Математически Основи на Макроикономиката

Пловдив

2021

ПУ „П. Хилендарски“

Факултет по математика и информатика

Асен Христов

Съдържание

ГЛАВА 5. МАКРОИКОНОМИЧЕСКА ДИНАМИКА. МОДЕЛИ С ИКОНОМИЧЕСКИ РЪСТ

Предговор

Математическото моделиране на икономическите явления и процеси е едно от най-важните направления в съвременната икономическа наука – то съществено разширява аналитичните ѝ възможности. В днешно време използването на математически модели се е превърнало в стандарт във всички области на икономическите изследвания – теоретични и приложни.

Теоретичните математически модели в икономиката се делят на две големи групи – микроикономически и макроикономически. Те се различават помежду си в степента на детайлизация на изследваните обекти и връзките между тях. Докато при микроикономическите модели главните участници са отделните потребители и производители, то при макроикономическите се работи с окрупнени (агрегирани) сектори – домакинства, фирми, държава и външен сектор. Друга съществена отлика е, че в макроикономиката принципа за оптималност на поведението няма такава водеща роля, както в микроикономиката. От друга страна, и в двата клона на теоретичната икономика голямо място заемат моделите на икономическо равновесие – локално или глобално.

Настоящият учебник е посветен на основните математически модели в макроикономиката. Основна част заемат моделите на макроикономическата статика. В тях е разгледано равновесието при основните макроикономически пазари – на стоки и услуги, на пари и капитал и на труд. От моделите на макроикономическата динамика е разгледан само модела на Солоу–Сван за икономически ръст.

Учебникът е разделен на пет тематични глави. В първата от тях е направено кратко въведение на макроикономиката – разгледани са базови понятия, обекти и функции. Дадена е дефиниция на БВП (брутен вътрешен продукт) и негови производни понятия, дефинирани са основните макроикономически индекси, разгледан е въпроса за икономическия кръгооборот. Главата завършва с определение и основни свойства на макроикономическата производствена функция, необходими са следващите глави.

Втората глава на учебника е до голяма степен самостоятелна – посветена е на модела на междуотраслов баланс на Леонтиев. Направени са някои обобщения на базовия модел - линеен модел на международна търговия, модел на Леонтиев с отчитане на вноса и износа и дуален модел на Леонтиев.

Третата глава заема централно място в този учебник – тя е и най-голяма. В нея са направени анализи на всички макроикономически пазари – на стоки, пари и труд. Тези анализи са направени от две гледни точки – неокласическата и кейнсианската. Като следствие на съвместното равновесие на стоковия и паричен пазар (в кейнсианския случай) е изведена функцията на съвкупното търсене, а от равновесието на трудовия пазар – функцията на съвкупно предлагане.

Четвъртата глава е естествено продължение на предишната – в нея са разгледани условията за съвместно равновесие на всички макроикономически пазари, това са моделите на общо икономическо равновесие. Освен това, ако се приеме, че функциите на съвкупно търсене и предлагане са априорно известни, можем да говорим за *AD*-*AS*-модел. Накрая главата завършва със сравнение на икономическото равновесие от неокласическа и кейнсианска гледна точка и с макроикономически модели, комбиниращи неокласически и кейнсиански предпоставки.

Петата, последна глава е посветена на един основен модел на макроикономическата динамика – модела на Солоу–Сван за икономически ръст. Разгледани са негови общи характеристики, като в подробност е разгледан случая, когато макроикономическата производствена функция е ПФ на Кооб–Дъглас.

Настоящият учебник е написан за да бъде от полза за студентите от специалност „Бизнес математика“ на ФМИ на ПУ „П. Хилендарски“ – Пловдив. Освен това, може да бъде полезен за математици с интерес към икономиката и икономисти с математически възможности.

ГЛАВА 1. ВЪВЕДЕНИЕ В МАКРОИКОНОМИКАТА

1. Макроикономиката като раздел на икономическата наука

В средата на XX век икономическата наука, изучаваща процесите на обществено производство, разпределение и използване на стоки и услуги в условие на ограниченост на ресурсите се разделя на два клона – микроикономика и макроикономика, различавщи се по предмет и методи на изследване.

Макроикономиката има за цел да определи резултатите от функционирането на националното стопанство като цяло. В макроикономиката се изследват факторите, определящи националния доход, нивото на безработица, темпа на инфлацията, състоянието на държавния бюджет и платежния баланс, темпа на икономически ръст и др.

Макроикономика – основни въпроси на които тя търси и дава отговори и съответните раздели

ВЪПРОСИ	РАЗДЕЛИ
Какво определя стойността на националния доход?	Теория на статичното макроикономическо равновесие
Какво представляват парите и каква е ролята им?	Теория на парите
Какво представлява нивото на цените и кое определя динамиката му?	Теория на инфлацията
От какво се определя нивото на заетост?	Теория на заетостта
Какви фактори определят колебанията на икономическата конюнктура?	Теория на икономическите цикли
Какви са условията за стабилен икономически ръст?	Теория на икономическия ръст

Въпреки относителната самостоятелност на микроикономиката и макроикономиката техните изводи за същността на икономическите явления се допълват. От една страна, в последно време много макроикономически модели имат микроикономическа обосновка, а от друга – при микроикономическото фирмено планиране съществено се използват резултатите от макроикономическите анализи.

2. Особености на макроикономическия анализ. Агрегиране

Първи тип агрегиране – на икономическите агенти. Съществена разлика между микроикономиката и макроикономиката е, че докато в микроикономическата теория са водещи автономнитете участници в икономическите процеси - **икономическите агенти** – производители и потребители, то в макроикономическите модели, чрез **агрегиране** се достига до четири икономически субекта – сектора на домакинствата, предприемаческия сектор, държавния сектор и външния сектор.

Сектора на домакинствата има три вида икономически активности:

- предлага фактори на производство;
- използва част от дохода, получен от тях за придобиване на крайни продукти;
- спестява друга част, придобивайки ценни книжа и недвижими имоти.

Предприемаческият сектор също има три вида икономически активности:

- закупуване на фактори на производство;
- предлагане на произведените стоки – междинни и крайни;
- инвестиране в производството.

Предприемаческият сектор се дели на реален (нефинансов) и финансов сектор.

Държавният сектор

- произвежда обществени блага, които доставя на гражданите безплатно (национална сигурност, фундаментална наука и др.). Резултатите от дейността на правителството като производител на обществени блага водят до увеличаване на производителността на предприемаческия сектор и до намаляване на разходите на домакинствата. За да произведе тези публични стоки държавата закупува в качеството на ресурси стоки, произведени от частния сектор и заплаща труда на заетите в държавния сектор – така се формират държавните разходи.
- събира данъци от домакинствата и от потребителския сектор, с които покрива разходната част от държавния бюджет.
- предлага пари (чрез централната банка), необходими за функционирането на икономиката.

Забележки:

1) Към държавните разходи спадат плащанията към домакинствата (например държавни пенсии) и към предприемаческия сектор (например субсидии) които в макроикономическите анализи се разглеждат като отрицателни данъци.

2) Освен текущите разходи държавата осъществява инвестиции в реален капитал. С цел опростяване, ще считаме, че всички държавни инвестиции се обезпечавт от частния сектор, а държавата произвежда и предлага само публични блага.

Външният сектор въздейства на националната икономика чрез обмен на стоки, капитали и национални валути.

Освен гореизброените икономически активности макроикономическите субекти взаимодействат помежду си чрез заемане и кредитиране.

Втори тип агрегиране. Той се отнася за икономическите функции, описващи поведението на икономическите агенти. Например, съвкупността на микроикономическите функции на търсене и предлагане се агрегира до съответните макроикономически функции – функция на потребление на домакинствата, функция на търсене на труд и др.

Трети тип агрегиране – на пазарите. Вместо множеството от пазари на различни стоки, които се разглеждат в микроикономиката, в макроикономическите модели се разглежда единен **пазар на стоки**, на който се продава и купува една стока, която може да се използва и като предмет за крайно потребление и като средство за производство. Тогава изчезва микроикономическото понятие цена на стока, като пропорция в обмена на една стока с друга. Предмет на изучаване става нивото на цените и неговото изменение.

Пазарите на фактори на производство в микроикономиката се агрегират до два пазара – **пазар на труда** и **пазар на капитала**. На първия се предлага и купува един вид труд, на втория предприемачите купуват средства за разширяване на производството. Допълнителният капитал, необходим за разширяване на производството се дължи на спестяванията на икономическите агенти. Тъй като спестяванията се реализират чрез закупуване на ценни книжа (акции, облигации) и откриване на спестовни сметки в банките, то пазара на капитал се нарича още **пазар на ценни книжа**.

Валидна е следната **формула за изменение на капитала**:

$$K(t+\Delta t) = K(t) + I(t) - \delta K(t)$$

където

$$K(t) - \text{стойността на капитала в момент } t$$

$$K(t+\Delta t) - \text{стойността на капитала в момент } t+\Delta t$$

$$I(t) - \text{инвестициите в капитал през времето от } t \text{ до } t+\Delta t$$

$$\delta K(t) - \text{амортизация на капитала през същия период от време}$$

Понякога $I(t)$ се наричат брутни инвестиции, за да се разграничават от нетните (чисти) инвестиции, които са равни на нарастването на капитала. Тъй като

$$\Delta K(t) = K(t + \Delta t) - K(t) = I(t) - D(t)$$

Чистите инвестиции се явяват брутните инвестиции минус амортизацията (Depreciation) на капитала (означена с $D(t)$).

Ролята на парите се изследва посредством специфичен макроикономически инструмент – **пазар на парите**. На този пазар, в резултат от търсенето и предлагане на пари се формира цена на парите – **лихвен процент**.

Пазарите на стоки и на труд образуват **реалния сектор** на икономиката, а пазарите на пари и ценни книжа – **монетарен сектор**.

Забележка: За да може акрегираните категории да не загубят икономически смисъл, необходимо е да се спазват определени правила, разработвани от **националното счетоводство**.

3. Макроикономически модели

В резултат на макроикономическото агрегиране функционирането на националната икономика се представя като икономическо дейност на четири икономически субекта, взаимодействащи си на четири агрегирани пазари. Опростяването на икономическата действителност до обозрим брой най-съществени взаимовръзки е в основата на макроикономическото моделиране. Моделираните взаимовръзки и процеси се описват във вид на математически уравнения. Моделирането включва две групи елементи – величини, известни до построяването на модела – **екзогенни** и такива, които се определят от модела – **ендогенни**. При построяването на макроикономическите модели се използват четири типа функционални уравнения:

Поведенчески функции, изразяващи сложилите се в обществото предпочитания. В качеството на пример за такива функции могат да се разгледат функциите на потребление $C(y)$ и на спестяване $S(y)$, чиято сума е дохода на домакинствата y.

Производствени функции, характеризиращи технологията на производство, т.е. връзката между количествата фактори на производство – труд L и капитал K и максималната възможна продукция, която може да се произведе от тях $y = y(L, K)$.

Институционални функции, представляващи институционално установените зависимости между параметрите на модела. Пример: сумата от данъчните постъпления T е функция на големината на дохода y и установената данъчна ставка $T_y : T = T_y y$.

Дефиниционни функции, изразяващи зависимости, съответстващи на вербално определените икономически явления. Пример: съвкупното търсене на стоки y^D е сума от потребителското търсене на домакинствата *C*, инвестиционното търсене на предприемаческия сектор *I*, държавата *G* и външния сектор *E* (износ), т.е.

$$y^D = C + I + G + E$$

В макроикономическите модели обикновено екзогенните променливи са технологията на производство (зададена чрез съответната производствена функция) и поведението на икономическите субекти на всеки от пазарите (представени от съответните функции на търсене и предлагане). Ендогенни показатели, получени в резултат на моделите са: величината на националния доход, нивото на заетост, средната работна заплата, лихвеният процент и нивото на цените. Особен интерес представляват такива вектори от ендогенни величини, при които икономиката се оказва в състояние на **общо икономическо равновесие**, т.е. състояние при което стопанските планове на всички набелязани икономически субекти в рамките на бюджетните им ограничения се оказват едновременно осъществими на всички пазари.

Достигането на общо икономическо равновесие не означава, че всеки участник на пазара е доволен от своето положение; при равновесието само се констатира, че на всички пазари едновременно се достига до равенство между търсене и предлагане и при това никой от участниците в пазарните сделки не е заинтересуван от промяната на своите покупки или продажби. Това, че в България през 2013 г. са продадени и купени крайни стоки за 52 млрд. лв. не означава, че през тази година е имало общо икономическо равновесие. Необходимо е да се изясни желаели са производителите да продадат, а потребителите да закупят именно такова количество стоки при нивата на разходи, доходи и цени от 2013 г. Т.е. трябва да се изясни дали в края на годината в складовете на производителите няма прекалено много нереализирана продукция, а потребителите да са направли принудителни спестявания (или прекалено да са намалили спестяванията си).

В зависимост от степента на отчитане на времето макроикономическите модели се делят на:

Статични модели – отговарят на въпроса при какви значения на ендогенните променливи (и фиксирани екзогенни) се установява равновесие. Предполага се, че равновесието е валидно за определен момент и ендогенните величини моментално реагират на изменението на екзогенните.

Модели на сравнителната статика – при тях в съответния статичен модел се променят стойностите на един или няколко екзогенни параметъра (т.е. стойностите им в един момент от времето се заменят със стойности в друг момент). Тогава от решаването на модела се получават други стойности на ендогенните променливи, при които се обезпечава равновесието. Основната задача на сравнителната статика е да оцени влиянието на екзогенните променливи върху ендогенните.

Динамични модели – изследват прехода от едно състояние на икономиката към друго.

Освен това се говори за:

Комплексни модели – описват се чрез уравнения всички връзки между ендогенните променливи и се достига до система от уравненя, описваща взаимодействието на макроикономическите субекти едновременно на всички макроикономически пазари.

Частични модели – при тях много от влияещите върху обекта на изследване фактори се приемат за дадени.

4. Базови понятия в макроикономиката

Брутен вътрешен продукт (Gross Domestic Product) БВП (GDP) – сумата от добавените стойности, създадени за определен период от време от всички производители на територията на дадена държава. Под добавена стойност се разбира разликата между приходите и материалните разходи за производство и реализация на продукцията. БВП се получава по следния начин

$$GDP = C + G + I + X$$

, където $\boldsymbol{C}$ **(Consumption)** – разходи на домакинствата за стоки и услуги (крайни продукти); $\boldsymbol{G}$ **(Government Spending)** – правителствени разходи за крайни продукти (но не и заплатите в бюджетната сфера); $\boldsymbol{I}$ **(Investment)** – инвестиции в реален капитал (закупуването на финансови продукти не е инвестиция, а спестяване); $\boldsymbol{X}$ **(Net Export)** $= \boldsymbol{E} - \boldsymbol{Z}$ – нетен износ, получаващ се като от брутния износ (E) се извади брутния внос (Z).

Забележка: Крайното потребление се формира като сума от разходите на домакинствата (C) и на държавата (G) за крайни продукти.

Брутен национален продукт БНП – БВП минус добавените стойности, създадени на територията на държавата посредством фактори на производство, принадлежащи на чужденци, плюс добавените стойности, произведени в други държави за сметка на фактори на производство, принадлежащи на гражданите на дадената държава.

Чист национален продукт ЧНП – БНП минус амортизациите (еквивалент на величината на обезценяване на основния капитал за дадения период от време).

Национален доход НД – ЧНП минус косвените данъци плюс субсидиите. Тогава ЧНП може да се разглежда като сума от резултатите от икономическата дейност на частния сектор (национален доход) и държавата (салдото от косвените данъци и субсидиите). От друга страна националният доход се разпада на факторни доходи: работна заплата, процент, рента и предприемачески доход.

Разполагаем доход – НД минус преките данъци и социални отчисления плюс социалните плащания и дотации за производства.

Съвкупен обществен продукт (Aggregate Social Product) СОП (ASP) – сумата от всички произведени за периода стоки и услуги. Получава се като сума от БВП, вноса и междинния продукт (стойността на стоките и услугите, потребени в процеса на производство на БВП):

$$ASP = GDP + Z + IP = C + G + I + (E - Z) + Z + IP = C + G + I + E + IP$$

където с IP (Intermediate Product) сме означили междинния продукт. Получава се, че СОП се формира като сума от крайния продукт ($C + G$), инвестициите (I), износа (E) и междинния продукт (IP).

Ниво на цените – среднопретеглената цена на произведените през дадения период стоки и услуги.

Индекс на цените – отношение на стойността на фиксиран набор от стоки (кошница), измерена през даден период към стойността му в друг период. В зависимост от избора на кошница се говори за **индекс на потребителските цени**, индекс на селскостопанските, промишлени цени и др. Индекса на цените се използва за преобразуването на паричните (номинални) стойности на икономическите величини в реални. Номинално значение на макроикономически показател е стойността на показателя, измерена в текущи цени, а реална – в неизменни (базови) цени. Реалната стойност се получава като частно на номиналната и индекса на цените.

В икономическите разчети се използват главно две разновидности на индекса на цените – **индекс на Ласпейрес** и **индекс на Пааше**. Нека с P_i^0 и Q_i^0 да означим цените и потребяваните количества стоки през базовата година, а с P_i^1 и Q_i^1 – през текущата. Тогава

$$I_L = \frac{\sum(P_i^1 Q_i^0)}{\sum(P_i^0 Q_i^0)}$$

$$I_P = \frac{\sum(P_i^1 Q_i^1)}{\sum(P_i^0 Q_i^1)}$$

т.е. индекса на Ласпейрес (I_L) измерва изменението на цените при предположение, че количеството стоки от базовата година оценяваме по цени от текущата, а индекса на Пааше (I_P) – количествата от текущата година оценяваме по цени от базовата. С цел отстраняването на недостаръците на тези два индекса се използва тяхното средно геометрично, известно като **индекс на Фишер** (I_F):

$$I_F = \sqrt{I_L I_P}$$

Индекса на Пааше е прието да се нарича **дефлатор** и се използва за пресмятане на реалния БВП по даден номинален.

Пример 4.1. Един потребител харчи дохода си за 4 стоки – ябълки, банани, краве масло и маргарин. През базовата 2004 г. той е закупил 50 кг ябълки по 1 лв., 50 кг банани по 1,2 лв., 50 опаковки краве масло по 1,4 лв. и 40 опаковки маргарин по 0,5 лв. През текущата 2011 г. покупките му са – 50 кг ябълки по 2 лв., 100 кг банани по 1,2 лв., 50 опаковки краве масло по 2,8 лв. и 80 опаковки маргарин по 0,5 лв. Пресметнете индексите на Ласпейрес, Пааше, Фишер и реалния ръст на потребление на този потребител.

Решение:

При пресмятането на индекса на Ласпейрес (I_L) трябва да се вземе пред вид, че в знаменателя са реално направените от потребителя разходи през 2004 г., а в числителя остойностяваме количествата от 2004 г. по цени от 2011 г. Получаваме

$$I_L = \frac{50 \cdot 2 + 50 \cdot 1{,}2 + 50 \cdot 2{,}8 + 40 \cdot 0{,}5}{50 \cdot 1 + 50 \cdot 1{,}2 + 50 \cdot 1{,}4 + 40 \cdot 0{,}5} = \frac{320}{200} = 1{,}6$$

При индекса на Пааше (I_P) в числител са реално направените разходи за 2011 г., а в знаменател – количествата от 2011 г., остойностени по цени от 2004 г., т.е.

$$I_P = \frac{50 \cdot 2 + 100 \cdot 1{,}2 + 50 \cdot 2{,}8 + 80 \cdot 0{,}5}{50 \cdot 1 + 100 \cdot 1{,}2 + 50 \cdot 1{,}4 + 80 \cdot 0{,}5} = \frac{400}{280} = \frac{10}{7} \cong 1{,}43$$

Съответно за индекса на Фишер (I_F) получаваме:

$$I_F = \sqrt{I_L I_P} = \sqrt{\frac{16}{10}\frac{10}{7}} = \frac{4}{\sqrt{7}} \cong 1{,}51$$

Номиналният ръст на потребление на този потребител се получава като разделим разходите му от 2011 г. на разходите му от 2004г. (по цени от съответната година) - $400 : 200 = 2$. Реалният ръст ще получим като разделим номиналния ръст с дефлатора, т.е. с I_P: $2 : \frac{10}{7} = 1{,}4$. И наистина, реалният ръст е съотношението между потреблението през текущата година, остойностено по базови цени (знаменателя на I_P – 280) и потреблението през базовата година (знаменателя на I_L – 200).

Пример 4.2. Попълнете празните полета на таблицата

Макроикономически показател	2009 г.	2010 г.	2011 г.	2012 г.	2013 г.
Крайно потребление	54293	55709	58815	63499	62491
Инвестиции	20063	16138	16510	16978	16358
Износ	32458	40481	50077	52054	54856
Внос	38493	41817	50094	54442	55589
Нетен износ					
Номинален БВП					
Дефлатор на БВП	4.3	2.8	4.9	3.1	-0,8
Реален БВП (по цени от 2009 г.)					
Номинален годишен ръст на БВП					
Реален годишен ръст на БВП					

Забележка: Дефлатора, номиналният ръст и реалният ръст се измерват в проценти, а останалите макроиконимически показатели – в млн лв.

Решение:

Клетките от реда Нетен износ се попълват като от износа се изважда съответния внос. Получава се

	2009 г.	2010 г.	2011 г.	2012 г.	2013 г.
Нетен износ	-6035	-1336	-17	-2388	-733

Клетките от реда Номинален БВП се попълват като се отчита, че същият е сума от крайно потребление, инвестиции и нетен износ:

	2009 г.	2010 г.	2011 г.	2012 г.	2013 г.
Номинален БВП	68321	70511	75308	78089	78116

Сега чрез дефлатора на БВП преобразуваме номиналния БВП в реален (по цени от 2009 г.). Например, номиналния БВП за 2010 г. 70511 делим на $1 + \frac{2,8}{100} = 1,028$ и получаваме 68590 – БВП от 2010 г. по цени от 2009 г. За да преобразуваме номиналния БВП за 2011 г. 75308 първо използваме дефлатора за 2011 г. и делим на $1 + \frac{4,9}{100} = 1,049$. Получаваме 71790 – БВП за 2011 г., пресметнат по цени от 2010 г. След това делим на $1,028$, получаваме 69835, което е БВП от 2011 г. по цени за 2009 г. Окончателно получаваме

	2009 г.	2010 г.	2011 г.	2012 г.	2013 г.
Реален БВП (по цени от 2009 г.)	68321	68590	69835	70236	70826

Номиналният ръст на БВП се получава като разделим номиналния БВП за текущата година с този от предходната, а реалният – като използваме реалния БВП.

Окончателно получаваме

Макроикономически показател	2009 г.	2010 г.	2011 г.	2012 г.	2013 г.
Крайно потребление	54293	55709	58815	63499	62491
Инвестиции	20063	16138	16510	16978	16358
Износ	32458	40481	50077	52054	54856
Внос	38493	41817	50094	54442	55589
Нетен износ	**-6035**	**-1336**	**-17**	**-2388**	**-733**
Номинален БВП	**68321**	**70511**	**75308**	**78089**	**78116**
Дефлатор на БВП	4.3	2.8	4.9	3.1	-0,8
Реален БВП (по цени от 2009 г.)	**68321**	**68590**	**69835**	**70236**	**70826**
Номинален годишен ръст на БВП		**3,2**	**6,8**	**3,7**	**0.0**
Реален годишен ръст на БВП		**0,4**	**1,8**	**0,5**	**0,8**

Ясно е, че при малки стойности на процентните показатели ще имаме

$$\text{номинален ръст} \cong \text{реален ръст} + \text{дефлатор}$$

Забележки:

1) Интересен е въпроса какви макроикономически показатели се използват при сравнение на икономиките на различните държави. Основна роля за това играят два варианта на БВП, а именно:

- Номинален БВП в щатски долари, пресметнат по текущи цени за съответните държави и по текущ обменен курс на местната валута със щатския долар.
- **БВП по паритет на покупателната способност ППС (Purchasing Power Parity PPP)** – БВП се измерва в международни щатски долари (фиктивна парична единица), като идеята е да се елиминира влиянието на различните ценови нива в националните икономики.

В следващата таблица са дадени БВП на водещите световни икономики, пресметнати по двете методики.

Дървави	БВП за 2010 г. в щ.д. по текущи цени и текущи курсове (трилиони)	БВП за 2010 г. по ППС в международни щ.д. (трилиони)
САЩ	14, 5824	14,5617
КНР (Китай)	5,8786	10,1323
Япония	5,4978	4,4321
Германия	3,3097	3,1161
Франция	2,56	2,2342
ОК (Великобритания)	2,2461	2,2769
Бразилия	2,0879	2,129
Италия	2,0514	1,883
Индия	1,729	4,1709
Канада	1,5741	1,2577
РФ (Русия)	1,4798	2,7205

2) Интерес представлява също въпроса как се пресмята номиналния БВП (БНП). Два са основните начини:

- **Разходен подход** – при който структурата на БВП се получава по елементи на неговото крайно използване от всички сектори на националното стопанство;
- **Производствен подход** - сумиране на добавени стойности, създадени във всички сектори на националното стопанство.

3) Всички разсъждения, направени по-горе се отнасят за отчетени легални икономически дейности, извършени от легални икономически субекти. Но в нацио-

налната икономика съществуват и други видове икономически дейности. Според степента на тяхната легалност те се разграничат четири икономически сфери:

- **официална икономика** (тя е законна и отчетена);
- **неформална икономика** (законна и законно неотчетена), която включва натуралното производство и домашния труд, доброволния незаплатен труд и съседската взаимопомощ, част от дейността на самонаетите и на малките стопански единици, които нямат задължение да декларират своята дейност, и др.;
- **недекларирана (сива) икономика** (законна и незаконно неотчетена), при която легални икономически субекти незаконно прикриват и не отчитат част от стопанската си дейност, заетите в нея и получаваните доходи. Тя е свързана и с укриване на данъци, неплащане на социални и здравни осигуровки и др.
- **нелегална (черна) икономика** (незаконна и неотчетена), при която или се произвеждат забранени от закона стоки, или се извършват нелегални дейности, или стопанската дейност се осъществява от нелегални икономически субекти;

Така в границите на понятието **скрита икономика** се включват неформалната, нелегалната (черната) и недекларираната (сивата) икономика, в които стопанската дейност не се регистрира от легитимните държавни органи. Фактът, че обхванатите от понятието скрита икономика дейности не се отчитат официално, не означава, че те не са предмет на изследване. В рамките на всяка от трите сфери на скритата икономика са разработени методи за наблюдение и оценка на различни аспекти на неотчетената стопанска дейност.

5. Икономически кръгооборот

Бюджет – основно понятие, служещо за изясняване на икономическия кръгооборот. Той отразява всички доходи и разходи на икономическите субекти, и следователно изменението на тяхното богатство. Ако има бюджетен дефицит (разходите превишават доходите), то размерът на богатството се съкращава; при бюджетен излишък този размер се увеличава. Бюджетът миже да се представи чрез: уравнения, матрица (таблица), диаграма, счетоводен отчет.

Тъй като при пазарната икономика разходите на един субект са доходи за друг, всички бюджети са взаимносвързани и характеризират кръгооборота на парите в икономическата система. Ето един опростен модел на бюджетите на макроикономическите субекти в матричен вид

Постъпления от	Постъпления към				
	Сектор Домакинства	Предприемачески сектор	Държавен сектор	Външен сектор	сектор Богатство
Сектор Домакинства	-	Заплащане на стоки (C)	Преки данъци, социални отчисления	Трансфери към чужбина	Спестявания (S)
Предприемачески сектор	Заплащане на факторите (Y)	-	Преки данъци, косвени данъци	Заплащане на вноса (Z)	Амортизация (D), неразпределена печалба
Държавен сектор	Социални плащания	Заплащане на стоки, субсидии (G), дотации	-	Оказване на икономическа помощ	Бюджетен излишък $(T-G)$
Външен сектор	Трансфери от чужбина	Заплащане на износа (E)	Получаване на икономическа помощ	-	Дефицит по платежния баланс $(Z-E)$
Сектор Богатство	Потребена част от богатството	Брутни инвестиции (I)	Бюджетен дефицит	Излишък по платежния баланс	-

За дадения макроикономически сектор клетките по редове се наричат **дебити** – те показват как секторът изразходва средствата си, а клетките по стълбове – **кредити**, показват източниците на придобиване на тези средства. Разликата между двете суми – на кредитите и на дебитите се нарича **салдо** – показва прираста на секторното богатство.

За да напишем уравненията на икономическия кръгооборот ще направим някои опростявания и означения:

- приемаме, че социалните отчисления са равни на социалните плащания;
- трансферите към и от чужбина също са равни;
- няма неразпределена печалба;
- оказаната и получена икономическа помощ са равни;
- полагаме T_h - данъци на домакинствата, T_f – данъци на частния сектор.

Тогава ще имаме следните уравнения за всеки от секторите:

- за домакинствата: $C + T_h + S = Y$;
- за предприемаческия сектор: $Y + T_f + Z + D = C + G + E + I$;
- за държавния сектор: $G + (T - G) = T_h + T_f = T$;

- за външния сектор: $E + (Z - E) = Z$.

В левите части на равенствата са сумирани дебитите, а в десните – кредитите. Ако сумираме първото и второто равенство, след съкращаване ще получим

$$T + S + Z + D = G + E + I \Rightarrow (\boldsymbol{T} - \boldsymbol{G}) + (\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{E}) = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}) - \boldsymbol{S}$$

т.е. **сумата от бюджетния излишък и дефицита по платежния баланс е равна на разликата от нетните инвестиции и спестяванията.**

Сега можем да направим разчетите на отделните сектори във вид на счетоводен баланс

Сектор ДОМАКИНСТВА

ДЕБИТИ средства изразходени за:		**КРЕДИТИ** средства получени от:	
Заплащане на крайни стоки		Заплащане на труд	
Преки данъци		Заплащане на други ресурси	
Социални отчисления		Социални плащания	
Трансфери към чужбина		Трансфери от чужбина	
Спестявания		Потребена част от богатството	
Всичко ДЕБИТ		Всичко КРЕДИТ	

ПРЕДПРИЕМАЧЕСКИ СЕКТОР			
ДЕБИТИ средства изразходени за:		**КРЕДИТИ** средства получени от:	
Заплащане труд		Заплащане на стоки от домакинствата	
Заплащане на други ресурси		Заплащане на стоки от държавата	
Преки данъци		Субсидии	
Косвени данъци		Дотации	
Заплащане на внос		Заплащане на износа	
Амортизации и неразпределена печалба		Брутни инвестиции	
Всичко ДЕБИТ		Всичко КРЕДИТ	

Разбира се, стойностите на Всичко ДЕБИТ и Всичко КРЕДИТ трябва да бъдат равни. По аналогичен начин може да направим счетоводни баланси и на другите два сектора.

Пример 5.1. В икономика без държава и външен сектор е дадено, че: междинният продукт е 159; разпределената част от печалбата на фирмите, под формата на дивиденти е 27; работната заплата – 64; нетрудови ресурси, заплатени от фирми на домакинства – 16; неразпределената печалба – 2; амортизации – 16; заплатените от домакинствата потребителски стоки – 75; заплатени наеми от домакинства към домакинства – 5; заплащане на труд от страна на домакинствата – 7.

а) Да се попълни таблицата на икономически кръгооборот;

б) Да се направят счетоводните отчети за частния сектор и домакинствата;

в) Да се пресметнат чистите инвестиции, БВП, ЧНП и СОП.

