Математическа теория на фирмите

Целта на настоящия параграф е да се покаже по какъв начин се реализира оптималното поведение на фирмите на пазара и, разбира се, как се формира функцията на предлагане.

Под фирма (или производител) ще разбираме всеки стопански субект, който продава потребителски стоки и услуги.

Основна презумпция при изграждане на математическата теория на фирмите е **принципа на рационалност**, който кара всяка фирма да се стреми да максимализира изгодата си от участие в пазарния процес на база ограничените средства с които разполага или да минимализира средствата, вложени в производство и продажба с цел постигане на определена изгода. Разбира се, фирмата може да максимализира изгодата си и без оглед на средствата, необходими за това.

Следователно, за да изучим поведението на производителя на пазара на стоки ще трябва да формализираме както средствата, вложени в производството, така и изгодата, която фирмата получава от продажбата на стоките си.

Ще направим две предположения: първо, че фирмата произвежда и продава само една стока, чието количество ще означаваме с q и второ, че цената на стоката p е екзогенна величина. Първото означава, че фирмата е **унипродуктна**, а второто – **конкурентна**. Ако решим задачите за унипродуктната фирма, то от тези решения лесно могат да се получат условията за оптималност и за полипродуктните фирми.

Всички микроикономически модели на фирмата са **входно-изходни** (input-output). Можем да ги разделим на две групи:

1) Модели с използване на функция на разходите. Това са елементарни модели, в които на фирмата се гледа като на преобразувател на парични средства – на входа са разходите, очевидно функция на количеството, т.е. $C(q)$, а на изхода – приходите $R(q) = pq$. Тогава потенциалната печалба на фирмата ще бъде също функция на количеството:

$$\Pi(q) = R(q) - C(q).$$

2) Модели с използването на производствени функции. Това са по-сложни модели, при които освен като на преобразувател на пари, на фирмата се гледа и като на преубразувател на стоки: на входа постъпват ресурси за производството с количества $z_1, z_2, \dots, z_n$, а на изхода излиза произвежданата от фирмата стока в

количество q. Зависимостта между количествата постъпили ресурси и количеството произведена стока

$$q = F(z_1, z_2, \dots, z_n)$$

свидетелства за технологията на производство и се нарича производствена функция. Печалбата на фирмата сега ще има същия вид, но разходите ще са

$$C = w_1 z_1 + w_2 z_2 + \cdots + w_n z_n$$

и потенциалната печалба ще изглежда така:

$$\Pi = pF(z_1, z_2, \dots, z_n) - (w_1 z_1 + w_2 z_2 + \cdots + w_n z_n).$$

Предполага се, че цените на ресурсите $w_1, w_2, \dots, w_n$ също са екзогенни величини. Това означава, че фирмата, освен на стоковия пазар е конкурент и на пазара на ресурси.

Много често се оказва удобно всички ресурси за производството да се обобщят в два – **капитал и труд** с количества K и L и цени v и w съответно. Тогава за потенциалната печалба ще имаме

$$\Pi = pF(K, L) - (vK - wL).$$

1. Модели с функция на разходите.

Определение. Под функция на общите разходи (разходна функция) за производство (total cost) ще разбираме зависимостта между количеството произведена продукция q и минималните разходи, необходими за производството ù. Означаваме $TC = C(q)$. Графиката на тази функция ще наричаме TC-линия (total cost curve).

От икономически съображения следват две аксиоми (свойства) на функцията на разходите:

1. С нарастване на количеството растат и разходите за производството му, т.е. $C(q)$ е растяща функция, следователно $C'(q) > 0$,
2. При неограничено нарастване на количеството и разходите за производството му растат неограничено, т.е. $\lim_{q\to\infty} C(q) = \infty$.

Разграничават се два вида разходи – **постоянни разходи** (fixed cost) $FC = F$ и **променливи разходи** (variable cost) $VC = V(q)$. Тогава

$$TC = FC + VC \quad \text{или} \quad C(q) = F + V(q).$$

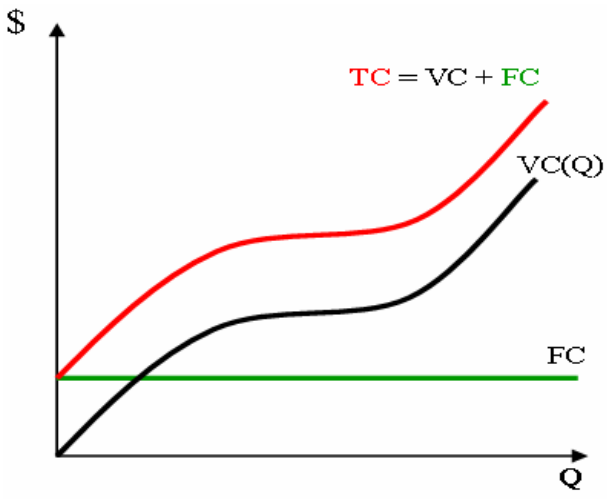


Рис. 1. Общи, постоянни и променливи разходи

Техните графики са съответно FC-линия (права, успоредна на абсцисната количествена ос) и VC-линия (рис. 1.).

За разгледаните функции на разходите се въвеждат функциите на средни разходи: $ATC = AC(q) = \frac{C(q)}{q}$ – **средни общи разходи** (average total cost) или средни разходи за единица продукция; $AFC = AF(q) = \frac{F}{q}$ – **средни постоянни разходи** (average fixed cost) или средни разходи за единица продукция и $AVC = AV(q) = \frac{V(q)}{q}$ – **средни променливи разходи** (average variable cost) или средни променливи разходи за единица продукция.

Очевидно

$$ATC = AFC + AVC \quad \text{или} \quad \frac{C(q)}{q} = \frac{F}{q} + \frac{V(q)}{q}$$

Съответните линии са ATC-линия (average total cost curve) или линия на средните общи разходи, AFC-линия (average fixed cost curve) или линия на средните постоянни разходи и AVC-линия (average variable cost curve) или линия на средните променливи разходи.

Геометричната интерпретация на средните разходи е проста: нека $O(0,0)$ е координатното начало, $A(q,0)$ е точка от абсцисата, съответстваща на определено количество q, $B\big(q, C(q)\big)$ – точка от TC-линията, тогава в правоъгълния триъгълник OAB ще имаме

$$tg\measuredangle BAO = \frac{BA}{OA} = \frac{C(q)}{q} = ATC(q)\,.$$

Производната на функцията на разходите е прието да се нарича функция на маргиналните разходи (marginal cost), означава се с $MC = C'(q)$. Ясно е, че маргиналните разходи се интерпретират геометрично като тангенса на ъгъла, сключван от допирателната към TC-линията с абсцисната ос. Графиката на функцията на маргиналните разходи се нарича MC-линия (marginal cost curve).

Така, с всяка функция на разходи се асоциира фамилията от линии: TC-линията, FC-линията, VC-линията, ATC-линията, AFC-линията, AVC-линията и MC-линията.

От икономическа гледна точка има четири основни вида разходни функции:

1. С постоянни средни променливи разходи, т.е. $AVC = \frac{V(q)}{q} = const$, тогава TC-линията ще е права линия, съответно общите разходи ще са линейна функция (рис. 2.) на количеството

$$C(q) = c_0 + c_1 q\ .$$

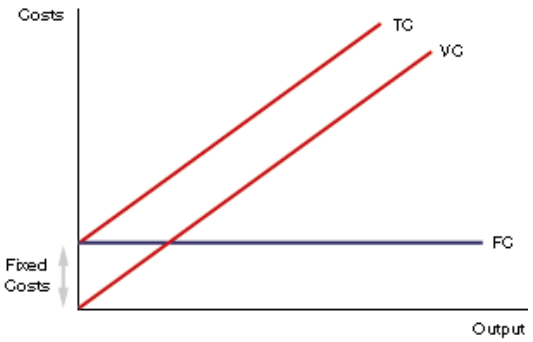


Рис. 2. Линейна функция на разходите

Тъй като средните постоянни разходи $AFC = \frac{c_0}{q}$ са намаляваща функция на q, то средните общи разходи ATC също ще бъдат намаляваща функция на q. Това намаляване е асимптотично, защото $\lim_{q\to\infty} ATC = \lim_{q\to\infty}\left(\frac{c_0}{q} + c_1\right) = c_1$ и $ATC > c_1$ за $\forall q$. Тъй като в този случай $MC = c_1 = const$ MC-линията е права, успоредна на абсцисата.

2. С намаляващи средни променливи разходи (или икономия от мащаба), т.е. $AVC = \frac{V(q)}{q}$ – намаляваща функция. Тогава TC-линията ще е вдлъбната крива. Подходящ пример за функция, моделираща този вид разходна функция е $C(q) = c_0 + c_1 q + c_2 q^{\alpha}, \alpha < 1$. Тъй като средните постоянни и променливи разходи AFC и AVC намаляват с нарастването на q, то същото може да се каже и за средните общи разходи ATC. И тук имаме асимптотика: $\lim_{q\to\infty} ATC = \lim_{q\to\infty}\left(\frac{c_0}{q} + c_1 + \frac{c_2}{q^{1-\alpha}}\right) = c_1$ и $ATC > c_1$ за $\forall q$. Ясно е, че маргиналните разходи намаляват с нарастване на количеството.

3. С нарастващи средни променливи разходи (или преразход от мащаба), т.е. $AVC = \frac{V(q)}{q}$ – растяща функция. В този случай TC-линията ще е изпъкнала крива. Подходящ пример - $C(q) = c_0 + c_1 q + c_2 q^{\alpha}, \alpha > 1$. Тъй като AFC е намаляваща, а AVC – растяща функция на q, то за сумата им ATC може да се очаква следното поведение: при малки количества (когато съставящата AFC има по-голям принос) – да намалява, а при големи (когато поведението ù се определя в по-голяма степен от AVC) – да нараства. Тогава, може да се очаква, че за някакво количество $q = q_0$ ще се достига локален (и абсолютен) минимум на ATC. Така

например, при $\alpha = 2$ имаме $ATC = \frac{c_0}{q} + c_1 + c_2 q \Longrightarrow ATC' = -\frac{c_0}{q^2} + c_2$ и $ATC' = 0 \Leftrightarrow q = q_0 = \sqrt{\frac{c_0}{c_2}}$. Тогава $ATC_{min} = AC\left(\sqrt{\frac{c_0}{c_2}}\right) = c_1 + 2\sqrt{c_0 c_2}$. При този вид функция на разходите функцията на маргиналните разходи е растяща функция.

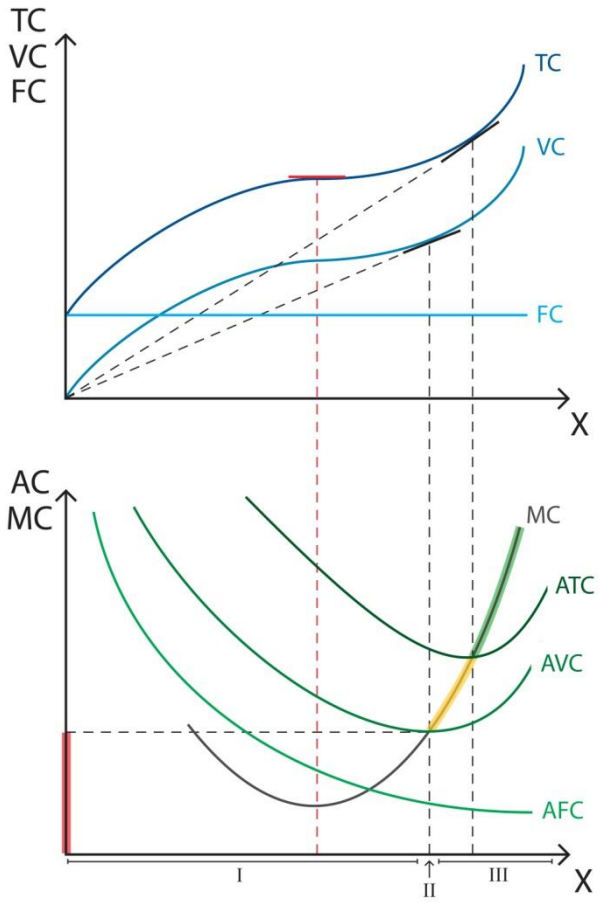


Рис. 3. Типична фамилия линии за функция на разходите с първоначално намаляне (участък I) и след това нарастване (участък III) на средните променливи разходи AVC, които в точка II достигат минимума си. С пунктири са показани и количествата, минимизиращи ATC и MC.

4. Функция на разходите, за която при малки стойности на q средните променливи разходи намаляват, а след определено количество – нарастват (рис. 3.). Тогава средните разходи при това определено количество ще достигат минимума си. Поведението на ATC-линията ще бъде същото като в предишния случай, т.е и за средните общи разходи ще има количество, което ги минимизира. Лесно се вижда, че ако AVC намаляват, то и ATC намаляват, а при нарастване на ATC, AVC също нараства. Това показва, че количеството, минимизиращо AVC е по-малко от количеството, минимизиращо ATC. VC-линията и TC-линията ще имат вдлъбнат участък при малки стойности на q , инфлексия при $q = q^*$ и изпъкнал участък при $q > q^*$. Тогава за $q < q^*$ маргиналните разходи ще намаляват, за $q > q^*$ - ще нарастват, а при $q = q^*$ ще достигат минимума си. Стойностите на q при които се минимизират MC, AVC и ATC ще бъдат разположени във възходящ ред. Такава разходна функция може да се моделира с кубичната функция $C(q) = c_0 + c_1 q + c_2 q^2 + c_3 q^3$. Ясно е, че $c_0 \geq 0$ и $c_3 > 0$. Изискването тази функция да е растяща води до $C'(q) = c_1 + 2c_2 q + 3c_3 q^2 > 0$ за $\forall q$, което е изпълнено при $D = {c_2}^2 - 3c_1 c_3 < 0 \Leftrightarrow {c_2}^2 < 3c_1 c_3$, откъдето $c_1 > 0$. Инфлексната точка $q = q^*$ е корен на втората производна $C''(q) = 2c_2 + 6c_3 q \Longrightarrow q^* = -\frac{c_2}{3c_3} > 0$, следователно $c_2 < 0$.

