}{\partial p_1} = \frac{\partial x_2{}^H}{\partial p_1}\,.$$

Но според тъждеството на Шепард $\frac{\partial e}{\partial p_1} = x_1{}^H$ и ще имаме

$$\frac{\partial x_2}{\partial p_1} + \frac{\partial x_2}{\partial m} x_1{}^H = \frac{\partial x_2{}^H}{\partial p_1}\,.$$

Така окончателно получаваме

$$\frac{\partial x_2}{\partial p_1} = \frac{\partial x_2{}^H}{\partial p_1} - x_1{}^H\frac{\partial x_2}{\partial m} = \frac{\partial x_2{}^H}{\partial p_1} - x_1\frac{\partial x_2}{\partial m}$$

Това тъждество е частен случай на **уравнението на Слуцки**, което в общия случай изглежда така:

$$\boldsymbol{\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i{}^H}{\partial p_j} - x_j\frac{\partial x_i}{\partial m}}$$

или при $i = j$

$$\boldsymbol{\frac{\partial x_i}{\partial p_i} = \frac{\partial x_i{}^H}{\partial p_i} - x_i\frac{\partial x_i}{\partial m}}$$

Уравнението на Слуцки разделя **общия ефект** върху търсенето от изменението на цената (лявата страна на тъждеството) на две съставящи: **ефект на заместването** (първия член от дясната страна на равенството) и **ефект на дохода** (втория член). Да изразим всичко това в разбираема терминология. Паричният доход на потребителя е m, реалният му доход (или жизненият му стандарт) е u. Разходите му за живот (за постигане на жизнен стандарт) са e. Тогава, икономическото тълкуване на уравнението на Слуцки е следното: покачването на цената p_i при постоянен паричен доход има два ефекта – (1) прави стоката i относително по-скъпа в сравнение с другите стоки и (2) намалява реалните доходи на потребителя на потребителя чрез намаляване на количеството стоки, които той може да купи с доход m. Ефектът на заместване е първия ефект, той

показва какво би станало с потреблението на стоката i при запазване на реалния доход. Ефектът на дохода е втория ефект – тъй като $x_i = {x_i}^H = \frac{\partial e}{\partial p_i}$, то x_i измерва ефекта от покачването на p_i върху разходите за живот, так че измерва и намаляването на реалната стойност на фиксирания диход m и като го умножим с $\frac{\partial x_i}{\partial m}$ получаваме ефекта на дохода. Горната интерпретация дава основание хиксовите функции на търсене ${x_i}^H = {x_i}^H(p, u)$ да се наричат **функции на компенсираното търсене**. Наистина, при фиксиране на реалния доход u и промяна на цените, те показват какви количества от стоките трябва да се купуват за да се запази постигнатия стандарт на живот (реален доход).

Изводи от уравнението на Слуцки.

- Ако стоката i е ценна стока ($\frac{\partial x_i}{\partial m} > 0$) ефекта на дохода е отрицателен, ако тя е малоценна ($\frac{\partial x_i}{\partial m} < 0$) – той е положителен и ако е стока от втора необходимост ($\frac{\partial x_i}{\partial m} = 0$), ефекта от дохода липсва.
- Тъй като ефекта от заместване е винаги отрицателен ($\frac{\partial {x_i}^H}{\partial p_i} \leq 0$) то ценните стоки и стоките от втора необходимост са нормални стоки ($\frac{\partial x_i}{\partial p_i} \leq 0$). Следователно стоката на Гифен е задължително малоценна.
- Ако стоката i и стоката j са взимозаместващи се стоки ($\frac{\partial {x_i}^H}{\partial p_j} > 0$) и стоката i е малоценна (или стока от втора необходимост) ($\frac{\partial x_i}{\partial m} \leq 0$) тогава тя е основен заместител на стоката j.
- Ако стоката i и стоката j са взимодопълващи се стоки ($\frac{\partial {x_i}^H}{\partial p_j} < 0$) и стоката i е ценна (или стока от втора необходимост) ($\frac{\partial x_i}{\partial m} \geq 0$) тогава тя е основна допълваща стока на стоката j.