Решение:

Попълваме клетките от таблицата на икономическия кръгооборот с данните от условието

От\Към	фирми	домакинства	богатство	всичко
фирми	159	$64{+}27+16$	$16+2$	
домакинства	75	$7+5$		
богатство		0	0	
всичко				

След това, въз основа на секторните балансови равенства намираме спестяванията – 32 и брутните инвестиции – 50. Така, окончателно таблицата добива вида

От\Към	фирми	домакинства	богатство	всичко
фирми	159	$64{+}27+16$	$16+2$	284
домакинства	75	$7+5$	32	119
богатство	50	0	0	50
всичко	284	119	50	

Чистите инвестиции са брутните инвестиции (50) минус сумата от амортизациите и неразпределената печалба $(16+2)$, т.е. 32. $\text{БВП} = C + I = 75 + 50 = 125$; $\text{ЧНП} = \text{БВП} - D = 125 - 16 = 109$; $\text{СОП} = \text{БВП} + \text{МП} = 125 + 159 = 284$.

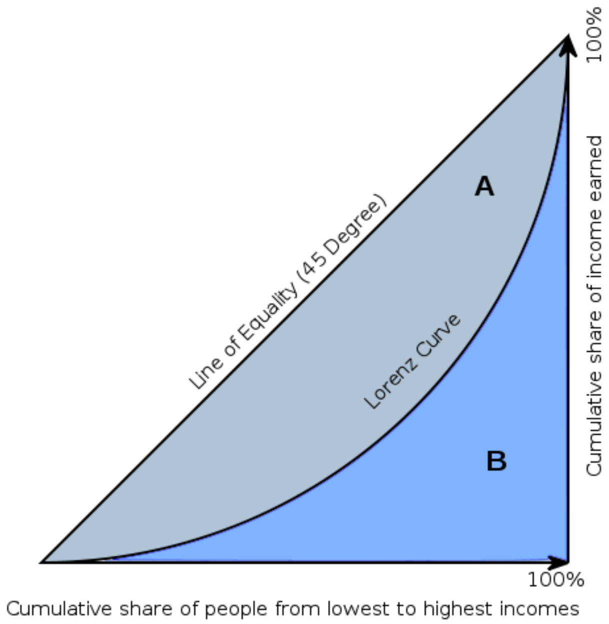
6. Основни макроикономически цели

Макроикономическа цел – оценъчно разсъждение, прието от науката за норма на желаното състояние на икономиката като цяло.

1) Икономически ръст – начин на взаимодействие на участниците в икономическия кръгооборот, в резултат на който съвкупността от икономическите ресурси, стоки и доходи имат положителна динамика. Обобщен критерий за икономически ръст е нарастването на някакъв обобщен макроикономически показател, какъвто например е БВП.
2) Оптимална заетост – обезпечаване на работа на всички граждани, желаещи да работят.
3) Икономическа ефективност – икономиката на страната трябва да има развитие, обезпечаващо в максимална степен оползотворяването на технологичните възможности (всеки ресурс трябва да е в обръщение и да носи полза на собственика си), да съхранява оптимално съотношение между производството на прдмети за производство и стоки за крайно потребление и да осигурява максимално потребление на единица използвани средства за производство.
4) Стабилност на цените – липса на инфлация (никой не печели или губи за сметка на обезценяването на парите) и дефлация (никой не печели или губи за сметка на тяхното поскъпване).
5) Икономическа свобода – основните групи участници в макроикономиката (фирми и домакинства) могат сами да вземат решения за пътищата на реализация на икономическите си интереси (в рамките на закона).
6) Справедливо разпределение на доходите – недопустимост на крайна бедност и на крайно богатство.
7) Икономическа обезпеченост на гражданите – всички граждани, независимо от това дали са трудоспособни, заети или не трябва да разполагат с икономически блага не по-малко от така наречения жизнен минимум. Под жизнен минимум се разбира обем от икономически блага, позволяващ на на гражданина да реализира основните си права и задължения на нивото на приетите социални норми.
8) Оптимизация на платежния баланс – всяка държава, участвайки в международните икономически отношения трябва да „живее според джоба си“, без да нанася икономически ужърб както на себе си, така и на другите държави.

Забележка: Диференциацията на доходите се измерва с макроикономически коефициенти, най-популярните са: коефициент на съотношението на доходите на групата на най-богатите и групата на най-бедните и **индекса на Джини**.

7. Моделиране на социално-икономическото неравенство



Фиг. 1. Крива на Лоренц

Най-добрият начин да бъде моделирано неравенството на доходите е като се използват кривата на Лоренц и индекса на Джини. Кривата на Лоренц се получава така: абсцисата се използва за нанасяне на комулативния дял на хората от най-ниските до най-високите доходи, а ординатата – за комулативният дял от доходите. Така например, ако най-бедните 20% получават 4% от общия доход, следващите 20% - 12% от дохода, средните 20% получават 20% от дохода, предпоследните по бедност (и вторите по богатство) 20% - 28% от дохода и най-богатите 20% - 36% от дохода, то кривата на Лоренц ще свързва точките с координати (0%,0%), (20%,4%), (40%,16%), (60%,36%), (80%,64%) и (100%,100%) – в проценти или (0,0), (0,2;0,04), (0,4;0,16), (0,6;0,36), (0,8;0,64) – (1;1) – в дялове от цялото. Нека да означим с B лицето на областта, разположена под кривата на Лоренц, а с A – лицето на областта между кривата на Лоренц и линията $y = x$, съответстваща на абсолютно равенство на доходите, тогава

$$\text{индекса на Джини } D = \frac{A}{A+B} = \frac{\frac{1}{2} - \int_0^1 f(x)dx}{\frac{1}{2}} = 1 - 2\int_0^1 f(x)dx$$

ако $y = f(x)$ е аналитичния вид на кривата на Лоренц. Вижда се, че при $D = 0$ имаме абсолютно равенство на доходите, а при $D = 1$ – абсолютно недавенство. Тези две състояния са икономически невъзможни, следователно $D \in (0,1)$.

Най-често за моделиране на кривата на Лоренц се използва степенната функция $y = x^\alpha$, $\alpha > 1$. При това положение индексът на Джини D и степенния показател α са свързани:

$$D = 1 - 2\int_0^1 x^\alpha dx = 1 - 2\frac{1}{\alpha+1} = \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \Longrightarrow \alpha = \frac{1+D}{1-D}$$

В долната таблица са нанесени някои характерни стойности на D и α

Индекс на Джини D	0,2	0,3	0,33	0,4	0,43	0,5	0,56	0,6	0,64	0,67
Степенен показател α	1,5	1,86	2	2,33	2,5	3	3,5	4	4,5	5

Как се получава индекса на Джини. Разделят се всички домакинства на n групи с равна численост. Нека техните средни доходи са y_1, y_2, …, y_n. Тогава се прилага формулата

$$D = \frac{1}{\bar{y}n^2} \sum_{i,j:i<j} |y_j - y_i|$$

където с D е означен индекса на Джини, а с $\bar{y} = \frac{1}{n}(y_1 + \cdots + y_n)$ - средния доход.

Пример 7.1. Всички домакинства са разделени на на 5 равночислени групи, чиито доходи са както следва

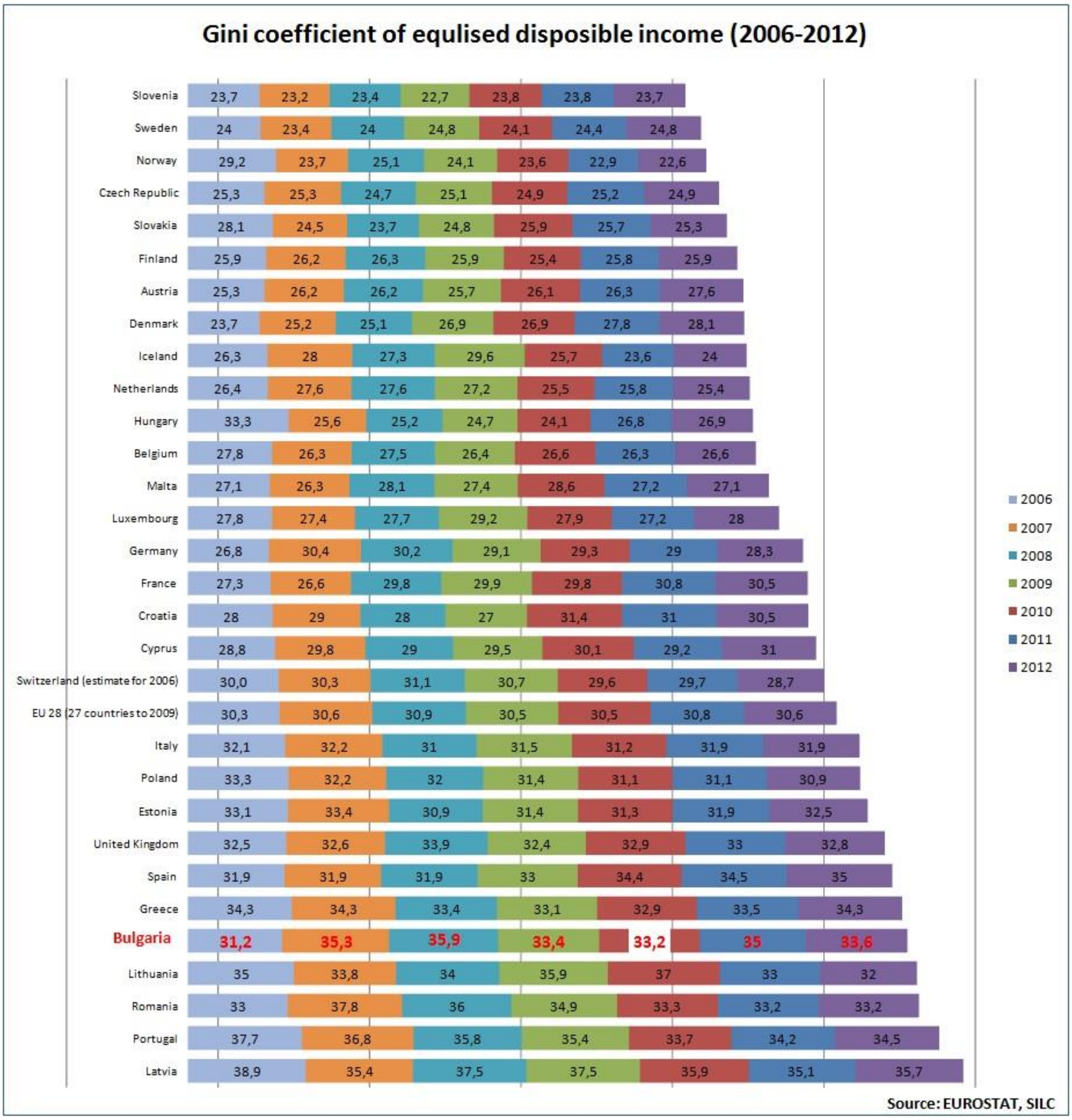
доходи са както следва

I	II	III	IV	V
1400	800	500	300	200

Ясно е, че $n = 5$ и $\bar{y} = \frac{1}{5}(1400 + 800 + 500 + 300 + 200) = 640$. Тогава за индекса на Джини получаваме

$$D = \frac{100 + 300 + 600 + 1200 + 200 + 500 + 1100 + 300 + 900 + 600}{640 \cdot 25} = \frac{5800}{16000} = 0{,}3625$$

Ясно е, че $D = 0$ в случай на пълно равенство, а $D = 1$ при пълно неравенство. В условията на примера съотношението богати/бедни е 1400/200=7.



В горната диаграма са дадени коефициентите на Джини за различните държави от ЕС според данни на ЕВРОСТАТ.

8. Макроикономическа производствена функция

Макроикономическа функция на една променлива. Обикновено тази ресурсна променлива е количеството труд N, вложен в производството на национален доход в размер y. Макроикономическа производствена функция $y = F(N)$ ще наричаме **максималния национален доход** y, който може да се произведе при вложен труд в обем N. Обикновено се използва неокласическата производствена функция, която има три свойства (аксиоми):

(1) не може да има доход без труд: $F(0) = 0$;

(2) с увеличаване на количеството труд, нараства и дохода: $F'(N) > 0$;

(3) с увеличаване на количеството труд, нарастването на дохода намалява: $\left(F'(N)\right)' = F''(N) < 0$.

От горната аксиоматика следва, че растяща, вдлъбната функция, нулираща се в нулата може да бъде използвана за моделиране на неокласическата зависимост на националния доход от количеството на труд, вложен за производството му. Най-прости примери за неокласически производствени функции са $y = bN - aN^2$ и $y = aN^\alpha$; $a > 0, b > 0$ и $\alpha \in (0,1)$.

В една конкурентна пазарна икономика е валидно следното оптимизационно условие от първия ред:

$$F'(N) = \frac{W}{P} = w,$$

където W е номиналната работна заплата, $w -$ реалната работна заплата, а $P -$ нивото на цените. От горното равенство се поражда функцията на търсене на труд: $N^D = N^D(W)$. Тя винаги е намаляваща функция.

Макроикономическа функция на две променливи. Най-общо казано, производствената функция (ПФ) отразява зависимостта между резултата от производството и разхода за ресурси. С помощта на ПФ икономиката се разглежда като „черна кутия“, на входа на която постъпват ресурси $R_1, R_2, \dots, R_n$ (оценени количествено или стойностно), а излизат готови продукти $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$.

В качеството на ресурси (фактори на производство) обикновено се разглеждат: 1) общия обем производствени фондове (капитал) K и 2) количеството вложен труд N. Изходът БВП (или НД) означаваме с y – така се получава ПФ на две променливи $y = F(K, N)$.

ПФ се нарича неокласическа, ако е гладка (поне двукратно диференцируема) и удовлетворява следните условия

1. $F(0, N) = F(K, 0) = 0$ – при отсъствие на един от ресурсите производството е невъзможно;
2. $F_K = \frac{\partial F}{\partial K} \geq 0$ и $F_N = \frac{\partial F}{\partial N} \geq 0$ – с ръста на ресурсите нараства и продукцията;
3. $F_{KK} = \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} = \frac{\partial}{\partial K} F_K \leq 0$ и $F_{NN} = \frac{\partial^2 F}{\partial N^2} \leq \frac{\partial}{\partial N} F_N \leq 0$ – при увеличение на ресурсите намалява ръста на производството;
4. $F(\infty, N) = F(K, \infty) = \infty$ - неограниченото нарастване на количеството на един от ресурсите води до неограничено нарастване на продукцията.

Мултипликативната ПФ се задава с израза

$$y = F(K, N) = AK^{\alpha}N^{\beta}, \alpha > 0, \beta > 0,$$

където A е мащабиращ множител (или коефициент на неутрален технически прогрес), а α и β са еластичностите на производството по отношение на капитала и труда съответно.

От $F_{KK} = A\alpha(\alpha - 1)K^{\alpha-2}N^{\beta} \leq 0$ и $F_{NN} = A\beta(\beta - 1)K^{\alpha}N^{\beta-2} \leq 0$ получаваме, че мултипликативната ПФ е неокласическа при $\alpha \leq 1$ и $\beta \leq 1$.

Ако логаритмуваме двете страни на горното равенство получаваме

$$\ln F = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln N,$$

или мултипликативната ПФ е характерна с това, че $\ln F$ е линейна функция на две променливи - $\ln K$ и $\ln N$. Диференцирайки $\ln F$ по $\ln K$ и $\ln N$ ще имаме

$$\frac{\partial \ln F}{\partial \ln K} = \alpha \quad \text{и} \quad \frac{\partial \ln F}{\partial \ln N} = \beta.$$

Тези логаритмични производни са еластичностите на производството по отношение на капитала и труда съответно, т.е.

$$\varepsilon_K = \frac{\partial \ln F}{\partial \ln K} = \alpha \quad \text{и} \quad \varepsilon_N = \frac{\partial \ln F}{\partial \ln N} = \beta.$$

От друга страна имаме

$$\varepsilon_K = \frac{\partial \ln F}{\partial \ln K} = \lim_{\Delta K \to 0} \frac{\frac{\Delta F}{F}}{\frac{\Delta K}{K}} \quad \text{и} \quad \varepsilon_N = \frac{\partial \ln F}{\partial \ln N} = \lim_{\Delta N \to 0} \frac{\frac{\Delta F}{F}}{\frac{\Delta N}{N}}.$$

С други думи, коефициентът на еластичност по даден фактор на производство показва с колко % се увеличава производството, ако факторът се увеличи с 1%, а другият фактор е без промяна.

При $\alpha > \beta$ се говори за интензивно (капиталоемко) производство, а в обратния случай – за екстензивно (трудоемко).

В една конкурентна пазарна икономика са валидни следните оптимизационни условия от първия ред:

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \frac{V}{P} = v \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial N} = \frac{W}{P} = w,$$

където V е номиналната доходност на капитала, а v – реалната доходност; W е номиналната работна заплата, $w -$ реалната работна заплата, а $P -$ нивото на цените.

ГЛАВА 2. МНОГООТРАСЛОВ МАКРОИКОНОМИЧЕСКИ АНАЛИЗ

9. Базов модел на Леонтиев. Продуктивност.

През 30-те години на 20 век американският икономист В. В. Леонтиев започнал изучаването на статичната структура на националната икономика на ниво отрасъл. Той разглежда взаимните връзки между 500 отрасъла на икономиката на САЩ. За решаването на този модел е удостоен с Нобелова награда за икономика през 1973 г.. В основата на модела стоят следните предположения:

1.В икономическата система се произвеждат, продават, купуват и потребяват n на брой продукта;

2.Всеки отрасъл произвежда само един продукт, като различните отрасли произвеждат различни продукти. Отрасъла, произвеждащ продукт i също ще индексираме с индекс i;

3.Производствената технология на отрасъл j се състои в преработването на определени количества от някакво множество продукти (възможно от всички) с цел производството на някакво количество от продукта j. При това съотношението между количествата изразходвани продукти и произведен продукт е постоянно (независимо от мащаба на производството).

Поради предположение 3. - моделът е линеен. Освен това той е статичен макроикономически модел, защото разглежданията са във фиксиран момент (година , месец).

Балансовият отчет по данни за фиксиран период от времето представлява следната таблица:

Структура на разходите	Структура на търсенето		Обем на продукцията
	Търсене на отраслите	Непроизводствена сфера	
	1... ...j... ...n		
1	$\bar{a}_{11}$... ... $\bar{a}_{1j}$ ... ... $\bar{a}_{1n}$	y_1	x_1
$\vdots$	... ...	$\vdots$	$\vdots$
i	$\bar{a}_{i1}$ ... ...$\bar{a}_{ij}$ ... $\bar{a}_{in}$	y_i	x_i
$\vdots$	... ...	$\vdots$	$\vdots$
n	$\bar{a}_{n1}$ ... ... $\bar{a}_{nj}$ ... ... $\bar{a}_{nn}$	y_n	x_n
Добавена стойност	$\bar{v}_1$ ... ... $\bar{v}_j$ ... $\bar{v}_n$		
Обем на продукцията	x_1 ... ... x_j ... ... x_n		

В тази балансова таблица величината $\bar{a}_{ij}$ показва какъв обем от продукцията на i-тия отрасъл се изразходва от j-тия отрасъл през отчетния период. Величината x_i е общият обем на продукцията (брутен продукт) на i-тия отрасъл, а величината y_i показва обема на потреблението на продукцията на i-тия отрасъл в непроизводствената сфера – крайно търсене. Крайното (непроизводствено) търсене се състои от крайно потребление , експорт и инвестиции. Това обаче се пренебрегва и в модела на Леонтиев величините y_i , $i = 1, \dots, n$ се възприемат като екзогенни. И накрая $\bar{v}_j$ е добавената (новосъздадена) стойност от j-тия отрасъл. Аналогично на y_i ,$\bar{v}_j$ включва работна заплата, амортизационни отчисления, косвени данъци и печалба, което се пренебрегва в модела на Леонтиев.

Величините x_i и y_i могат да се измерват в количества (бройки или други) или в стойности (количество по цена) – съответно говорим за натурален или стойностен модел. За по-голяма определеност ще разглеждаме стойностния модел.

Балансовият характер на модела се определя от следните съотношения:

1.Баланс по редове – обемът на продукцията на i-тия отрасъл е равен на сумата от производственото и непроизводственото търсене т.е.

$$Y_i + \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} = X_i \qquad i = 1, \dots, n \qquad (9.1)$$

2.Баланс по стълбове – обемът на продукцията на j-тия отрасъл е равен на сумата от производствените разходи (за придобиване на продукти от другите отрасли) и величината на добавената стойност т.е.

$$\bar{v}_j + \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{ij} = X_j \qquad j = 1, \dots, n \qquad (9.2)$$

Поради линейността на модела ще имаме - $\bar{a}_{ij} = a_{ij} X_j$

Коефициентите a_{ij} се наричат технологични коефициенти и показват колко единици от продукцията на i-тия отрасъл са необходими за производството на единица продукция от j-тия отрасъл. Матрицата $A = (a_{ij})$ състояща се от технологичните коефициенти се нарича технологична матрица на модела. Тогава условието (9.1) добива вида

$$Y_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = X_i \qquad i = 1, \dots, n \qquad (9.3)$$

Това е моделът на Леонтиев. Нарича се още модел на междуотрасловия баланс или Input-Output модел. Чрез системата (2.3) моделът на Леонтиев позволява да се определят общите обеми на производството на отраслите $X_1, \dots, X_n$ по дадено крайно търсене $Y_1, \dots, Y_n$ въз основа на производствените технологии на отраслите, определени с технологичните коефициенти a_{ij}. Разбира се системата (9.3) позволява и решението на обратната задача – по дадени обеми на продукцията x_i , $i = 1, \dots, n$ да се определи крайното търсене y_i , $i = 1, \dots, n$ на всеки отраслов продукт.

Системата (9.3) е система от n на брой линейни уравнения за n неизвестни x_i, $i = 1, \dots, n$ които са добре изучени от линейната алгебра. Обаче тази система има специфични свойства – технологичните коефициенти a_{ij} , обемите на крайно търсене y_i и брутните продукти x_i са неотрицателни.

Определение: Моделът на междуотраслов баланс се нарича **продуктивен** ако описващата го система (9.3) има неотрицателни решения т.е., $x_i \geq 0$ $i = 1, \dots, n$.

Условия за продуктивност. Системата (9.3) може да бъде записана в матричен вид:

$$(E - A)X = Y \qquad (9.4),$$

където $E = E_n$ е единичната матрица от ред n, $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ - вектор на производството на отраслите, $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T$ - вектор на крайното (непроизводствено) търсене. $A = (a_{ij})$ е технологичната матрица.

Теорема 9.1. Следните условия са еквивалентни:

1.Системата (1.3) притежава неотрицателно решение $X \geq 0$ при някой строго положителен вектор Y.

2.Системата (1.3) притежава неотрицателно решение $X \geq 0$ при всеки неотрицателен вектор Y.

3. (**Условие на Хоукинс – Саймън**) Всички главни минори на матрицата $E - A$ са положителни.

4. Матрицата $(E - A)^{-1}$ съществува и е неотрицателна.

Ако е изпълнено едно от условията за продуктивност на горната теорема:

$$X = (E - A)^{-1}Y \qquad (9.5),$$

като $X \geq 0$ т.е. задачата за намиране на брутният продукт на отраслите е решена.

Да отбележим, че матрицата $E - A$ се нарича матрица на Леонтиев , а $(E - A)^{-1}$ - инверсна матрица на Леонтиев.

Неразложими технологични матрици

Да означим с N множеството на номерата на всички отрасли $N = \{1,2,\cdots,n\}$. Подмножеството $S \subset N$ е изолирано , ако $a_{ij} = 0$ за $i \in \bar{S} = N \setminus S\,, j \in S$. Това означава , че отраслите с индекси от S не се нуждаят от продуктите на другите отрасли с индекси от $\bar{S}$ въпреки че (може би) им продават своята продукция. Ако преномерираме отраслите така че първи да бъдат K отрасли от S, то технологичната матрица A ще добие вида:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \qquad (9.6),$$

където A_1 е квадратна матрица $k \times k$ отговаряща на отраслите S, A_3 - квадратна матрица $(n-k) \times (n-k)$ отговаряща на отраслите $\bar{S}$.

Определение: Технологичната матрица A се нарича **неразложима** ако чрез разместване на редове и стълбове не може да придобие вида (9.6). Неразложимостта означава че всеки отрасъл макар и косвено ползва продукцията на другите отрасли.

За неразложимите технологични матрици е в сила – Теорема 9.2.

Теорема 9.2. (Фробениус – Перон): Неразложимата неотрицателна матрица A притежава единствена собствена стойност $\lambda_A > 0$ с най-голям модул. На собствената стойност λ_A съответстват единствен собствен вектор X_A и единствен собствен ковектор P_A които могат да бъдат избрани положителни.

Собствената стойност λ_A и свързаните с нея собствен вектор X_A ($AX_A = \lambda_A X_A$) и собствен ковектор P_A ($P_A A = \lambda_A P_A$) се наричат Фробениусови.

Условия за продуктивност на неразложими технологични матрици – на базата на теоремата на Фробениус - Перон можем да докажем следната теорема:

Теорема 9.3. Моделът на Леонтиев е продуктивен тогава и само тогава когато $\lambda_A < 1$.

Доказателство:

1.Необходимост – нека моделът на Леонтиев е продуктивен, тогава за векторът на крайното търсене $Y > 0$ съществува такъв вектор на брутен продукт $X \geq 0$ че $X - AX = Y$ т.е. $X > AX \geq 0$ и следователно $X > 0$. Умножаваме неравенството $X > AX$ отляво с фробениусовия ковектор $P_A > 0$ и получаваме $P_A X > P_A AX = \lambda_A P_A X$, но $P_A X > 0$, следователно $\lambda_A < 1$.

2.Достатъчност – тъй като $AX_A = \lambda_A X_A$, $X_A > 0$, $0 < \lambda_A < 1$, то $A^K X_A = A^{K-1}(AX_A) = A^{K-1}(\lambda_A X_A) = \lambda_A A^{K-1} X_A = {\lambda_A}^2 A^{K-2} X_A = \cdots = {\lambda_A}^K X_A$

Тогава $\lim\limits_{k\to\infty} A^K X_A = \lim\limits_{k\to\infty} {\lambda_A}^K X_A = 0$. Но $X_A > 0$, $A^K \geq 0$ следователно $\lim\limits_{k\to\infty} A^K = 0$.

Разглеждаме матричното равенство:

$$(E - A)(E + A + A^2 + \cdots + A^{K-1}) = E - A^K,$$

което лесно може да се провери ако се разкрият скобите. Тъй като границата на дясната страна при $K \to \infty$ е равна на E , то съществува граница на лявата страна и тя също е равна на E т.е. ще имаме

$$(E - A)\sum_{K=0}^{\infty} A^K = E$$

Горното равенство показва че съществува обратна матрица $(E - A)^{-1}$ и за нея е изпълнено

$$(E - A)^{-1} = \sum_{K=0}^{\infty} A^K$$

(това равенство е аналогично на сумата на безкрайна геометрична прогресия).

Освен това тъй като за всички $A^K \geq 0$, то $(E - A)^{-1} \geq 0$, следователно за всеки вектор $Y \geq 0$ съществува неотрицателно решение на системата (9.3)

$$X = (E - A)^{-1} Y,$$

т.е. моделът на Леонтиев е продуктивен.

Теорема 9.3. дава възможност за проверка на продуктивността на модела на Леонтиев, но е лишена от икономическа интерпретация. Доказателството и обаче ни дава възможност да формулираме едно полезно следствие.

Следствие: Ако моделът на Леонтиев е продуктивен, то за всеки вектор на крайно търсене $Y \geq 0$ се определя еднозначно вектор на брутно предлагане X по формулата –

$$X = \sum_{K=0}^{\infty} A^K Y = Y + AY + A^2Y + \cdots \qquad (9.7)$$

Това разлагане може да се интерпретира така – за производството на даден обем продукция Y трябва да се изразходват AY продукти , но за да се произведат тези AY продукти трябва да се изразходват $A(AY) = A^2Y$ продукти, за чието производство са необходими $A(A^2Y) = A^3Y$ продукти и т.н.

Формулата (9.7) ни дава възможност да изчисляваме вектора X чрез рекурентна редица –

$$X_0 = Y,\ X_{n+1} = Y + AX_n\ ,\ X = \lim_{n\to\infty} X_n \qquad (9.8)$$

Предимствата на рекурентния метод (9.8) в сравнение с инверсния метод (9.5) са следните:

1. Не трябва да се пресмята обратна матрица

2. Може да се използва както при стойностен така и при натурален баланс

Към недостатъците на този метод можем да отнесем неопределеният обем на изчисления.

Методът на инверсията изисква краен брой изчислителни ресурси , но при реализацията му трябва да отчетем следните особености:

1. Необходимо е баланса да бъде в стойностна форма

2. Обратната матрица може да се окаже много чувствителна към грешки при закръглянето

За установяване на продуктивността на модела на Леонтиев може да се използва и следващия критерии (достатъчно условие):

Теорема 9.4. Ако технологичната матрица A е неразложима и сумите a_i от елементите на i-тия ред са не по-големи от 1: $a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq 1$ като за поне един ред K е изпълнено –

$a_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} < 1$, то моделът на Леонтиев е продуктивен.

Доказателство:

Нека P_A е Фробениусовия ковектор, а λ_A - Фробениусовата собствена стойност на матрицата A т.е.

$$P_A A = \lambda_A P_A\,, \qquad P_A > 0, \qquad 0 < \lambda_A$$

Да умножим последното равенство отдясно с вектор $e = (1,1,\dots,1)^T$. Получаваме

$$P_A A e = \lambda_A P_A e \tag{9.9}$$

Тъй като $Ae = (a_1, \dots, a_n)^T$, то за лявата част на (9.9) ще имаме

$$P_A A e = \sum_{i=1}^{n} (P_A)_i a_i < \sum_{i=1}^{n} (P_A)_i$$

В последното неравенство сме отчели условието на твърдението. Тъй като за дясната страна на (9.9) имаме $\lambda_A P_A e = \lambda_A \sum_{i=1}^{n} (P_A)_i$, то окончателно от (9.9) получаваме

$$\lambda_A \sum_{i=1}^{n} (P_A)_i < \sum_{i=1}^{n} (P_A)_i,$$

От където $\lambda_A < 1$ т.е. моделът на Леонтиев е продуктивен според Теорема 9.3.

Пример 9.1. При $n = 2$ за двата отрасъла имаме зададена технологичната матрица

$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ и вектора на продукцията на отраслите, предназначена за крайно потребление $Y = (2,4)^T$. Трябва да намерим вектора на брутна продукция на отраслите $X = (X_1, X_2)^T$, който балансира модела.

Решение:

1.Проверка за продуктивност

1.1.по критерия на Хоукинс-Саймън. Образуваме матрицата –

$$E - A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-5}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

За главните минори имаме - $M_{11} = a_{11} = \frac{2}{3} > 0$, $M_{22} = \Delta = \frac{25}{72} > 0$, което показва продуктивността по този критерии.

1.2.чрез фробениусовото число λ_A. Образуваме характеристичното уравнение –

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} - \lambda & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{3} - \lambda\right)\left(\frac{1}{6} - \lambda\right) - \frac{5}{24} = 0$$

Неговите корени са $\lambda_1 \approx 0{,}71$ *и* $\lambda_2 \approx -0{,}21$. Съгласно теоремата на Фробениус – Перон $\lambda_A = \lambda_1 \approx 0{,}71 < 1$, което показва продуктивността по този критерии.

1.3. според Теорема 9.4. Образуваме сумите на елементите по редове

$$a_1 = a_{11} + a_{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} < 1$$

$$a_2 = a_{21} + a_{22} = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

Тъй като a_1 *и* a_2 са по-малки или равни на 1 , а a_1 е строго по-малко от 1 , то и по този критерии установяваме продуктивност.

2. Намиране на решението. Тъй като за тази технологична матрица A моделът е продуктивен, следва че съществува обратна матрица $(E - A)^{-1}$, която е неотрицателна и $X = (E - A)^{-1}Y$. Получаваме $(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ и $X = (7{,}68; 12{,}48)^T$.