Забележка. За повече прегледност е прието линиите, съответстващи на функцията на разходите да се изобразяват в два чертежа (както е на рис. 3.). Във всеки от тях абсцисната ос е запазена за количествени показатели, ординатата в единия случай се използва за величини, измервани в общи стойности (TC, FC, VC), а в другия – за величини, измервани в стойности за една количествена единица (ATC, AFC, AVC, MC).

Ясно е, че последните два вида разходни функции могат да се обединят. За тях е характерно, че:

1) за $q > q_1$ средните променливи разходи нарастват и в q_1 имат минимум $AVC_{min} = AVC(q_1)$;
2) за $q > q_2$ средните общи разходи нарастват и в q_2 имат минимум $ATC_{min} = ATC(q_2)$;
3) за $q > q_0$ маргиналните разгоди нарастват и в q_2 имат минимум $MC_{min} = MC(q_0)$, за същите q TC-линията и VC-линията са изпъкнали.

Освен това $0 \leq q_0 \leq q_1 \leq q_2$, като първите неравенства се превръщат в равенства за разходна функция с растящи средни променливи разходи, а третото неравенство – при разходна функция без постоянни разходи.

Тъй като от условието 1) следвт другите условия, то можем да формулираме следната

Твърдение 1. Ако функцията на разходите допуска минимум на средните променливи разходи AVC_{min}, то

$$MC(q_1) = AVC_{min}(q_1) \text{ и } MC(q_2) = ATC_{min}(q_2),$$

с други думи, линията на маргиналните разходи пресича линиите на средни променливи и средни общи разходи в точките на техните минимуми.

Ще докажем второто равенство, тъй като първото се доказва по аналогичен път. За да бъде q_2 минимум на $ATC(q)$ е необходимо $ATC'(q_2) = 0$. Тъй като $ATC'(q) = \left(\frac{C(q)}{q}\right)' = \frac{C'(q)q - C(q)}{q^2}$ и $ATC'(q_2) = 0$, то $C'(q_2)q_2 - C(q_2) = 0 \Longrightarrow C'(q_2) = \frac{C(q_2)}{q_2}$, т.е. $MC(q_2) = ATC(q_2) = ATC_{min}$.

Освен общи разходи, в тези модели има и **общи приходи** (total revenue) $TR = R(q) = pq$. Графиката на функцията на общите приходи, TR-линията е права, минаваща през координатното начало. Тангенсът на ъгъла, сключван от тази права с абсцисата е p – цената на стоката. В общия случай, ако варираме цената p ще се наблюдава следната картина: за малки стойности на p TR-линията ще е разположена изцяло под TC-линията, а за големи – двета линии ще се пресичат.

Това означава, че в първия случай фирмата ще реализира на загуба за всяко произведено количество q, а във втория – ще има количества, осигуряващи печалба. Ясно е, че за конкурентната фирма средните общи приходи и маргиналните приходи съвпадат с цената

$$AR(q) = MR(q) = p$$

Критична цена p_k за дадена разходна функция ще наричаме цена, при която:

1) за цени по-високи от критичната, фирмата може да реализира печалба, т.е. за $\forall p > p_k \exists q: \Pi(q) = pq - C(q) > 0$;
2) за цени по-ниски от критичната, фирмата със сигурност е на загуба, т.е. за $\forall p < p_k \forall q: \Pi(q) = pq - C(q) < 0$.

Ако за критичната цена p_k съществува единствено количество q_k при което печалбата е нулева (т.е. $\Pi(q_k) = p_k q_k - C(q_k) = 0$), това количество се нарича **критично количество**.

Тъй като условието $\Pi(q) = pq - C(q) < 0$ след като разделим с q добива вида $p < \frac{C(q)}{q} = AC(q)$, то критичната цена трябва да бъде равна на долната граница (инфинимума) на средните общи разходи $AC(q)$, т.е. $p_k = \inf_q\{AC(q)\}$. Да видим как стои въпросът с критичната цена при четирите вида разходни функции:

1. При функцията с постоянни средни разходи критичната цена ще е равна на тези средни разходи. И наистина, ако $C(q) = c_0 + c_1 q$ $(c_0 = FC, c_1 = AVC)$ $p_k = \inf_q\{AC(q)\} = \inf_q\left\{\frac{c_0}{q} + c_1\right\} = c_1$. За $c_0 = 0$ и за всяко q печалбата е нулева при $p = p_k = c_1$, а при $c_0 \neq 0$ $\Pi(q) = -c_0$ при същата цена, следователно в този случай не съществува критично количество q_k.

2. При функцията с намаляващи средни разходи инфинимумът също не е минимум, поради това и в този случай не съществува критично количество q_k. В случая, когато $C(q) = c_0 + c_1 q + c_2 q^\alpha, \alpha < 1$ $p_k = \inf_q\{AC(q)\} = \inf_q\left\{\frac{c_0}{q} + c_1 + \frac{c_2}{q^{1-\alpha}}\right\} = c_1$.

3. и 4. За функцията с растящи средни разходи при $q > 0$ или при $q > q_1$, функцията на средните общи разходи винаги има минимум. Нека този минимум се достига при $q = q_k$(q_k е q_2 от Твърдение 1.), тогава $p_k = ATC_{min} = AC(q_k) = MC(q_k)$.

Геометрично, горните равенства означават, че в точката на допиране на TR-линията до TC-линия, средните и маргинални разходи се изравняват.

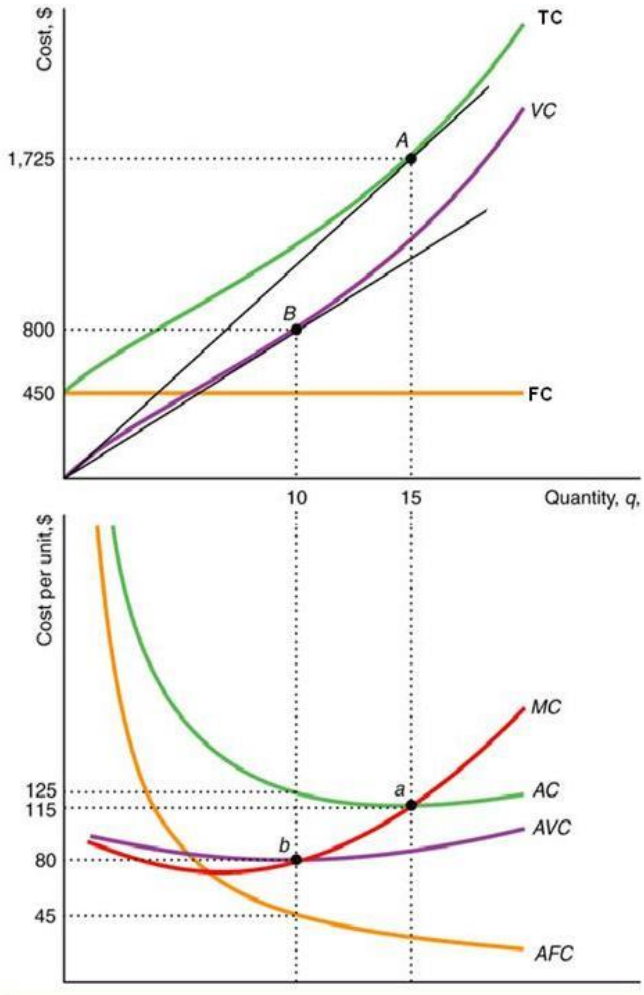


Рис. 4.

Пример. На рис. 4 са построени характерните линии на разходната функция $C(q) = 450 + 100q - 4q^2 + 0{,}2q^3$ – на горния чертеж са TC-линията, FC-линията, VC-линията, а на долния - AC-линията, AFC-линията, AVC-линията и MC-линията. Тъй като променливите разходи са $V(q) = 100q - 4q^2 + 0{,}2q^3$ средните променливи разходи ще бъдат $AV(q) = 100 - 4q + 0{,}2q^2$, тогава $AV'(q) = -4 + 0{,}4q$ и $AV'(10) = 0$, което показва, че $AVC_{min} = AV(10) = 80$. Точката $b(q = 10, AVC_{min} = 80)$ на долния чертеж е точката на минимум за средните променливи разходи. На горния чертеж съответната точка е $B(q = 10, VC = 800)$, която е точка на допиране на VC-линията с всевъзможните TR-линии, в случая - $TR = 80q$, което показва, че при цена $p = 80$ продажбите покриват променливите разходи. За средните общи разходи имаме $AC(q) = \frac{450}{q} + 100 - 4q + 0{,}2q^2$. Може да се провери, че $AC_{min} = AC(15) = 115$. Точката $a(q = 15, AC_{min} = 115)$ на долния чертеж е точката на минимум за средните общи разходи. На горния чертеж съответната точка е $A(q = 15, TC = 1725)$, която е точка на допиране на TC-линията с всевъзможните TR-линии, в случая - $TR = 115q$ (която съответства на критичната цена, защото $p_k = ATC_{min} = 115$). Тъй като за маргиналните разходи имаме $MC(q) = C'(q) = 100 - 8q + 0{,}6q^2$, то можем да се уверим, че $MC(10) = 80 = AVC_{min}$ и $MC(15) = 115 = AC_{min}$, следователно MC-линията пресича AC-линията и AVC-линията в точките им на минимум. Освен това, тъй като $C''(q) = -8 + 1{,}2q$ ще имаме $C''\left(\frac{20}{3}\right) = 0$. Тогава за $q \in \left(0, \frac{20}{3}\right)$ маргиналните разходи MC намаляват, а TC-линията е вдлъбната, а за $q \in \left(\frac{20}{3}, \infty\right)$ MC растат и TC-линията е изпъкнала. При $q = \frac{20}{3}$ MC ще има минимум, а TC-линията – инфлексия.

Условието фирмата да реализира печалба $\Pi(q) = pq - C(q) > 0$ е

$$p > \frac{C(q)}{q} = AC(q),$$

т.е. цената за продаденото количество трябва да превишава средните разходи за производството на това количество.

Необходимото условие тази печалба да бъде максимална е $\Pi'(q) = p - C'(q) = 0$ или

$$p = C'(q) = MC(q)$$

т.е. цената за продаденото количество трябва да е равна на маргиналните разходи за производството на това количество. Това е условието от първи ред. Достатъчното условие (или условието от втори ред) е $\Pi''(q) = -C''(q) < 0$ или $C''(q) > 0$. Тъй като $C''(q) = MC'(q)$. Следователно, печалбата на конкурентната фирма достига максимум при такъв обем продукция, при който нарастващите маргинални разходи (за производството му) се изравнят с цената на продукцията. Тъй като при първите два вида разходни функции (при които средните променливи разходи не нарастват, а средните общи разходи намаляват) маргиналните разходи намаляват, то задачата за максимализиране на печалбата няма решение. В другите два вида разходни функции тази задача притежава единствено решение, като в четвъртия случай това решение е в участъка на нарастване на $MC(q)$ (изпъкналата част от TC-линията).

Забележка: Тъй като цената за конкурентната фирма е равна на маргиналните приходи, то условието за максимизиране на печалбата може да се изкаже и така: фирмата избира да произведе такова количество, за което маргиналните приходи са равни на маргиналните разходи, т.е.

$$\Pi(q) = \Pi_{max} \Leftrightarrow MR(q) = MC(q)$$

Нека сега, за различните видове разходни функции да разгледаме случая, когато цената е по-висока от критичната, т.е. $p > p_k$, това е цена, допускаща печалба за фирмата.

В първите два случая средните променливи разходи не нарастват, а средните общи разходи намаляват. Тъй като $p > p_k = \inf_q\{AC(q)\}$, ще съществува количество q_1 за което цената се изравнява със средните разходи $p = AC(q_1)$, следователно общите приходи и разходи се изравняват и печалбата е нула (TR-линията е секуща за TC-линията). Тогава, за $q > q_1$ цената ще е по-висока от средните разходи и съответно приходите ще са повече от разходите, фирмата ще работи на печалба (TR-линията ще е разположена над TC-линията). Тази печалба

ще нараства неограничено с нарастване на количеството, тъй като средните разходи намаляват. При количества $q < q_1$ фирмата ще работи на загуба.

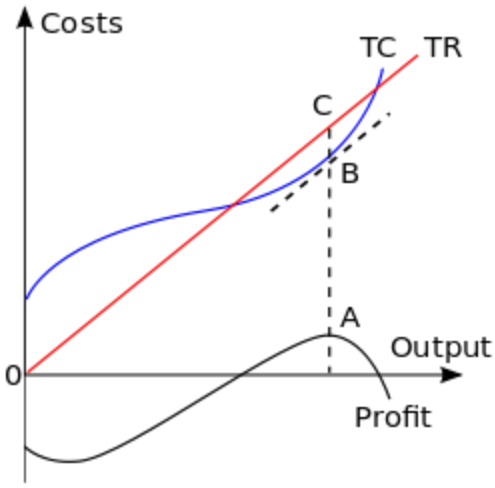


Рис. 5. Максимализиране на печалбата I

В другите два случая средните променливи разходи нарастват (за последния случай – от някакво количество нагоре), а средните общи разходи първо намалят, а след това растат. Това показва, че при $p > p_k$ равенството $p = AC(q)$ ще е изпълнено за две стойности на q - q_1 и q_2, като $q_1 < q_k < q_2$. При малки $q \in (0, q_1)$ и големи $q \in (q_2, \infty)$ количества ще се реализира загуба ($p < AC(q)$ и TR-линията е под TC-линията), а при „средни“ – печалба ($p > AC(q)$ и TR-линията е над TC-линията). В „средния“ участък $q \in (q_1, q_2)$ е решението на задачата за максимализиране на печалбата – количество q_0, за което $p = MC(q_0)$. Последното означава, че допирателната към TC-линията в точката $\big(q_0, C(q_0)\big)$ е успоредна на TR-линията (рис. 5. и рис. 6.).