Ако имаме пред вид едно малко изменение на цената на i-тата стока Δp_i, то уравнението на Слуцки може да се запише така

$$\Delta \boldsymbol{x_i} = \Delta \boldsymbol{{x_i}^H} + \Delta \boldsymbol{{x_i}^m},$$

където Δx_i е общото изменение на потреблението на i-тата (т.е. общия ефект), $\Delta {x_i}^H$ – ефекта от заместването (наричан също компенсационен ефект), а $\Delta {x_i}^m$ – ефекта на дохода. За да направим геометрична интерпретация, ще разгледаме случая при $n = 2, i = 1$. Нека първоначалните цени са p_1 и p_2, а дохода е m. Тогава равновесието на потребителя е в т. A (рис.17.). Първата координата на A ще бъде $x_1(p_1, p_2, m)$ (означена на рис.17. с C).

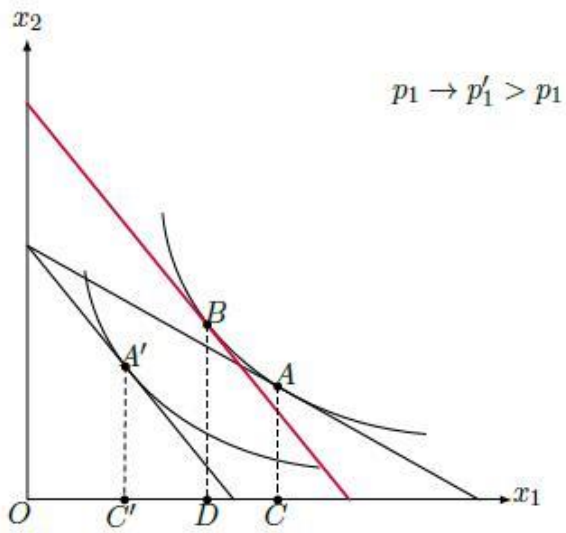


Рис.17. Геометрична илюстрация на уравнението на Слуцки при компенсация по Хикс на ценна стока

Нека сега, първата стока да е поскъпнала до $p_1{}' > p_1$. При запазване на дохода m новата бюджетната права би се получила от старата чрез ротация около точката $(0, p_2)$ като пресечната точка с абсцисата сега е $m/p_1{}' < m/p_1$. За тази нова бюджетна права би се намерила друга линия на безразличие, така че новото равновесие на потребителя ще е в точка A'. Първата координата на A' (означена на рис.17. с C') ще бъде $x_1(p_1{}', p_2, m)$. Сега да си представим, че потребителя е компенсиран с нов доход $m' > m$, така че при повишената цена на първата стока да може да достигне това ниво на полезност, което е имал преди повишението. Геометрично това означава транслация на втората бюджетна права до положение, при което тя става допирателна към първата линия на безразличие. Тогава точката на допиране B ще е на същата линия на безразличие както A и нейната първа координата ще е $x_1(p_1{}', p_2, m')$ (означена на рис.17. с D). Тогава ще имаме

$$\Delta x_i = x_1(p_1{}', p_2, m) - x_1(p_1, p_2, m) = \overrightarrow{CC'} - \text{общ ефект } (m = const)$$

$$\Delta x_i{}^H = x_1(p_1{}', p_2, m') - x_1(p_1, p_2, m) = \overrightarrow{CD} - \text{ефект на заместването } (u = const)$$

$$\Delta x_i{}^m = x_1(p_1{}', p_2, m) - x_1\left(p_1{}', p_2, m'\right) = \overrightarrow{DC'} - \text{ефект на дохода } (p_1{}' = const)$$

Забележка. Тъй като ефектът на дохода на рис.17. е отрицателен, то очевидно първата стока е ценна стока.