3. Възстановяване на модела. Окончателната балансова таблица се получава от $AX + Y = X$. В нашия случай тя е:

	Отрасъл №1	Отрасъл №2	Крайно потребление	Обща продукция
Отрасъл №1	2,56	3,12	2	7,68
Отрасъл №2	6,40	2,08	4	12,48
Добавена стойност	-1,28	7,28		
Обща продукция	7,68	12,48		

Така например 3,12 е стойността на продукцията на първият отрасъл вложена във втория отрасъл , 6,40 е сумата която първият отрасъл е заплатил на втория отрасъл за да придобие неговият продукт , който е вложил в своето производство. Да отбележим , че макар и продуктивен този модел не е печеливш за първият отрасъл – неговите разходи са ресурси $\bar{a}_{11} + \bar{a}_{21} = 8{,}96$, а общите му приходи са 7,68 т.е. той работи на загуба.

А сега нека да пресметнем вектор X рекурентно т.е. като използваме степените на технологичната матрица A (8). Получаваме следната редица:

$$X_0 = Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, X_1 = Y + AX_0 \approx \begin{pmatrix} 3{,}67 \\ 6{,}33 \end{pmatrix}, X_2 = Y + AX_1 \approx \begin{pmatrix} 4{,}81 \\ 8{,}11 \end{pmatrix}$$

$$X_3 = Y + AX_2 \approx \begin{pmatrix} 5{,}63 \\ 9{,}36 \end{pmatrix}, \quad X_4 = Y + AX_3 \approx \begin{pmatrix} 6{,}22 \\ 10{,}25 \end{pmatrix}, X_5 = Y + AX_4 \approx \begin{pmatrix} 6{,}63 \\ 10{,}89 \end{pmatrix}$$

$$X_6 = Y + AX_5 \approx \begin{pmatrix} 6{,}93 \\ 11{,}35 \end{pmatrix}, \ X_7 = Y + AX_6 \approx \begin{pmatrix} 7{,}15 \\ 11{,}67 \end{pmatrix} \text{ и т.н.}$$

От горната рекурентна редица се вижда че твърде бързо се приближава към точния отговор X , получен по метода на обратната матрица.

Пример 9.2. При n=3 в таблицата са дадени разходите на всеки отрасъл , необходими за производството на единица от собствената си продукция и за производството на единица от продукцията на всеки от останалите два отрасъла

Сектор	земеделие	промишленост	Обслужващ сектор
Земеделие	0,35	0,13	0,09
Промишленост	0,11	0,27	0,29
Обслужващ сектор	0,44	0,32	0,04

Нека количествата от продукция на всеки сектор , необходими за крайния потребител да възлизат съответно на – 3,12 млрд. дол. от земеделие , 29,36 млрд. дол. от промишленост и 32,24 млрд. дол. от обслужващия сектор. Каква трябва да е стойността на общата продукция на всеки от трите отрасъла за да бъде балансиран моделът?

Таблицата задава матрицата A на преките разходи т.е.

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}35 & 0{,}13 & 0{,}09 \\ 0{,}11 & 0{,}27 & 0{,}29 \\ 0{,}44 & 0{,}32 & 0{,}04 \end{pmatrix}, \text{ а за вектора } Y \text{ имаме } Y = \begin{pmatrix} 3{,}12 \\ 29{,}36 \\ 32{,}24 \end{pmatrix}$$

Решение:

1.Проверка за продуктивност -

1.1.По критерия на Хоукинс – Саймън. Образуваме матрицата $E-A=\begin{pmatrix} 0{,}65 & -0{,}13 & -0{,}09 \\ -0{,}11 & 0{,}73 & -0{,}29 \\ -0{,}44 & -0{,}32 & 0{,}96 \end{pmatrix}$

За главните минори имаме - $M_{11}=a_{11}=0{,}65>0$, $M_{22}=0{,}46>0$ $и$ $M_{33}=0{,}33>0$, което показва продуктивността по този критерий.

1.2.Според Теорема 9.4. Образуваме сумите на елементите по редове –

$$a_1=a_{11}+a_{12}+a_{13}=0{,}35+0{,}13+0{,}09=0{,}57<1$$

$$a_2=a_{21}+a_{22}+a_{23}=0{,}11+0{,}27+0{,}29=0{,}67<1$$

$$a_3=a_{31}+a_{32}+a_{33}=0{,}44+0{,}32+0{,}04=0{,}8<1$$

Тъй като a_1 , a_2 $и$ a_3 са по-малки от 1 , то и по този критерии установяваме продуктивност.

2. Намиране на решението. Тъй като за тази технологична матрица A моделът е продуктивен следва , че съществува обратна матрица $(E-A)^{-1}$ която е неотрицателна и $X=(E-A)^{-1}Y$. Получаваме $(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix} 1{,}85 & 0{,}45 & 0{,}33 \\ 0{,}73 & 1{,}76 & 0{,}61 \\ 1{,}06 & 0{,}82 & 1{,}39 \end{pmatrix}$ и $X=(29{,}62; 73{,}62; 72{,}19)^T$.

3.Възстановяване на модела. Окончателната балансова таблица се получава от $AX+Y=X$. В нашия случай тя е:

сектор	земеделие	промишленост	Обслужващ сектор	Крайно потребление	Обща продукция
Земеделие	10,37	9,57	6,50	3,12	29,62
Промишленост	3,26	19,88	20,93	29,36	73,62
Обслужващ сектор	13,03	23,56	2,89	32,24	72,19
Добавена стойност	2,96	20,61	41,87		
Обща продукция	29,62	73,62	72,19		

Да отбележим , че този модел е печеливш и за трите отрасъла – защото 2,96 , 20,61 и 41,87 са по-големи от 0.

10. Линеен модел на международна търговия

Да разгледаме n на брой страни $S_1, S_2, \dots, S_n$, като $X_1, X_2, \dots, X_n$ са техните национални доходи. Чрез a_{ij} означаваме дела от националния доход на страната S_j изразходван за покупка на стоки от страната S_i. Ще считаме че целият национален доход на страната S_j , $j = 1, \dots, n$ се изразходва за закупуване на стоки вътре в страната (a_{jj}) или за внос на стоки от другите страни $(a_{ij}, i \neq j)$, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \,,\; j = 1, \dots, n \qquad (10.1)$$

С други думи, ако разгледаме матрицата $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$ то сумата от елементите на всички стълбове е равна на 1. Тази матрица се нарича структурна матрица на международната търговия. Може да се докаже следното твърдение:

Твърдение 10.1. Матрицата на международната търговия притежава фробениусова собствена стойност $\lambda_A = 1$.

Доказателство:

Ако $\lambda_A = 1$ е собствена стойност на матрицата A ще съществува фробениусов вектор X_A за който ще е изпълнено равенството

$$AX_A = X_A$$

Тъй като $X = EX$ този собствен вектор ще бъде решение на системата

$$(A - E)X = 0 \qquad (10.2)$$

Тъй като сумата от елементите на всеки стълб на A е равна на 1 , сумата от елементите на стълбовете на $A - E$ ще бъде 0 т.е. редовете на $A - E$ ще са линейно зависими и

$$\det(A - E) = 0 \Leftrightarrow rank(A - E) < n$$

Тогава хомогенната линейна система (10.2) ще притежава безброй много решения. Да разгледаме сумата $Z_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j$.

Тъй като a_{ij} е делът от националния доход на страната S_j , който тя изразходва за закупуване на стоки от страната S_i то $a_{ij} X_j$ ще бъде общия обем стоки , които S_j е закупила от S_i или обема на стоки, които S_i е продала на S_j. Тогава Z_i е обемът на продажбите на страната S_i , като $a_{ii}X_i$ е обемът на вътрешните продажби, а $Z_i - a_{ii}X_i$ - обема на износа на S_i .

За да бъде балансирана международната търговия е необходимо да бъде изпълнено условието за бездефицитност на търговията за всяка страна S_i: обемът на продажбите не трябва да бъде по-малък от националния доход т.е.

$$Z_i \geq X_i\,,\ i = 1, \dots, n \qquad (10.3)$$

Твърдение 10.2. Обемът на продажбите на всяка държава е равен на националният и доход т.е.

$$Z_i = X_i\ , \qquad i = 1, \dots, n$$

Доказателство: Допускаме , че неравенствата (10.3) са строги т.е. $Z_i > X_i$. Тогава получаваме системата от неравенства –

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n > x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n > x_2 \\ \qquad\qquad\qquad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n > x_n \end{array} \right.$$

Събираме горните неравенства и след групиране получаваме –

$$(a_{11} + a_{21} + \cdots + a_{n1})x_1 + (a_{12} + a_{22} + \cdots + a_{n2})x_2 + \cdots$$
$$+ (a_{1n} + a_{2n} + \cdots + a_{nn})x_n > x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

Отчитайки (10.1) получаваме $x_1 + x_2 + \cdots + x_n > x_1 + x_2 + \cdots + x_n$

Следователно условията $Z_i > X_i$ са невъзможни и (10.3) добива вида $Z_i = X_i$, $i = 1, \dots, n$.

Забележка: Тъй като $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j = X_i$, то този модел се явява частен случай от модела на Леонтиев при $Y_i = 0$, $i = 1, \dots, n$. Следователно може да се интерпретира (в духа на междуотрасловия обмен) като икономика, която не произвежда стоки за крайно потребление (а само за задоволяване на производствените нужди на отраслите). Такъв модел при който $Y_i = 0$ се нарича **затворен модел на Леонтиев** за разлика от отворения модел на Леонтиев, при който $Y_i > 0$.

Решението на модела на международната търговия се състои в намирането на фробениусовите вектори X_A за матрицата A , съответстващи на фробениусовата собствена стойност $\lambda_A = 1$. Те се намират от решаването на системата $(A - E)X = 0$. Тази система ще има безброй много решения от вида $X = (X_1^o C, X_2^o C, \cdots, X_n^o C), C \in R$, образуващи едномерно векторно пространство. Тогава ние ще получим пропорциите между националните доходи на страните

$$X_1 : X_2 : \cdots : X_n = X_1^o : X_2^o : \cdots : X_n^o,$$

при които ще се удовлетворява структурната матрица на международната търговия.

Пример 10.1.: Структурната матрица за търговията на три страни S_1, S_2, S_3 има вида

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Да се намери съотношението на националните доходи $X_1 : X_2 : X_3$, балансиращо международната търговия между тези страни.

Решение:

Системата $(A - E)X = 0$ има вида

$$\begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решаваме я по метода на Гаус и получаваме $X = (X_1, X_2, X_3) = (\frac{3}{2}C, 2C, C)$. Тогава $X_1 : X_2 : X_3 = \frac{3}{2} : 2 : 1 = 3 : 4 : 2$ е съотношението на националните доходи на страните, балансиращо международната търговия между тях.

11. Модел на Леонтиев с отчитане на вноса и износа

Ако Im_i е вноса на i-тия продукт , а Ex_i - износа на i-тия продукт, уравненията за общата продукция, включително вноса и износа ще имат вида:

$$X_i + Im_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + Y_i + Ex_i \qquad (i = 1,2,\dots,n) \qquad (11.1)$$

Връзките допускат за производството на едни продукти да се използват продукти местно производство, за други от местно производство и внос, а за трети – само от внос. Вносните продукти, които се произвеждат и в страната, се наричат „конкурентен внос”, а другите – „допълващ внос”. Обемът на допълващия внос зависи от обема на местното производство на продуктите, за които този внос се използва като средство за производство, и от обема на крайното потребление на този продукт.

Ако са известни вносът Im_i , крайното потребление Y_i и износът Ex_i , може да се определи обема на местното производство X_i , а при известност на местното производство X_i , крайното потребление Y_i и износа Ex_i - може да се определи обема на вноса Im_i .

Ако коефициентите на преки разходи на предмети на труда a_{ij} се представят като сума от предмети на труда местно производство d_{ij} и вносни предмети на труда c_{ij}, а крайното потребление Y_i се представи като сума от крайно потребление местно производство Yd_i и крайно потребление от внос Yc_i , системата уравнения ще имат следния вид:

$$X_i + Im_i = \sum_{j=1}^{n} \left(d_{ij} + c_{ij}\right) X_j + (Yd_i + Yc_i) + Ex_i \quad (i = 1, \dots, n) \qquad (11.2)$$

(d_{ij} - коефициенти за необходимите разходи на продукт местно производство от i-тия вид за производството на единица продукт от j-тия вид; c_{ij} - коефициенти за необходимата вносна продукция от i-тия вид за производството на единица продукт от j-тия вид).

При известност на разходните коефициенти d_{ij} и c_{ij} (от технологична прогноза), както и Yd_i и Yc_i , могат да се обособят две системи уравнения:

За разпределение на местното производство и износа:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} d_{ij} X_j + Yd_i + Ex_i \qquad (i = 1,2, \dots, n) \qquad (11.3)$$

И за разпределение на вноса:

$$Im_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} + Yc_i \qquad (i = 1,2, \dots, n) \qquad (11.4)$$

Уравненията за местното производство и износа ще бъдат:

$$X = DX + Yd + Ex \qquad (11.5)$$

или $(E - D)X = Yd + Ex$ (11.6)

(X – вектор-стълб на продукцията от местно производство; Yd – вектор-стълб на крайното потребление от местно производство; Ex – вектор-стълб на износа; D – квадратна матрица на коефициентите на преките разходи на предмети на труда местно производство).

Местното производство може да се представи като произведение на обратната матрица на $(E-D)$ и вектора $Yd+Ex$:

$$X=(E-D)^{-1}(Yd+Ex) \tag{11.7}$$

($(E-D)^{-1}$ - матрица на пълните разходи на предмети на труда местно производство)

В матричен вид системата уравнения за разпределение на вноса (11.4) ще представлява:

$$Im=CX+Yc \tag{11.8}$$

(Im – вектор-стълб на вноса; Yc – вектор-стълб на крайното потребление от вносна продукция; C – квадратна матрица на преките разходи на вносни предмети на труда).

След определянето на обема на местното производство чрез (11.7), обемът на вноса може да се изрази по следния начин:

$$Im=C(E-D)^{-1}(Yd+Ex)+Yc \tag{11.9}$$

($C(E-D)^{-1}$ е матрица на пълните разходи на предмети на труда).

Вижда се , че продуктивността на модела зависи от продуктивността на технологичната матрица на местното производство D. Но тъй като $A=D+C \Rightarrow A\geq D$.

Лесно може да се покаже , че от продуктивността на матрицата A следва продуктивността на D , тъй като за фробениусовите им собствени стойности е изпълнено неравенството $\lambda_A \geq \lambda_D$ и при $\lambda_A<1 \Rightarrow \lambda_D<1$.

Пример 11.1: Дадени са – технологичната матрица - $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$, ресурсите местно производство – $D=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$, ресурсите внос – $C=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & 0\end{pmatrix}$, крайното потребление от местно производство - $Yd=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$, крайното потребление от внос - $Yc=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ и износа – $Ex=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

Да се намери колко е вносът?

Решение:

1. Проверка за продуктивност

1.1. Продуктивност на A – образуваме характеристичното уравнение $\begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{4}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\left(\frac{1}{4}-\lambda\right) - \frac{2}{9} = 0 \Rightarrow 72\lambda^2 - 54\lambda - 7 = 0 \Rightarrow \lambda_1 \approx 0{,}86$ $\lambda_2 \approx -0{,}11 \Rightarrow \lambda_A = \lambda_1 \approx 0{,}86 < 1$

1.2. Продуктивност на $D - \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\left(\frac{1}{4}-\lambda\right) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \lambda_A = \frac{1}{2} < 1$

1.3. Продуктивност по Хоукинс-Саймън – $(E-D) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$. $M_{11} = \frac{1}{2} > 0, M_{22} = \frac{3}{8} > 0 \Rightarrow$ моделът е продуктивен.

$(E-D)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \frac{8}{9} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (E-D)^{-1}(Yd + Ex)$ е местното производство.

$$(Yd + Ex) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \frac{8}{9} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ \frac{76}{9} \end{pmatrix}$$

$$Im = CX + Yc = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ \frac{76}{9} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{76}{27} \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{76}{27} \\ \frac{16}{3} \end{pmatrix}$$

Пример 11.2: Дадени са – технологичната матрица - $A = \begin{pmatrix} 0{,}35 & 0{,}13 & 0{,}09 \\ 0{,}11 & 0{,}27 & 0{,}29 \\ 0{,}44 & 0{,}32 & 0{,}04 \end{pmatrix}$, ресурсите местно производство – $\begin{pmatrix} 0{,}30 & 0{,}13 & 0{,}06 \\ 0{,}11 & 0{,}20 & 0{,}21 \\ 0{,}22 & 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$, ресурсите внос – $C = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0 & 0{,}03 \\ 0 & 0{,}07 & 0{,}08 \\ 0{,}22 & 0{,}07 & 0{,}04 \end{pmatrix}$, крайното потребление от местно производство – $Yd = \begin{pmatrix} 1{,}56 \\ 28{,}00 \\ 29{,}57 \end{pmatrix}$, крайното потребление от внос – $Yc = \begin{pmatrix} 1{,}56 \\ 1{,}36 \\ 2{,}67 \end{pmatrix}$ и износа – $Ex = \begin{pmatrix} 7{,}87 \\ 5{,}62 \\ 3{,}40 \end{pmatrix}$. Да се намери колко е вносът?

Решение:

1.Продуктивност по Хоукинс – Саймън на матрицата D – $(E-D)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0{,}30 & 0{,}13 & 0{,}06\\ 0{,}11 & 0{,}20 & 0{,}21\\ 0{,}22 & 0{,}25 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}70 & -0{,}13 & -0{,}06\\ -0{,}11 & 0{,}80 & -0{,}21\\ -0{,}22 & -0{,}25 & 1\end{pmatrix}.$

$M_{11}=0{,}70>0\,, M_{22}=0{,}55>0\,, M_{33}=0{,}49>0\implies$ моделът е продуктивен.

2.$(E-D)^{-1}=\begin{pmatrix}1{,}53 & 0{,}31 & 0{,}16\\ 0{,}33 & 1{,}41 & 0{,}33\\ 0{,}43 & 0{,}43 & 1{,}12\end{pmatrix}$. $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=(E-D)^{-1}(Yd+Ex)$

$$(Yd+Ex)=\begin{pmatrix}1{,}56\\ 28{,}00\\ 29{,}57\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7{,}87\\ 5{,}62\\ 3{,}40\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9{,}43\\ 33{,}62\\ 32{,}97\end{pmatrix}$$

$X=\begin{pmatrix}1{,}53 & 0{,}31 & 0{,}16\\ 0{,}33 & 1{,}41 & 0{,}33\\ 0{,}43 & 0{,}43 & 1{,}12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9{,}43\\ 33{,}62\\ 32{,}97\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30{,}13\\ 61{,}39\\ 55{,}45\end{pmatrix}$ е местното производство.

3. $Im=CX+Yc=\begin{pmatrix}0{,}05 & 0 & 0{,}03\\ 0 & 0{,}07 & 0{,}08\\ 0{,}22 & 0{,}07 & 0{,}04\end{pmatrix}\begin{pmatrix}30{,}13\\ 61{,}39\\ 55{,}45\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1{,}56\\ 1{,}36\\ 2{,}67\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4{,}73\\ 10{,}10\\ 15{,}82\end{pmatrix}$

12. Дуален модел на Леонтиев

Всички изводи направени в предишните параграфи се основават на анализа на балансовата таблица по редове. Сега ще обърнем внимание на стълбовете. Балансовото равенство за j-тия стълб е:

$$\bar{a}_{1j}+\cdots+\bar{a}_{ij}+\cdots+\bar{a}_{nj}+\bar{v}_j=x_j \tag{12.1}$$

Тъй като $\bar{a}_{ij}$ е сумата която j-тия отрасъл заплаща на i-тия отрасъл , за да придобие неговия продукт и да го вложи (като ресурс) за производството на своя продукт , то сумата

$$\bar{a}_{1j}+\cdots+\bar{a}_{ij}+\cdots+\bar{a}_{nj},$$

представлява общия разход на j-тия отрасъл. Общия му приход е x_j следователно $\bar{v}_j$ е добавената стойност на този отрасъл. Ако разделим (1) на k_j - количеството продукция на j-тия отрасъл ще получим

$$\frac{\bar{a}_{1j}}{k_j}+\cdots+\frac{\bar{a}_{ij}}{k_j}+\cdots+\frac{\bar{a}_{nj}}{k_j}+\frac{\bar{v}_j}{k_j}=\frac{x_j}{k_j} \tag{12.2}$$

Очевидно $\frac{X_j}{K_j} = p_j$ - цената на j-тия продукт и $\frac{\bar{V}_j}{K_j} = v_j$ - добавената стойност на един брой от j-тия продукт. Ясно е също така , че $\frac{\bar{a}_{ij}}{k_j}$ е сумата , която j-тия отрасъл изразходва за продукта на i-тия отрасъл за да произведе един свой продукт. Но a_{ij} показва колко единици от i-тия продукт се изразходват за производството на единица от j-тия , то $a_{ij}p_i$ ще представлява сумата , която j-тия отрасъл заплаща на i-тия , за да произведе единица от своята продукция. Така накрая (5.2) добива вида

$$a_{1j}p_1 + \cdots + a_{ij}p_i + \cdots + a_{nj}p_n + v_j = p_j$$

Можем вече да формулираме дуалната задача: при дадени добавени стойности на единица продукция на отраслите $v_1, \cdots, v_j, \cdots, v_n$, и възоснова на технологичната матрица $A = (a_{ij})$ да се намерят балансовите цени на отрасловите продукти $p_1, \cdots, p_j, \cdots, p_n$. С други думи трябва да се реши линейната система

$$p_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}p_i = v_j\ ,\ \ j = 1, \cdots, n\ ,$$

или в матричен запис

$$P - PA = V,\ P(E - A) = V.$$

Да отбележим , че P и V са ковектори.

Определение: Дуалният модел на Леонтиев се нарича **печеливш** , ако горната система притежава неотрицателни решения т.е. $p_j \geq 0\ ,\ j = 1, \cdots, n.$

Тъй като при неотрицателна обратимост на матрицата $(E - A)$ моделът е печеливш и $P = V(E - A)^{-1}$, то можем да твърдим , че:

Теорема 12.1. Дуалният модел на Леонтиев е печеливш тогава и само тогава , когато базовият модел е продуктивен.

Теорема 9.1 и Теорема 9.3 от (необходимите и достатъчни условия за продуктивност) са в сила ако заменим „продуктивен" с „печеливш". Теорема 9.4 (достатъчното условие) сега добива вида

Теорема 12.2. Ако технологичната матрица A е неразложима и сумите a_j от елементите на j-тия стълб са не по-големи от 1: $a_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1$ като за поне един стълб l е изпълнено $a_l = \sum_{i=1}^{n} a_{il} < 1$ то дуалният модел на Леонтиев е печеливш.

Пример 12.1. При n=2 да разгледаме същата технологична матрица A , както в Пример 9.1. на базовия модел т.е. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$. Ако зададем ковектор на добавените стойности за единица продукция на отраслите $v = (1{,}5; 2{,}5)$ ще можем да намерим ковектора на цените $p = (p_1; p_2)$ на продуктите на отраслите , така че всяка единица да дава определената от нас добавена стойност. Тъй като в базовия модел сме се убедили , че матрицата A е продуктивна , сега за пресмятането на p можем да използваме формулата $p = v(E - A)^{-1}$. Получаваме $(p_1; p_2) = (1{,}5; 2{,}5) \begin{pmatrix} \frac{12}{5} & \frac{18}{25} \\ \frac{12}{5} & \frac{48}{25} \end{pmatrix} = (9{,}60; 5{,}88)$. Следователно , ако цената на единица продукт на първия отрасъл е 9,60 лв. той ще получава добавена стойност от 1,50 лв. на брой , а втория отрасъл при цена от 5,88 лв. – 2,50 лв. на брой.

Пример 12.2. При n=3 да разгледаме същата технологична матрица A както в Пример 9.2. на базовия модел т.е. $A = \begin{pmatrix} 0{,}35 & 0{,}13 & 0{,}09 \\ 0{,}11 & 0{,}27 & 0{,}29 \\ 0{,}44 & 0{,}32 & 0{,}04 \end{pmatrix}$. Ако зададем ковектор на добавените стойности за единица продукция на отраслите $v = (0{,}4; 25; 2{,}6)$ ще можем да намерим ковектора на цените $p = (p_1; p_2; p_3)$ на продуктите на отраслите така че всяка единица да дава определената от нас добавена стойност. Тъй като в базовия модел сме се убедили , че матрицата A е продуктивна сега за пресмятането на p можем да използваме формулата

$p = v(E - A)^{-1}$. Получаваме $(p_1; p_2; p_3) = (0{,}4; 25; 2{,}6) \begin{pmatrix} 1{,}85 & 0{,}45 & 0{,}33 \\ 0{,}73 & 1{,}76 & 0{,}61 \\ 1{,}06 & 0{,}82 & 1{,}39 \end{pmatrix} = (21{,}75; 46{,}31; 18{,}99)$. Следователно ако цената на единица продукт на първия отрасъл е 21,75 лв. той ще получава добавена стойност от 0,40 лв. на брой. Ако цената на единица продукт на втория отрасъл е 46,31 лв. той ще получава добавена стойност от 25 лв. на брой. Ако цената на единица продукт на третия отрасъл е 18,99 лв. той ще получава добавена стойност от 2,60 лв. на брой.

ГЛАВА 3. СЕКТОРЕН МАКРОИКОНОМИЧЕСКИ АНАЛИЗ

13. Неокласическа концепция за стоковите пазари

Търсене на домакинствата. Според неокласическата концепция, индивидът сам определя (планира) дохода си, а не го възприема за даденост. Това той прави, като разпределя времето си на свободно и работно, а текущите си доходи – на потребление и спестяване, с оглед максимализиране на благосъстоянието си в дългосрочен план. Следователно, спестяването е първично по отношение на потреблението: т.е. индивидът първо определя обема на необходимите (за обезпечаване на определено ниво потребление в бъдеще) спестявания, а останалия разполагаем доход се потребява. От друга страна, функцията на спестяване ще бъде растяща функция на лихвения процент, т.е.

$$S = S(i), \ \frac{dS}{di} = S_i > 0 ,$$

величината $\frac{dS}{di} = S_i$ се нарича маргинална склонност към спестяване. В неокласическата концепция се приема, че

$$S(i) = -C_a + ai ,$$

където C_a показва колко ще изтеглят домакинствата от богатството си при положение, че лихвения процент е $i = 0$, а $a = S_i$ е маргиналната спестовност. Като вземем пред вид, че доходът на домакинствата y се разпределя между потребление C, данъци T и спестяване S, за функцията на потребление получаваме

$$C(i) = C_a + y - T - ai$$

Търсене на предприемаческият сектор. Такова търсене се нарича **инвестиционно търсене**. Общият обем на брутните инвестиции на фирмите I се разпределя, на **възстановителни инвестиции** (които покриват амортизацията на реалния капитал D) и **нетни инвестиции** (допринасящи за нарастване на реалния капитал). От друга страна инвестициите се делят на **индуцирани**, ако целта им е покриване на растящо търсене на стоката (брутния продукт) и **автономни** – при неизменно търсене.

За индуцираните инвестиции е валидна формулата

$$I^{in} = k(y_1 - y_0) ,$$

Където $y_1 - y_0$ е прираста на брутния продукт, а $k = \frac{\Delta K}{\Delta y}$ или $k = \frac{dK}{dy}$ - прирастна или **маргинална капиталоемкост**. При равномерно нарастване на брутния продукт обема на индуцираните инвестиции е постоянен. При съкращаване на продукта $(y_1 < y_0)$ те стават отрицателни. Това означава, че при намаляло търсене на продукцията предприемачите частично не възстановяват износения капитал, следователно отрицателните индуцирани инвестиции не могат да превишат размера на амортизациите.

Забележка: Коефициента k се нарича още **акселератор**.

Инвестициите в текущия период се превръщат в допълнителен капитал през следващия

$$I_t = \Delta K_{t+1}$$

Според неокласическата концепция предприемачите инвестират, когато обема на капитала е по-малък от оптималния. Тогава ще е изпълнено

$$I_t = \beta(K^* - K_t)\,,$$

където K_t е количеството реален капитал в началото на текущия период, K^* - обема на оптимален капитал, а β $(0 < \beta < 1)$ – коефициент, характеризиращ скоростта на приближаване на съществуващия капитал към оптималния.

Оптимален е този обем на капитала, който при наличната производствена технология и цени на производствените фактори осигурява максимална печалба. В условия на конкуренция, маргиналната производителност на капитала $r = {dy}/{dK}$ е равна на маргиналните разходи по неговото използване. Ако пренебрегнем амортизацията, разходите по използване на капитала са равни на лихвения процент на кредита и условието за оптималност добива вида

$$r(K) = i$$

Ако например функционалната връзка между брутния продукт и количествата капитал и труд се задава с производствената функция на Кооб-Дъглас $y = K^{\alpha}L^{1-\alpha}$, тогава $r = \frac{\alpha y}{K}$ и $K^* = \frac{\alpha y}{i}$, следователно

$$I_t = \beta\left(\frac{\alpha y}{i} - K_t\right)$$

След достигане на оптималния капитал, фирмите ще инвестират при увеличаване на производителността на капитала r, при намаляване на лихвения процент i и при увеличаване на тъсенето y, т.е.

$$I = I(r, i, y)\,;\ \frac{\partial I}{\partial r} > 0, \frac{\partial I}{\partial i} < 0, \frac{\partial I}{\partial y} > 0$$

Но тъй като разглеждаме автономните инвестиции $(y = const)$, то

$$I^a = I^a(r,i);\ \frac{\partial I^a}{\partial r} > 0, \frac{\partial I^a}{\partial i} < 0$$

Търсене на държавния сектор. Тъй като икономическата активност на държавата няма ясно изразен крутерий за оптималност, то трудно могат да се определят факторите, определящи обема на държавните разходи. Тогава ще ги приемем за екзогенно зададена величина – G.

Търсене на външния сектор. Обемът на външната търговия зависи от множество фактори: съотношението на вътрешните цени спрямо международните, обменния курс на националната валута, лихвените проценти в чужбина и др. С цел опростяване на модела ще направим следните предположения:

- Износът E (търсенето на стоки, произведени в разглежданата държава от страна на външния сектор) приемаме за екзогенна величина;
- Вносът Z (вътрешното търсене на стоки, произведени в чужбина) считаме за намаляваща функция на лихвения процент
$$Z = Z(i) = Z_0 - bi, b > 0$$

Съвкупно търсене на стоки. То се получава като използваме формулата за БВП

$$y = C + G + I + (E - Z)$$

Според неокласическата концепция за съвкупното търсене на стоки y^D получаваме

$$y^D = C(i) + G + I(r,i) + E - Z(i)$$

Предполагаме, че маргиналната производителност на капитала е фиксирана, тогава брутните инвестиции и следователно съвкупното търсене ще зависят само от лихвения процент. Сега разбираме как централната банка използва лихвения процент като инструмент за въздействие върху икономиката:

- При повишаване на лихвения процент настъпва „охлаждане“ на икономиката, защото намалява потребителското и инвестиционно търсене, както и търсенето на вносни стоки, но нарастват спестяванията и се подобрява платежния баланс (нетния износ $X = E - Z$);
- При понижаване на лихвения процент икономиката се „загрява“ като се увеличава потребителското и инвестиционно търсене, включително търсене от внос, но намаляват спестяванията и се влошава платежния баланс.