При $p > p_k = AC_{min}(q)$ става дума за максимална печалба, а при $p < p_k$ – за минимална загуба. И в двата случая тази максимална печалба е

$$\Pi(q_0) = pq_0 - C(q_0) = pq_0 - \frac{C(q_0)}{q_0} q_0 = \big(p - AC(q_0)\big)q_0 \,,$$

следователно разликата между цената и средните разходи за количеството, максимализиращо печалбата $p - AC(q_0)$ е печалбата (загубата) за единица продукция. На рис. 6 цената P и маргиналните разходи MC се изравняват при количество Q, тъй като $P = MC(Q) > AC(Q)$, фирмата ще реализира печалба $\Pi(Q) = \big(P - AC(Q)\big)Q$, равняваща се на лицето на правоъгълника $ABCP$.

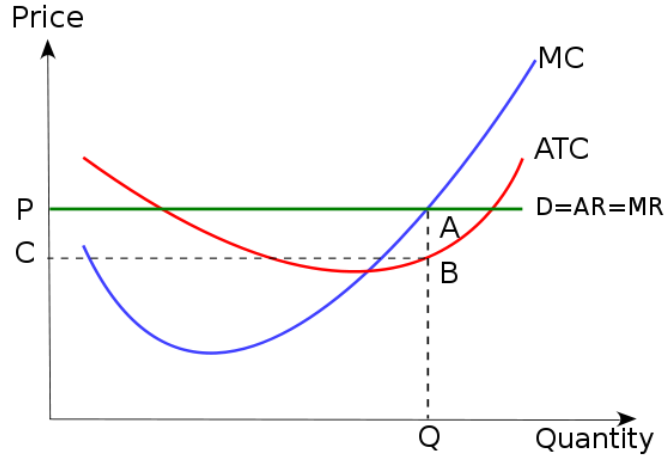


Рис. 6. Максимализиране на печалбата II

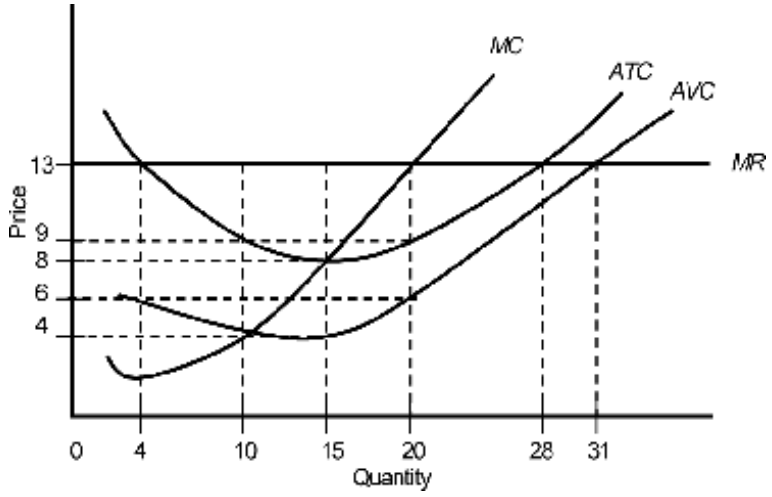


Рис. 7.

Пример. На рис. 7 маргиналните приходи MR и маргиналните разходи MC се изравняват при цена $p = 13$ и количество $q = 20$. Тогава общият оборот на фирмата е $TR = pq = 13 \cdot 20 = 260$. Тъй като средните общи разходи ATC при това количество са $ATC(20) = 9$, то общите разходи са $TC = ATC \cdot q = 9 \cdot 20 = 180$. Те се разпределят на променливи разходи $VC = AVC(20) \cdot 20 = 6 \cdot 20 = 120$ и на постоянни разходи $FC = TC - VC = 180 - 120 = 60$. Съответно общите приходи се разпределят на общи разходи и печалба $\Pi = TR - TC = 260 - 180 = 80$.

Връзка между функцията на маргиналните разходи и функцията на предлагане. Тъй като винаги, когато има максимум на печалбата са изпълнени условията

$$p = C'(q) = MC(q), \qquad MC'(q) = C''(q) > 0,$$

то от математическа гледна точка може да се очаква, че линията на предлагане на фирмата , т.е. S-линията (supply curve) ще бъде тази част от MC-линята, при което MC расте, толкова повече, че монотонната функция е обратима. От икономическа гледна точка обаче, няма никакъв смисъл за фирмата да предлага на цени, по-ниски от минималните средни променливи разходи. Тогава, обратна та функция на предлагане ще се задава така:

$$p = C'(q) = MC(q) \text{ при } p \geq AVC_{min}$$

т.е. при дадена цена ще се предлага количество, изравняващо маргиналните разходи за производството му с цената, но не и ако тези маргинални разходи са по-малки от средните променливи разходи за на това количество. С други думи, S-линията ще представлява тази част от MC-линята, разположена над AVC-линията. Тогава, S-линията ще се състои от два участъка:

1) $AVC_{min} \leq p = MC(q) < ATC_{min}$ – това е участъка от MC-линята, разположен между точките ù на пресичане с AVC-линията и ATC-линията. Тогава, тъй като $p < ATC_{min}$ фирмата ще предлага на загуба (loss supply). На рис. 4. това е участъка от MC-линята, разположен между точките b и a.

2) $ATC_{min} \leq p = MC(q)$ – участъка от MC-линията, разположен над ATC-линията. При това положение фирмата ще предлага на печалба (profit supply). На рис. 4. това е участъка от MC-линята, разположен надясто от точката a.

На границата на давата участъка ще са изпълнени равенствата $p = MC(q) = ATC_{min}$, което означава, че фирмата ще предлага (защото $p = MC(q)$), но това предлагане ще е при нулева печалба (zero profit supply) (защото $p = ATC_{min}$).

В случите когато средните променливи разходи намаляват печалбата расте с нарастването на количеството, задачата за максимализиране на печалбата няма решение и не се генерира функция на предлагане.

Връзка между равновесието на фирмата и равновесието на отрасъла. Тъй като фирмата е конкурентна, то стоката, произвеждана от нея се произвежда и от много други фирми, съставляващи отрасъл. Разглежданата фирма генерира функция на предлагане, която е обратната функция на $p = MC(q)$. Функции на предлагане генерират и другите фирми в отрасъла. Чрез агрегиране на тези функции на предлагане получаваме функцията на предлагане за отрасъла, чиято графика е S-линията на левите чертежи на рис. 8 и 9.

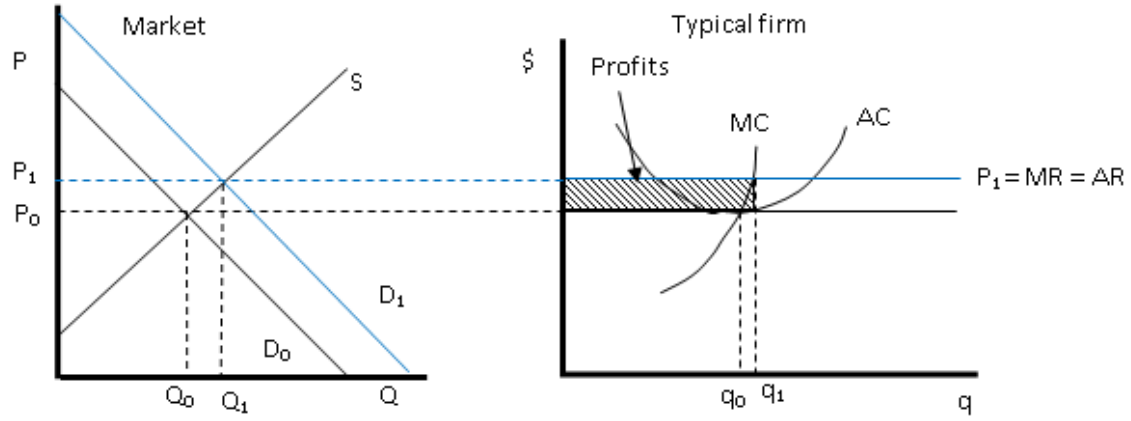


Рис. 8. Равновесие на фирмата и равновесие на отрасъла - случай на печалба за фирмата

От пресичането на тази S-линия с линията на търсене (D-линията) се определят равновесните величини на този отраслов пазар – цена и количество. Тъй като фирмата е конкурентна, тя възприема равновесната отраслова цена като даденост и за нея линията на търсене е хоризонтална ($p = const$). Тъй като линята на предлагане на фирмата е $p = MC(q)$, то равновесието за фирмата ще се получава при пресичането на хоризонталната линия на търсене и MC-линията. Ако това се случи в точката на пресичане на MC-линията с AC-линията, която е точка на минимум за последната (както е при цена P_0 на рис. 8 и 9), то тогава фирмата ще има нулева печалба. Ако обаче цената, определена от отрасловия пазар P_1 е по-голяма (по-малка) от P_0, тогава за равновесното количеството q_1,

изравняващо фирменото търсене и предлагане ще имаме $P_1 = MC(q_1) > AC(q_1)$ ($P_1 = MC(q_1) < AC(q_1)$) и фирмата ще реализира печалба (загуба) в размер на $\left(P_1 - AC(q_1)\right)q_1$ ($(AC(q_1) - P_1)q_1$), равняваща се на лицето на защрихования правоъгълник на рис. 8 (рис. 9).

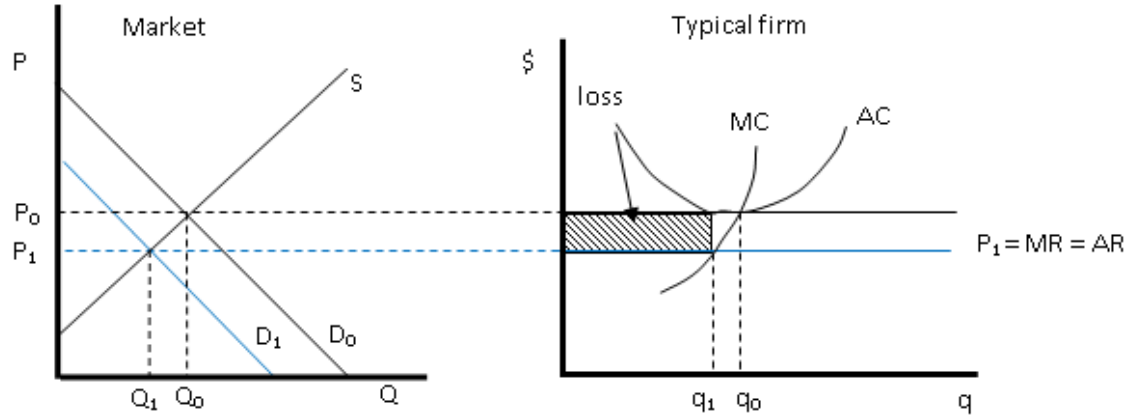


Рис. 9. Равновесие на фирмата и равновесие на отрасъла - случай на загуба за фирмата

Функция на разходите в краткосрочен и дългосрочен план. Разграничението на „краткотраен период“ и „дълготраен период“ е в зависимост от това, дали производителят е ограничен или не от свои минали решения. В този смисъл, ако такова ограничение съществува, както е в краткосрочен план, съществуват и постоянни разходи. В дългосрочен план всички разходи се разглеждат като променливи, т.е. $FC = 0$. Относно променливите разходи икономическата логика е следната – при малки количества продукция средните променливи разходи намаляват, тъй като се изразходват налични ресурси, а след изчерпването на тези ресурси средните променливи разходи започват да растат. Така се вижда, че четвъртия вид функция на разходите е икономически най-правдоподобен и в двата случая.

За съответните разходни функции (линии) при краткосрочен план отпред се слага SR (от short-run), а при дългосрочен – LR (от long-run). Така например $SRAC$ означава средни (общи) разходи в краткосрочен план (short-run average cost), а $LRAC$ – средни разходи в дългосрочен план (long-run average cost). Това, което може да се каже е, че в дългосрочен план обратната функция на предлагане ще бъде

$$p = LRMC(q) \geq LRAC_{min},$$

защото в дългосрочен план няма постоянни разходи, следователно всички разходи са променливи. Това означава, че в дългосрочен план няма да има предлагане на загуба. В краткосрочен план нещата стоят така, както са изложени по-горе:

$$p = SRMC(q) \geq SRAVC_{min},$$

така, че в краткосрочен план S-линията ще притежава участък на предлагане на загуба.

Връзка между потребителския излишък и печалбата. Нека $p_k = AVC_{min}(q_k)$ и цената, на която трябва да продава фирмата (определена от отрасловото равновесие) е $p = MC(q)$. Тогава фирмата би продавала всяко количество, по-малко от q по цена, по-малка от p: ако количеството е по-малко от q_k би го продавала по цена p_k, ако количеството е по-голямо от q_k, но по-малко от q – по цена, равна на маргиналните разходи за производството на това количество. Но фирмата за всяко едно количество ще получи една и съща по-висока цена p. Разликата между действителните приходи и желаните приходи при вариране на количеството от 0 до q е производителския излишък (producer surplus) $PS(q)$ на фирмата. Ще имаме

$$\begin{aligned} PS(q) = TR(q) - \left(p_k q_k + \int_{q_k}^{q} MC(u)du\right) &= pq - p_k q_k - \int_{q_k}^{q} C'(u)du \\ &= pq - p_k q_k - C(q) + C(q_k) \\ &= pq - p_k q_k - F - AVC(q)q + F + AVC(q_k)q_k \\ &= pq - p_k q_k - AVC(q)q + p_k q_k = \big(p - AVC(q)\big)q \end{aligned}$$

Тъй като за печалбата имаме

$$\Pi(q) = \big(p - AC(q)\big)q$$

тогава $PS(q) - \Pi(q) = \big(p - AVC(q) - p + AC(q)\big) = AFC(q)q = F \Longrightarrow$

$$PS(q) = \Pi(q) + F$$

Така получихме, че производителският излишък е сумата от печалбата на фирмата и постоянните разходи. Тъй като в дългосрочен план няма постоянни разходи, тогава производителският излишък съвпада с печалбата.