Такова компенсиране на дохода на потребителя при изменение на цените, при което той да може да запази достигнатото ниво на полезност се нарича **компенсиране по Хикс**. Друг вариант на компенсиране е когато дохода му се промени така, че той да може да си позволи стария набор от стоки – **компенсиране по Слуцки**. За компенсирането по Слуцки също е валидно уравнението на Слуцки

$$\boldsymbol{\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i{}^S}{\partial p_j} - x_j \frac{\partial x_i}{\partial m}} \text{ или } \boldsymbol{\Delta x_i = \Delta x_i{}^S + \Delta x_i{}^m},$$

като функциите на компенсирано по Слуцки търсене $x_i{}^S$ са аналози на функциите на компенсирано по Хикс търсене $x_i{}^H$ и се дефинират по съответния начин. Ясно е, че на практика компенсирането по Слуцки се прилага много по-вече от компенсирането по Хикс, защото много по-лесно може да се каже какъв набор от стоки е потебяван преди промяната на цените, отколкото да се конструира линията на безразличие на типичния потребител. На рис.18. е дадена геометрична илюстрация на компенсирането по Слуцки при ценна стока. Вижда се, че новия доход $m' > m$ е избран така, че потребителят да може да потребява набор A, той обаче не прави това, а избира набор B с което повишава нивото на полезност, достигнато преди промяната на цените.

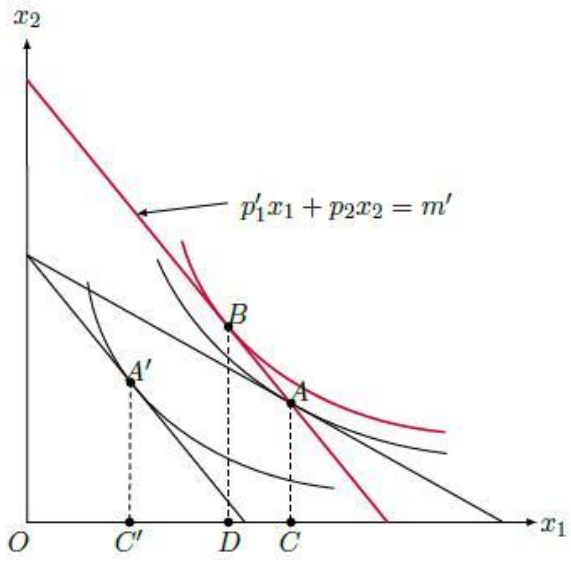


Рис.18. Геометрична илюстрация на уравнението на Слуцки при компенсация по Слуцки за ценна стока

И накрая, на рис.19. е дадена геометрична илюстрация на трите ефекта при компенсиране по Слуцки, когато първата стока е малоценна. Вигда се, че ефекта на дохода, измерван с $\overrightarrow{DC'}$ сега е положителен.

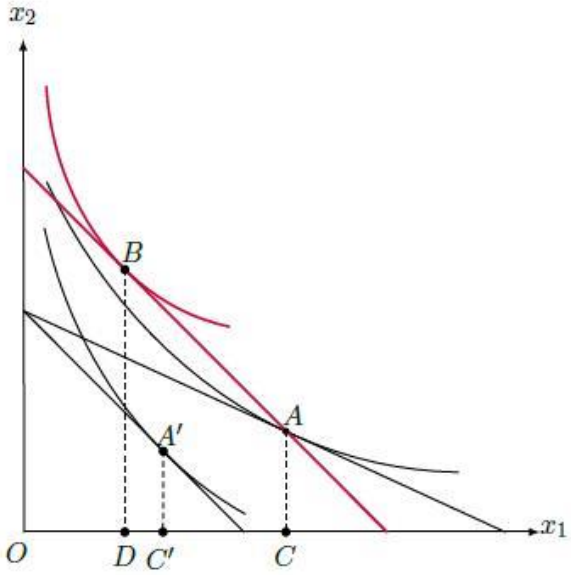


Рис.19. Геометрична илюстрация на уравнението на Слуцки при компенсация по Слуцки за малоценна стока