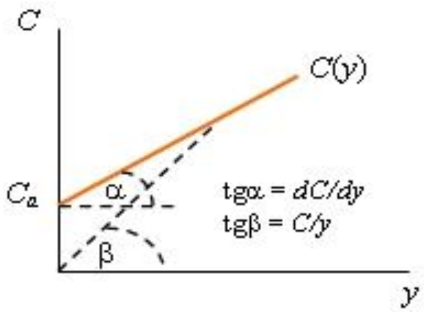
14. Кейнсианска концепция за стоковите пазари

Търсене на домакинствата. Една от първите функции на потребление е построена от Дж.М.Кейнс, според когото потреблението на домакинствата зависи от големината на текущия доход. Характера на тази зависимост той изразява така: „Основен психологичесски закон, в съществуването на който можем да сме уверени не само от априорни съображения, изхождайки от познанието ни за човешката природа, но и на основата на детайлно изучаване на миналия опит, се състои в това, че хората са склонни, като правило, да увеличават потреблението си с ръста на дохода, но не в такава степен, в каквато расте дохода им“. Следователно, за функцията на потребление ще имаме

$$C = C(y); 0 < \frac{dC}{dy} < 1$$

Производната $\frac{dC}{dy} = C_y$ се нарича маргинална склонност към потребление. Според кейнсианската концепция функцията на потребление е линейна функция на дохода:

$$C(y) = C_a + cy; 0 < c < 1\ ,$$



където с C_a сме означили величината на автономното (независимо от дохода потребление, а c е маргиналната склонност към потребление. Смисълът на автономното потребление е, че ако домакинствата останат без доход те ще изтеглят тази величина C_a от богатството си и ще я използват за потребление.

Фиг. 2. Средна и маргинална склонност към потребление

От вида на функцията на потребление се вижда, че с нарастване на дохода намалява средната норма на потребление (делът на потреблението $\frac{C(y)}{y}$): колкото по-голям е доходът, толкова по малък е $tg\beta$.

Тогава, спестяването е вторично и то се определя от

$$\begin{aligned} y = C + T + S \Rightarrow S = S(y) = y - C(y) - T(y) = y - C_a - cy - T_y y \\ = -C_a + (1-c)y - T_y y = -C_a + sy - T_y y\ , \end{aligned}$$

където $s(= 1 - c)$ е маргиналната склонност към спестяване, а T_y – данъчната ставка, определена от държавата.

Инвестиционно търсене. Всичко, казано по-горе за индуцираните инвестиции е валидно и при кейнсианската концепция.

Ще разгледаме автономните инвестиции според кейнсианската концепция. Според Дж. М. Кейнс инвеститорът сравнява пазарния лихвен процент не с производителността и доходността на реалния капитал, а с потенциалната ефективност на планираните инвестиционни проекти. Това се определя по следния начин: ценността на прихода П след t години е $П \,/\, (1+\delta)^t$, където δ е **дисконтна ставка.**

Пример. Даден инвеститор има възможност за приход от 300 щ. д. след една година, а субективната му дисконтна ставка е 0,2. В този случай бъдещите 300 щ. д. за него са еквивалентни на възможността да получи 300/(1+0,2)=250 ш. д. сега.

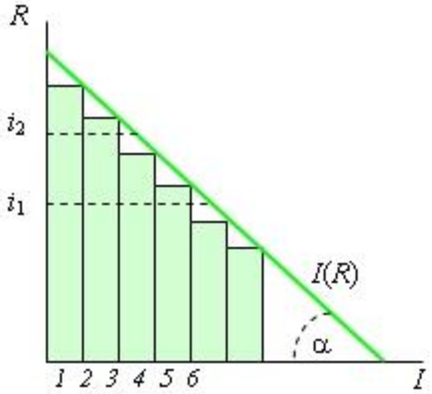
Ако за един проект са необходими вложения K_0, а очакваните приходи през следващите години са $П_1$,$П_2$,…,$П_n$, проектът се счита за целесъобразен, ако е изпълнено

$$K_0 < \frac{П_1}{(1+\delta)} + \frac{П_2}{(1+\delta)^2} + \cdots + \frac{П_n}{(1+\delta)^n}$$

При дадени $П_1$,$П_2$,…,$П_n$ стойността на сумата в дясната страна на неравенството зависи само от δ. Тази стойност на δ, която превръща горното неравенство в равенство ще наричаме **гранична ефективност на капитала** и ще бележим с R. Тогава за автономните инвестиции ще имаме

$$I^a = I_i(R - i),$$

където $I_i = dI^a/d(R-i)$ е маргиналната склонност към автомно инвестиране.



Фиг. 3. Класиране на проекти по тяхната гранична ефективност

Процесът на определяне на обема на автономните инвестиции може да се представи по следния начин: инвеститорът класира (ранжира) всички проекти по тяхната низходяща гранична ефективност, както е показано на Рис.2. Освен свързаните с риск вложения в реален капитал, инвеститорът може да придобие държавни ценни книжа с гарантирана доходност i. Тогава оптималният обем инвестиции ще се определи равенството $R(I) = i$.

В случая, представен на Рис.2. при $i = i_1$ ще бъдат реализирани първите четири проекти (класирани според граничната им ефективност), а при $i = i_2$ – първите два.

Друг подход към инвестиционните проекти се получава по следния начин: проекта се дисконтира чрез използване на пазарния лихвен процент, тогава се получава **сегашната стойност** PV (present value):

$$PV = \frac{\Pi_1}{(1+i)} + \frac{\Pi_2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{\Pi_n}{(1+i)^n}$$

Проектът е икономически изгоден, ако $K_0 < PV$ или $PV/K_0 = q > 1$, където q се нарича **коефициент на Тобин.**

Различията между неокласиците и Дж.М.Кейнс са свързани с това, че коефициентите r и R са различни. Маргиналната производителност на капитала r характеризира производствената технология и е обективен параметър, докато граничната ефективност на капитала R е субективна величина, защото се определя от очакваните от инвеститора бъдещи приходи Π_1,Π_2,…,Π_n. Те се определят от прогнозите на инвеститора за бъдещи цени, разходи и търсене.

Търсене на държавния сектор. Също като в неокласичеслия модел ще го приемем за екзогенно зададена величина – G.

Търсене на външния сектор. По аналогия с неокласическия модел и тук износа E се приема като екзогенно зададен, а за вносът Z се прави допускането, че той е растяща функция на брутния продукт

$$Z = Z(y);\ \frac{dZ}{dy} = Z_y > 0\ ,$$

където Z_y е маргиналната склонност към потребление на вносни стоки. Приема се, че функционалната зависимост е линейна, тогава

$$Z = Z(y) = Z_0 + zy, z > 0, z = Z_y$$

Съвкупно търсене на стоки. То се получава като използваме формулата за БВП

$$y = C + G + I + (E - Z)$$

Според кейнсианската концепция за съвкупното търсене на стоки y^D получаваме

$$y^D = C(y) + G + I(R, i) + E - Z(y)$$

Принципната особеност на кейнсианския модел за формиране на съвкупното търсене е в това, че при него съществува обратна връзка: от една страна обема на съвкупното търсене се определя от потреблението на домакинствата и вноса, от друга, тези две съставки на съвкупното търсене зависят от произведения национален доход. Тази особеност поражда така наречения мултипликативен ефект.

15. Условия за равновесие при кейнсианския модел на стоковия пазар. *IS* линия

Условия за равновесие при кейнсианския модел на стоковия пазар. За моделиране на равновесното състояние на стоковия пазар е необходимо да познаваме и функцията на съвкупно предлагане y^S, за което за необходими допълнителни изследвания. За да направим анализ на равновесието, ще допуснем, че предлагането е съвършенно еластично, т.е. то може мигновенно да задоволи всяко търсене. Тогава $y^D = y^S = y$ и

$$y = C(y) + G + I(R, i) + E - Z(y),$$

от където получаваме

$$y - C(y) + Z(y) = G + I(R, i) + E$$

или

$$y - C_a - cy + Z_0 + zy = G + I_i R - I_i i + E$$

Окончателно, в случай на четирисекторна икономика поучаваме

$$(Z_0 - C_a) + (1 - c + z)y = (G + I_i R + E) - I_i i$$

за трисекторна (без външен сектор):

$$-C_a + (1 - c)y = (G + I_i R) - I_i i$$

За двусекторна (без държава): $-C_a + (1 - c)y = I_i R - I_i i$

Горните изрази показват, че в равнината (y, i) може да се определи права, всяка точка накоято представлява една от комбинациите на дохода y и лихвения процент i, които в съвкупност обезпечават равновесие на стокория пазар (при фиксиране на другите величини). Тази права линия ще наричаме ***IS* линия** или **линия „инвестиции-спестявания“** (investment-savings). Ако зафиксираме лихвения процент $i = i_0$, тогава от горноте равенства (в зависимост от това кой тип икономика разглеждаме) еднозначно ще получим $y = y_0$ така че да е налице равновесие, т.е. точката с координати (y_0, i_0) да лежи на *IS* линията. За всички $y: y > y_0$, при които точката с координати (y, i_0) ще е разположена над *IS* линията, дохода е по-вече от равновесния, т.е. наблюдава се стоков излишък. За точките, разположени под *IS* линията е характерен стоков дефицит.

Тъй като горните изрази представляват уравнения на прави линии, то при изменението на параметрите, формиращи свободния член и запазване на тези, стоящи пред променливите y и i, може да се очаква успоредно пренасяне на *IS* линията.

Следователно, в случай на трисекторна икономика, IS линията ще се пренася успоредно, ако се променят автономнито потребление на домакинствата C_a, граничната ефективност на капитала R и държавните разходи G. Ако означим свободния член с A, т.е. $A = C_a + G + I_i R$, то това са автономните (независещи от лихвения процент) разходи, при изменението на които IS линията се пренася успоредно.

Равновесието на стоковия пазар може да интерпретираме и така: основното макроикономическо тъждество, постулиращо равенство на изтеглянията от потенциалното търсене (данъци, спестявания и внос) и на инжекциите (ннвестиционно търсене, търсене на държавата и на външния сектор) добива вида (в случаите на четири и три сектора съответно):

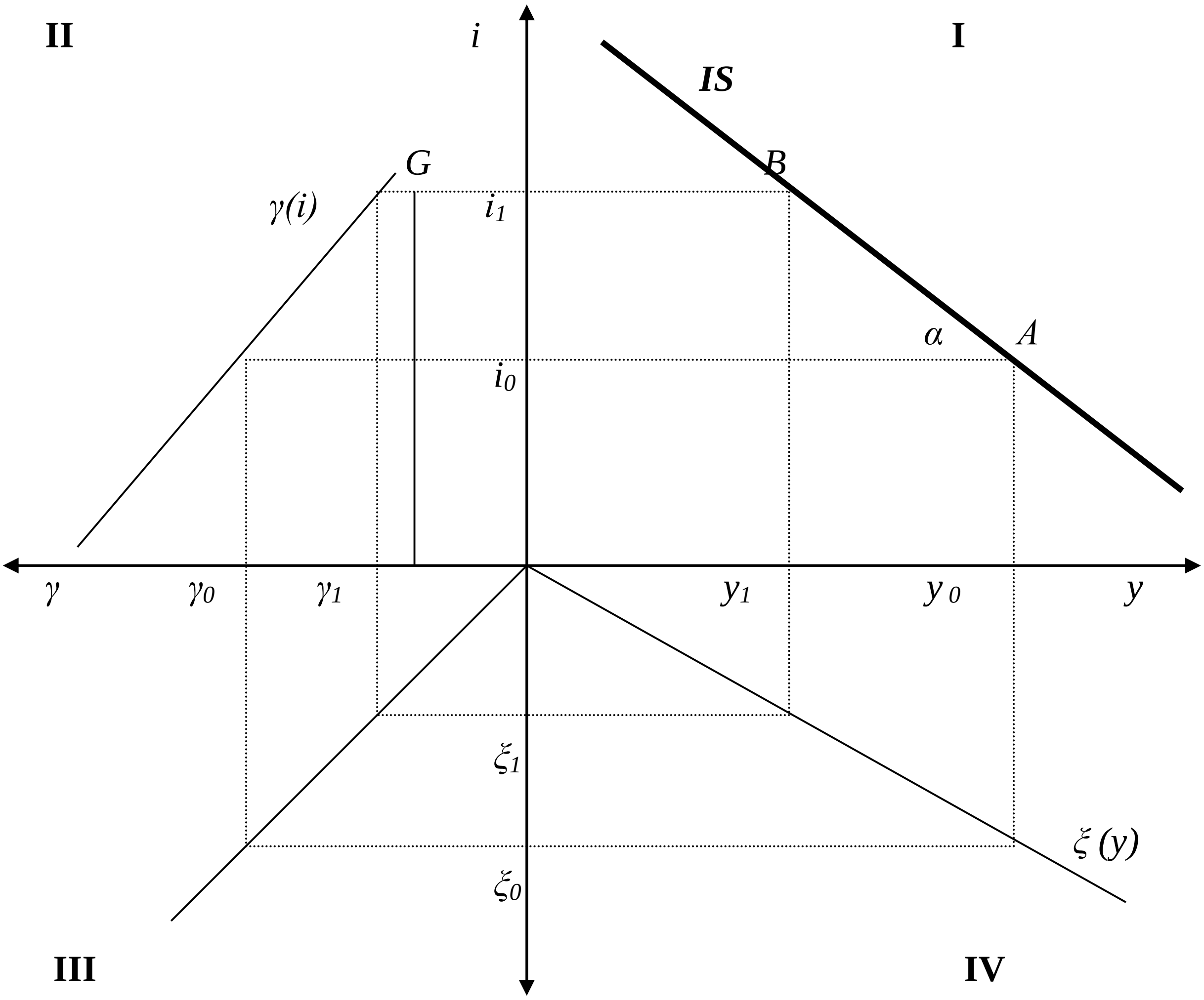
$$T(y) + S(y) + Z(y) = G + I(R, i) + E,$$

$$T(y) + S(y) = G + I(R, i),$$

от където се вижда, че сумарните изтегляния са линейна растяща функция на дохода, а сумарните инжекции – линейна намаляваща функция на лихвения процент. Това позволява да въведен две функции: на сумарните изтегляния $\xi(y)$ и на сумарните инжекции $\gamma(i)$. Тогава условието за равновесие на стоковия пазар ще добие вида $\xi(y) = \gamma(i)$.

Алгоритъм за построяване на *IS* линията

- В квадрант IV (с координатни оси y и ξ) построяваме линията „доход-изтегляния“ (права линия, графика на функцията $\xi = \xi(y)$);
- В квадрант II (с координатни оси i и γ) построяваме линията „лихвен процент-инжекции“ (права линия, графика на функцията $\gamma = \gamma(i)$);
- В квадрант III (с координатни оси ξ и γ) построяваме ъглополовящата на този квадрант;
- Вземаме две стойности за y - y_0 и y_1 и чрез линията „доход-изтегляния“ намираме съответните ξ_0 и ξ_1; тогава чрез ъглополовящата получаваме γ_0 и γ_1, а чрез линията „лихвен процент-инжекции“ - i_0 и i_1. Тогава, съединявайки точките $A(y_0, i_0)$ и $B(y_1, i_1)$ в квадрант I получаваме въпросната IS линия.



Фиг. 4. Построяване на *IS* линията

Забележка: Разгледания по-горе IS модел е линеен макроикономически модел. Ако запазим по-общите предположения за функцията на потребление като растяща (но не обезателно линейна) функция на дохода и/или ако приемем, че автономните инвестиции са също растяща нелинейна функция на $(R - i)$ ще получим нелинеен модел, при който IS линията няма да е права линия. Но и тогава тя ще запази основното свойство, характерно за линейния IS модел: в условие на равновесие y е намаляваща функция на i (и обратното).

16. Мултипликативни ефекти

Да запишем условието за равновесие на стоковия пазар във вида

$$(Z_0 - C_a) + (1 - c + z)y = G + I(R, i) + E$$

като дохода y и лихвения процент i, естествено имат стойности, обезпечаващи това равновесие. Да проведем сравнителна статика по обема на автономните инвестиции $I = I(R, i)$. Тъй като те зависят освен от лихвения процент i и от граничната ефективност на капитала R, то при фиксирано i могат да се променят под влиянието на R (най-вече в следствие на техническия прогрес). Тогава, за да се запази равновесието, ще трябва да се променя и y. Това определя y като неявна функция на I (при $i = const$) $y = y(I)$. Това ни позволява да диференцираме горното равенство по I, получаваме

$$(1 - c + z)\frac{dy}{dI} = 1 \text{ или } \Delta y = \frac{1}{(1 - c + z)}\Delta I$$

Ако не отчитаме външния сектор, последното равенство добива вида

$$\Delta y = \frac{1}{(1 - c)}\Delta I$$

Множителят $\frac{1}{(1-c)}$ (или $\frac{1}{(1-c+z)}$) се нарича **мултипликатор на автономните разходи** (в случая те са инвестиционни, а са автономни по отношение на лихвения процент). Той показва с колко нараства равновесният доход при увеличаване на автономното инвестиционно търсене с единица. Тъй като $0 < c < 1$, то мултипликатора (в трисекторната икономика) е по-голям от единица. Тъй като мултипликатора е величина, обратно пропорционална на маргиналната склонност към спестяване $s = 1 - c$, възниква така наречения **„парадокс на спестяването“**: колкото повече спестява обществото, толкова по-бедно става то.

Сравнителната статика по държавните разходи за стоки G и по износа E (които очевидно са автономни от лихвения процент) води отново до появата на същия мултипликатор

$$\Delta y = \frac{1}{(1 - c + z)}\Delta G \text{ и } \Delta y = \frac{1}{(1 - c + z)}\Delta E$$

Изводът е ясен: нарастването на всяко търсене от тип „инжекция“ (и не зависещо от лихвения процент) води до мултипликативен ефект за БВП – той нараства с по-бърз темп, определен от величината на мултипликатора. Така според кейнсианската концепция увеличаването на износа, на държавните разходи и техническия прогрес (водещ до увеличаване на автономните инвестиции) са основните стимули за ръст на БВП (при неизменен лихвен процент).

Индуцирани мултипликативни ефекти. Сега ще прецизираме потреблението на домакинствата C – то ще бъде функция не от дохода, а от разполагаемия доход, т. е дохода y с приспаднати данъци T. Т.е. ще имаме

$$C = C(y - T), 0 < \frac{dC}{d(y - T)} < 1,$$

като $\frac{dC}{d(y-T)}$ е **маргиналната склонност за потребление на разполагаемия доход**. Ще направим и допускането, че $T = ty$, т.е подоходният данък е плосък (в общия случай $T = T_y y$, като $T_y = T_y(y)$). Величината t ще наричаме **данъчна ставка**. Според кейнсианската концепция, горната функционална зависимост е линейна

$$C = C_a + c_D(y - T),$$

като $c_D \in (0,1)$ е маргиналната склонност към потребление на разполагаемия доход. С цел опростяване на формулите, ще приемем че $C_a = 0$.

Ще изследваме как реагират дохода (брутния продукт) y и бюджетния дефицит $\delta = T - G = ty - G$ на изменението на държавните разходи G и на данъчата ставка t (по отделно) в икономика без външен сектор. За дохода ще използваме формулата

$$y = c_D(1 - t)y + G + I$$

Забележка: При тези предположения уравнението на *IS* линията би имало вида

$$\big(1 - c_D(1 - t)\big)y + I_i i - (G + I_i R) = 0$$

Сравнителната статика по $\boldsymbol{G}$ се получава като диференцираме изразите за дохода и дефицита по G (предполагайки, че те са неявни функции на G). За дохода y получаваме

$$\frac{dy}{dG} = c_D(1 - t)\frac{dy}{dG} + 1 \;\Rightarrow \frac{dy}{dG} = \frac{1}{1 - c_D(1 - t)}$$

Заменяйки безкрайно малките нараствания (диференциалите) с достатъчно малки нараствания, получаваме

$$\Delta y = \frac{1}{1 - c_D(1 - t)}\Delta G$$

Аналогично, за бюджетния дефицит δ ще имаме

$$\frac{d\delta}{dG} = 1 - t\frac{dy}{dG} \quad \text{или} \quad \Delta\delta = \Delta G - t\Delta y$$

След заместване на Δy, окончателния израз за $\Delta\delta$ е

$$\Delta\delta = \frac{(1-c_D)(1-t)}{1-c_D(1-t)}\Delta G$$

Изводи:

- С въвеждането на подоходен данък величината на мултипликатора намалява, но остава по-голяма от единица, т.е. нарастването на държавните разходи с определен процент води до нарастването на БВП с по-голям процент;
- Тъй като множителят пред ΔG във формулата за $\Delta\delta$ е по-малък от единица, оказва се че процентният ръст на бюджетният дефицит е по-малък от процентния ръст на държавните разходи. Това се обяснява с обстоятелството, че увеличението на държавните разходи се увеличават и доходите на домакинствата, следователно и данъчните постъпления, което частично компенсира допълнителните разходи на държавата.

Сравнителната статика по данъчната ставка t изисква диференцирането на изразите за y и δ по t. За дохода y ще имаме

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{c_D y}{1-c_D(1-t)} \quad \text{или} \quad \Delta y = -\frac{c_D y}{1-c_D(1-t)}\Delta t$$

Предположението, че базовият доход y е единица не намалява верността на изводите, защото ние искаме да получим изменението на дохода Δy като процент от y. Така получаваме

$$\Delta y = -\frac{c_D}{1-c_D(1-t)}\Delta t$$

Множителят пред Δt в горната формула ще наричаме **данъчен мултипликатор**. Той е с отрицателен знак (защото увеличението на данъчната ставка със сигурност води до намаляване на дохода), а по модул е по-малък от мултипликатора на автономните разходи. След несложни преобразувания, за нарастването на бюджетния дефицит $\Delta\delta$ получаваме:

$$\Delta\delta = -\frac{(1-c_D)}{1-c_D(1-t)}\Delta t$$

Тъй като, очевидно, множителят пред Δt в горната формула е по-малък от единица, то изводът е ясен: едно увеличение на данъците с определен процент, ще доведе до намаление на бюджетния дефицит с по-малък процент. За отбелязване е, че данъчния мултипликатор (множител пред Δt в израза за Δy) може да е по-голям, по-малък или равен на единица (при различните комбинации между стойностите на c_D и t)

Сега можем да сравним реакциите на дохода и бюджетния дефицит при еднакво изменение на държавните разходи и данъчни приходи (което е едно и също от гледна точка на държавните финанси). За целта е достатъчно да сравним съответните множители

	множител пред ΔG	множител пред Δt
в израза за Δy	$\frac{1}{1-c_D(1-t)}$ >	$\frac{c_D}{1-c_D(1-t)}$
в израза за $\Delta\delta$	$\frac{(1-c_D)(1-t)}{1-c_D(1-t)}$ <	$\frac{(1-c_D)}{1-c_D(1-t)}$

Изводи:

- Нарастването на държавните разходи с определен процент предизвиква по-голямо увеличение на съвкупното търсене, отколкото намаляването на данъчната ставка със същия процент;
- Бюджетният дефицит ще бъде по-голям при намаляването на данъците с определен процент, отколкото при нарастването на държавните разходи със същия процент.

17. Модели на предлагане и търсене на пари

Същност на парите. Видове пари. От гледна точка на икономиката парите са разновидност на богатството (активите) на икономическите субекти. Те имат две характеристики, които ги отличават от другите видове богатство – моментално и без разходи се трансферират във всяка друга стока (т.е. имат висока **ликвидност**) и при постоянно ниво на цените не носят доход (или доходността им е много по-малка от доходността на другите видове богатства.

Парите имат три основни функции - служат като средство за размяна, разчетна единица и запас от стойност (средство за натрупване).

Според степента на ликвидност различните видове пари се подразделят на парични агрегати:

- $M0$ – банкноти и монети, намиращи се в обращение вън от банковата система;
- $M1$(тесни пари) - $M0 +$ пари в разплащателни сметки в търговски банки и овърнайт депозити в левове и чуждестранна валута (депозити до поискване в рамките на един работен ден);

- $M2$ - $M1 +$ **квазипари** - състоят се от депозити в търговски банки с договорен матуритет до 2 години и депозити, договорени за ползване след предизвестие (вкл. спестовни депозити) до 3 месеца;
- $M2$(широки пари) - $M2 +$ други най-ниско ликвидни финансови инструменти.

Предлагане на пари. В този модел, под количество предлагани пари ще разбираме паричния агрегат $M1$ и

$$M = M1 = CM + D,$$

Като с CM сме означили количеството пари в населението, вън от банковата система, а с D – незабавно изискуемите (чековите) депозити. Въвеждаме и останалите параметри на модела: ***H* – парична основа**; ***RR* – минимални резерви** на търговските банки; ***ER* - допълнителни резерви** на търговските банки; ***K* – кредити** на търговските банки.

Използвайки тези величини можем да съставим балансите на всички участници в модела на предлагане на пари: централната банка, търговските банки и „публиката“

Баланс на Централната банка		**Баланс на търговските банки**		**Баланс на „публиката“**	
Дебит (Актив)	Кредит (Пасив)	Дебит (Актив)	Кредит (Пасив)	Дебит (Актив)	Кредит (Пасив)
H	*CM*	*RR*	*D*	*CM*	*K*
	RR	*ER*		*D*	*H*
	ER	*K*			
Всичко	Всичко	Всичко	Всичко	Всичко	Всичко

Централната банка, емитирайки банкноти и монети прехвърля на търговските банки и „публиката“ своите активи. Една част от тях е актив на населението (*CM*), а друга – под формата на депозити в търговските банки е актив на банките (*RR* + *ER*). Депозитите са актив за населението и пасив за банките, а при кредитите е обратното.

От равенството на активите и пасивите получаваме три балансови уравнения

$$H = CM + RR + ER, \qquad D = RR + ER + K \quad \text{и} \quad CM + D = K + H$$

Въвеждаме следните коефициенти: $RR/D = \alpha$ – норматив за минимален резерв на търговските банки; $ER/D = \beta$ – коефициент на касовите остатъци на търговските банки; $CM/K = \gamma$ – дял на наличните пари в общата сума от кредитите на търговските банки. От първите две балансови уравнения получаваме

$$H = \gamma K + \alpha D + \beta D \quad \text{и} \quad D = \alpha D + \beta D + K$$

От горната система изразяваме D и K чрез H:

$$D = \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma(1 - \alpha - \beta)} H \quad \text{и} \quad K = \frac{1 - \alpha - \beta}{\alpha + \beta + \gamma(1 - \alpha - \beta)} H$$

Тъй като $M = CM + D = \gamma K + D$, то замествайки K и D получаваме

$$M = \frac{1 + \gamma(1 - \alpha - \beta)}{\alpha + \beta + \gamma(1 - \alpha - \beta)} H$$

Множителите пред H в изразите за D, K и M се наричат **депозитен мултипликатор, кредитен мултипликарор** и **паричен мултипликатор**. Те показват с колко единици се променят депозитите D, кредитите K и парите M при изменението на паричната основа H с единица.

Пример 17.1 Нека $\alpha = 0{,}2$; $\beta = 0{,}08$; $\gamma = 0{,}25$; $H = 100$. Да се намерят всички останали парични величини и да се съставят балансите на макроикономическите субекти, участващи в процеса на предлагане на пари.

Решение:

Първо пресмятаме мултипликаторите: депозитния мултипликатор $d = 2{,}174$; кредитния мултипликатор $k = 1{,}565$ и паричния мултипликатор $m = 2{,}565$. Въз основа на тях намираме $D = 217{,}4$; $K = 156{,}5$ и $M = 256{,}5$. Намираме $CM = M - D = 256{,}5 - 217{,}4$; $RR = \alpha D = 0{,}2 \cdot 217{,}4 = 43{,}5$ и $ER = \beta D = 0{,}08 \cdot 217{,}4 = 17{,}4$ и попълваме таблицата с балансите на отделните субекти

Баланс на Централната банка		Баланс на търговските банки		Баланс на „публиката“	
Дебит (Актив)	Кредит (Пассив)	Дебит (Актив)	Кредит (Пассив)	Дебит (Актив)	Кредит (Пассив)
H = 100	CM = 39,1	RR = 43,5	D = 217,4	CM = 39,1	K = 156,5
	RR = 43,5	ER = 17,4		D = 217,4	H = 100
	ER = 17,4	K = 156,5			
100	100	217,4	217,4	256,5	256,5

Мултипликативният процес на предлагане на пари в примера се разгръща в следната верига:

- **Итерация 0**. Централната банка заплаща с чекове на стойност 100 златото, предложено от населението, което открива депозити в търговските банки ($D = 100$). Търговските банки ги разпределят на задължителни резерви $RR = \alpha D = 0{,}2 \cdot 100 = 20$; допълнителни резерви $ER = \beta D = 0{,}08 \cdot 100 = 8$ и кредити $K = 72$, които отиват в населението.

- **Итерация 1**. Тези 72 парични единици населението разпределя на налични пари (които задържа в себе си) $CM = \gamma K = 0,25 \cdot 72 = 18$ и нови депозити в търговските банки – 54. Тези 54 парични единици търговските банки разпределят на нови задължителни резерви – 10,8; нови допълнителни резерви – 4,32 и нови кредити за населението – 38,88.
- **Итерация 2**. Тези 38,88 парични единици населението разпределя на налични пари – 9,72 и депозити – 29,16 и т.н.

Този итеративен процес (до итерация 10) е систематизиран в таблица:

Номер на итерацията	*CM*	*D*	*RR*	*ER*	*K*
0		100	20	8	72
1	18	54	10,8	4,32	38,88
2	9,72	29,16	5,83	2,33	21,00
3	5,25	15,75	3,15	1,26	11,34
4	2,83	8,50	1,70	0,68	6,12
5	1,53	4,59	0,92	0,37	3,31
6	0,83	2,48	0,50	0,20	1,79
7	0,45	1,34	0,27	0,11	0,96
8	0,24	0,72	0,14	0,06	0,52
9	0,13	0,39	0,08	0,03	0,28
10	0,07	0,21	0,04	0,02	0,15
...	...	...	...	...	...
Всичко	39,1	217,4	43,5	17,4	156,5

Връщаме се към функцията на предлагане на пари, тъй като

$$M = M(\alpha, \beta, \gamma, H) = m(\alpha, \beta, \gamma)H,$$

където с $m(\alpha, \beta, \gamma)$ сме означили паричния мултипликатор, тя е функция от четири независими променливи - α, β, γ и H. За да видим как тази функция реагира на изменението на α, β, γ и H, трябва да диференцираме по тях. Получаваме

$$\frac{\partial M}{\partial \alpha} = \frac{\partial M}{\partial \beta} = -\frac{1+\gamma}{\big(\alpha + \beta + \gamma(1-\alpha-\beta)\big)^2} H < 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial \gamma} = -\frac{(1-\alpha-\beta)^2}{\big(\alpha + \beta + \gamma(1-\alpha-\beta)\big)^2} H < 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial H} = \frac{1+\gamma(1-\alpha-\beta)}{\alpha + \beta + \gamma(1-\alpha-\beta)} = m(\alpha, \beta, \gamma) > 1 > 0$$

Изводът е, че количеството предлагани пари се увеличава, ако:

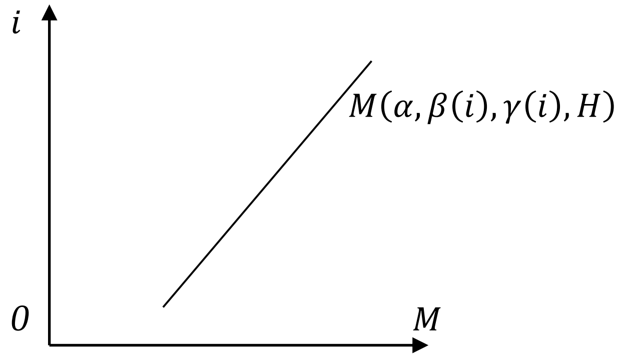
- Нараства паричната основа H;

- Снижава се нормата за минимален резерв на търговските банки α;
- Намалява делът на касови остатъци на тъговските банки β;
- Понижава се делът на наличните пари в общата сума от кредите на търговските банки γ.