Задача. Да се възстанови функцията на разходи от рис. 10, ако тя е кубична. Да се намерят критичните цена и количество. Да се намери обратната функция на предлагане. Ако отрасъла, в който работи фурмата генерира отрасловото си равновесие на базата на функция на търсене $x(p) = 625 - 8p$ и функция на предлагане $y(p) = 6p - 460$, да се намерят равновесните стойности за отрасъла и фирмата, както и пазарния дял на фирмата в отрасъла. Да се намери печалбата на фирмата. Забележка: Предполага се, че количествата при отрасловия модел са в хиляди броя, а при фирмения – в броя.

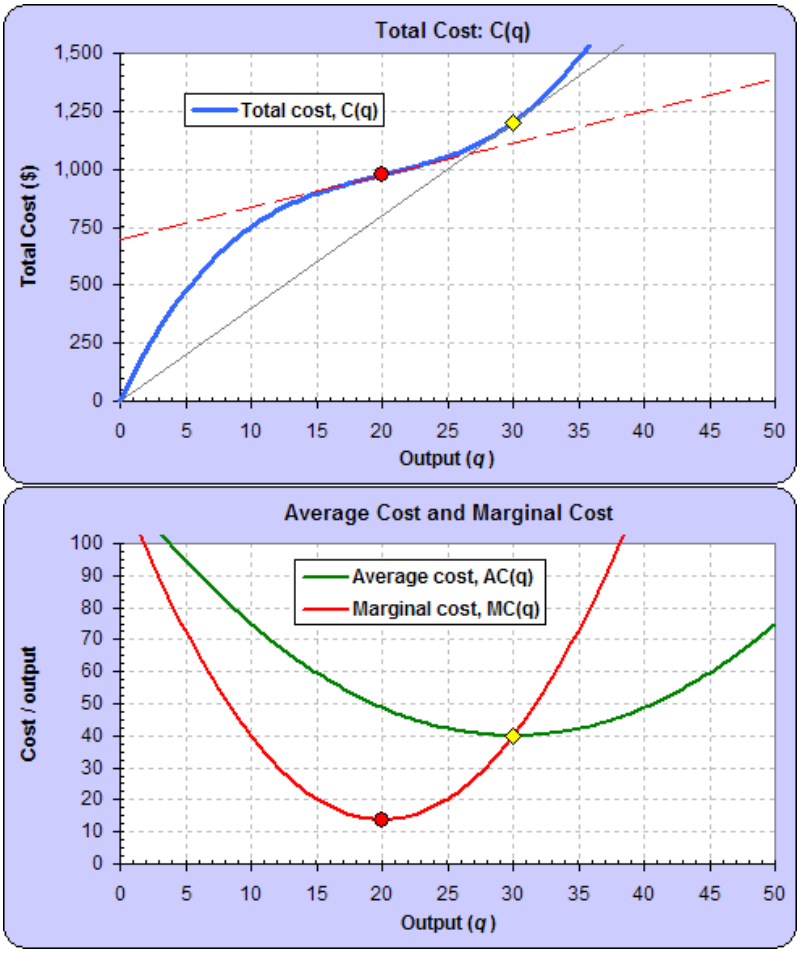


Рис. 10

Решение. Ясно е, че разходната функция би следвало да има вида $C(q) = aq - bq^2 + cq^3$ ($C(0) = 0$, т.е. няма постоянни разходи). Сигурните точки с кръгли стойности са $C(20) = 1000$(горен чертеж - TC-линия) и $MC(30) = AC(30) = 40$ (долен чертеж – пресечната точка на MC-линията и AC-линията). Те са достатъчни за възстановяването на функцията на разходи. От $C(20) = 1000$ получаваме уравнението $a - 20b + 400c = 50$. Тъй като $MC(q) = C'(q) = a - 2bq + 2cq^2$ от $MC(30) = 40$ получаваме още едно уравнение $a - 60b + 2700c = 40$. Имаме $AC(q) = \frac{C(q)}{q} = a - bq + cq^2$, тогава от $AC(30) = 40$ получаваме последното уравнение $a - 30b + 900c = 40$. Решавйки линейната система от три уравнения са трите неизвестни a, b и c получавме еднозначно решение: $a = 130$, $b = 6$ и $c = 0{,}1$, така функцията на разходи е възстановена - $C(q) = 130q - 6q^2 + 0{,}1q^3$. Точката на пресичане на MC-линията и AC-линията (в случая $AC = AVC$) ни дава критичните цена и количество: $p_k = 40$, $q_k = 30$(тези стойности биха се получили и при минимализирането на AC - $p_k = AC_{min}(q_k) = MC(q_k)$). Намираме обратната функция на предлагане $p = MC(q) = C'(q) = 130 - 12q + 0{,}3q^2 \geq 40$ при $q \geq 30$. Графиката ù – S-линията е частта от MC-линията, разположена над AC-линията. Отрасловото търсене $x(p)$ и предлагане $y(p)$ се изравняват $(625 - 8p = 6p - 460)$при цена $p = 77{,}5$ и количество $q = 5$. Функцията на търсене за фирмата ще бъде $p = 77{,}5$. Изравняването на фирменото търсене и предлагане $(p = 77{,}5 = 130 - 12q + 0{,}3q^2)$ дава две стойности за q: $q_1 = 35$ и $q_2 = 5$. Тъй като $q_2 = 5$ не е в дефиниционното множество на фирмената функция на предлагане $q \geq 30$, то фирмата ще трябва да произведе $q = 35$. Тъй като отрасловото производство е $q = 5000$, пазарният

дял на фирмата в отрасъла ще възлиза на $\frac{35}{5000} \cdot 100\% = 0{,}7\%$. Печалбата е $\Pi(35) = \big(p - AC(35)\big)35 = (77{,}5 - 42{,}5)35 = 1225$.

2. Производствена функция

Ще разглеждаме унипродуктна фирма, която за производството си използва n на брои ресурси. Пространство на ресурсите се нарича множеството от всевъзможни комбинации на количества от тези ресурси:

$$\mathbb{R}_n{}^+ = \{z = (z_1, z_2, \dots, z_n)/z_1 \geq 0, z_2 \geq 0, \dots, z_n \geq 0\}$$

Като използваме ресурсите в количества $z_1, z_2, \dots, z_n$ може да произведем количество q от крайния продукт. Всички възможни комбинации на количества ресурси и количество готова продукция образуват технолигичното пространство

$$TS \subset \mathbb{R}_{n+1}{}^+ = \{(z_1, z_2, \dots, z_n; q)/z_1 \geq 0, z_2 \geq 0, \dots, z_n \geq 0; q > 0\}$$

Производствена функция (production function) е зависимостта между количеството на ресурсите $z(z_1, z_2, \dots, z_n)$ и максималното количество от крайната стока, което може да се произведе с тези количества ресурси. Бележим

$$q = F(z) = F(z_1, z_2, \dots, z_n)$$

Казва се, че чрез производствената функция се задава технологията на производство на фирмата. Ясно е, че $q = F(z_1, z_2, \dots, z_n)$ е уравнение на повърхнина в $\mathbb{R}_{n+1}{}^+$, която ограничава отгоре технологичното пространство TS. Основно ще разгледаме производствени функции на две ресурсни променливи: K – количество на вложения в производството капитал (capital) и L – труд (labor), тогава

$$q = F(K, L)$$

Малко икономическа терминолигия:

$\frac{q}{K}$ – средна производителност на капитала (average productivity of capital)

$\frac{q}{L}$ – средна производителност на труда (average productivity of $l$abor)

$\frac{K}{q}$ – капиталоемкост; $\frac{L}{q}$ – трудоемкост

$\frac{K}{L}$ – съотношение капитал – труд; $\frac{L}{K}$ – съотношение труд – капитал

$$M_K F = \frac{\partial F}{\partial K} = F_K = q_K - \text{маргинална производителност на капитала}$$

$$M_L F = \frac{\partial F}{\partial L} = F_L = q_L - \text{маргинална производителност на труда}$$

В случай на много променливи - $M_i F = \frac{\partial F}{\partial z_i} = F_i$ – маргинална производителност на i –я ресурс.

Забележка. В икономическата литература се използват и синонимите: за ресурс – фактор на производството и за маргинална производителност – маргинална ефективност.

Неокласическа производствена функция. Тя е двукратно диференцируема функция, удовлетворяваща следните свойства (аксиоми):

1. $F(0,0) = 0$ – без ресурси няма продукция;
2. $F_K \geq 0$ и $F_L \geq 0$ – производството не намалява при нарастване количеството на един от ресурсите (и запазване на другите). Това свойство в икономиката се нарича закон за ненамаляващата маргинална производителност на ресурсите;
3. $F_{KK} = \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} = \frac{\partial}{\partial K} F_K \leq 0$ и $F_{LL} = \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} \leq \frac{\partial}{\partial L} F_L \leq 0$ - маргиналната производителност на всеки от ресурсите не нараства при нарастване на количеството му – закон за спадащата ефективност на ресурсите.
4. $F_{KL} = \frac{\partial^2 F}{\partial K \partial L} = \frac{\partial}{\partial K} F_L = F_{LK} = \frac{\partial^2 F}{\partial L \partial K} = \frac{\partial}{\partial L} F_K \geq 0$ – маргиналната производителност на всеки от ресурсите не намалява при нарастване количеството на друг ресурс.
5. $F(\infty, L) = F(K, \infty) = \infty$ - неограниченото нарастване на количеството на един от ресурсите води до неограничено нарастване на продукцията.

Ясно е, че горните свойства на производствената функция представляват една идеализация, която е твърде удобна за прилагане на математически апарат с цел решаване на различните задачи на фирмата, чиято технолигия на производство се задава чрез неокласическа производствена функция. В много случаи обаче реалното производство не може да се вмести в този модел – не са изпълнени горните свойства и най-вече свойство 2. Така например, при нарастване количеството на препарати за растителна защита добивите на селскостопанска продукция нарастват до едно положение, а след това започват да спадат. Тогава се избира така наречената **икономическа област** – ограничено, сръзано и затворено (защото неравенствата са нестроги) подмножество на пространството

на ресурсите, така че при изменение количествата на ресурсите в тази област да бъдат изпълнени всички свойства без последното.

Твърдение. Неокласическата производствена функция е квазивдлъбната.

Съгласно свойства 2., 3. и 4 за знаците на елементите на обрамчения хесиан ще имаме

$$\bar{H}(F) = \begin{pmatrix} 0 & F_K & F_L \\ F_K & F_{KK} & F_{KL} \\ F_L & F_{KL} & F_{LL} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & + & + \\ + & - & + \\ + & + & - \end{pmatrix},.$$

което показва, че детерминантата му е неотрицателна и тъй като главният минор $\begin{vmatrix} 0 & F_K \\ F_K & F_{KK} \end{vmatrix} \leq 0$ то съгласно критерия за квазивдлъбнатост, неокласическата производствена функция притежава това свойство.

Обратното обаче не е вярно – има растящи квазивдлъбнати функции (за които е изпълнено свойство 2.), които не са неокласически производствени функции. Такъв пример е функцията $F(K,L) = K^2L^2$, която има всички свойства без 3. ($F(0,0) = 0, F_K = 2KL^2 > 0, \quad F_L = 2K^2L > 0, \quad F_{KL} = 4KL > 0, \quad F(\infty, L) = F(K,\infty) = \infty$ но $F_{KK} = 2L^2 > 0$ и $F_{LL} = 2K^2 > 0$).

Така неокласическите производствени функции попадат в един от следните класове:

1. Строго вдлъбнати функции - $|H(F)| = F_{KK}F_{LL} - {F_{KL}}^2 > 0$;
2. Нестрого вдлъбнати функции (които не са строго вдлъбнати) - $|H(F)| = F_{KK}F_{LL} - {F_{KL}}^2 = 0$;
3. Квазивдлъбнати функции (които не са вдлъбнати) - $|H(F)| = F_{KK}F_{LL} - {F_{KL}}^2 < 0$ но $|\bar{H}(F)| = 2F_KF_LF_{KL} - {F_K}^2F_{LL} - {F_L}^2F_{KK} > 0$.

Тук е мястото да покажем една важна разлика между функцията на потребителска полезност и производствената функция. На едно потребителско предпочитание съответстват безброй много функции на полезност, чрез всяка монотонна трансформация можем да получим нова функция на полезност от дадена такава. Обратно, на една производствена технология съответства точно определена производствена функция.

Еластичности по ресурсите. **Еластичност по капитала** се задава с

$$\varepsilon_K = F_K\frac{K}{F} \cong \frac{\Delta F}{\Delta K}\frac{K}{F} = \frac{\frac{\Delta F}{F}}{\frac{\Delta K}{K}} = \frac{\%\text{ на }\Delta F\text{ от }F}{\%\text{ на }\Delta K\text{ от }K}$$

и показва с какъв процент ще нарастне количеството продукция при нарастване на количеството капитал с един процент.

Аналогично

$$\varepsilon_L = F_L \frac{L}{F} \cong \frac{\Delta F}{\Delta L}\frac{L}{F} = \frac{\frac{\Delta F}{F}}{\frac{\Delta L}{L}} = \frac{\%\text{ на }\Delta F\text{ от }F}{\%\text{ на }\Delta L\text{ от }L}$$

се нарича **еластичност по труда** и показва с какъв процент ще нарастне количеството продукция при нарастване на количеството труд с един процент.

За тези ресурсни еластичности имаме

$$0 \le \varepsilon_K \le 1 \quad \text{и} \quad 0 \le \varepsilon_L \le 1$$

Първото неравенство следва от свойство 2., а второто се получава от 3. И наистина, нека $\varepsilon_K = 1 + \alpha > 1$, тогава $F_K = (1+\alpha)\frac{F}{K}$ и $F_{KK} = (1+\alpha)\left(\frac{F_K}{K} - \frac{F}{K^2}\right) = (1+\alpha)\left((1+\alpha)\frac{F}{K^2} - \frac{F}{K^2}\right) = (1+\alpha)\alpha\frac{F}{K^2} > 0$, което влиза в противоречие със свойство 3.

Сумата от тези две еластичности се нарича **обща** (ресурсна) **еластичност**

$$\varepsilon = \varepsilon_K + \varepsilon_L$$

и показва с какъв процент ще нарастне обемът на продукцията при едновременното нарастване на капитала и труда с един процент. В случаите, когато $\varepsilon_K > \varepsilon_L$ се говори за **интензивно** производство, а при $\varepsilon_K < \varepsilon_L$ – **екстензивно**.

В редица случаи технологията на производство може да се моделира с производствени функции, които не са двукратно гладки (диференцируеми). Такъв е случая с **производствената функция на Леонтиев**

$$q = F(K,L) = min\left\{\frac{K}{a}, \frac{L}{b}\right\},$$

наричана още **производствена функция с пълна взаимодопълняемост на ресурсите**. Очевидно, при $q = \frac{K}{a} = \frac{L}{b}$ няма диференцируемост, при $\frac{K}{a} > \frac{L}{b}$ $F = \frac{L}{b}$, $F_K = \varepsilon_K = 0$, $F_L = \frac{1}{b}$, $\varepsilon_L = 1$, а при $\frac{K}{a} < \frac{L}{b}$ $F = \frac{K}{a}$, $F_K = \frac{1}{a}$, $\varepsilon_K = 1$, $F_L = \varepsilon_L = 0$.

Друг тривиален пример за производствена функция е **линейната производствена функция**

$$q = F(K, L) = aK + bL$$

или **производствена функция с пълна взаимозаменяемост на ресурсите**. Имаме $F_K = a$, $\varepsilon_K = \frac{aK}{aK+bL}$, $F_L = b$, $\varepsilon_L = \frac{bL}{aK+bL}$, $\varepsilon = 1$.

Мултипликативна производствена функция.

$$q = F(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

На базата на първите и втори частни производни на производствената функция по ресурсите

$$\bar{H}(F) = \begin{pmatrix} 0 & F_K & F_L \\ F_K & F_{KK} & F_{KL} \\ F_L & F_{KL} & F_{LL} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & A\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta} & A\beta K^{\alpha}L^{\beta-1} \\ A\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta} & A\alpha(\alpha-1)K^{\alpha-2}L^{\beta} & A\alpha\beta K^{\alpha-1}L^{\beta-1} \\ A\beta K^{\alpha}L^{\beta-1} & A\alpha\beta K^{\alpha-1}L^{\beta-1} & A\beta(\beta-1)K^{\alpha}L^{\beta-2} \end{pmatrix}$$

виждаме, че тя е неокласическа при $0 \leq \alpha \leq 1$ и $0 \leq \beta \leq 1$. Тъй като

$$|H(F)| = F_{KK}F_{LL} - {F_{KL}}^2 = A^2\alpha\beta[1 - (\alpha + \beta)]K^{2\alpha-2}L^{2\beta-2}$$

мултипликативната производствена функция е

строго вдлъбната при $\alpha + \beta < 1$

нестрого вдлъбната при $\alpha + \beta = 1$

квазивдлъбната при $1 < \alpha + \beta \leq 2$

Понякога при $\alpha + \beta = 1$ мултипликативната производствена функция се нарича производствена функция на Кооб – Дъглас, а в останалите случаи – обобщена функция на Кооб – Дъглас. Да пресметнем ресурсните еластичности на мултипликативната производствена функция:

$$\varepsilon_K = F_K\frac{K}{F} = A\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta}\frac{K}{AK^{\alpha}L^{\beta}} = \alpha$$

$$\varepsilon_L = F_L\frac{L}{F} = A\beta K^{\alpha}L^{\beta-1}\frac{L}{AK^{\alpha}L^{\beta}} = \beta$$

Така получаваме, че при мултипликативната производствена функция ресурсните еластичности са константи, съвпадащи със степенните показатели на съответните количества ресурси в самата производствена функция, тогава ще имаме

$$q = F(K, L) = AK^{\varepsilon_K} L^{\varepsilon_L}$$

Нещо повече, можем да покажем, че е вярно и обратното: всяка неокласическа производствена функция с константни еластичности по ресурсите е мултипликативна. И наистина, нека $\varepsilon_K = F_K \frac{K}{F} = \alpha = const$. Ако зафиксираме L получаваме $\frac{dF}{dK} = \alpha \frac{F}{K} \Longrightarrow \frac{dF}{F} = \alpha \frac{dK}{K}$, откъдето след интегриране ще имаме $\ln F = \ln K^{\alpha} + \ln A \Longrightarrow F = AK^{\alpha}$, като A ще бъде различно за различните стойности на L и тогава $F(K, L) = A(L)K^{\alpha}$. Сега ще използваме, че $\varepsilon_L = F_L \frac{L}{F} = \beta$, откъдето при фиксиране на K получаваме $A'(L)K^{\alpha} \frac{L}{A(L)K^{\alpha}} = \beta$ или $\frac{dA(L)}{A(L)} = \beta \frac{dL}{L}$. След интегриране намираме, че $A(L) = AL^{\beta}$ при $A = const$. Така окончателно за функцията с постоянни еластичности получаваме $F(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$, т.е. тя не може да бъде друга, освен мултипликативна производствена функция.

Изокванти (isoquants) ще наричаме линиите на ниво на производствената функция $q = F(K, L)$, т.е. множеството от точки в равнината (K, L) за които стойността на производствената функция е една и съща: $F(K, L) = q_0 = const$ са уравненията на изоквантите. Те образуват еднопараметрична фамилия от линии в равнината на ресурсите: през всяка точка от тази равнина минава и то само една изокванта. Поради свойствата на производствената функция на изокванти, които са по-отдалечени от координатното начало отговарят по-големи стойности на продукцията.

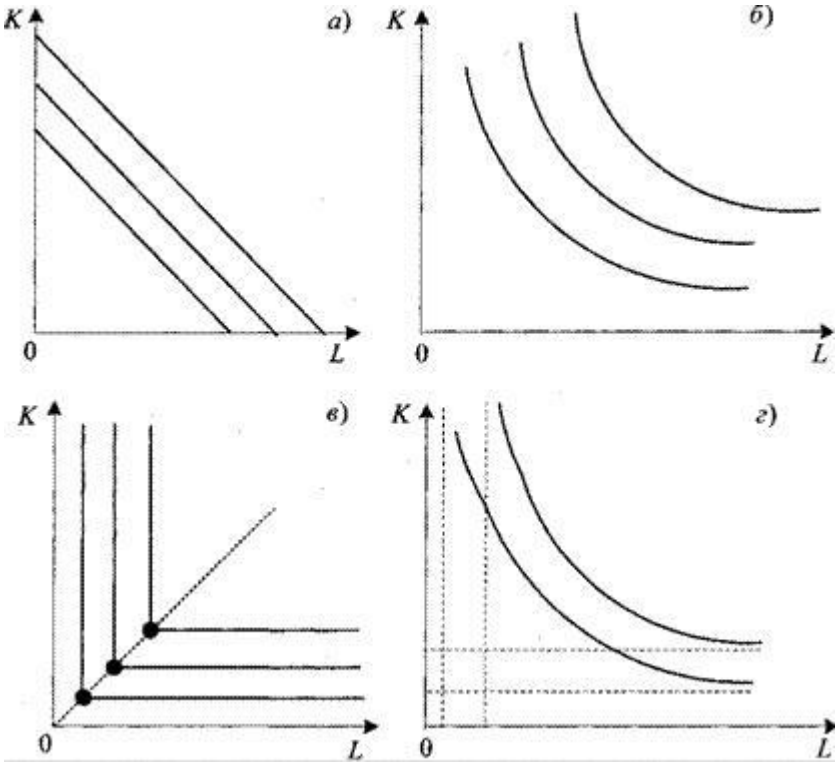


Рис. 11. Изокванти

На рис. 11 са изобразени типични изокванти за някои производствени функции: а) линейната производствена функция, б) мултипликативната производствена функция, в) производствената функция на Леонтиев. Изоквантите на линейната функция $q = aK + bL$ са правите линии $aK + bL = c$, на

мултипликативната $q = AK^{\alpha}L^{\beta}$- квазихиперболите $AK^{\alpha}L^{\beta} = c$. Изоквантите на производствената функция на Леонтиев $q = min\left\{\frac{K}{a}, \frac{L}{b}\right\}$ имат точки на „пречупване“ с координати $(K = ac, L = bc)$, разположени на правата $\frac{K}{a} = \frac{L}{b}$, разделяща равнината на ресурсите на две области: в едната (при $\frac{K}{a} > \frac{L}{b}$) изоквантите имат уравнение $L = bc$ и са успоредни на K-оста, а в другата (при $\frac{K}{a} < \frac{L}{b}$) - $K = ac$ и са успоредни на L-оста.

Маргинална норма на технологично заместване. Предполагаме, че при дадена комбинация на ресурсите K и L е произведена продукция в обем $q = F(K, L)$. Нека да намалим обема на трудовите ресурси с ΔL, т.е от L до $L' = L - \Delta L$. Ако искаме да запазим количеството произведена продукция би трябвало да увеличим обема на капитала с ΔK или от K до $K' = K + \Delta K$. Ще имаме $q = F(K, L) = F(K', L') = F(K + \Delta K, L - \Delta L)$ (рис. 12). Геометрично, от точка $A(K, L)$ се предвижваме до точка $A'(K', L')$, като двете точки са разположени върху една и съща изокванта. Ясно е, че тези изменения на количествата на ресурсите ΔL и ΔK (при запазване на количеството) зависят едно от друго. Да намерим тази зависимост при безкрайно малки изменения: $\Delta L = dL$ и $\Delta K = dK$. Прилагаме формулата за пълния (тоталния) диференциал на производствената функция

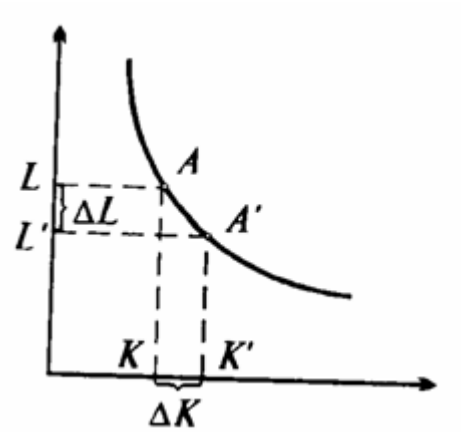


Рис. 12. Технологично заместване на труд с капитал

$$dF(K, L) = F_K dK + F_L dL$$

и отчитайки, че $dF(K, L) = 0$ $(F(K, L) = q = const)$, получаваме

$$-\frac{dK}{dL}\ |_{F=const} = \frac{F_L}{F_K}$$

Величината $-\frac{dK}{dL}\ |_{F=const} = -\lim_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta L}\ |_{F=const}$, показваща с колко единици капитал трябва да заменим единица труд при запазване на произведеното количество се нарича маргинална норма на технологично заместване (marginal rate of technological substitution) на труд с капитал. Ще я бележим с $MRTS_{LK}$ или по-кратко S_K, тогава

$$MRTS_{LK} = S_K = -\lim_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta L}\ |_{F=const} = -\frac{dK}{dL}\ |_{F=const} = \frac{F_L}{F_K}$$

Аналогично можем да дефинираме маргинална норма на технологично заместване на капитал с труд

$$MRTS_{KL} = S_L = -\lim_{\Delta K \to 0} \frac{\Delta L}{\Delta K} \mid_{F=const} = -\frac{dL}{dK} \mid_{F=const} = \frac{F_K}{F_L}$$

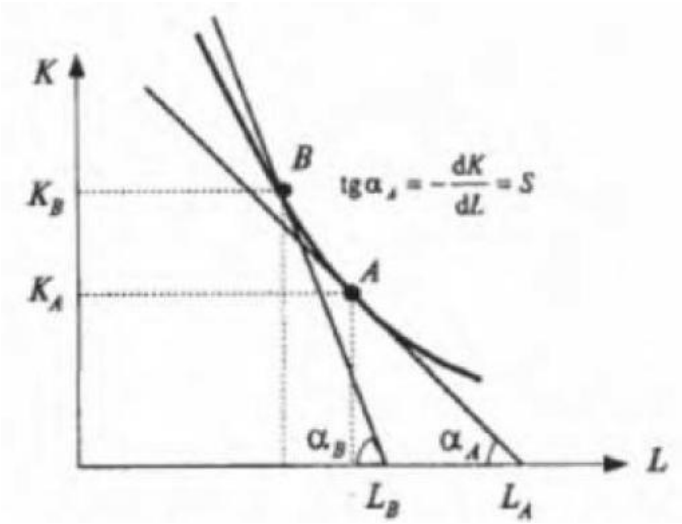


Рис. 13. Геометрична интерпретация на маргиналната норма на технологично заместване.