За да довършим модела на предлагане на пари, трябва да вземем предвид, че паричната основа H и нормата за минимален резерв α се определят от централната банка, затова те ще бъдат екзогенни величини. Показателите β и γ са намаляващи функции от лихвения процент, защото с нарастването на i търговските банки намаляват допълнителните си резерви, а населението – дела на наличните пари в състава на богатството си. Тогава функцията на предлагане на пари $M = M(\alpha, \beta(i), \gamma(i), H)$, разглеждана като функция на една променлива – лихвения процент i е растяща функция, защото

$$\frac{dM}{di} = \frac{\partial M}{\partial \beta}\frac{d\beta}{di} + \frac{\partial M}{\partial \gamma}\frac{d\gamma}{di} > 0$$

Графиката на тази функция, би следвало да изглежда така:



Фиг. 5. Графика на функцията на предлагане на пари

При увеличаване (намаляване) на паричната основа и при намаляване (повишаване) на нормата за резервно покритие графиката се транслира надясно (наляво).

Забележка: Изложения по-горе модел на създаване и предлагане на пари се приема и от двете макроикономически школи – неокласическата и кейнсианската.

Търсене на пари. Под търсене на пари се разбира желанието на икономическите субекти да имат на свое разположение (в касата) определено количество платежни средства. Това ги лишава от доход от богатство, което биха придобили с тези средства. Според съвременната икономическа теория има три основни мотива, поради което икономическите субекти са съгласни да търпят такива загуби, т.е. да участват в търсенето на пари:

- **Транзакционен мотив**, когато търсенето на пари е подчинено от необходимостта да се покрият съвършено регулярни плащания;
- **Мотив от предпазливост** – хората търсят пари, за да могат да покрият неочаквани, внезапно изникнали плащания;
- **Спекулативен мотив**, при който парите се търсят поради неопределеността в определянето на паричната стойност на другите алтернативни активи (облигации и акции).

Т.е. в първите два случая, парите се търсят като платежно средство, а в третия – като богатство.

Транзакционно търсене - $\boldsymbol{L_1}$. То е правопропорционално на сумарната стойност на сделките, извършени през годината, т.е. на СОП, включващ в себе си както крайния, така и междинния продукт и обратно пропорционално на скоростта на паричното обръщение, следователно

$$L_1 = \frac{Px}{v},$$

където с P е означено нивото на цените, с x – съвкупния продукт, а с v - скоростта на паричното обръщение. Но тъй като в макроикономическите разчети се използва националния доход y (който в модела е равен на БВП), трябва да установим функционална зависимост $L_1 = L_1(y)$. Това се прави чрез въвеждане на коефициент δ, показващ дела на БВП в СОП, т.е. $y = \delta x$. Тогава горната формула добива вида

$$L_1 = \frac{Py}{\delta v}$$

Забележка. Съществува друг модел на Баумол и Тобин, при който L_1 освен растяща функция на y е намаляваща функция на i. този модел отчита алтернативните разходи на задържането на парите в касата.

Търсене на пари от предпазливост - $\boldsymbol{L_2}$. То зависи от размера на непредвидените плащания, което очевидно е растяща функция на дохода, тогава ще имаме

$$L_2 = L_2(y) \text{ и } L_2'(y) > 0$$

Спекулативно търсене - $\boldsymbol{L_3}$. Даден индивид (инвеститор) държи богатството си в трите вида ценни книжа – пари, облигации и акции, които формират неговото портфолио от ценни книжа. Структурирайки това портфолио, той отчита три главни фактора – ликвидност, доходност и риск.

ЦЕННИ КНИЖА

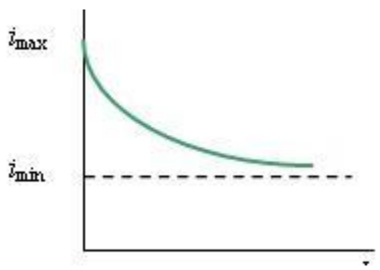
	ПАРИ	ОБЛИГАЦИИ	АКЦИИ
ЛИКВИДНОСТ	моментална	висока и средна	средна и ниска
ДОХОДНОСТ	нулева или ниска	средна	средна и висока
РИСК	нулев	нисък	среден и висок

Тъй като парите са алтернативно богатство на облигациите и акциите, инвеститорът ще увеличи спекулативното си търсене на пари при:

- намаляване на лихвения процент i, тъй като доходността на облигациите е свързана с него;
- увеличаване на риска (най-вече при акциите).

Абстрихирайки се от акциите, получаваме че спекулативното търсене е функция на лихвения процент, т.е. $L_3 = L_3(i)$, като:

1) тя е намаляваща функция: $L_3'(i) < 0$;
2) ще съществува някакво $i = i_{max}$, при което другите активи стават толкова привлекателни, че никой не би държал пари в портфолиото си: $L_3(i_{max}) = 0$;
3) при някакво $i = i_{min}$ неудобството от съхранение на богатството в облигации (по-малка ликвидност и по-висок риск) не се компенсира от по-високия доход и икономическите субекти биха държали цялото си богатство в пари.
4) графиката на функцията $L_3 = L_3(i)$ е изпъкнала, което се обяснява с това, че при малки стойности на i броят на желаещите да държат богатството си в пари се увеличава бързо, т.е. $L_3(i)$ намалява с ускорение: $L_3''(i) > 0$.



Фиг. 6. Графика на функцията на спекулативно търсене на пари

Графиката на функция, удовлетворяваща свойства 1)-4) би трябвало да изглежда както на фиг. 6. Така изглежда графиката на дробно-линейната (хиперболична) функция.

Лесно може да се провери, че функцията

$$L_3(i) = \frac{A(i_{max} - i)}{i - i_{min}} \quad \text{при} \quad i \in (i_{min}, i_{max}),$$

където A е произволна константа удовлетворява всички условия. Често $L_3(i)$ се моделира с линейна функция: $L_3(i) = A(i_{max} - i)$

По такъв начин, търсенето на пари се получава чрез сумиране на трите му компонента

$$L(Py, i) = L_1(Py) + L_2(Py) + L_3(i)$$

Изменението на нивото на цените променя ценността на парите (покупателната им способност). Така например, при удвояване на нивото на цените, за търговските сделки ще са необходими двойно повече пари. От математическа гледна точка, това означава, че функцията на търсене на пари в каса ще е хомогенна функция на нивото на цените P, т.е.

$$L(Py, i) = Pl(y, i),$$

където $l(y, i)$ е търсенето на реални касови остатъци. Така например, количеството предлагани пари M е номинална величина и се измерва в парични единици (левове, щатски долари, евро), а съответното реално предлагане на пари M / P – в единици от макроикономическата стока.

За да добием по-пълна представа за функцията на търсене на реални пари, ще въведем още един макроикономически показател – **темп на ръст на нивото на цените**

$$\pi = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

Изменението на темпа на ръст на ценовото ниво въздейства на търсенето на пари по същия начин, както изменението на лихвния процент: колкото по-голям е темпът на ръст на нивото на цените, толкова по малко е търсенето на реални касови остатъци.

Така, за функцията на търсене на реални пари, окончателно получавме

$$l = l(y, i, \pi), \text{като } \frac{\partial l}{\partial y} > 0, \frac{\partial l}{\partial i} < 0 \text{ и } \frac{\partial l}{\partial \pi} < 0$$

Забележка: Отбелязаната по-горе връзка между темпа на инфлацията и търсенето на реални касови остатъци се потвърждава от данните в таблицата

Германия ($\boldsymbol{M/P = 1}$ декември $\mathbf{1913}$ г.)			
година	месец	π – месечна инфлация в %	M/P
1920	юни	6,0	1,01
1920	декември	1,1	1,13
1921	юни	0,1	1,18
1921	декември	8,4	0,99
1922	юни	12,8	0,68
1922	декември	46,7	0,24
1923	юни	40.0	0,24
1923	декември	286,0	0,03

Забележка: Изложеният по-горе модел на търсене на пари е в съответствие с кейнсианската концепция. Според неокласическата, парите не са богатство, а само разплащателно средство, затова спекулативно търсене на пари се изключва. Тогава търсенето на пари няма да зависи от лихвения процент и

$$L(Py) = L_1(Py) + L_2(Py);\;\; l = l(y,\pi), \text{като } \frac{\partial l}{\partial y} > 0, \frac{\partial l}{\partial \pi} < 0$$

Ако обаче, за транзакционното търсене на пари L_1 се приложи модела на Баумол и Тобин, тогава и неокласическата функция на търсене на пари ще бъде намаляваща функция на лихвения процент.

18. Условие за равновесие на паричния пазар. *LM* линия.

Равновесието на паричния пазар се постига, когато цялото количество пари, създадено от банковата система се притежава от различните икономически субекти („публиката“) във вид на касови остатъци. Условието за това равновесие може да се запише както в номинален вид

$$M(\alpha, \beta(i), \gamma(i), H) = L(y_N, i, \pi),$$

$(y_N = Py)$, така и в реален вид

$$\frac{M}{P}(\alpha, i, H) = l(y, i, \pi)$$

Според кейнсианската концепция, на паричния пазар се определя цената на парите – равновесната стойност на лихвения процент.

Като се вземе пред вид, че функцията на предлагане на пари е растяща функция на i , а функцията на търсене – намаляваща, равновесният лихвен процент би се повишил при намаляващо предлагане или при растящо търсене. Следователно, равновесната стойност на i ще нарастне ако (при равни други обстоятелства):

1) Намалее предлагането на реални касови остатъци. Като отчетем характера на функционалните зависимости (растене/намаляване) на предлагането от α, β, γ, H и P, това намаление би се получило при:

- увеличаване на нормата за минимален резерв на търговските банки;
- увеличаване продажбите на облигации от търговските банки към населението;
- увеличаване на сумите по спестовни сметки на населението в търговските банки;
- съкращаване на активите на централната банка (паричната основа);
- повишаване на нивото на цените.

2) Нарастне търсенето на реални касови остатъци. Отчитайки характера на функционалните зависимости на търсенето от y, δ, v (транзакционно търсене), π и спекулативното търсене, увеличеното търсене ще се получи при:

- нарастване на реалния национален доход;
- нарастване на дела на междинния продукт в крайния;
- изплащане на заплатите на по-дълги промеждутъци;
- увеличаване на инфлацията;
- увеличаване на дела на реалните касови остатъци в структурата на богатството на населението (поради повишаване на риска при другите ценни книжа).

Същите изводи могат да се направят и ако направим сравнителна статика на модела спрямо i. За илюстрация, да направим сравнителна статика спрямо y. За целта, да запишем равновесното условие в по-разгърнат вид:

$$m\big(\alpha, \beta(i), \gamma(i)\big)\frac{H}{P} = \frac{y}{\delta v} + ky + \frac{A(i_1 - i)}{i - i_0},$$

като $l_2 = ky, k = const$ (за търсенето от предпазливост) и $i_1 = i_{max}, i_0 = i_{min}$ (за спекулативното търсене. Ако зафиксираме всички параметри, участващи в горното равенство без y, ще получим еднозначно стойност за y. Ако променяме само един от параметрите, например α, а другите оставим фиксирани, ще получим ново $y = y(\alpha)$ – така се определя неявната функция на y от α. Сега диференцираме двете страни на горното равенство по α, като държим сметка, че $y = y(\alpha)$. Получаваме

$$\frac{dy}{d\alpha} = \frac{m_\alpha \frac{H}{P}}{\left(\frac{1}{\delta v} + k\right)} < 0$$

Аналогични резултати получаваме, диференцирайки по β и γ. При диференциране по H и P ще имаме:

$$\frac{dy}{dH} = \frac{\frac{m}{P}}{\left(\frac{1}{\delta v} + k\right)} > 0 \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dP} = \frac{mP}{\left(\frac{1}{\delta v} + k\right)} > 0$$

След диференциране по δ и v получаваме:

$$\frac{dy}{d\delta} = \frac{dy}{dv} = 0$$

И накрая – по i:

$$\frac{dy}{di} = \frac{\left(m_\beta \beta' + m_\gamma \gamma'\right)\frac{H}{P} + \frac{A(i_1 - i_0)}{(i - i_0)^2}}{\left(\frac{1}{\delta v} + k\right)} > 0$$

Знаците на горните производни показват, че увеличение на брутния продукт y може да се постигне чрез:

- намаляване на коефициентите α, β и γ;
- увеличаване на $H,\ P$ и i.

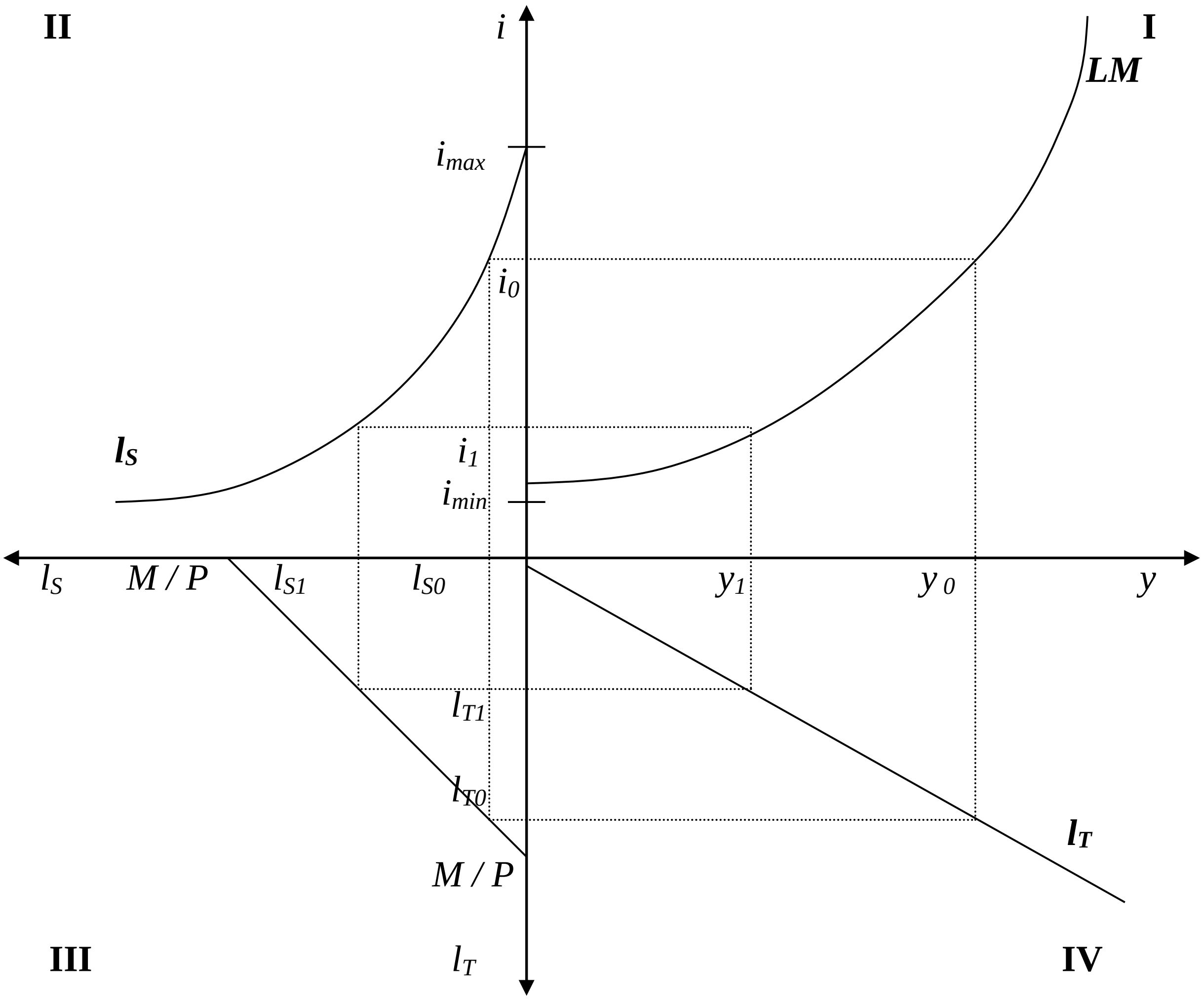
Параметрите δ и v нямат отношение към промяната на националния доход.

Връщаме се към условието за равновесие и зафиксираме всички параметри без y и i – получава се безкрайно множество от двойки (y, i), обезпечаващи равновесието между търсене и предлагане на паричния пазар. Това множество запълва линия в равнината с координати y и i, която ще наричаме LM линия.

Построяваме LM линията при предположение, че предлагането на пари (M/P) не зависи от лихвения процент i. В квадрант II е изобразена графиката на $l_T = l_1 + l_2$ – търсенето на пари за сделки, а в квадрант IV – на $l_S = l_3$ – спекулативното търсене на пари. В квадрант III правата линия показва как реалните пари се разпределят между l_T и l_S. Въз основа на тези линии, в квадрант I се определя множеството от комбинации (y, i), съответстващи на равновесието на паричния пазар.

Построяването на LM линията е аналогично на IS линията. При лихвен процент i_0 в квадрант II чрез отразяване от l_S линията се намира съответното спекулативно търсене $l_{S0} = l_S(i_0)$. Тогава в квадрант III чрез правата се определя съответното l_{T0} (двете величини се допълват до M/P). В квадрант II се определя y_0, такова

че $l_T(y_0) = l_{T0}$. По построение при $y = y_0$ и $i = i_0$ предлагането на пари ще е равно на търсенето, т.е. точката с такива координати ще е точка от LM линията. По този алгоритъм могат да се построят достатъчен брой точки, за да се получи задоволителна представа за LM линията.
LM линията се състои от множеството от двойки (y, i), съответстващи на равновесие на паричния пазар. Точките, разположени над нея съответстват на излишък от пари (тъй като в тези точки лихвеният процент е по-висок от



Фиг. 7. Построяване на графиката на LM линията при независимост на предлагането на пари от лихвения процент

равновесния, следователно спекулативното търсене ще е по-малко от равновесното), а точките под LM линията съответстват на дефицит от пари. Ако банковата система увеличи предлагането на пари (нараства M/P), правата в квадрант III ще се отдалечи от координатното начало и LM линията ще се придвижи на дясно.

Конструкцията на LM линията позволява да се отделят три участъка:

1) участък, асимптотично приближаващ се към i_{min} – почти успореден на абсцисата (нарича се кейнсиански участък);
2) участък, наклонен към абсцисата (междинен участък);
3) участък, почти перпендикулярен на абсцисата, съответстващ на $i > i_{max}$ (класически участък).

Построяването на LM линията в общия случай, когато предлагането на реални пари зависи от лихвения процент изисква малка , т.е. за всяка стойност на корекция на гореописания алгоритъм: когато се задава конкретна стойност на процента, например $i = i_0$, трябва в квадрант III да се построи права, съответна на $M(i_0)/P$, т.е. за всяка стойност на i – различна права в квадрант III. Останалите стъпки от алгоритъма са същите.

Според класическата концепция за парите, те не могат да бъдат богатство, т.е. липсва спекулативно търсене на пари. Поради това, класическото условие за равновесие на паричния пазар има вида

$$\frac{M}{P} = \frac{y}{\delta v} \Longrightarrow \delta v M = Py,$$

популярно като уравнение на количествената теория на парите. При фиксирани δ, v и y равновесие се постига за сметка на изменението на P, правопропорционално на M и това равновесие не зависи от лихвения процент.

Според концепцията на неокласическия синтез, предлагането на пари е функция на лихвения процент, а търсенето е само транзакционно. Тогава условието за равновесие добива вида

$$m\big(\alpha, \beta(i), \gamma(i)\big)\frac{H}{P} = \frac{y}{\delta v}$$

19. Пазар на капитал

Капиталовият пазар се състои от кредитен пазар (подразделящ се на пазар на пари и пазар на облигации) и пазар на акции.

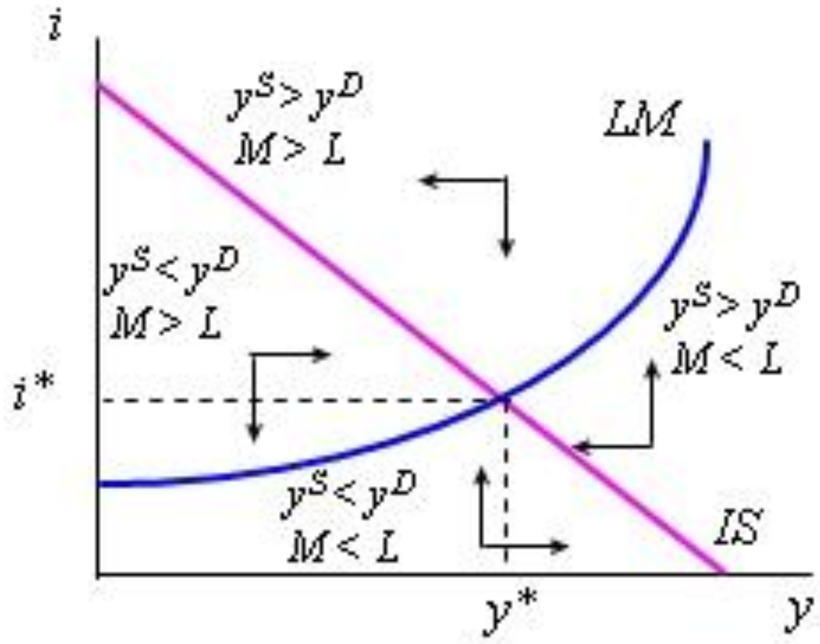
Посредством пазара на капитал спестяванията се превръщат в инвестиции, структурата на които се състои от финансови средства (пари и облигации) и вложения в реален капитал (акции). Във всеки период от време спестяванията заедно с нарастването на паричната маса образуват общия обем на финансовите средства (предлагане), към които предявяват интерес инвеститорите (търсене). Следователно, на пазара на капитал ще се установи равновесие, ако е налице равенство между търсене и предлагане:

$$S + \Delta M = I$$

В такъв случай, равновесната стойност на лихвения процент е резултат от взимодействието между търсене и предлагане на допълнителен капитал. Картината е по сложна: отделните агрегирани пазари, съставящи пазара на капитал определят свои равновесни лихвени проценти. Съвместното изравняване на търсенето и предлагането на всички тези пазари се достига чрез гъвкавото взимодействие на различните лихвените проценти. В краткосрочните макроикономически анализи пазарът на капитал се представя чрез двата кредитни пазара : пари и облигации. Затова, при даден обем на спестявания и фиксирано количество пари в обращение, достигнатото равновесие на паричния пазар преполага такова и на облигационния пазар.

20. Условие за съвместно равновесие на стоковия и паричния пазар. Модел *IS-LM*.

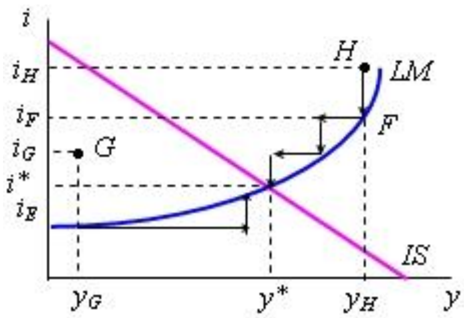
Условие за съвместно равновесие. В предишните параграфи бяха определени множествата от двойки (y, i) – стойности на реалния национален доход и на лихвения процент, обезпечаващи равновесието на стоковия пазар (IS-линия) и на паричния пазар (LM-линия) според кейнсианската концепция. Затова, за да определим съвместното равновесие на тези два пазара трябва да пресечем двете линии, както е показано на фиг.8. От това следва, че има само едно съчетание на стойностите на националния доход и лихвения процент (y^*, i^*) при което се достига равновесие на пазарите на стоки и финанси



Фиг. 8. Равновесие на пазарите на стоки и пари

Стойността на съвкупното търсене на пазара на стоки, съответстващо на съвместното равновесие на пазарите на стоки и финанси се нарича ефективно търсене. Заедно с тази стойност, равновесното съчетание на y и i определя разпределението на намиращите се в обращение пари на пари за сделки (транзакционно търсене) и пари, използвани като богатство (спекулативно търсене).

В предишните параграфи, при построяването на линиите IS и LM беше установено, че над всяка от тях е разположено множество на излишък (предлагането надхвърля търсенето), а под тях – множество на дефицит. Следователно, пресичането на двете линии разделя множеството от всевъзможни значения на i и y на четири области – всяка от които се отличава с характерно за нея неравновесие на отделните пазари.



Фиг. 9. Устойчивост на IS-LM-модела

Освен това този равновесен модел е **устойчив**, т.е. ако лихвения процент и брутния доход заемат стойности в някои от четирите неравновесни области, то съществуват пазарни механизми, които да променят стойностите им по посока към равновесните. На фиг. 9. е илюстрирано как се достига до равновесното състояние (y^*, i^*) при предположение, че първоначално стойностите на националния доход и лихвения процент са неравновесни.

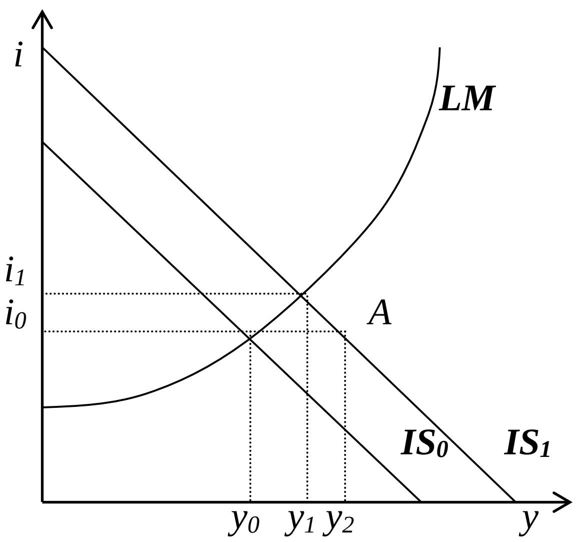
Моделът на съвместно равновесие на пазарите на стоки и пари е получил наименованието ***IS-LM-модел*** или модел на Хикс-Хансен.

IS-LM-моделът позволява да се представи процеса на преход от едно състояние на съвместното равновесие на пазарите към друго

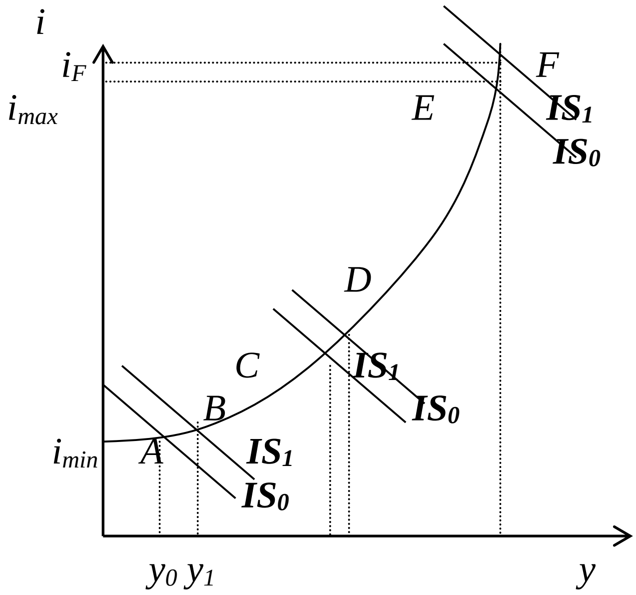
Последствия от преместването на *IS*-линията. Нека, например под въздействието на техническия прогрес предприемаческия сектор да е увеличил обема на инвестициите си с ΔI. Тогава IS-линията ще се транслира надясно на разстояние, съответстващо на произведението на ΔI с мултипликатора.

При лихвен процент i_0 националният доход ще се увеличи от y_0 до y_2 (Рис.9.) и на паричния пазар ще настъпи дефицит, защото точката $A(y_2, i_0)$ е разположена под LM-линията. Поради недостатъка от пари населението ще започне да привежда в парична форма други свои активи (влогове и ценни книжа), което би довело до нарастване на лихвения процент от i_0 до i_1. При така повишения лихвен процент предприемачите биха съкратили прираста на инвестициите си. В резултат на това, съвкупното предлагане на стоковия пазар би достигнало до y_1 а не до y_2 и новото съвместно равновесие на пазарите на стоки, пари и ценни книжа ще се установи в точката (y_1, i_1). По такъв начин **паричният пазар снижава мултипликативния ефект от изменението на автономните разходи.**

Анализа на влиянието на преместването на *IS*-линията върху съвместното равновесие на трите пазара представлява интерес и затова, че илюстрира въздействието върху икономиката на фискалната политика на държавата. И наистина, нарастването на държавните разходи или съкращаването на данъците води до увеличаване на автономните разходи и до съответно транслиране на *IS*-линията надясно. В резултат от това нараства равновесната стойност на лихвения процент, което резултира спад на частните инвестиции и нарастването на брутния продукт ще е по-малко от очакваното. С други думи, стимулиращата държавна фискална политика довежда до някакво намаляване на ръста на частните инвестиции, което намалява ефективността и, това е така наречения **ефект на отблъскването**.



Фиг. 10.
Ограничаване на мултипликативния ефекта на автономните разходи от паричния пазар

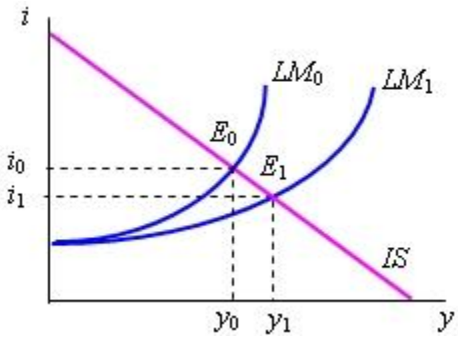


Фиг. 11.
Резултати от увеличението на автономните расходи при различни значения на лихвения процент

В каква степен паричният пазар „гаси“ мултипликативния ефект на автономните разходи зависи от това в кой от участъците на *LM*-линията е достигнато равновесието. Ако първоначалното съвместно равновесие е достигнато в точка *A* (фиг. 11.) от кейнсианския сектор на *LM*-линията ефектът на допълнителните автономни разходи (стимулираща фискална политика) се проявява в пълна степен, защото в този си участък *LM*-линията е почти успоредна на абсцисата. Икономически това се обяснява така: налице е малко търсене на пари за сделки (поради ниските стойности на *y*) и голямо спекулативно търсене (поради ниските стойности на *i*) и при нарастване на *y* допълнителната потребност от пари за сделки се удовлетворява за сметка на парите като богатство, което почти не променя лихвения процент, следователно планираните допълнителни инвестиции няма да бъдат съкратени.

Точно по обратен начин се развиват нещата ако първоначалното равновесие е достигнато в класическия сектор на LM-линията (точка E на фиг. 11.): транслацията на IS-линията изобщо не води до растеж на брутния продукт, защото LM-линията е почти успоредна на ординатата. Причината е в това, че при $i > i_{max}$ няма спекулативно търсене, поради което единствената възможност за публиката е преструктуриране на портфейла от ценни книжа (заменяне на по-малко доходни с по-доходни), в резултат от което сумарното инвестиционно търсене, съвкупното търсене на стоки и националния доход се запазват.