Очевидно е, че $S_K S_L = 1$. Тъй като (F_K, F_L) е нормален вектор за изоквантата във всяка нейна точка, S_K е равна на тангенсът на острия ъгъл, сключван от допирателната към изоквантата с L-оста (рис. 13).

Тъй като производствената функция на Леонтиев предполага пълна взаимозаменяемост на ресурсите, то при нея маргиналните норми S_K и S_L нямат смисъл. За линейната производствена функция имаме $S_K = \frac{b}{a}$ и $S_L = \frac{a}{b}$, а за мултипликативната - $S_K = \frac{\beta K}{\alpha L}$ и $S_L = \frac{\alpha L}{\beta K}$.

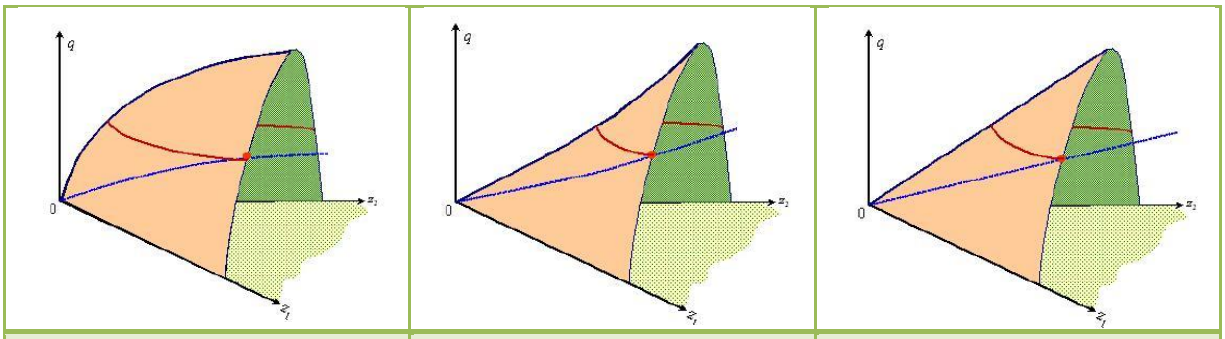
Производствена функция с еднаква възвращаемост от мащаба. Стесняваме класа от производствени функции чрез въвеждане на едно допълнително условие:

6. Производствената функция $q = F(K, L)$ има еднаква възвращаемост от мащаба, ако за произволен набор от ресурси (K, L) е изпълнено точно едно от условията:

a) $F(tK, tL) < tF(K, L)$ за произволно $t > 1$ – **намаляваща възвращаемост от мащаба** (decreasing returns to scale);
b) $F(tK, tL) > tF(K, L)$ за произволно $t > 1$ – **нарастваща възвращаемост от мащаба** (increasing returns to scale);
c) $F(tK, tL) = tF(K, L)$ за произволно $t > 0$ – **постоянна възвращаемост от мащаба** (constant returns to scale);

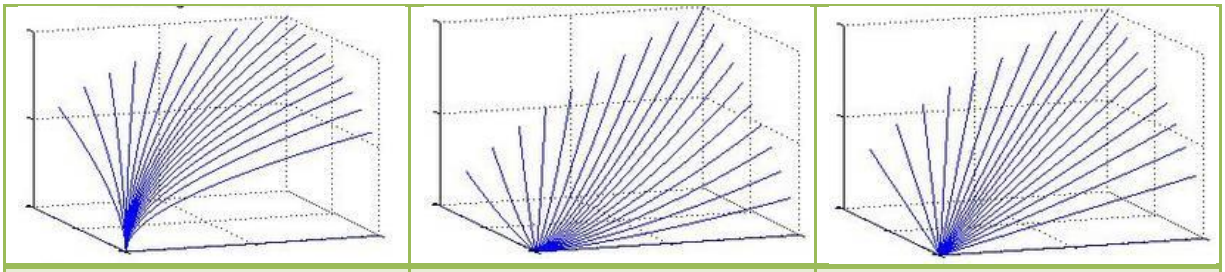
Ще дадем геометрична интерпретация на горните свойства. Нека да разгледаме случая на производствена функция с намаляваща възвращаемост от мащаба. Да разгледаме всевъзможните сечения на повърхнината на тази функция с

равнините $K:L = const$, т.е считаме пропорциите между ресурсите за фиксирани. Тогава, ако $K:L = c$ $F(K,L) = F(cL,L) = f(L)$ е уравнението на такова сечение като функция на една променлива. Тогава условието 6.а) означава, че за тази функция е изпълнено $f(tL) < tf(L)$, следователно тя е вдлъбната функция. Сеченията с фиксирани ресурси на функциите с нарастваща възвращаемост са изпъкнали функции, а с функции с постоянна възвращаемост – линейни функции. Когато тези сечения са вдлубнати функции самата производствена функция е строго вдлъбната, при линейни функции – нестрого вдлъбната, а при изпъкнали – квазивдлъбната. На рис. 14 са показани типични пространствени графики на тези производствени функции, а на рис. 15 – типични сечения с фиксирани пропорции на ресурсите.



Намаляваща възвращаемост от мащаба	Нарастваща възвращаемост от мащаба	Постоянна възвращаемост от мащаба

Рис. 14. Повърхнини на различните видове производствени функции с еднаква възвращаемост от мащаба



Намаляваща възвращаемост от мащаба	Нарастваща възвращаемост от мащаба	Постоянна възвращаемост от мащаба

Рис. 15. Сечения с фиксирани пропорции на ресурсите при различните видове производствени функции с еднаква възвращаемост от мащаба

Сега ще покажем, че съществуват (достатъчно много) производствени функции, удовлетворяващи условия 1.-5., но не и 6. – това са производствените функции които нямата една и съща възвтащаемост от мащаба в цялото ресурсно пространство. Такъв пример е функцията

$$F(K,L) = AK^{0,5}L^{0,25} + BK^{0,5}L^{0,75}$$

Пресмятаме частните производни по ресурсите до втора включително:

$$F_K = \frac{A}{2}K^{-0,5}L^{0,25} + \frac{B}{2}K^{-0,5}L^{0,75}\ ;\ \ F_L = \frac{A}{4}K^{0,5}L^{-0,75} + \frac{3B}{4}K^{0,5}L^{-0,25}$$

$$F_{KK} = -\frac{A}{4}K^{-1,5}L^{0,25} - \frac{B}{4}K^{-1,5}L^{0,75}\ ;\ \ F_{LL} = -\frac{3A}{16}K^{0,5}L^{-1,75} - \frac{3B}{16}K^{0,5}L^{-1,25}$$

$$F_{KL} = \frac{A}{8}K^{-0,5}L^{-0,75} + \frac{3B}{8}K^{-0,5}L^{-0,25}$$

и на базата на вторите частни производни пресмятаме детерминантата на хесиана

$$|H(F)| = F_{KK}F_{LL} - {F_{KL}}^2 = \frac{A^2}{32}K^{-1}L^{-1,5} - \frac{3B^2}{32}K^{-1}L^{-0,5}$$

Така получаваме, че

$$\text{при } L < \frac{A^2}{3B^2} \quad |H(F)| > 0 \text{ и } F(K,L) \text{ е строго вдлъбната,}$$

$$\text{при } L > \frac{A^2}{3B^2} \quad |H(F)| > 0 \text{ и } F(K,L) \text{ е квазивдлъбната}$$

или тази производствена функция има променливо поведение – при малки стойности на L тя се държи като функция с намаляваща възвращаемост, а при големи – като функция с нарастваща възвращаемост.

Друг подобен пример е производствената функция

$$F(K,L) = \begin{cases} F_1(K,L) = BK^{0,5}L^{0,75} \text{ при } L < \dfrac{A^2}{B^2} \\ F_2(K,L) = AK^{0,5}L^{0,25} \text{ при } L > \dfrac{A^2}{B^2} \end{cases}$$

Тъй като $F_1\left(K,\frac{A^2}{B^2}\right) = F_2\left(K,\frac{A^2}{B^2}\right) = A^{1,5}B^{-0,5}K^{0,5}$ при $L = \frac{A^2}{B^2}$ имаме непрекъснато съединяване на двете части на функцията. В този случай за малки стойности на L $F(K,L) = F_1(K,L)$ е квазивдлъбната функция и има поведение на функция с нарастваща възвращаемост от мащаба, а при големи - $F(K,L) = F_2(K,L)$ е строго вдлъбната с намаляваща възвращаемост.

Еластичност по мащаба. Определя се така

$$\varepsilon_t = \lim_{t\to 1}\frac{dF(tK,tL)}{dt}\frac{t}{F(tK,tL)}$$

Лесно се показва, че в случай на производствена функция с една и съща възвращаемост от мащаба това е общата еластичност по ресурсите.

Хомогенни производствени функции. Производствената функция $q = F(K, L)$ се нарича хомогенна от степен γ, ако е изпълнено

$$F(tK, tL) = t^{\gamma} F(K, L) \text{ за } \forall t$$

Тъй като при $t > 1$ $t^{\gamma} > t$ за $\gamma > 1$ и $t^{\gamma} < t$ за $\gamma < 1$, то хомогенните производствени функции от степен $\gamma > 1$ са функции с нарасрваща възвращаемост от мащаба, тези от степен $\gamma < 1$ – с намаляваща възвращаемост и от степен $\gamma = 1$ – с постоянна. Въобще хомогенните производствени функции са функции с еднаква възвращаемост от мащаба. Обратното не е вярно. Например производствената функция

$$F(K, L) = AK^{0,5}L^{0,5} + BK^{0,5}L^{0,75}$$

е с нарастваща възвращаемост, но не е хомогенна.

Нека да диференцираме двете страни на горното равенство по t. За лявата страна получаваме

$$\frac{dF(tK, tL)}{dt} = \frac{\partial F(tK, tL)}{\partial tK} K + \frac{\partial F(tK, tL)}{\partial tL} L = \frac{t^{\gamma} \partial F(K, L)}{t \partial K} K + \frac{t^{\gamma} \partial F(K, L)}{t \partial L} L$$
$$= t^{\gamma - 1}(F_K K + F_L L),$$

а за дясната ще имаме

$$\frac{dt^{\gamma} F(K, L)}{dt} = \gamma t^{\gamma - 1} F(K, L).$$

Така окончателно получаваме

$$F_K K + F_L L = \gamma F(K, L)\ ,$$

което е забележителното **тъждество на Ойлер** за хомогенните функции.

Ако разделим горното равенство с $F(K, L)$ получаваме

$$F_K \frac{K}{F} + F_L \frac{L}{F} = \varepsilon_K + \varepsilon_L = \varepsilon = \gamma\ ,$$

следователно за хомогенните производствени функции общата еластичност (еластичността по мащаба) съвпада със степента на хомогенност.

Сега нека да диференцираме тъждеството на Ойлер първо по K и след това по L, получаваме

$$F_{KK}K + F_K + F_{LK}L = \gamma F_K \Longrightarrow F_{KK}K + F_{LK}L = (\gamma - 1)F_K$$

$$F_{KL}K + F_{LL}L + F_L = \gamma F_L \Longrightarrow F_{KL}K + F_{LL}L = (\gamma - 1)F_L$$

Нека да умножим първото от горните тъждества с K, а второто с L и да ги съберем:

$$F_{KK}K^2 + 2F_{KL}KL + F_{LL}L^2 = (\gamma - 1)(F_K K + F_L L) = (\gamma - 1)\gamma F(K, L)$$

За последното равенство отново сме използвали тъждеството на Ойлер. Така получаваме, че

$$F_{KK}K^2 + 2F_{KL}KL + F_{LL}L^2 \begin{cases} < 0 \text{ при } \gamma < 1 \\ = 0 \text{ при } \gamma = 1 \\ > 0 \text{ при } \gamma > 1 \end{cases}$$

Но от друга страна

$$F_{KK}K^2 + 2F_{KL}KL + F_{LL}L^2 \begin{cases} < 0 \text{ при } F(K, L) \quad \text{строго вдлъбната} \\ = 0 \text{ при } F(K, L) \text{ нестрого вдлъбната} \\ > 0 \text{ при } F(K, L) \quad \text{квазивдлъбната} \end{cases}$$

Така получаваме потвърждение за връзката между степенния показател на хомогенност и характера на производствената функция.

За прегледност да отразим връзките между видовете производствени функции (без други ограничения), производствени функции с еднаква възвращаемост и хомогенни производствени функции в таблица

Производствени функции без допълнителни ограничения	Производствени функции с еднаква възвращаемост	Хомогенни производствени функции от степен γ
Строга вдлъбнатост	Намаляваща възвращаемост	$\gamma < 1$
Нестрога вдлъбнатост	Постоянна възвращаемост	$\gamma = 1$
Квазивдлъбнатост	Нарастваща възвращаемост	$\gamma > 1$

Нека $F(K, L)$ е хомогенна функция с показател на хомогенност $\gamma = 1$. Тогава ще имаме

$$F(K, L) = F\left(L \cdot \frac{K}{L}K, L \cdot 1\right) = L \cdot F\left(\frac{K}{L}, 1\right)$$

Ако положим $\frac{K}{L} = k$ – съотнощението капитал – труд, $F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = F(k, 1) = f(k)$ и $\frac{F(K,L)}{L} = \psi$ – производителността на труда, виждаме, че в този случай производствената функция се свежда до функцията на една променлива $\psi = f(k)$, показваща зависимостта на средната производителност на труда от средното съотношение капитал – труд.

В общия случай ще имаме $F(K, L) = L^{\gamma} F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = L^{\gamma} f(k)$, тогава за маргиналните производителности на ресурсите получаваме $F_L = L^{\gamma-1}\big(\gamma f(k) - kf'(k)\big)$, $F_K = L^{\gamma-1} f'(k)$, а за маргиналната норма $S_K = \frac{F_L}{F_K} = \gamma \frac{f(k)}{f'(k)} - k$, т.е. тя зависи само от средното съотношение капитал – труд.

Еластичност на заместването (elasticity of substitution). За хомогенните производствени функции дефинираме

$$\sigma_K = \frac{dk}{dS_K(k)} \frac{S_K(k)}{k}$$

Тази величина е еластичността на k по $S_K(k)$ и показва с колко процента трябва да се измени средното съотношение капитал – труд, за да компенсира еднопроцентно изменение на маргиналната норма, така че продукцията да се запази. Нарича се еластичност на заместването на труд с капитал. Очевидо е, че по-лесна за пресмятане е реципрочната величина

$$\sigma_K{}^{-1} = \frac{dS_K(k)}{dk} \frac{k}{S_K(k)}$$

Аналогично се определя еластичността на заместване на капитал с труд σ_L. Лесно може да се покаже, че тези две еластичности съвпадат $\sigma_K = \sigma_L = \sigma$. За това в случай на хомогенна производствена функция просто се говори за еластичност на заместването.

За линейната производствена функция имаме $S_K = \frac{b}{a} \Longrightarrow \frac{dS_K(k)}{dk} = 0 \Longrightarrow \sigma^{-1} = 0 \Longrightarrow \sigma = \infty$. При мултипликативната производствена функция - $S_K = \frac{\beta K}{\alpha L} = \frac{\beta}{\alpha} k \Longrightarrow \frac{dS_K(k)}{dk} = \frac{\beta}{\alpha} \Longrightarrow \sigma^{-1} = 1 \Longrightarrow \sigma = 1$. Тъй като $\sigma = 0$ означава пълна липса на заместване, то за производствената функция на Леонтиев можем да считаме, че $\sigma = 0$.

Еластичността на заместване е неотрицателна величина. И наистина, ако пак се върнем на рис. 13 ще забележим, че от точка $A(K_A, L_A)$ до точка $A(K_B, L_B)$ има

намаляване на количеството труд $L_A > L_B$ при нарастването на количеството капитал $K_A < K_B$ или заместване на труд с капитал, поради което съотношението капитал – труд също нараства $k_A = \frac{K_A}{L_A} < \frac{K_B}{L_B} = k_B$. На това нарастнало k (поради характера на изоквантите) съответства нарастване на маргиналната норма $S_K(A) = tg\alpha_A < tg\alpha_B = S_K(B)$. Освен това можем да кажем, че (в общия случай) σ ще зависи от k: $\sigma = \sigma(k)$. Последното води до естествена класификация на хомогенните производствени функции на два класа:

- Функции с константна еластичност на заместването (Constant Elastisity of Substitution) или CES-функции;
- Функции с променлива еластичност на заместването (Variable Elastisity of Substitution) или VES-функции;

CES-функции. Ясно е, че представените до сега хомогенни производствени функции са CES-функции. Поставяме си за задача да намерим аналитичния израз на всички такива функции. За тях е изпълнено условието

$$\frac{dk}{dS_K}\frac{S_K}{k} = \sigma = const$$

Последното е обикновенно диференциално уравнение за неизвестната функция $S_K(k)$ с отделени променливи. Като го решим получаваме $S_K = Ck^{1/\sigma}$, където C е интеграционна константа. От сравняването на този израз с израза $S_K = \gamma\frac{f(k)}{f'(k)} - k$ получаваме обикновенно диференциално уравнение за неизвестната функция $f(k)$:

$$\frac{f'}{f} = \frac{\gamma}{k + Ck^{1/\sigma}} \text{ или } \ln f = \gamma\int\frac{dk}{k + Ck^{1/\sigma}},$$

което решаваме посредством субституцията $k = t^{\sigma/(\sigma-1)}$. Получаваме

$$\int\frac{dk}{k + Ck^{1/\sigma}} = \int\frac{dt^{\sigma/(\sigma-1)}}{t^{\sigma/(\sigma-1)} + Ct^{1/(\sigma-1)}} = \frac{\sigma}{\sigma-1}\int\frac{dt}{t+C} = \frac{\sigma}{\sigma-1}\ln\big(C_1(t+C)\big)$$
$$= \frac{\sigma}{\sigma-1}\ln\left(C_1\left(k^{(\sigma-1)/\sigma} + C\right)\right),$$

където C_1 е поредната интеграционна константа. Тогава за $f(k)$ получаваме

$$f(k) = C_1\left(k^{(\sigma-1)/\sigma} + C\right)^{\frac{\sigma\gamma}{\sigma-1}}$$

Като имаме пред вид, че $k = \frac{K}{L}$ и $F(K,L) = L^\gamma f(k)$, намираме израза за $F(K,L)$:

$$F(K,L) = C_1\left(K^{(\sigma-1)/\sigma} + CL^{(\sigma-1)/\sigma}\right)^{\frac{\sigma\gamma}{\sigma-1}}$$

Ако извършим полагането $\frac{\sigma-1}{\sigma} = \rho$ общият вид на CES-функцията може да добие вида

$$F(K,L) = A(\delta K^{\rho} + (1-\delta)L^{\rho})^{\frac{\gamma}{\rho}},$$

като $A > 0$ и $0 < \delta < 1$. Изискването $\sigma > 0$ предполага $\rho < 1$, освен това $\rho \neq 0$. Да отбележим, че решението на задачата за намиране на най-общия вид на CES-функцията не обхваща случаите, когато $\sigma = 0{,}1, \infty$, съответстващи на $\rho = -\infty, 0{,}1$. При $\sigma = 0$ получаваме производствената функция

$$F(K,L) = min\left\{\frac{K^{\gamma}}{a}, \frac{L^{\gamma}}{b}\right\},$$

от която при $\gamma = 1$ се получава производствената функция на Леонтиев. Тази обобщена функция на Леонтиев (наричаща се още функция с фиксирани пропорции) е най-общата производствена функция без заместване на труда и капитала. При $\sigma = 1$ като решение се получава мултипликативната производствена функция, а при $\sigma = \infty$ - функцията

$$F(K,L) = (\delta K + (1-\delta)L)^{\gamma},$$

която при $\gamma = 1$ дава линейната производствена функция, затова ще я наричаме обобщена линейна функция. Тя дава най-общия вид на производствена функция с безкрайно заместване на ресурсите. Освен това, може да се покаже, че обобщената функция на Леонтиев, мултипликативната функция и обобщената линейна функция се получават от общия вид на CES-функцията при гранични преходи $\rho \to -\infty$, $\rho \to 0$ и $\rho \to 1$ съответно. На рис. 16 са изобразени пространствени графики на CES-функции в положения много близки до граничните. В первата колона са пространствените графики, във втората – сеченията с $F(K,L) = const$, а в третата – координатните мрежи (сеченията с $K = const$ и $L = const$). На първият ред са графиките на CES-функция, при която $\sigma = 0{,}01(\rho = -100)$, на втория - $\sigma = 1{,}01(\rho = 0{,}01)$и на третия - $\sigma = 100(\rho = 0{,}99)$. И в трите случая $A = 1$, $\delta = \gamma = 0{,}5$.

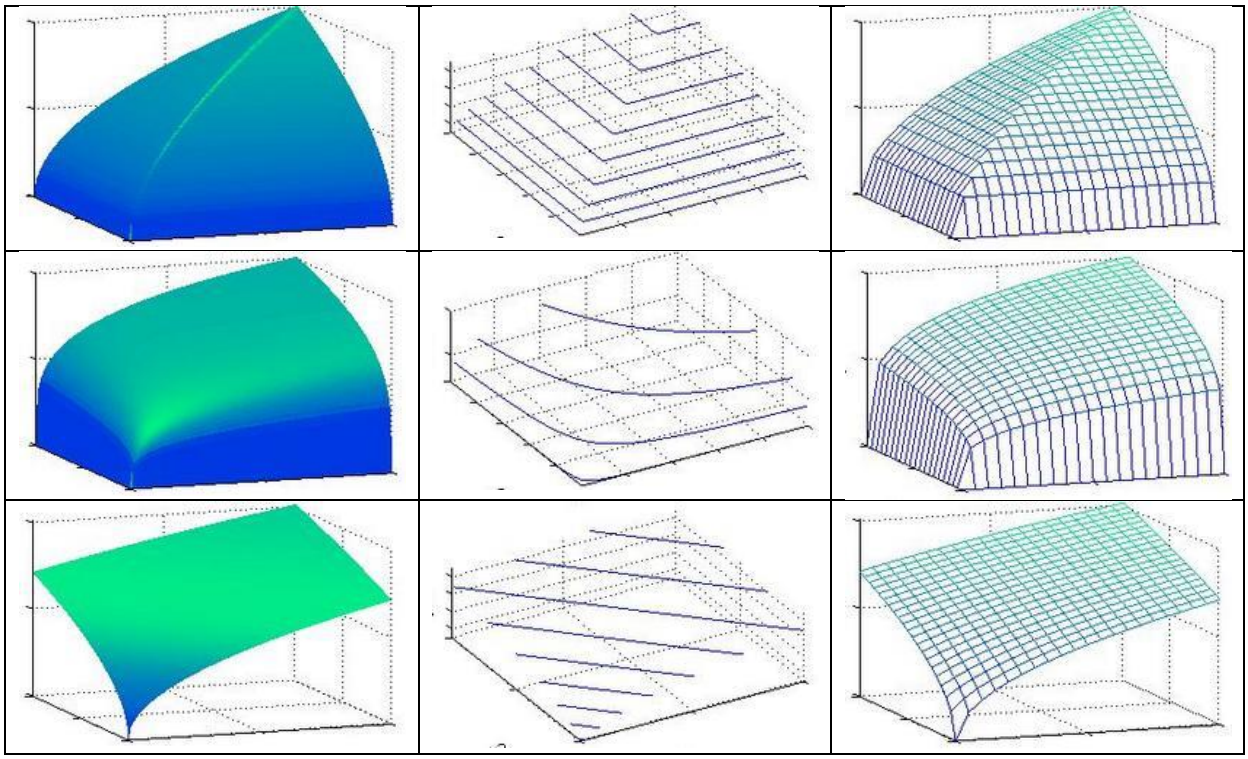


Рис. 16. Гранични положения на CES-функция, при които тя се приближава до производствената функция на Леонтиев, мултипликативната производствена функция и линейната производствена функция

Трябва да се отбележи, че при $0 < \gamma \leq 1$ CES-функцията остава неокласическа – за $\gamma > 1$ се нарушава условието за спадащата ефективност ($F_{KK} \leq 0$ и $F_{LL} \leq 0$). Това важи и за частните случаи – обобщената функция на Леонтиев и обобщената линейна функция. Единствено изключение прави мултипликативната производствена функция – при нея се допуска $\gamma > 1$, т.е. възможността за неокласическа функция с нарастваща възвращаемост. Обаче, и при $\gamma > 1$ CES-функцията остава квазивдлъбната. Очевидно, тя може да се използва при моделирането на потребителските предпочитания – като функция на полезност.

3. Намиране на разходната функция при дадена производствена функция

Нека $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ са цените на ресурсите, а $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ – количествата им, вложени в производството. Тогава разходите за производство ще бъдат

$$C = w_1 z_1 + w_2 z_2 + \cdots + w_n z_n \,.$$

В случай на две ресурсни променливи: v – цената на капитала (като процент върху количеството вложен капитал K) и w – цената на труда (средната реална заплата на вложеното количество труд L). Тогава ще имаме

$$C = vK + wL\,.$$

Нека фирмата използва в производството технология, зададена чрез производствената функция

$$q = F(z) = F(z_1, z_2, \dots, z_n)$$

в случай на n променливи или

$$q = F(K, L)$$

при $n = 2$.

Тогава можем да поставим въпроса: какви трябва да бъдат количествата вложени в производството ресурси и какви трябва да бъдат разходите, за да се произведе определено количество q с минимални разходи. На математически език задачата изглежда така:

$$C = wz = z_1 + w_2 z_2 + \cdots + w_n z_n \to \min \text{ при } q = F(z) = F(z_1, z_2, \dots, z_n)$$

или (при две ресурсни променливи)

$$C = vK + wL \to \min \text{ при } q = F(K, L)$$

Да отбележим, че тази задача е аналогична на дуалната задача на потребителя: ресурсите за производителя заместват стоките за потребителя със съответните им цени, произведеното количество q замества желаната полезност u, а производствената функция – функцията на полезност. Тази задача на производителя се решава по същия начин (като задача за условен екстремум) – чрез множителите на Лагранж. Образуваме (при $n = 2$) функцията на Лагранж

$$\mathcal{L}(K, L, \lambda) = vK + wL + \lambda\big(q - F(K, L)\big)$$

и получаваме условията от първи ред:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = v - \lambda F_K = 0 \Leftrightarrow v = \lambda F_K$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = w - \lambda F_L = 0 \Leftrightarrow w = \lambda F_L$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = q - F(K, L) = 0 \Leftrightarrow q = F(K, L)$$

Аналогично на дуалната задача на потребителя се убрждаваме, че условията от втори ред са изпълнени точно тогава, когато производствената функция $q = F(K, L)$ е строго квазивдлъбната. От пъевите две уравнения на горната система получаваме

$$\frac{F_K}{F_L} = \frac{v}{w} \quad \text{или} \quad \frac{v}{F_K} = \frac{w}{F_L} = \lambda$$

Тъй като маргиналната норма на заместване на капитал с труд е $S_L = \frac{F_K}{F_L}$, то получаваме, че

$$S_L = \frac{F_K}{F_L} = \frac{v}{w}$$

Горните равенства могат да се изкажат по следния начин: **условието за оптимално разпределение на ресурсите е**

1) **маргиналните производителности на ресурсите да са в същата пропорция, както цените им;**
2) съотношенията между цените и маргиналните производителности на всички ресурси да са равни;
3) маргиналната норма на заместване на капитал с труд да е равна на съотношението на цените на капитала и труда.