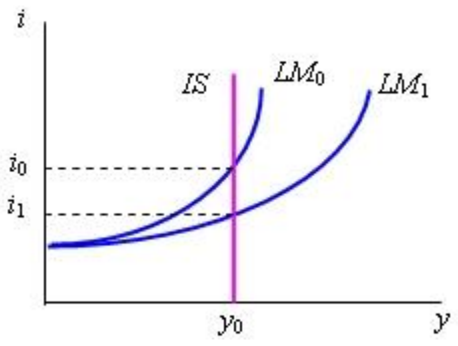
Последствия от преместването на LM-линията. В предишноте параграфи беше установено, че преместването на LM-линията може да настъпи вследствие промяната на прелагането или търсенето на пари. Нека първоначалното равновесие на пазарите на стоки, пари и ценни книжа е достигнато в точка E_0 на фиг. 12. Ако централната банка увеличи предлагането на при, то това ще се отрази на преместването на LM-линията от LM_0 към LM_1 и съвместното равновесие на трите пазара ще се установи в точка E_1, съответстваща на по-голям брутен продукт и по-малък лихвен процент. Преместването на равновесието от E_0 до E_1 произтича от последователност от събития: домакинствата забелязват, че в състава на богатството си имат повече пари, за да възстановяват оптималната му структура увеличават търсенето на ценни книжа, което повишава цената им и води до спад на лихвения процент, това увеличава броя на ефективните инвестиционни проекти и търсенето на инвестиции нараства.



Фиг. 12. Последствия от преместването на LM-линията

При наличие на резервни производствени мощности възниква мултипликативен ефект и националният доход нараства от y_0 до y_1. Следователно, в икономиката на непълната заетост увеличаването на парите в обращение води до ръст на реалния брутен продукт. Това правило има две важни изключения:

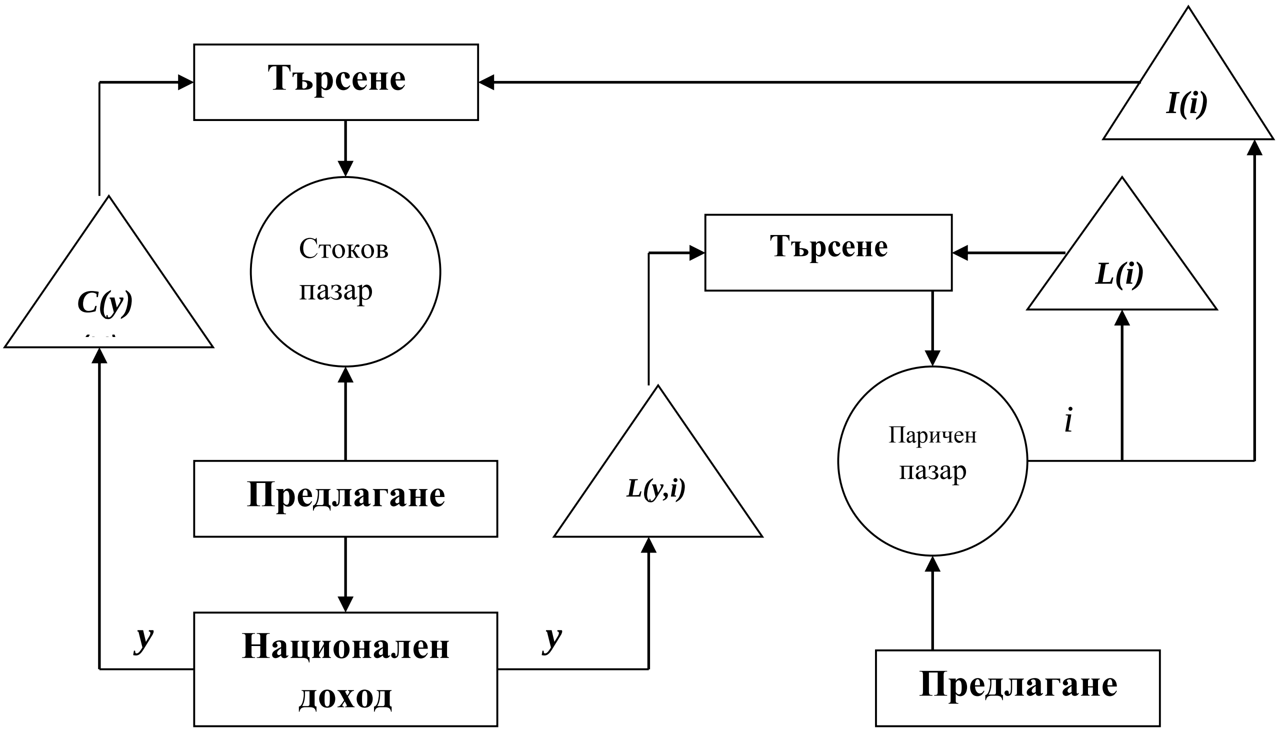
1) Ликвиден капан – получава се ако първоначалното съвместно равновесие се е постигнало в точка E_0, разположена в кейнсианския сектор на LM-линията, тогава увеличеното предлагане на пари не води до ръст на брутния продукт;



Фиг. 13. Инвестиционен капан

2) Инвестиционен капан – получава се при съвършенно нееластично инвестиционно търсене (например при песимистични очаквания за бъдещата конюктура от страна на инвеститорите), тогава IS-линията е успоредна на ординатата и повишеното предлагане на пари не води до ръст на националния доход (фиг. 13.)

Разглежданото взаимодействие на стоковия и паричен пазар (според кейнсианската концепция) е представено схематично на фиг. 14. В процеса на производството се създават едновременно предлаганите на пазара стоки и доходите на населението. Последните определят както търсенето на стоки на стоковия пазар, така и транзакционното търсене на пари. Лихвеният процент, получен на паричния пазар е още един фактор, определящ спекулативното търсене на пари и инвестиционното търсене на стоки. Нарушеното равновесие на стоковия пазар въздейства на паричния чрез триъгълника $L(y, i)$, а нарушеното равновесие на паричния пазар се предава чрез триъгълника $I(i)$ на стоковия.



Фиг. 14. Схема на взаимодействие на стоковия и паричен пазар

21. Функция на съвкупното търсене

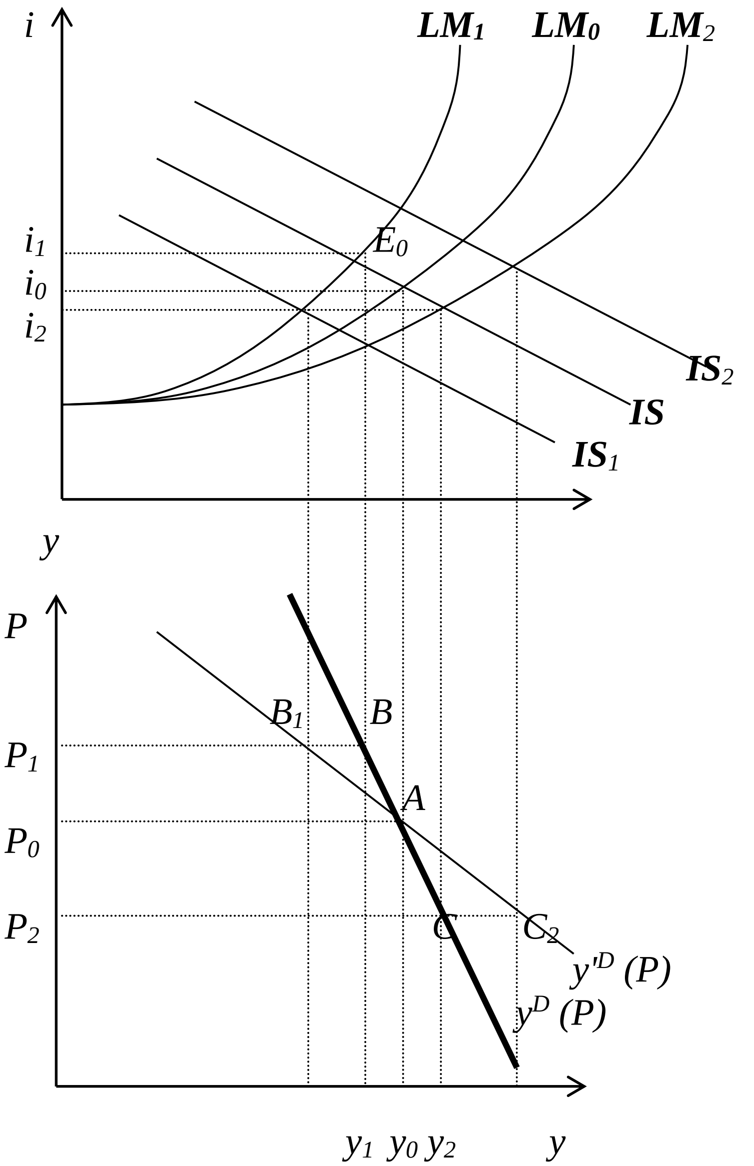
Анализът от предишните параграфи се опира на предположението, че нивото на цените на стоките е фиксирано. Сега ще направим анализ на *IS*-*LM*-модела като допуснем, че това ниво може да се променя. И наистина, ако запишем в алгебричен вид *IS*-*LM*-модела

$$\left(1 - c_D(1-t)\right)y + I_i i = (G + I_i R)$$

$$m\left(\alpha, \beta(i), \gamma(i)\right)\frac{H}{P} = \frac{y}{\delta v} + ky + \frac{A(i_1 - i)}{i - i_0},$$

и фиксираме всички макроикономически величини без y, i и P, то решавайки системата, можем да получим y като функция на P. Така, по чисто алгебричен начин се дефинира функцията на съвкупното търсене, икономически това е равновесната стойност на брутния продукт от *IS*-*LM*-модела, разглеждана като функция на нивото на цените.

Построяване на графиката на функцията на съвкупното търсене. Нека първоначално съвместното равновесие на пазарите на стоки и пари се постига в точка $E_0(y_0, i_0)$ – пресечна точка на линиите IS и LM_0 (фиг. 15.). Нека това равновесие се постига при ниво на цените P_0, тогава точка $A(y_0, P_0)$ е точка от графиката на функцията на съвкупното търсене $y^D(P)$.



Фиг. 15. Графично построяване на функцията на съвкупното търсене

Нека сега нивото на цените нараства до P_1. Тогава, при зададено номинално количество пари тяхното реално количество намалява и *LM*-линията ще се придвижи наляво до LM_1. Съвместното равновесие на двата пазара ще стане възможно при стойности y_1 и i_1, така получаваме нова точка $B(y_1, P_1)$ от графиката на $y^D(P)$. Аналогично се намира точката $C(y_2, P_2)$ от тази графика.

Този анализ може да се прецизира: при повишаване нивото на цените от P_0 до P_1 ще намалее потребителското търсене на стоки, вследствие на намалелите реални касови остатъци, т.е. наред с предвижването на LM-линията до LM_1 IS-линията ще се придвижи до IS_1, а точката B_1 ще замени точката B. По аналогичен начин точката C_2ще замени точката C и $y'^D(P)$ - $y^D(P)$.

Аналогични премествания на IS-линията съвместно с преместването на LM-линията възникват при отчитане на зависимостта между нивото на цените и обема на нетния износ. Обобщение: ако се вземат под внимание ефектите от промяната на ценовото ниво върху реалните касови остатъци и върху нетния износ, съвкупното търсене y^D става по-еластично по отношение на нивото на цените P (графиката на функцията става по-наклонена към ординатата).

Въпреки че графиките на макроикономическата функция на съвкупно търсене и на микроикономическата функция на потребителско търсене на една стока си приличат, не трябва функцията на съвкупно търсене да се интерпретира като сума от функциите на търсене на всички стоки. Отрицателният наклон на микроикономическата функция на търсене се дължи на ефекта на субституцията и на ефекта на дохода, докато функцията на съвкупно търсене е намаляваща функция на цените поради съвсем други ефекти: на лихвения процент, на реалните касови остатъци и на нетния износ.

Ефект на лихвения процент (ефект на Кейнс) се изразява чрез следната верига от последователни събития: нарастване нивото на цените → намаляване на реалното количество пари в обращение → увеличаване на предлагането на ценни книжа → намаляване на курса им → повишаване на лихвения процент → понижаване търсенето на инвестиционни стоки → мултипликативен ефект → съкращаване на съвкупното търсене на стоки.

Ефект на реалните касови остатъци (ефект на Пигу): повишава се нивото на цените → намаляват реалните касови остатъци → намалява потребителското тъсене → намалява съвкупното търсене на стоки.

Ефект на нетния износ: повишава се нивото на цените → намалява износа, а вноса се увеличава → намалява съвкупното търсене на стоки-родно производство.

22. Моделиране на пазара на труд – търсене, предлагане и равновесие

Търсене на труд – неокласически модел. Неокласическият модел се базира на предположението, че на всички пазари съществува съвършена конкуренция, тогава предприемачите получават максимална печалба ако маргиналния производителност на труда е равна на номиналната работна заплата, т.е.

$$P\frac{\partial y}{\partial N} = W$$

Ако приемем, че зависимостта на националният доход y от количествата капитал K и труд N се изразява посредством неокласическата производствена функция на Кооб-Дъглас

$$y = K^{\alpha}N^{1-\alpha},$$

то печалбата на предприемаческия сектор ще бъде

$$\pi(N) = PK_0^{\alpha}N^{1-\alpha} - iK_0 - WN,$$

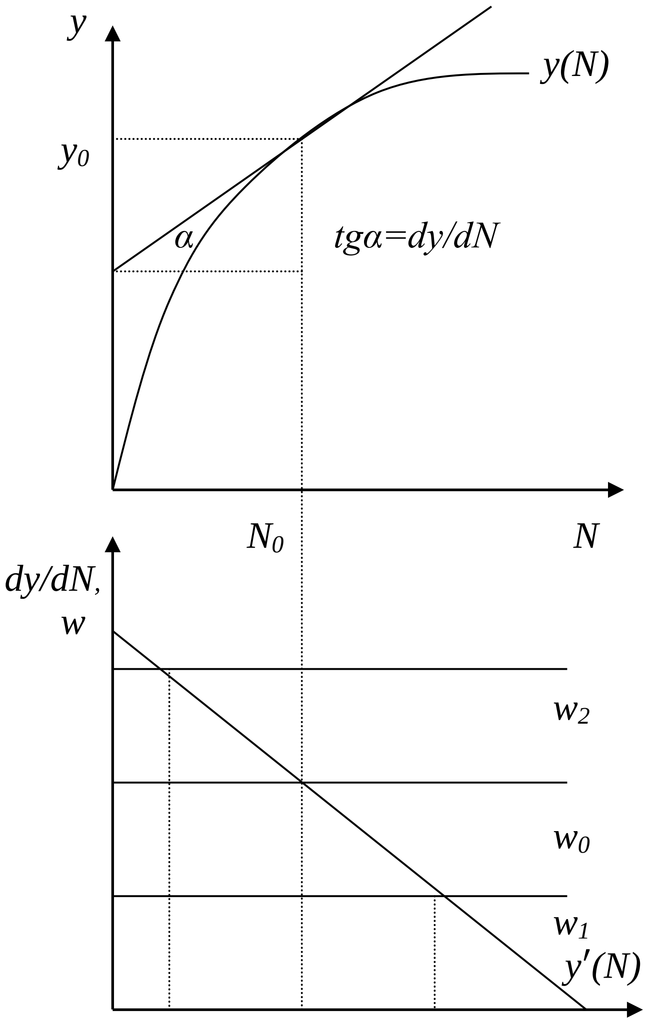
където $K = K_0$ е количеството ефективно използван капитал. Тогава от необходимото условие за максимум на функцията $\pi(N)$ получаваме

$$\frac{d\pi}{dN} = P(1-\alpha)\left(\frac{K_0}{N}\right)^{\alpha} - W = 0$$

или

$$N^D = K_0\left(\frac{1-\alpha}{w}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

където N^D е търсенето на труд в условие на оптималност, а $w = W/P$ – реалната работна заплата. Следователно, предприемаческото търсене на труд представлява функция $N^D = N^D(w)$.



Фиг. 16. Построяване графиката на неокласическата функция на търсене на труд

Графичното определяне на обема на търсене на труд според неокласическата концепция е представено на фиг. 16. В горната част е изобразена графиката на производствената функция $y = y(N)$. Тангенсът на ъгъла, сключван от допирателната към тази графика е равен на маргиналната производителност на труда при съответното количество заети. В долната част на фиг. 16. е построена графиката, изразяваща зависимостта на маргиналната производителност на труда от количеството на заетите (за целта трябва да се проследи изменението на $tg\alpha$ при движението по графиката на $y = y(N)$). Отбелязваме, че получената линия е графика на първата производна на $y = y(N)$ и в общия случай не е права линия. За да се определи обема търсене на труд, трябва върху графиката на маргиналната производителност на труда да се наложи графиката на реалната работна заплата w. Точката на пресичане показва какво е количеството труд N_0, обезпечаващо максимална печалба. След това чрез графиката на производствената функция намираме оптималния национален продукт $y_0 = y(N_0)$.

В краткосрочен период търсенето на труд се променя в следствие изменението на реалната работна заплата. В дългосрочен период търсенето на труд може да се измени в следствие на техническия прогрес или на увеличението на количеството използван капитал. И в двата случая графиките на производствената функция и на маргиналната производителност на труда се преместват нагоре, следователно за производството на същото количество национален доход ще трябва по-малко количество труд, заплащан на по-висока цена. Използването на същото количество труд ще доведе до нарастване на дохода и на реалната работна заплата.

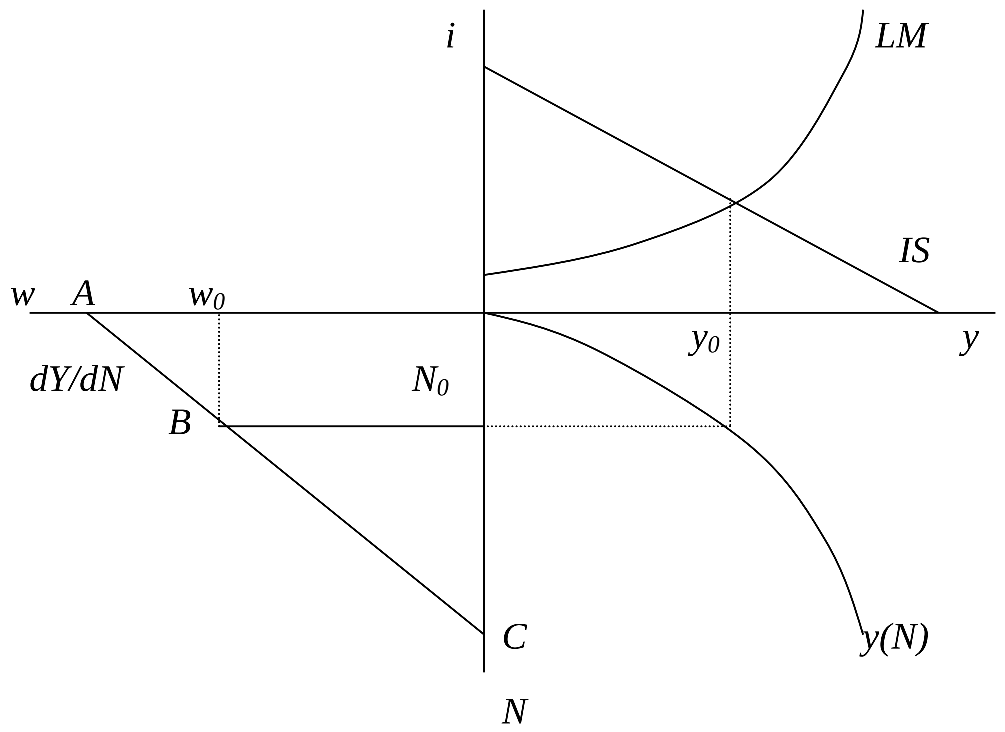
Търсене на труд – кейнсиански модел. В концепцията на Дж. М. Кейнс търсенето на труд се определя от обема на ефективното търсене на стоки (определен въз основа на *IS*-*LM*-модела). Ако технологията съответства на същата производствена функция, функцията на търсене на труд ще има вида

$$N^D = \left(\frac{y^*}{K_0^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

където y^* е ефективното търсене на стоковия пазар. Стойността на маргиналната производителност на труда, съгласно кейнсианската концепция определя горната граница на номиналната работна заплата, т.е.

$$W^D \leq P\frac{dy}{dN}$$

Графичното изображение на последователността от определяне на търсенето на труд и работната заплата, предлагана от предприемачите е показано на фиг. 17. От ***IS*-*LM***-модела в квадрант I се определя ефективното търсене на стоки y_0. От графиката на производствената функция в квадрант IV се определя количеството труд N_0 с което може да се произведе продукт y_0. На основа на маргиналната производителност на труда в квадрант II се определя цената на труда w_0, съответна на количество труд N_0. Трябва да се отбележи, че фактическата ставка на реалната работна заплата може да не съвпада с цената на труда w_0 – при $W/P < w_0$ търсенето на труд ще равно на N_0, но при $W/P > w_0$ заетостта ще е по-макла от N_0, ефективното търсене няма да е удовлетворено и на стоковия пазар ще настъпи дефицит. Следователно, графиката на кейнсианската функция на търсене на труд няма да съвпада с графиката на маргиналната производителност на труда (линията *AC*), а ще бъде начупената линия *ABN₀*: при реална работна заплата в интервала (w_0, A) търсенето на труд ще намалява от N_0 до нула, а при заплата по-малка от w_0 – ще се запазва на ниво N_0.



Фиг. 17. Построяване на кейнсианската функция на търсене на труд

В кейнсианския модел търсенето на труд и реалната цена на труда могат да се променят само при въздействието на факторите, преместващи ***IS*** и ***LM***-линиите.

Предлагане на труд – неокласическа концепция. Предлагането на труд от индивида, според неокласиците се намира в пряка зависимост от **реалната работна заплата**, т.е. $N^S = N^S(w)$. Освен това, предлагането на труд може да се измени вследствие промяната на **лихвения процент**. Логиката е следната: изменението на лихвения процент влияе на пропорцията между текущото потребление и бъдещото потребление (спестяванията), нарастването на лихвения процент ще доведе до съкращение на текущото потребление за сметка на бъдещото, а намаляването – до обратния резултат. Тъй като ценността на свободното време е фактор в поведението на индивида на пазара, то при повишаване на лихвения процент той ще съкрати свободното си време и следователно ще се увеличи предлагането на труд, а при понижаване – обратното. По такъв начин, според неокласическата концепция, предлагането на труд е в пряка връзка от реалната работна заплата и от лихвения процент, т.е.

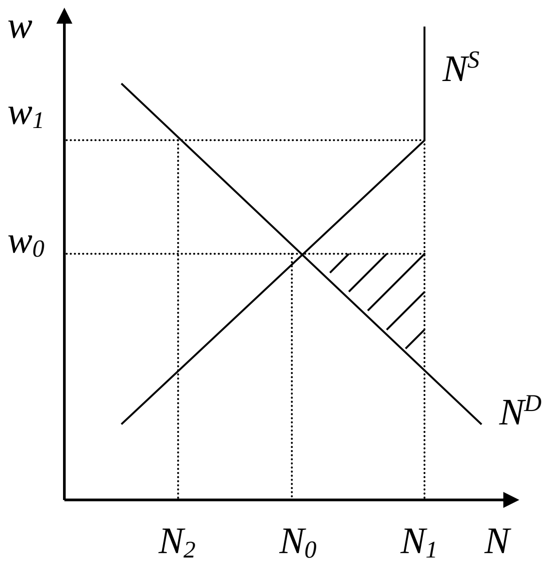
$$N^S = N^S(w, i): \frac{\partial N^S}{\partial w} > 0, \frac{\partial N^S}{\partial i} > 0$$

Предлагане на труд – кейнсианска концепция. Предлагането на труд според кейнсианците зависи от номиналната работна заплата, като до достигане на пълна заетост предлагането на труд е напълно еластично, тъй като безработните предлагат труда си по установените цени. Това че домакинствата се ориентират по номиналната, а не по реалната заплата се обяснява със страха на хората от безработицата и с дългосрочността на трудовите договори. При това, с повишение на цените се предлага същото количество труд, което води до възможност да се увеличи производството (и печалбата), ако нараства ефективното търсене. Кейнс е предполагал, че номиналната работна заплата може само да расте, защото „опитите на предприемачите да понижат заплатите би предизвикало далеч по-голяма съпротива отколкото постепенното намаляване на реалната заплата при поскъпване на стоките“.

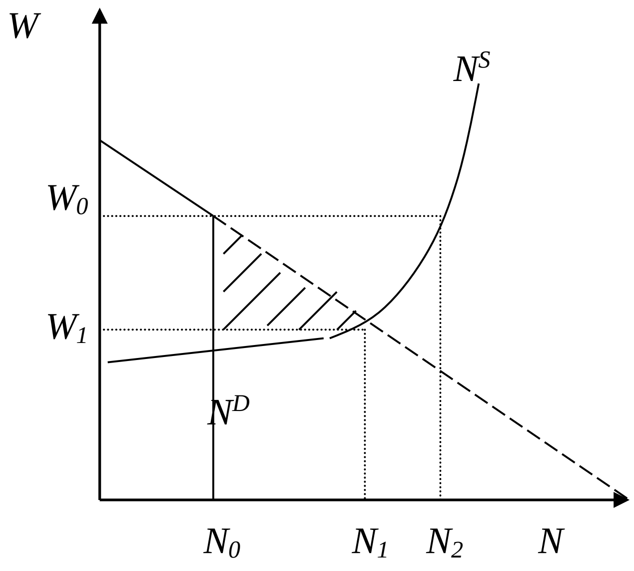
Равновесие на пазара на труд – неокласически модел. Равновесието на пазара на труда според неокласиците се достига за сметка на мигновенната реакция на реалната работна заплата (при фиксиран лихвен процент). Поради гъвкавостта на реалната заплата пазарните механизми осигуряват пълна и ефективна заетост. Пълна заетост означава, че всеки, който иска да продаде своя труд на равновесната пазарна цена може да го направи.

При реална заплата w_0 (Рис.17.) предлагането на труд напълно съответства на търсенето: $N^S(w_0) = N^D(w_0) = N_0$. Но това не значи, че са изчерпани всички налични трудови ресурси. Ако например заплатата се вдигне до w_1 предлагането на труд ще нарастне до N_1. Това обаче не означава, че в ситуацията, изобразена на фиг. 18. има безработица – трудоспособните, намиращи се в отсечката N_0N_1 не желаят да предлагат труда си на цена w_0.

Заетостта на ниво N_0 е ефективна, защото всяка допълнителна единица труд дава по-малък прираст на производството, отколкото средствата за заплащането и. Това е така защото кривата на търсене на труд в условие на съвършена конкуренция е крива на маргиналната производителност на труда. При използването на допълнителни $N_1 - N_0$ единици труд възникват загуби, представени на фиг. 18. от лицето на защрихования триъгълник. Освен това, равновесието на пазара на труд е устойчиво: при заплата w_1 работа ще приемат трудоспособните, намиращи се в отсечката N_0N_1; търсенето на труд ще се съкрати до N_2 и ще възникне безработица в размер $N_1 - N_2$; конкуренцията за работа ще застави работещите да приемат по-ниска реална заплата, докато тя спадне до w_0.



Фиг. 18.
Равновесие на пазара на труд при неокласическия модел



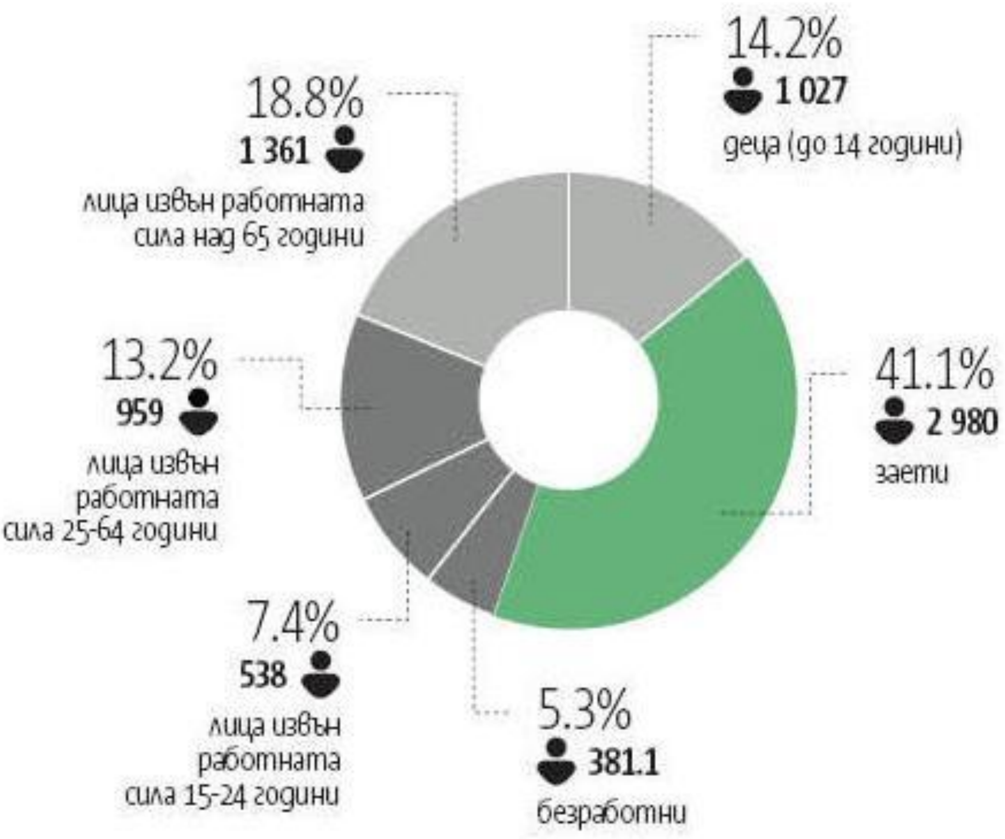
Фиг. 19.
Равновесие на пазара на труд кейнсианския модел

Равновесие на пазара на труд – кейнсиански модел. Според кейнсианската концепция пазарът на труд може да се стабилизира в условие на безработица. На фиг. 19. са съвместени графиките на кейнсианските функции на търсене и предлагане на труд. Търсенето на труд в размер на N_0 се определя от ефективното търсене на стоковия пазар, така както е показано на фиг. 19. ако предприемачите установят номиналната работна заплата на максималното допустимо ниво W_0, предлагането на труд ще бъде N_2 и на трудовия пазар ще възникне излишък от труд в размер $N_2 - N_0$. Въпреки че работниците са съгласни и на по-малка заплата, намаляването на заплатата под W_0 не предизвиква увеличено търсене на труд.

От позицията на неокласическата школа, в този случай заплатата е излишно завишена с величината $W_0 - W_1$. Но дори и тя да бъде намалена до W_1 безработицата ще се съхрани в размер $N_1 - N_0$. Тогава пазара на труд се стабилизира при неефективно ниво на заетост, тъй като маргиналната производителност на труда е по-голяма маргиналните разходи за труд (работната заплата). Лицето на защрихования триъгълник на фиг.19. е печалбата от увеличението на производството до ниво на заетост N_1.

23. Моделиране на безработицата

Естествена безработица. Състоянието на пълна заетост не означава, че всички хора в трудоспособна възраст работят – част от тях не желаят работа при така установената работна заплата (т.е. доброволна безработица или икономическа неактивност). Има и други, намиращи се в стадий на търсене на подходяща работа – те образуват естествената безработица, явяваща се неизбежно следствие от свободния избор на място и време за работа. Във всеки момент трудоспособното население се разделя на три групи: работещи (заети – N), неработещи, но активно търсещи работа (безработни – U) и неработещи, но не търсещи работа – H. В пазарната икономика хората постоянно преминават от една група в друга. Общият обем на активните трудови ресурси – R включва групите на работещите и безработните: $R = N + U$. Нивото на заетост (безработицата) характеризира структурата на активните трудови ресурси.