Изокости. Правите линии с уравнения $vK + wL = c = const$ в ресурсната равнина (с координати количествата капитал K и труд L) се наричат изокости. Всяка изокоста отговаря на такова съчетание на ресурсите, при което се извършват едни и същи разходи. Изокостите образуват еднопараметрична фамилия от прави, успоредни по между си – всички те имат един и същ нормален вектор с координати (v, w) – цените на ресурсите. Равенството $\frac{F_K}{F_L} = \frac{v}{w}$ показва, че за всяка изокоста съществува точка на оптимално изразходване на ресурсите – това е точката на допиране с една от изоквантите. Същото равенство показва, че за произволна изокванта съществува единствена точка на оптимално разпределение на ресурсите, тази в която става допирането със съответната изокоста. Така условието за оптимално разпределение на ресурсите очертава **линията на оптимално разпределение на ресурсите,** състояща се от точките на допиране на лините от двете фамилии – изокости и изокванти.

В случай на n ресурсни променливи условието за оптимално разпределение на ресурсите изглежда така

$$\frac{w_1}{F_1} = \frac{w_2}{F_2} = \cdots = \frac{w_n}{F_n} = \lambda$$

Да се върнем към системата от три уравнения с три неизвестни, получаваща се от условията от първи ред. Решенията и са $K^H = K^H(q, v, w)$, $L^H = L^H(q, v, w)$ и $\lambda = \lambda(q, v, w)$. Функциите $K^H = K^H(q, v, w)$ и $L^H = L^H(q, v, w)$ се наричат Хиксови функции на търсене на ресурси и са аналог на Хиксовите функции на търсене на потребителски стоки. Замествайки K^H и L^H в израза за разходите $C = vK + wL$ получаваме

$$C = C(q, v, w) = vK^H(q, v, w) + wL^H(q, v, w)$$

Това е функция на разходите на фирмата с аргументи произведеното количество продукция q и ценоте на ресурсите v и w. При фиксирани цени на ресурсите, тъй като тя дава минималните разходи за производството на определено количество q, това е разгодната функция от 1. Така, въз основа на производствената функция, при изпълнение на условието за оптимално изразходване на ресурсите, получихме функцията на разходите.

Така, например, при мултипликативната производствена функция $q = AK^{\alpha}L^{\beta}$, тъй като $S_L = \frac{\alpha L}{\beta K}$ условито за оптимално разпределение на ресурсите добива вида $S_L = \frac{\alpha L}{\beta K} = \frac{v}{w}$ или $vK : wL = \alpha : \beta$ – в оптимален режим фирмата извършва разходи за ресурси в същото съотношение, в което са степенните показатели в мултипликативната функция. Замествайки $K = \frac{\alpha w}{\beta v} L$ в производствената функция получаваме $q = A\left(\frac{\alpha w}{\beta v}\right)^{\alpha} L^{\alpha+\beta}$, откъдето $L^H = \left(\frac{q}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\beta v}{\alpha w}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$ и $K^H = \left(\frac{q}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha w}{\beta v}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$. Окончателно получаваме функцията на разходите

$$C = \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right] v^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left(\frac{q}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

От горния израз за $C = C(q)$ (при фиксирани цени на ресурсите v и w) се вижда, че при $\alpha + \beta < 1$ функцията на разходите е изпъкнала, при $\alpha + \beta = 1$ – линейна и при $\alpha + \beta > 1$ – вдлъбната. Такава връзка между производствената функция и разходната функция може да бъде направена и при много по-общи предположения за производствената функция. Тази зависимост на разходната функция от производствената функция е дадена в долната таблица

Производствени функции без допълнителни ограничения	Производствени функции с еднаква възвращаемост	Хомогенни производствени функции от степен γ	Разходана функция – аналитичен вид	Разходна функция – икономическа характеристика
Строга вдлъбнатост	Намаляваща възвращаемост	$\gamma < 1$	Строго изпъкнала	С нарастващи средни разходи
Нестрога вдлъбнатост	Постоянна възвращаемост	$\gamma = 1$	Линейна	С постоянни средни разходи
Квазивдлъбна-тост	Нарастваща възвращаемост	$\gamma > 1$	Строго вдлъбната	С намаляващи средни разходи

4. Задача за абсолютно максимализиране на печалбата

Поставяме си за цел максимализиране печалбата на фирма, работеща по технология, зададена чрез производствената функция $q = F(K, L)$, при дадени цени на: капитала v, труда w и продукта, произвеждан от фирмата p. Чрез математическо формализиране тази икономическа задача се свежда до задачата за абсолютен максимум

$$\Pi(K, L) = pF(K, L) - (vK + wL) \to max$$

По-точно, трябва да намерим какви количества ресурси K и L трябва да се приложат, за да се произведе необходимото количество, осигуряващо максимална печалба, като цените се считат за зададени (или параметри). Тъй като в 1. се убедихме, че само строго изпъкналата разходна функция може да осигури максимализиране на печалбата, въз основа на резултатите, систематизирани в горната таблица, можем да формулираме следното

Твърдение. Задачата за максимализиране на печалбата притежава решение ако е изпълнено едно от условията:

1) производствената функция е строго вдлъбната;
2) производствената функция е с намаляваща възвращаемост от мащаба (ако тя е с еднаква възвращаемост от мащаба);
3) производствената функция е хомогенна функция със степен на хомогенност $\gamma < 1$;
4) функцията на разходите е строго изпъкнала;
5) функцията на разходите е с нарастващи средни променливи разходи.

С други думи в първия ред на горната таблица са описани условията, подсигуряващи наличието на абсолютен максимум на печалбата, а на втория и третия ред – условията, при които такъв не съществува. Нака, например фирмата да работи по технология, зададена с производствена функция с нарастваща възвращаемост от мащаба, т.е. $F(tK, tL) > tF(K, L)$ за произволно $t > 1$. Тогава, ако допуснем, че има абсолютен максимум на печалбата при $K = K_0$ и $L = L_0$, то за печалбата при $K = tK_0$ и $L = tL_0$ $(t > 1)$ ще имаме $\Pi(K, L) = \Pi(tK_0, tL_0) = pF(tK_0, tL_0) - (vtK_0 + wtL_0) > tpF(K_0, L_0) - t(vK_0 + wL_0) = t\Pi(K_0, L_0) > \Pi(K_0, L_0)$. Строгото неравенство $\Pi(K, L) > \Pi(K_0, L_0)$ е в противоречие с допускането, че при $K = K_0$ и $L = L_0$ печалбата е максимална.

Съществуват два подхода за максимализиране на печалбата:

1. чрез намиране на разходната функция (с нарастващи средни променливи разходи), съответстваща на производствената функция, т.е първо се минимализират разходите и след това се максимализира печалбата;

2. директен подход – решаване на задачата за абсолютен (глобален) максимум на печалбата, разглеждана като функция на две променливи – K и L.

Максимализиране на печалбата след минимализиране на разходите. Предполага се, че е намерена разходната функция

$$C = C(q, v, w) = vK^H(q, v, w) + wL^H(q, v, w)$$

като гледаме на q като на променлива, а на v и w – като на параметри. Тогава за печалбата имаме

$$\Pi(q, p, v, w) = pq - C(q, v, w)$$

Решението (условието от I ред) е

$$p = C'(q, v, w) = MC$$

Това е обратната функция на предлагане на фирмата (цената е функция на количеството), от която чрез обръщане намираме функцията на предлагане

$$q^* = q^*(p, v, w)$$

След това, чрез заместване на q^* в Хиксовите функции на търсене на ресурси намираме Маршаловите функции на търсене на ресурси

$$K^* = K^H(q^*(p, v, w), v, w) \quad \text{и} \quad L^* = L^H(q^*(p, v, w), v, w)$$

Очевидно при това положение ще имаме

$$q^* = F(K^*, L^*)$$

Геометричната картина е следната: в ресурсната равнина (с координати K и L) разглеждаме линията на оптимално разпределение на ресурсите. В произволна нейна точка с координати K_1 и L_1 могат да се пресметнат: разходите $C_1 = vK_1 + wL_1$, количеството $q_1 = F(K_1, L_1)$, приходите $R_1 = pq_1$ и печалбата $\Pi_1 = R_1 - C_1$ (при фиксирани v, w и p). По този начин върху тази линия са дефинирани функциите $C(q), R(q)$ и $\Pi(q)$. Поради характера на разходната функция $C(q)$ (приходната функция $R(q)$ е права , минаваща през началото) графиката на функцията на печалбата ще представлява обърната квазипарабола, в чийто връх ще се достига максимума на печалбата.

Максимализиране на печалбата – директен подход. Разглеждаме печалбата

$$\Pi(K, L) = pF(K, L) - (vK + wL)$$

като функция на две (независими) променливи K и L (на p, v, w гледаме като на параметри). Тогава условието от I ред на задачата за глобален екстремум на тази функция е

$$\Pi_K = pF_K - v = 0 \Leftrightarrow F_K = \frac{v}{p}$$

$$\Pi_L = pF_L - w = 0 \Leftrightarrow F_L = \frac{w}{p}$$

Отношенията $\frac{v}{p}$ и $\frac{w}{p}$ на цените на ресурсите към цената на продукцията се наричат **относителни цени на ресурсите.** Горните равенства означават, че фирмата максимализира печалбата си при условие за изравняване на маргиналните ефективности на всички ресурси с относителните им цени.

Условието от II ред (тъй като за вторите частни производни е в сила $\Pi_{KK} = pF_{KK}$, $\Pi_{KL} = pF_{KL}$, $\Pi_{LL} = pF_{LL}$) показва, че в точката от ресурсната равнина, в която е изпълнено условието от I ред абсолютният екстремум е от тип максимум (защото производствената функция, а оттам и функцията на печалба е строго вдлъбната).

Пример. Дадена е производствената функция $q = K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{4}}$. Тъй като тя е хомогенна функция със степен на хомогенност $\frac{3}{4}$ за нея задачата за абсолютен максимум на печалбата притежава еднозначно решение.

Първо ще минимализираме разходите. Условието за оптимално изразходване на ресурсите $\frac{F_K}{F_L} = \frac{v}{w}$ води до $\frac{2L}{K} = \frac{v}{w} \Longrightarrow K = \frac{2w}{v}L$. Заместваме в производствената

функция и получаваме $q = \left(\frac{2w}{v}\right)^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{4}}$, откъдето $L = q^{\frac{4}{3}} \left(\frac{v}{2w}\right)^{\frac{2}{3}}$ и $K = q^{\frac{4}{3}} \left(\frac{2w}{v}\right)^{\frac{1}{3}}$ – това е оптималното изразходване на ресурсите K и L за да се произведе количество q при цени на ресурсите v и w. Замествайки K и L в $C = vK + wL$ получаваме функцията на разходи (от количеството) $C = \frac{3}{2^{\frac{2}{3}}} v^{\frac{2}{3}} w^{\frac{1}{3}} q^{\frac{4}{3}}$.

Сега да максимализираме печалбата. Условието за това е $p = C'(q) = 2^{\frac{4}{3}} v^{\frac{2}{3}} w^{\frac{1}{3}} q^{\frac{1}{3}}$ – обратната функция на предлагане. Следователно функцията на предлагане е $q = \frac{p^3}{16v^2w}$. Като заместим q в получените изрази за K и L ще получим функциите на търсене на ресурси - $K = \frac{p^4}{32v^3w}$ и $L = \frac{p^4}{64v^2w^2}$.

Директен подход. Условията $F_K = \frac{v}{p}$ и $F_L = \frac{w}{p}$ водят до системата $\frac{L^{\frac{1}{4}}}{2K^{\frac{1}{2}}} = \frac{v}{p}$, $\frac{K^{\frac{1}{2}}}{4L^{\frac{3}{4}}} = \frac{w}{p}$. Тъй като е изпълнено равенството $K = \frac{2w}{v} L$ (еквивалентно на $\frac{F_K}{F_L} = \frac{v}{w}$), чрез заместването му в първото уравнение на системата получаваме $L = \frac{p^4}{64v^2w^2}$, а оттам $K = \frac{p^4}{32v^3w}$. Замествайки тези изрази за K и L в производствената функция $q = K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{4}}$ получаваме $q = \frac{p^3}{16v^2w}$.

Максимализиране на печалбата при хомогенни производствени функции. За тях е в сила тъждеството на Ойлер

$$\gamma F(K, L) = F_K K + F_L L \, ,$$

където γ е степента на хомогенност. За $\gamma < 1$ задачата за максимализиране на печалбата има еднозначно решение, като е изпълнено $F_K = \frac{v}{p}$, $F_L = \frac{w}{p}$. Тогава ще имаме

$$F(K, L) = \frac{1}{\gamma p}(vK + wL)$$

Тогава за максималната печалба получаваме

$$\Pi = R - C = pq - (vK + wL) = p\frac{1}{\gamma p}(vK + wL) - (vK + wL) = \frac{1 - \gamma}{\gamma} C$$

Това равенство е вярно и за $\gamma = 1$ – тогава максималната печалба е $\Pi = 0$. Но за това е необходима да бъде изпълнено допълнително условие, осигуряващо зависимост на цената на продукцията p от цените на ресурсите v и w. И наистина, да разгледаме производствената функция $q = K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$ условията

$F_K = \frac{v}{p}$ и $F_L = \frac{w}{p}$ водят до системата $\frac{L}{4K} = \frac{v^2}{p^2}$, $\frac{K}{4L} = \frac{w^2}{p^2}$, която притежава безкрайно много решения (K, L) ако е изпълнено тъждеството $p^4 = v^2 w^2$ и няма решения, ако то не е изпълнено.