Фиг. 12. Структура на населението на България - 30.09.2014

Означаваме с δ делът от всички работещи, които през даден период са загубили работата си, а с γ - делът от всички безработни, които през същия период са постъпили на работа. На практика тези коефициенти могат да бъдат получени чрез обработка на статистически данни. Изменението на броя работещи през този период ще се осъществява по формулата

$$\Delta N = \gamma U - \delta N$$

Ще имаме пълна заетост ако $\Delta N = 0$ или $\gamma U = \delta N$, т.е.

$$\gamma U = \delta(R - U)$$

Решаваме горното уравнение относно U:

$$U = \frac{\delta R}{\gamma + \delta}$$

Горната формула определя броя на безработните в условие на пълна заетост (при $\Delta N = 0$). Пресмятаме техния дял спрямо активните трудови ресурси

$$\frac{U}{R} = \frac{\delta R}{(\gamma + \delta)R} = \frac{\delta}{\gamma + \delta} = u^*$$

Полученият коефициент u^* се нарича норма на естествена безработица. Терминът естествена безработица е въведен от М. Фридмън. В качеството на пример са дадени данните за работещите N (колона 2), безработните U (колона 3), уволнените (загубили работа – колона 5) и постъпилите на работа (колона 6) през съответните години в Германия. В колона 4 е пресметнат процентът на безработица u, в колони 7 и 8 – коефициентите δ и γ съответно, и накрая – в колона 9 е пресметната естествената безработица u^*.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Година	***N*** - Работещи, хил.	***U*** - Безработни, хил.	$\boldsymbol{u}$, %	Уволени, хил.	Постъпили, хил.	δ, %	γ, %	u^*, %
1991	38 454	2 145	6,31	3 660	3 713	0,095	1,73	5,21
1992	37 878	2 283	6,63	3 961	3 667	0,105	1,61	6,12
1993	37 365	2 864	8,20	4 549	4 061	0,122	1,42	7,91
1994	37 304	3 354	9,20	4 514	4 483	0,121	1,34	8,28
1995	37 382	3 393	9,30	4 655	4 522	0,125	1,33	8,59
1996	37 270	3 696	10,10	4 967	4 684	0,133	1,27	9,48
1997	37 208	4 078	11,00	4 926	4 823	0,132	1,18	10,07
1998	37 611	3 937	10,50	4 943	5 123	0,131	1,30	9,15
1999	38 081	3 719	9,90	4 835	5 030	0,127	1,35	8,60
2000	38 706	3 413	8,70	4 650	4 882	0,120	1,43	7,73

Пример. Нека общия обем на трудовите ресурси в една страна е 80 млн. и в даден момент безработицата е 10%, т.е. 8 млн. Установено е, че $\delta = 0{,}02$ и $\gamma = 0{,}25$. Следователно естествената норма на безработица е $u^* = \delta/(\gamma + \delta) = 0{,}02/(0{,}25 + 0{,}02) = 7{,}4\%$ или 5,92 млн. Процесът на движение на 10%-ната безработица към естествената норма на безработиса (при неизменни R, δ и γ) е показан в долната таблица

Показатели	Номер на итерацията						
	0	1	2	3	4	...	∞
N	72,0	72,56	72,96	73,26	73,48	...	74,0
U	8,0	7,44	7,04	6,74	6,52	...	6,0
δN	1,44	1,46	1,46	1,465	1,47	...	1,5
γU	2,00	1,86	1,76	1,685	1,63		1,5
$\Delta N = \gamma U - \delta N$	0,56	0,40	0,30	0,22	0,16	...	0,0

Конюнктурна безработица. Разликата между фактическото u и естественото u^* ниво на безработицата се нарича конюнктурна безработица: $u_k = u - u^*$.

Наличието на конюнктурна безработица ($u_k > 0$) свидетелства за непълно използване на производствените възможности на държавата: ако потенциално възможният брутен продукт в условие на пълна заетост ($u_k = 0$) означим с $y_F(N^*)$ ($N^* = (1 - u^*)R$), а брутния продукт при положителна конюнктурна безработица - $y(N)$, разликата $y_F(N^*) - y(N)$ образува **конюнктурен разрив** на брутния продукт. На базата на емпирични данни Артур Оукен е намерил устойчива връзка между величините на конюнктурната безработица и конюнктурния разрив, а именно валидно е съотношението

$$\frac{y_F - y}{y_F} = \theta(u - u^*) = \theta u_k,$$

където θ е параметъра на Оукен. Смисълът на горната формула е в така наречения закон на Оукен: ако конюнктурната безработица нарастне с 1%, то коннюнктурния разрив ще се увеличи с $\theta\%$. По разчетите на А. Оукен през втората половина на XX век в САЩ $\theta = 3$.

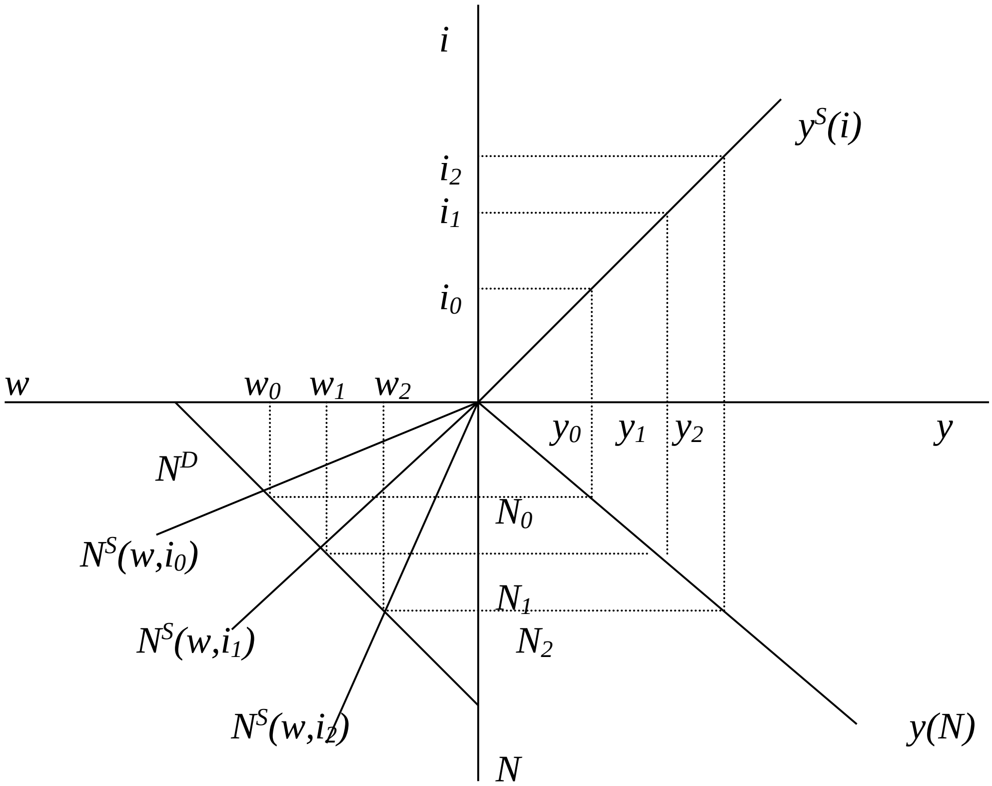
Горното равенство може да запишем във вида

$$y(u) = y_F - y_F\theta(u - u^*)$$

Графиката на функцията $y(u)$ се нарича **линия на Оукен**.

24. Функция на съвкупното предлагане

Неокласическа функция на съвкупно предлагане. В съответствие **с** неокласическия модел на пазара на труд функцията на съвкупно предлагане е строго растяща функция на лихвения процент. Графичното построение е дадено в фиг. 21.

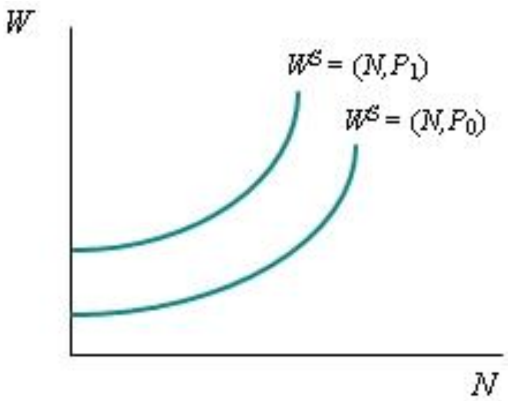


Фиг. 21.
Построяване на неокласическата функция на съвкупно предлагане

При зададена производствена технология чрез макроикономическата производствена функция $y = y(N)$, чиято графика е разположена в квадрант IV, агрегираното предприемаческо търсене на труд ще се определя от графиката на функцията $N^D(w) = dy/dN$, изобразена в квадрант III. Предлагането на труд, според неокласическия модел е функция на две променливи $N^S = N^S(w, i)$. За това, на всяка стойност на лихвения процент, определена на капиталовия пазар чрез изравняване на обемите на спестявания и инвестиции ще съответства отделна крива на предлагане на труд. Това са линиите $N^S(w, i_0)$, $N^S(w, i_1)$ и $N^S(w, i_2)$ в квадрант III. При стойност на реалната работна заплата w_0 и стойност на лихвения процент i_0 трудовата заетост се установява на ниво N_0 и съвкупното предлагане става y_0. Нарастването на лихвения процент $(i_0 \to i_1 \to i_2)$ завърта линията N^S по посока, обратна на часовниковата стрелка, тъй като предлагането на труд е растяща функция на лихвения процент. Това води до нарастване на заетостта $(N_0 \to N_1 \to N_2)$ и увеличаване на обема на предлагане $(y_0 \to y_1 \to y_2)$.

Кейнсианска функция на съвкупно предлагане. Съгласно кейнсианската концепция функцията на предлагане изразява зависимостта между нивото на цените и обема на предлагане на стоки: $y^S = y^S(P)$. Общото въздействие на изменението на нивото на цените върху съвкупното предлагане е резултат от натрупването на два отделни импулса, създадени от ефекта върху заетостта и ефекта върху производството.

Ефект върху заетостта. Когато на пазара на труд съществува равновесие, цената на търсене на труд е равна на цената на неговото предлагане: $W^D = W^S$. Както установихме по-горе, $W^D = Py_N$, ($y_N = dy/dN$ е маргиналната производителност на труда). Цената на предлагане на труд W^S зависи от количеството предлаган труд и от реакцията на тези, които предлагат труд на изменението на нивото на цените (фиг. 22.).



Фиг. 22. Линия на цената на предлагане на труд

Когато при повишаване на нивото на цените всяко количество труд се предлага на същата цена (графиката на функцията W^Sостава на мястото си) ще казваме, че работниците са изложени на парична илюзия. Ако в отговор на повишеното ниво на цените всяка порция труд също повишава цената си (графиката на функцията W^S се вдига нагоре), то работниците са свободни от парична илюзия. В общия случай цената на предлагане на труд е функция на две променливи: $W^S = W^S(N, P)$

Окончателно, получаваме условието за равновесие на пазара на труд:

$$Py_N = W^S(N, P)$$

За да определим как се изменя заетостта при промяната на нивото на цените, записваме пълните диференциали на двете страни на горното уравнение:

$$y_N dP + P dy_N = W_P^S dP + W_N^S dN,$$

където $W_P^S = \partial W^S/\partial P$ и $W_N^S = \partial W^S/\partial N$. Като вземем под внимание, че

$$dy_N = \frac{dy_N}{dN} dN = \frac{d^2y}{dN^2} dN = y_{NN} dN$$

горното равенство може да се запише във вида

$$(Py_{NN} - W_N^S) dN = (W_P^S - y_N) dP,$$

откъдето

$$dN = \frac{W_P^S - y_N}{Py_{NN} - W_N^S} dP$$

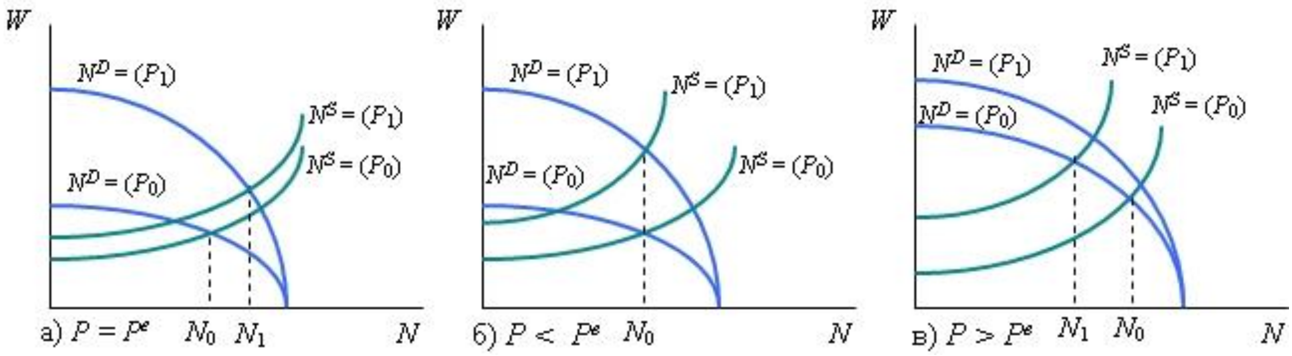
Горното равенство отразява ефекта върху заетостта при изменение на цените – показва с колко ще се измени заетостта след възстановяване на равновесието на пазара на труд след промяна на нивото на цените.

Ефект върху производството. Размерът на увеличение на производството вследствие на промяната на заетостта се определя от технологията, определена чрез производствената функция $y = y(N)$, следователно $dy = y_N dN$. С отчитане на горното равенство получаваме

$$dy = y_N \frac{W_P^S - y_N}{Py_{NN} - W_N^S} dP$$

Последното равенство отразява ефекта върху производството – то показва с колко ще се измени обема на производството и предлагането на стоки при промяна на нивото на цените.

Тъй като реакцията на работниците, предлагащи труда си на промяната на нивото на цените може да е различна, то и ефектът върху заетостта ще бъде различен: положителен, нулев и даже отрицателен.

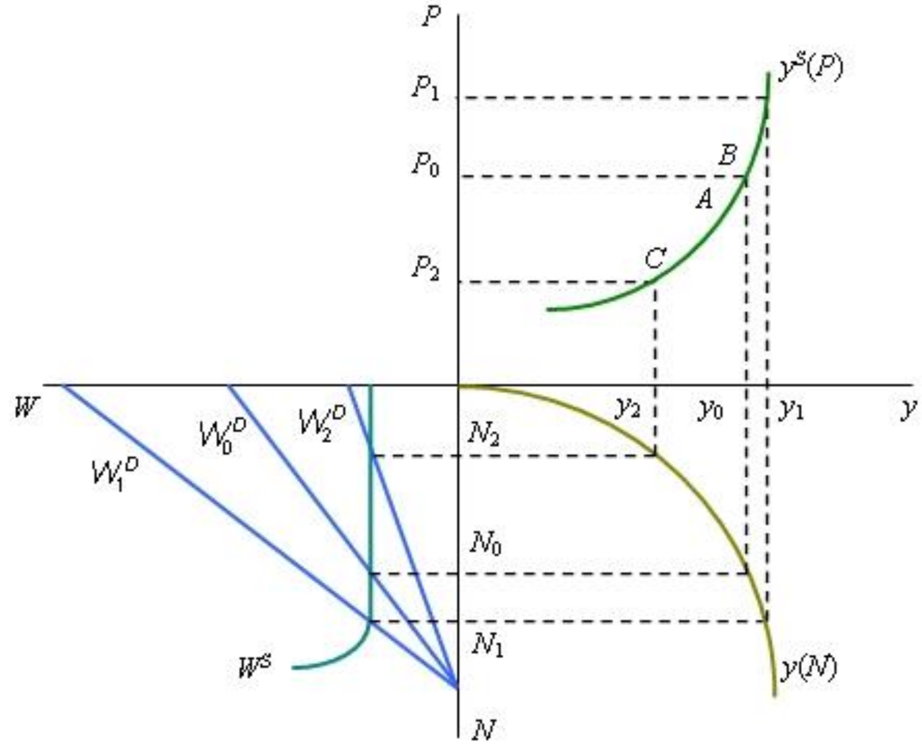


Фиг. 23. Три варианта на ефекта върху заетостта при повишаване на нивото на цените

Ако работниците са изложени на парична илюзия, то вследствие увеличеното търсене на труд при увеличено ниво на цените равновесното ниво на заетост расте (фиг. 23.а). Такава ситуация е характерна за краткосрочен период, когато работниците не успяват да отреагират на повишеното ниво на цените и номиналната заплата остава същата. Ако работниците са свободни от парична илюзия и темпа на растеж на номиналната работна заплата е равен на темпа на растеж на нивото на цените, то нивото на заетост не се променя (фиг. 23.б). В случай, че номиналната работна заплата нараства с ръст, по-голям от ръста на нивото на цените (фиг. 23.в), т.е. реалната работна заплата нараства, заетостта се съкращава.

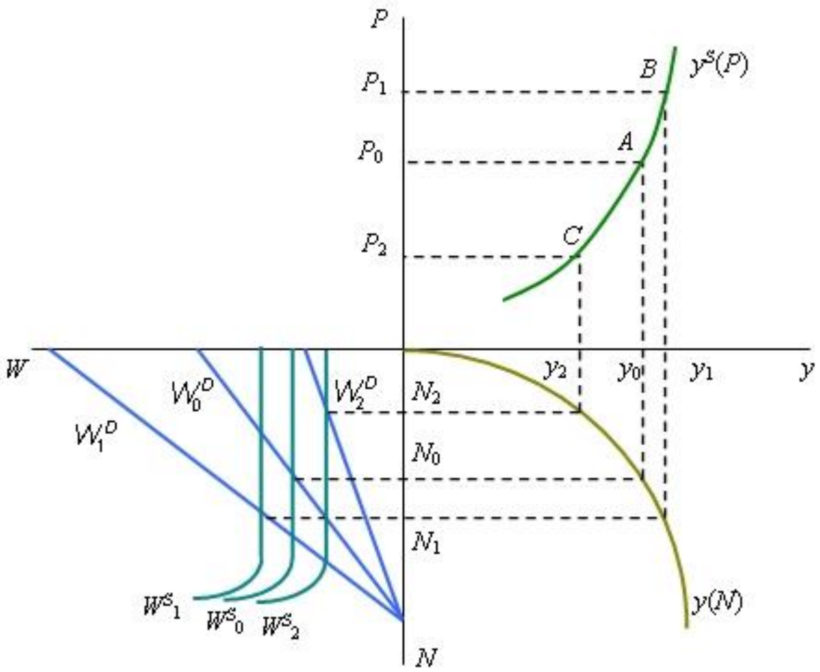
Построяване графиката на кейнсианската функция на съвкупно предлагане. В квадрант IV е построена графиката на производствената функция $y = y(N)$, а в квадрант III е представен пазара на труд. Нека изходното състояние на нивото на цените е P_0, в квадрант III построяваме графиката на функцията на търсене на труд за $P = P_0$ $W_0^D = P_0 y_N$ и графиката на функцията на предлагане на труд $W^S = W^S(N)$(в случай на парична илюзия тя не зависи от P). От пресичането на двете графики намираме N-координатата N_0, а в квадрант IV - $y_0 =$

$y(N_0)$. Тогава, в квадрант I точка $A(y_0, P_0)$ ще е точка от графиката на функцията на съвкупно предлагане $y^S(P)$.



Фиг. 24. Построяване линията на съвкупно предлагане при наличие на парични илюзии

При други стойности на нивото на цените P_1 и P_2 в квадрант III ще се променя само графиката на функцията на търсене на труд - $W_1^D = P_1 y_N$ и $W_2^D = P_2 y_N$ съответно, а графиката на функцията на предлагане няма да се променя – ще остава $W^S = W^S(N)$. Така получаваме N-координатата N_1 и N_2, а в квадрант IV - $y_1 = y(N_1)$ и $y_2 = y(N_2)$. Точките $B(y_1, P_1)$ и $C(y_2, P_2)$ са също точки от графиката на функцията на съвкупно предлагане $y^S(P)$(в квадрант I).



Фиг. 25. Построяване линията на съвкупно предлагане при отсъствие на парична илюзия

В случай, че работниците са лишени от парични илюзии, картината в квадрант III се променя – за всяка стойност на P ще има отделна графика на функцията на съвкупно предлагане на труд (а не само на функцията на търсене на труд), защото сега тя зависи и от нивото на цените, т.е. $W^S = W^S(N, P)$. Така ще имаме $W_0^S = W^S(N, P_0)$, $W_1^S = W^S(N, P_1)$ и $W_2^S = W^S(N, P_2)$. Ако работниците искат повишение на номиналната работна заплата в същата степен в каквато е повишението на нивото на цените (т.е. напълно са лишени от парична илюзия), то заетостта би се съхранила на ниво N_0 и графиката на функцията на съвкупно предлагане ще бъде перпендикулярна на абсцисната ос. Такъв е вида на графиката според неокласическата концепция, защото търсенето и предлагане на труд зависи от реалната, а не от номиналната работна заплата. По такъв начин, ъгълът на наклон на линията на съвкупното предлагане зависи от степента на нарастване на номиналната заплата при ръст на нивото на цените.

Пример. Предлагането на труд се изразява чрез функцията $N^S = 2W - 20$ при наличие на парични илюзии и чрез $N^S = 2W - 20P$ – без парични илюзии. Производството на стоки се задава чрез производствената функция $y = 70N - N^2$. Да се определят ефектите върху заетостта и производството при увеличаване на нивото на цените с 50%. Да се определят функциите $N = N(P)$ и $y = y(P)$ в условие на равновесие на пазара на труд ($W^S = W^D$) и най-малките възможни стойности на заетост и на брутен продукт N_0 и y_0 ограничаващи отгоре заетостта $N = N(P)$ и брутния продукт $y = y(P)$ при произволно високо ниво на цените.

Решение:

Цената на предлагане на труд в случай на парична илюзия се изразява чрез $W^S = 0{,}5N + 10$, а без такава – чрез $W^S = 0{,}5N + 10P$. Тъй като $y = 70N - N^2$ то $W^D = y_N P = 70P - 2NP$. При ниво на цените $P = 1$ ще имаме $W^S = W^D \Longrightarrow 0{,}5N + 10 = 70 - 2N \Longrightarrow N = 24$ и $y = 1104$.

Нека сега нивото на цените се повиши с 50%, тогава $P = 1{,}5$. Ще разгледаме два случая:

1) с наличие на парична илюзия: $W^S = W^D \Longrightarrow 0{,}5N + 10 = 105 - 3N \Longrightarrow N = 27{,}14$ и $y = 1163$, следователно ще имаме ефект върху заетостта $\Delta N = 27{,}14 - 24 = 3{,}14$ и ефект върху производството $\Delta y = 1163 - 1104 = 59$.

2) без парична илюзия: $W^S = W^D \Longrightarrow 0{,}5N + 15 = 105 - 3N \Longrightarrow N = 25{,}71$ и $y = 1139$, следователно ще имаме ефект върху заетостта $\Delta N = 25{,}71 - 24 = 1{,}71$ и ефект върху производството $\Delta y = 1139 - 1104 = 25$.

Определянето на функциите $N = N(P)$ и $y = y(P)$ в условие на равновесие на пазара на труд отново трябва да се разгледа отделно за случаите с наличие и без парична илюзия.

1) с наличие на парична илюзия: $W^S = W^D \Longrightarrow 0{,}5N + 10 = 70P - 2NP$, тогава

$$N(P) = \frac{70P - 10}{2P + 0{,}5}.$$

Тъй като $N(P)$ е строго растяща функция и $\lim_{P \to \infty} N(P) = 35$, то $sup\{N(P)\} = N_0 = 35$. Като заместим полученото $N(P)$ в израза за y $y = 70N - N^2$ получаваме

$$y(P) = \frac{(70P - 10)(70P + 45)}{(2P + 0,5)^2}.$$

Тогава $\lim_{P \to \infty} y(P) = 1225$ и $sup\{y(P)\} = y_0 = 1225$.

2) без парична илюзия: $W^S = W^D \Longrightarrow 0,5N + 10P = 70P - 2NP$, тогава

$$N(P) = \frac{60P}{2P + 0,5}.$$

Аналогично получаваме $\lim_{P \to \infty} N(P) = 30$, и $sup\{N(P)\} = N_0 = 30$. За брутния продукт y като функция на нивото на цените P в условие на равновесие на пазара на труд ще имаме

$$y(P) = \frac{60P(80P + 35)}{(2P + 0,5)^2}$$

и $\lim_{P \to \infty} y(P) = 1200$ и $sup\{y(P)\} = y_0 = 1200$.

ГЛАВА 4. ОБЩО ИКОНОМИЧЕСКО РАВНОВЕСИЕ

Различните подходи към функционирането на отделните сектори на икономиката по естествен път водят до наличието в съвременната макроикономика на алтернативни (статични) модели на съвместното равновесие на тези сектори. Такива модели се наричат модели за общо икономическо равновесие (ОИР).

25. Неокласически модел на ОИР

Посредством дадения модел в обобщен вид се реконструира представата за макроикономическото функциониране на пазарната икономика, господстваща до появата на книгата на Дж. М. Кейнс „Обща теория на заетостта, лихвените проценти и парите", т. е. До втората половина на 30-те години на миналия век. За да се изяви същността на неокласическата концепция е достатъчно да се разгледа модела на двусекторна икономика – на домакинства и предприемачи.

Тъй като според неокласическата концепция парите не се явяват богатство в икономиката, следователно има три пазара – на труд, капитал и стоки. На тези пазари се срещат два макроикономически субекта – домакинствата и предприемачите. Своеобразното тълкуване на същността на парите води до **класическата дихотомия** – съществуване на два независими един от друг сектора – реален и паричен.

Реален сектор:

1. **Пазар на капитал**: в резултат на изравняването на обема на предлагане на капитал (спестяванията на домакинствата) и обема на търсене на капитал (инвестициите на фирмите) се установява равновесен лихвен процент, т.е.

$$S(i_+) = I(i_-) \rightarrow \ i^*$$

2. **Пазар на труда**: при зададен лихвен процент на пазара на труд се достига до устойчиво равновесие, т.е. изравняват се търсенето на труд $N = N^D(w_-)$ и предлагането на труд $N = N^S(w_+, i_+)$, при което се определя равновесната стойност на реалната заплата w^* и равновесното количество труд $N^* = N^D(w^*) = N^S(w^*, i^*)$. Разбира се, търсенето на труд се определя от условието за максимизирането на печалбата при съвършена конкуренция $y'(N) = w$ (където $y(N)$ е п. ф. на една променлива).

Така получаваме, че равновесието в реалния сектор не зависи нито от нивото на цените, нито от количеството пари.

Паричен сектор:

Тук е валидно съотношението

$$\frac{M}{P} = \frac{y}{v}$$

където v е скоростта на обръщение на НД y, а M – количеството пари. Така търсенето на доход ще бъде $y^D = \frac{Mv}{P}$ и тъй като предлагането е $y^S = y^* = y(N^*)$; то от изравняването на търсене и предлагане $y^S = y^D = y^*$ ще се определи равновесното ниво на цените

$$P^* = \frac{Mv}{y^*}$$

Окончателно ще имаме

(1) $S(i_+) = I(i_-)$

(2) $\frac{M}{P} = \frac{y}{v}$

(3) $N^D(w_-) = N^S(w_+, i_+)$

(4) $y = y(N)$

Извод: за сметка на гъвкавостта на лихвения процент i и реалната работна заплата w пазарния механизъм винаги установява равновесие при пълна заетост. Превишаването на предлагането над търсеното на пазара на труд и на стоки са възможни само като временни явления и са свързани с отклонение на относителните цени от равновесните им стойности. Изменението на количеството пари в обращение не влияе на равновесните реални стойности на стоките и работната заплата, а променя само номиналните им стойности.

Пример 25. 1. Зададени са: п. ф. $y = 20N - N^2$, функция на спестяванията $S = 2 + 3i$, на инвестициите $I = 20 - 3i$, предлагане на труд $N^S = 2w + i$. Парите в обращение са $M = 10$, а скоростта на обръщение на НД е $v = 12$ оборота за година. Да се намерят всички макроикономически величини.

Решение:

Съставяме модела

(1) $2 + 3i = 20 - 3i$

(2) $\frac{10}{P} = \frac{y}{12}$

(3) $y' = 20 - 2N = w \Longrightarrow N^D = 10 - \frac{w}{2} = N^S = 2w + i$

(4) $y = 20N - N^2$

От (1) $i^* = 3$. В (3) $10 - \frac{w}{2} = 2w + 3 \Longrightarrow w^* = 2{,}8$ и $N^* = 8{,}6$. От (4) $y^* = y(N^*) = y(8{,}6) = \frac{20.43}{5} - \left(\frac{43}{5}\right)^2 = 172 - \frac{1849}{25} = 98{,}04$. От (2) $P^* = \frac{10.12}{y^*} = \frac{120}{98{,}04} = 1{,}22$. Освен това $S = I = 11 \Longrightarrow C = y - S = 87{,}04$.

Забележка: Как да намерим функциите на съвкупно предлагане $y = y^S(i)$ и търсене $y = y^D(i)$. От (3) определяме $N = 4 - \frac{2i}{5}$ и $N = 8 + \frac{i}{5}$, тогава от (4) определяме $y^S = y(N) = y\left(8+\frac{i}{5}\right) = 20\left(8+\frac{i}{5}\right) - \left(8+\frac{i}{5}\right)^2 = 96 + \frac{4}{5}i - \frac{i^2}{25}$. Тогава, тъй като $y^S = C + S = y^S(i)$ и $y^D = C + I = y^D(i), y^D(i) = C + S + (I - S) = y^S(i) + (I - S) \Longrightarrow\ y^D(i) = 96 + \frac{4}{5}i - \frac{i^2}{25} + (20 - 3i - 2 - 3i) = 114 - \frac{28}{5}i - \frac{i^2}{25}$

Неокласически модел на ОИР за трисекторна икономика. В този модел се променя само (1) със следното равенство, гарантиращо равновесието на пазарите на капитал и стоки

$$(1') \qquad S(i_+) + T(y_+) = I(i\_) + G$$

Алгоритъм за решаване на модела:

1. От (1') се определя $y^D = y^D(i)$
2. От (3) се определят $w = w(i)$ и $N = N(i)$
3. От (4) се определя $y^S = y(N(i))$
4. Тогава от $y^D(i) = y^S(i) \rightarrow\ i^*$ и y^*
5. $w^* = w(i^*)$ и $N^* = N(i^*)$
6. $P^* = \frac{Mv}{y^*}$

Пример 25. 2. Нека при условията на предишния пример се появява държава събираща плосък данък от 20% и извършваща разходи $G = 31{,}8$.

Решение:

$$2 + 3i + 0{,}2y = 20 - 3i + 31{,}8 \ \Longrightarrow\ y^D = 249 - 30i$$

Както преди имаме $y^S = 96 + \frac{4}{5}i - \frac{i^2}{25}$. От $y^D = y^S$ получаваме $i^* = 5$ и $y^* = 99$; $w^* = w(5) = 2$ и $N^* = N(5) = 9$; $P^* = \frac{120}{99} \approx 1{,}21$. Освен това $S = 17; T = 19{,}8; I = 5,$ а $C = y - S - T = 62{,}2$, $G - T = 31{,}8 - 19{,}8 = 12$ е бюджетния дефицит (превишението на държавните разходи над държавните приходи).

26. Кейнсиански модел на ОИР

За разлика от неокласическия модел, при който основен се явява пазара на факторите на производство, при кейнсианския модел акцентът е върху формираното на пазарите на стоки и пари (т.е. въз основа на *IS*-*LM*-модела)ефективно търсене.

Моделът на стоковия пазар е:

$$(1) \qquad S(y) + T(y) = I(i) + G$$

Той определя множество от точки в координатната равнина (y, i), обезпечаващи равновесие на стоковия (и капиталов) пазар. Това множество се нарича IS-линия, а модела - IS-модел.

Моделът на паричния пазар е:

$$(2) \qquad \frac{M}{P} = l(y, i)$$

При фиксирано ниво на цените P в координатната равнина се определя множество от точки, чиито координати (y, i) обезпечават равновесието на паричния пазар. Моделът се нарича LM-модел, а линията LM-линия. Съвместното разглеждане на пазарите на стоките, пари и капитал (при P-фиксирано) обезпечават равновесие на тези пазари, тоест пресечна точка на IS-линията и LM-линията. Ако P не е фиксирано от (1) и (2) се определятт функциите $i = i(P)$ и $y = y^D(P)$ - функция на съвкупното търсене.

Модел на пазара на труда е:

$$(3) \quad W^S(N, P) = Py'(N) = W^D(N, P)$$

при

$$(4) \quad y = y(N) \text{ - производствена функция.}$$

От (3) се определя $W = W(P)$ и $N = N(P)$, а от (4)-функцията на съвкупното предлагане $y = y^S(P) = Y(N(P))$.

Алгоритъм за решаване на модела:

1) от (1) и (2) се определя $i = i(P)$ и $y \quad = y^D(P)$;
2) от (3) се определят: $N = N(P)$ и $W = W(P)$;
3) от (4) се определя предлагане $y = y^S(P) = Y(N(P))$;
4) от $y^S(P) = y^D(P) \rightarrow P^*, y^*$;
5) тогава $i^* = i(P^*), W^* = W(P^*)$и $N^* = N(P^*)$.

Забележка: Ако $W^S = W^S(N)$, тоест. предлагането на труд не зависи от нивото на цените, казваме че работниците имат парична илюзия, в общият случай работниците са лишени от парична илюзия (но не и в степента, характерна за неокласическия модел).

Пример 26.1. Поведението на домакинствата се описва от функцията на потреблението $C = 80 + 0{,}7y$, функцията на търсене на реалните касови остатъци $l = 0{,}04y + 2(50 - i)$ и функцията на предлагане на труд $W^S = 0{,}519N + 10P$. Предприемаческият сектор в условие на конкуренция работи по технология, описана чрез производствената функция $y = 70N - N^2$, а функцията на търсене на инвестиции е $I = 260 - 6i$. Държавата извършва разходи за закупуване на крайни продукти $G = 110$, събира плосък данък от 10% и предлага пари в обръщение (номинални касови остатъци) $M = 104$. Да се намерят равновесните стойности на ендогенните за модела макроикономически величини.

Решение:

За стоковия пазар ще имаме:

$$S = y - T - C = y - 0{,}1y - 80 - 0{,}7y = 0{,}2y - 8$$

$$0{,}2y - 80 + 0{,}1y = 260 - 6i + 110$$

$0{,}3y = 450 - 6i \rightarrow y = 1500 - 20i - IS -$ линия.

За паричния пазар получаваме

$$\frac{104}{P} = 0{,}04y + 100 - 2i - LS - \text{линия за всяко } P$$

От съвместното равновесие на стоковия и паричен пазар получаваме функцията на съвкупно търсене

$$\frac{104}{P} = 0{,}04(1500 - 20i) + 100 - 2i \rightarrow i = \frac{400}{7} - \frac{260}{7P}$$

и

$$y^D = \frac{2500}{7} + \frac{5200}{7P}$$

Сега, чрез изравняване на търсенето и предлагане на труд получаваме

$$W^D = Py' = P(70 - 2N) = 70P - 2NP$$

$$W^D = W^S \Longrightarrow 0{,}519N + 10P = 70P - 2NP \Longrightarrow N = \frac{60P}{2P + 0{,}5}$$

$$W = 0{,}519\frac{60P}{2P + 0{,}519} + 10P = \frac{36{,}33P + 20P^2}{2P + 0{,}519}$$

$$y^S = N(70 - N) = \frac{60P}{2P + 0{,}519}(70 - \frac{60P}{2P + 0{,}519}) = \frac{60P(80P + 36{,}33)}{(2P + 0{,}519)^2}$$

Приравнявайки съвкупното търсене със съвкупното предлагане ще получим равновесните стойности на нивото на цените и националния доход

$$y^S = y^D = \frac{60P(80P + 36{,}33)}{(2P + 0{,}519)^2} = \frac{2500}{7} + \frac{5200}{7P}$$

$$420P^2(80P + 36{,}33) = (2500P + 5200)(2P + 0{,}519)^2$$

$$33600P^3 + 15258{,}6P^2 = (2500P + 5200)(4P^2 + 2{,}076P + 0{,}26931) =$$

$$= 10000P^3 + 5190P^2 + 673{,}4025P + 20800P^2 + 10795{,}2P + 1400{,}6772$$

$$23600P^3 - 10731{,}4P^2 - 11468{,}602P - 1400{,}6772 = 0$$

Следователно $P^* = 1 \Longrightarrow y^* = \frac{2500+5200}{7} = 1100$

Тъй като трудовата заетост N, номиналната заплата W и лихвения процент i са изразени като функции на нивото на цените P, то сега можем да получим и техните равновесни стойности

$$N^* = 23{,}82;\ i^* = 20 \text{ и } W^* = 22{,}36.$$

Тогава получаваме, че потреблението на домакинствата е $C = 850$; спестяванията $-\ S = 140$; данъците, събрани от държавата $-\ T = 110 \Longrightarrow T = G$, което свидетелства за балансиран бюджет (без излишък или дефицит). Инвестициите на предприемачите са $I = 140 (= S$, тъй като $T = G)$. В частност получаване, че $N^*W^* = 23{,}82 \cdot 22{,}36 = 532{,}62$ са общите доходи от труд, а $y^* - N^*W^* = 1100 - 532{,}62 = 567{,}38$ – доходите от капитал.

Изследване и графика на функциите на съвкупно търсене $y^D(P)$ и съвкупно предлагане $y^S(P)$

$y^D(P) = \frac{2500}{7} + \frac{5200}{7P}$ е намаляваща функция с хоризонтална асимптота $P = 0$ и $\lim_{P\to\infty} y^D(P) = \frac{2500}{7} = 357{,}14.$

$y^S(P) = \frac{60P(80P+36{,}33)}{(2P+0{,}519)^2}$ е растяща функция, $y^S(0) = 0$

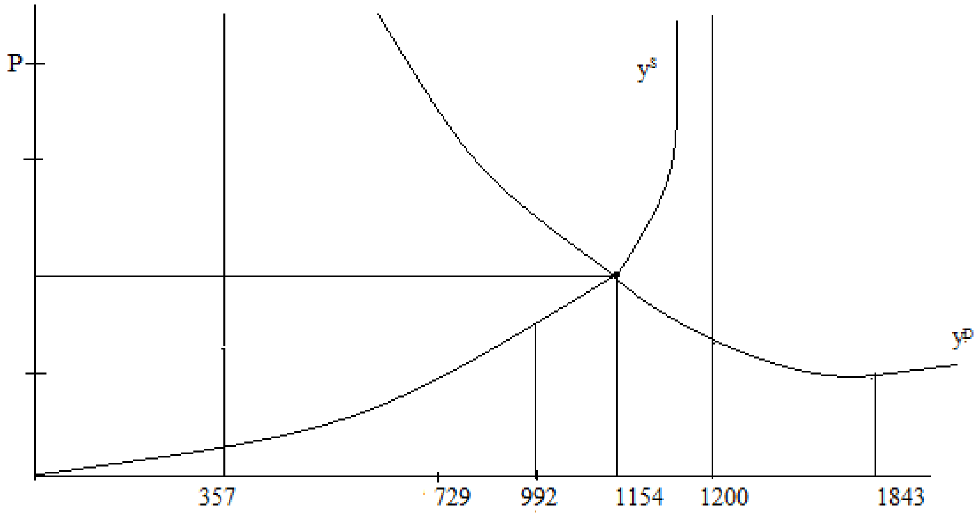
$$\lim_{P\to\infty} y^S(P) = 1200 \Longrightarrow \text{за всяко } P > 0\ y^S(P) < 1200$$

За да построим графиките пресмятаме $y^D(P)$ и $y^S(P)$ за някои характерни стойности на P

$$P = 0,5 \quad y^S = 992,44 \quad y^D = 1843$$

$$P = 1 \quad y^S = 1100 \quad y^D = 1100$$

$$P = 2 \quad y^S = 1153,67 \quad y^D = 729$$



Фиг. 26. Графики на функциите на съвкупно търсене и предлагане

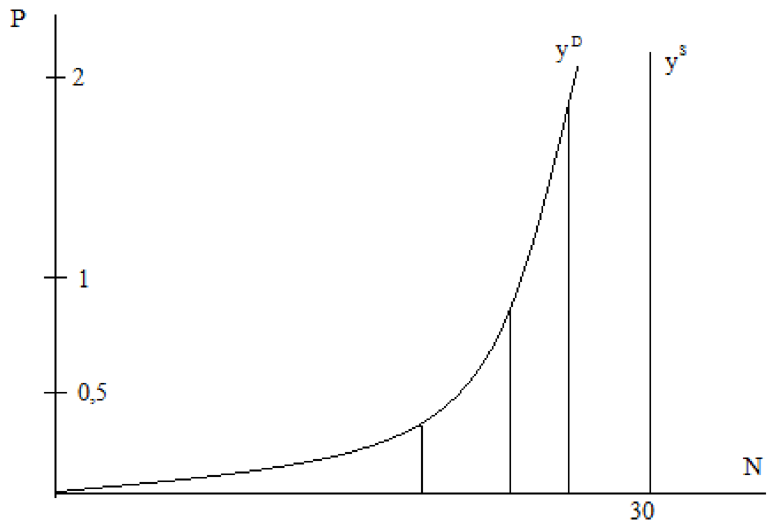
Изследване на графиката на финкцията $N(P)$

$N(P) = \frac{60P}{2P+0,519}$ е растяща функция, $\lim\limits_{P\to\infty} N(P) = 30 \Longrightarrow$ има вертикална асимптота.

$$P = 0,5 \quad N = 19,750$$

$$P = 1 \quad N = 23,82$$

$$P = 2 \quad N = 26,555$$



Фиг. 17. Графика на функцията на заетостта

Изследване графиките на функциите $W(P)$ и $w(P)$.

$$W(P) = \frac{36{,}33P+20P^2}{2P \quad +0{,}519} \Rightarrow W(P) \text{ е растяща функция}$$

$$w(P) = \frac{W(P)}{P} = \frac{36{,}33P + 20P^2}{2P^2 + 0{,}519}$$

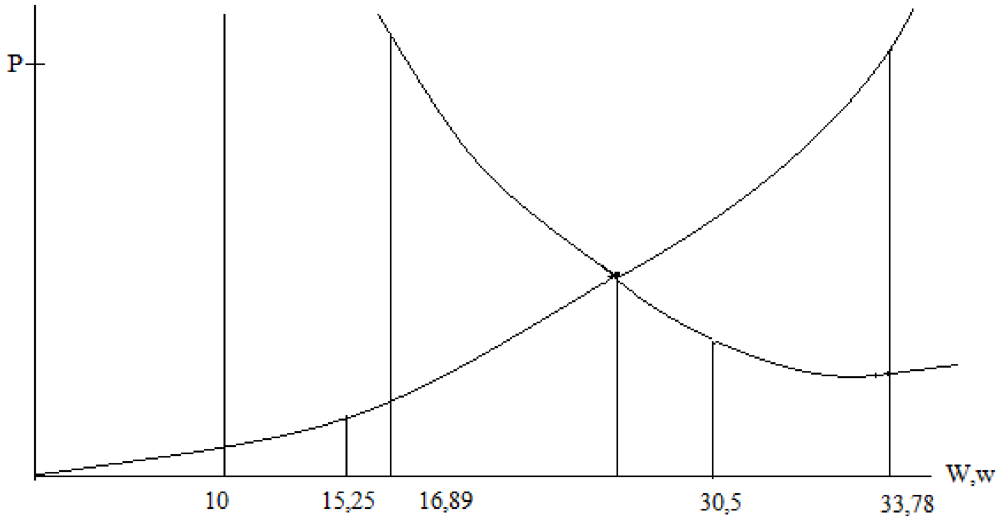
$$\big(w(P)\big)' = -\frac{62{,}28P^2}{(2P^2 + 0{,}519P)^2} < 0$$

$$\lim_{P\to\infty} w(P) = 10$$

$$P = 0{,}5 \quad W = 15{,}25 \quad w = 30{,}5$$

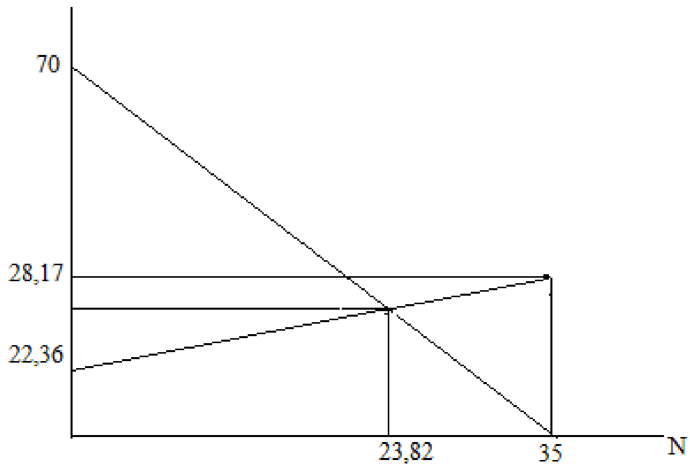
$$P = 1 \quad W = 22{,}86 \quad w = 22{,}86$$

$$P = 2 \quad W = 33{,}78 \quad w = 16{,}89$$



Фиг. 28. Графики на функциите на номиналната и реалната работна заплата

При $P = 1, W^D = 70 - 2N;\ W^s = 0{,}519N + 10$.



Фиг. 29. Равновесие на пазара на труд при $\mathbf{P = 1}$

27. *AD-AS*-модел

27. 1. Функция на съвкупно предлагане $\boldsymbol{y^S = y^S(P)}$

Неокласическа концепция. Тя се определя на трудовия пазар. Тъй като при неокласиците търсенето на труд е функция на реалната работна заплата, тогава $N^S(w) = N^D(w)$ се определя равновесните стойности w^* и N^*, а от производствената функция се определя съвкупното предлагане $y^* = y(N^*)$.

Тогава $y^S = y^* = const.$, т.е. линията на съвкупното предлагане е вертикална - производствените, трудовите ресурси и капитала се използват напълно.

Кейнсианска концепция. Съвкупното предлагане се определя от пазара на труд, то тъй като предлагането на труд е функция от номиналната (а не от реалната) заплата, то

$$N^S\left(\frac{W}{P}\right) = N^D(W, P) \rightarrow W = W(P) \text{ и } N = N(P)$$

Тогава от $y = y(N) \rightarrow y = y(N(P))$. Получава се функция на съвкупното предлагане, която има вид, подобен на този от примера. Графиките на функцията на съвкупно предлагане $y^S = y^S(P)$ се състои от три участъка:

1) При малки стойности на y^S и P - кейнсиански участък, който е почти успореден на $y-$ оста;

2) При големи стойности на P (тъй като графиката има вертикална асимптота) тоест $\lim\limits_{P\to\infty} y^S(P) = y_0$, следователно за всяко P $y^S < y_0$.(Този участък е почти успорен на P-оста) - класически участък;

3) Междинен участък.

Модел, при който е зададена функцията на съвкупно предлагане със свойствата:

(1) $y^S(0) = 0$;

(2) $\left(y^S(P)\right)' > 0$;

(3) $\left(y^S(P)\right)'' > 0$;

(4) $\lim\limits_{P\to\infty} y^S(P) = y^0$;

се нарича модел на съвкупното предлагане или *AS*-модел.

27. 2. Функция на съвкупното търсене $y^D(P)$

Неокласическа концепция. Тази функция се определя от паричния сектор:

$$y^D(P) = \frac{Mv}{P}$$

Кейнцианска концепция. Функцията на съвкупното търсене се определя от $IS - LM$ модела и е от вида:

$$y^D(P) = a + \frac{b}{P}$$

Всяка функция, удовлетворяваща свойствата:

(1) $\lim_{P \to \infty} y^D(P) = \infty$;

(2) $\lim_{P \to \infty} y^D(P) = 0$;

(3) $y^D(P)' < 0$;

(4) $y^D(P)'' > 0$;

може да се разглежда като функция на съвкупно търсене. Съответният модел се нарича модел на съвкупното търсене или *AD*-модел.

27. 3. Равновесие на съвкупното търсене и предлагане - AD-AS модел

Неокласическа концепция. Тъй като $y^S = y^* = const.$, то съвкупното търсене трябва да се нагоди към предлагането и от $y^D(P) = y^*$ се определя само нивото на цените P^*. При увеличаване на съвкупното търсене (в краткосрочен план) икономиката не може да отговори с нарастване на производството, защото няма налични неизползвани ресурси. Следователно ще нараснат цените и номиналния доход, но реалният доход ще се запази на равновесното ниво y^*. Общият извод е, че пазарният механизъм води до пълна заетост, от това следва, че намесването на държавата може да доведе само до негативни резултати.

Неокейнсианска концепция. Тук е мястото на *AD-AS* модела:

$$y^D(P) = y^S(P) \rightarrow P^*, y^*.$$

Нека сега да си представим, че пресечната точка на *AS*-линията и *AD*-линията е в точка с координати (P_0, y_0) и (поради някакви причини) е настъпило малко увеличаване на търсенето, тоест *AD*-линията се е изместила леко на североизток. Тогава точката на пресичане на старата *AS*-линия и новата *AD*-линия ще с координати (P_1, y_1), като $P_1 > P_0$ и $y_1 > y_0$. Ако:

(1) това пресичане е в кейнсианския участък на AS-линията y_1 ще е значително по-голямо от y_0, но P_1 ще е почти колкото P_0;

(2) пресичането е върху класическия участък ще е точно обратното – при значително покачване на нивото на цените ще наблюдаваме незначително покачване на националния доход.

Пример 27. 1. Нека $y^S(P) = \frac{\mathrm{aP^2+bP}}{(1+P)^2}$, $y^D(P) = c + \frac{d}{P}$, като е известно, че

$$\lim_{P\to\infty} y^S(P) = 1000;\ \lim_{P\to\infty} y^D(P) = 440 \text{ и } y^S(1) = 800;\ y^D(1) = 1112.$$

Да се възстановят функциите на съвкупното предлагане и търсене $y^S(P)$ и $y^D(P)$, да се намерят равновестните стойности y^* и P^*, да се определи в кой участък на *AS*-линията е постигнато равновесието и да се определи нивото на заетост N^* и номиналната работна заплата W^*, ако производствената функция е $y = 61N - N^2$.

Решение:

$$\lim_{P\to\infty} y^S(P) = \frac{aP^2 + bP}{(P+1)^2} = a = 1000 \Longrightarrow y^S(P) = \frac{1000P^2 + bP}{(P+1)^2}$$

$$y^S(1) = \frac{1000 + b}{4} = 800 \Longrightarrow 1000 + b = 3200 \Longrightarrow b = 2200$$

Така получаваме окончателния вид на функцията на съвкупно предлагане:

$$y^S(P) = \frac{1000P^2 + 2200P}{(P+1)^2}$$

$$\lim_{P\to\infty} y^D(P) = \lim_{P\to\infty} y^D\left(c + \frac{d}{P}\right) = c = 440 \Rightarrow c = 440.$$

$$y^D(P) = 440 + \frac{d}{P};\ y^D(1) = 440 + d = 1112 \Rightarrow d = 672$$

Окончателният вид на функцията на съвкупно търсене ще бъде

$$y^D(P) = 440 + \frac{672}{P}.$$

Така получаваме равенството на *AD-AS* модела:

$$y^S(P) = y^D(P) \Leftrightarrow \frac{1000P^2 + 2200P}{(P+1)^2} = 440 + \frac{672}{P}$$

$$1000P^3 + 2200P^2 = 440P(P^2 + 2P + 1) + 672(P^2 + 2P + 1)$$

$$1000P^3 + 2200P^2 = 440P^3 + 880P^2 + 440P + 672P^2 + 134P + 672$$

$$560P^3 + 648P^2 - 1784P - 672 = 0$$

$$70P^3 + 81P^2 - 223P - 84 = 0$$

$$p^* = 1{,}5 \quad 236{,}25 + 182{,}25 - 334{,}5 - 84 = 0$$

$$y^* = y^s(1{,}5) = y^D(1{,}5) = 440 + \frac{672}{1{,}5} = 888$$

Пресмятаме еластичността $E\left(y^S(P)\right) = \frac{\mathrm{d}y^S}{\mathrm{dP}}.\frac{P}{y^S} = \frac{2200-200P}{(P+1)^3}.\frac{P(P+1)^2}{1000P^2+2200P} = \frac{2200-200P}{(P+1)(1000P+2200)} \Longrightarrow E(x^s(1{,}5)) = \frac{2200-300}{2{,}5(1500+2200)} = \frac{1900}{2{,}5.37} = 0{,}20$

Следователно на 5% изменение на P ще съответства 1% изменение на y, а от това следва, че сечението се реализира върху класическия участък.

$$N^*: 888 = 61N - N^2 \Longrightarrow N^2 - 61N + 888 = 0$$

$$N_{1/2} = \frac{61 \pm \sqrt{3721 - 3552}}{2} = \frac{61 \pm 13}{2}$$

$$N_1 = 37 \text{ и } N_2 = 24.$$

Но, тъй като $y'(N) = 61 - 2N > 0 \Longrightarrow N < 30{,}5 \Longrightarrow N^* = 24$. Тогава, (независимо какво е предлагането на труд) работната заплата ще се определи от $y'(N^*) = w \Rightarrow 61 - 2.24 = w^* \Rightarrow w^* = 13$ и $W^* = w^*P^* = 13.1{,}5 = 19{,}5$.

28. Сравнение на неокласическия и кейнсианския модел на ОИР

Сравнителните характеристика на двете макроикономически концепции са дадени в следната таблица

Неокласически	Кейнсиански
За домакинствата спестяванията са първични а потреблението – вторично. Те зависят от лихвения процент.	За домакинствата първично е потреблението, а спестяванията са вторични. Зависят от националния доход.
На пазара на стоки и капитал се определя равновесната стойност на лихвения процент.	На пазара на стоки и капитал се определя равновесна двойка $(i, y) - IS -$ линията.
Парите не са богатство, следователно не съществува паричен пазар.	Парите могат да бъдат разглеждани като богатство, съществува паричен пазар.
В паричният сектор е валидна количествената формула за парите $\frac{M}{P} = \frac{y}{v}$.	На паричния пазар се определя равновесна двойка $(i, y) - LM -$ линия. На пазарите на стоки, капитал и пари се определя съвкупното търсене.
Търсенето на труд е функция на реалната работна заплата.	Търсенето на труд е функция на номиналната работна заплата (при наличие на парични илюзии) и на нея и нивото на цените (без парични илюзии).
Съвкупното предлагане, определено на трудовия пазар е $const$.	Съвкупното предлагане, определено на трудовия пазар е растяща функция на нивото на цените.
Равновесието се постига при условие на пълно използване на наличните (включително трудови) ресурси.	Възможно е равновесие при наличието на излишъци на пазарите (например конюнктурна безработица).
Съществува класическа дихотомия – реалния и паричния сектор функционират отделно един от друг.	Не съществува дихотомия – равновесието се постига при взаимодействие на реалния и паричен сектор.
При увеличено предлагане на пари ще се променят само цените, всички величини на модела ще запазят реалните си стойности.	При увеличено предлагане на пари ще се променят всички величини на модела по различен начин.
Сферата на приложение е при съвършената конкуренция, както и в дългосрочен план.	Сферата на приложение е в условията на несъвършена конкуренция и в краткосрочен план.
Основен извод – намесата на държавата може само да влоши положението.	Основен извод – държавата чрез активна фискална и монетарна политика може да създаде предпоставки за нарастване на НД.

29. Неокласически синтез

Моделите на неокласическия синтез се състоят в комбиниране на условия и предпоставки от двата базови модела – неокласическия и кейнсианския. Неокласическия синтез позволява да се разкрият условия за съвместимост на неокласическият и кейнсиански модел на ОИР и да се отстранят някои техни противоречия в изходните предпоставки – например класическата дихотомия. Най-простия пример, това е модел при който модела на пазар и на стоки, пари и капитали се вземат от кейнсианската концепция, а трудовия пазар се моделира както е при неокласиците.

Пример 29. 1. Предприемачите работят по технология, зададена чрез п.ф. $y = 3N^{2/3}$, предлагането на труд се осъществява чрез $N^S = 0{,}5w$, функцията на спестяване е $S = 0{,}1y$, а функцията на инвестиции - $I = 1 - 0{,}1i$. Търсенето на реални касови остатъци е $l = 5y - 0{,}2i$, а парите в обръщение са $M = 27{,}2$. Да се намерят всички равновесни стойности на макроикономическите величини в този модел.

Решение:

Системата на модела е

(1) $0{,}1y = 1 - 0{,}1i$

(2) $27{,}2 = 5y - 0{,}2i$

(3) $3.\frac{2}{3}.\frac{1}{N^{\frac{1}{3}}} = w = 2N^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{8}{N} = 8N^3 \quad \Rightarrow \quad N^* = 1, w^* = 2$

$y^* = 3;\ i = 7; P^* = 2; S = I = 0{,}3.$

Друг модел на неокласически синтез (за двусекторна икономика) се задава чрез системата

$$\left|\begin{array}{c} S(i, y) = I(i) \\ \dfrac{M}{P}(i) = \dfrac{y}{v} + l_S(i) \\ w^D(N) = y'(N) = w^S(N, i) \\ y = y(N) \end{array}\right.$$

Според първото уравнение, се предполага, че спестяванията на домакинствата зависят както от лихвения процент (неокласическа съставяща), така и от дохода (кейнсианска съставяща). Второто уравнение за равновесието е според кейнсианската концепция – присъства при търсенето на реални касови остатъци съставката на спекулативното търсене $l_S(i)$. Третото уравнение изравнява търсенето и предлагането на труд според неокласическата концепция.

ГЛАВА 5. МАКРОИКОНОМИЧЕСКА ДИНАМИКА. МОДЕЛИ С ИКОНОМИЧЕСКИ РЪСТ

30. Въведение в макроикономическата динамика

Динамичните модели в икономиката се наричат моделите, описващи икономиката в развитие, т.е. моделите, описващи икономически процеси. Те са контрапункт на статичните модели, характеризиращи дадена икономическа система в определен момент, а не в развитие.

Даден модел се явява динамичен, ако поне една икономическа променлива се отнася за период от време, различен от времето, към което са отнесени другите променливи. Всички променливи в динамичните модели са отнесени към времето (t), което играе ролята на независима променлива.

С помощта на динамичните модели се решават въпросите за планирането и прогнозирането на икономическите процеси.

Има два типа динамични макроикономически модели:

а) модели с дискретно отчитане на времето; наричат се още квазидинамични модели. Свеждат се до диферентни уравнения;

б) модели с непрекъснато отчитане на времето (същински динамични модели). Свеждат се до (обикновени) диференциални уравнения.

От друга страна разграничаваме динамичните макроикономически модели според тяхното предназначение на:

а) модели на икономическия ръст;

б) модели на икономическите цикли;

в) инфлационни макроикономически модели.

Разбира се, съществуват динамични макроикономически модели (те са най-сложните), явяващи се съчетание на модели с горните характеристики.

При динамичните модели на икономическия ръст може да се говори за два типа макроикономически модели:

а) с постулиране на определена (егзогенно предположена) зависимост. Изборът на тази зависимост се прави с цел получаването на правдоподобни (от гледна точка на съществуващите статистически данни) резултати. Основен техен недостатък е, че техните решения обикновено не са устойчиви.

б) такива, при които се постулира някакъв принцип за оптималност (екстремалност), от който интересуващите ни величини се определят ендогенно.

От друга страна, продължава да бъде валидно делението на макроикономическите модели на кейнсиански и неокласически. Основна характеристика на неокласическите модели с икономически ръст е, че те се основават на микроикономическо поведение (а микроикономиката като цяло е неокласическа)

31. Модел на Солоу–Сван в най-общ вид

Изложеният по-долу модел на Солоу–Сван е най-важният пример за динамичен макроикономически модел за равновесен икономически ръст, основаващ се на микроикономическо поведение.

Предпоставките на модела са следните:

(1) Технологията на производството е зададена чрез неокласическа макроикономическа производствена функция, тоест производствена функция удовлетворяваща аксиомите:

1. $Y(0,0) = Y(K,0) = Y(0,N) = 0$ – без един от ресурсите няма продукция;
2. $Y_K = \frac{\partial Y}{\partial K} > 0$ и $Y_N = \frac{\partial Y}{\partial N} > 0$ – националният доход расте при нарастването на всеки от ресурсите;
3. $Y_{KK} = \frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = \frac{\partial}{\partial K} Y_K < 0$ и $Y_{NN} = \frac{\partial^2 Y}{\partial N^2} = \frac{\partial}{\partial N} Y_N < 0$ – с увеличаването на количеството на всеки от ресурсите, скоростта на нарастване на дохода намалява;
4. $Y_{KN} = \frac{\partial^2 Y}{\partial K \partial N} = \frac{\partial}{\partial K} Y_N = Y_{NK} = \frac{\partial^2 Y}{\partial N \partial K} = \frac{\partial}{\partial N} Y_K \geq 0.$

Освен това се предполага, че производствена функция е хомогенна със степен на хомогенност единица т.е.:

$$Y(mK, mN) = mY(K, N).$$

Въвеждаме нови променливи:

$$y = \frac{Y}{N} - \text{средна производителност на труда и}$$

$$k = \frac{K}{N} - \text{средно съотношение} \frac{\text{капитал}}{\text{труд}}.$$

Тогава ще имаме

$$Y(K, N) = Y\left(N \cdot \frac{K}{N}, N \cdot 1\right) = N \cdot Y\left(\frac{K}{N}, 1\right),$$

тоест

$$\frac{Y}{N} = Y\left(\frac{K}{N}, 1\right) \Longrightarrow y = y(k),$$

където сме положили

$$y(k) = Y\left(\frac{K}{N}, 1\right).$$

В този случай производствената функция е функция на една променлива: тя показва как се изчислява средната производственост на труда в следствие изменение на съответствието капитал/труд.

Нека, например да имаме производствената функция на две ресурсни променливи

$$Y = K^{0,5}N^{0,5} + K^{0,7}N^{0,3}.$$

Тя е хомогенна от първа степен. Като разделим на N получаваме

$$\frac{Y}{N} = \frac{K^{0,5}}{N^{0,5}} + \frac{K^{0,7}}{N^{0,7}} \Longrightarrow y = k^{0,5} + k^{0,7}.$$

От полагането и свойствата-аксиоми на производствената функция на две променливи, получаваме че:

$$y'(k) > 0 \quad \text{и} \quad y''(k) < 0,$$

тоест производствената функция $y(k)$ е растяща вдлъбната функция (растяща функция с намаляващ растеж). За всяка хомогенна производствена функция на две променливи $Y(K, N)$, съответната ѝ функция $y(k)$ ще наричаме производствена функция на една променлива. Обратно, ако зададем функция на средната производителност на труда от средното съотношение капитал/труд, която е растяща вдлъбната, то по такъв начин задаваме хомогенна производствена функция на две променливи – капитал и труд.

(2) Функцията на предлагане на труд с постоянен темп, това означава че:

$$N(t) = N_0 e^{nt} \Longrightarrow K(t) = \frac{K(t)}{N(t)} N(t) = k(t) N_0 e^{nt}.$$

(3) Нарастването на капитала се осигурява от инвестициите, тоест:

$$\frac{dK(t)}{dt} = I(t) \Longrightarrow$$

$$I(t) = (k(t)N_0e^{nt})' = k'(t)N_0e^{nt} + k(t)nN_0e^{nt}.$$

(4) Брутния вътрещен продукт Y се предства като:

$$Y(t) = C(t) + I(t) = C(t) + S(t) \Longrightarrow I(t) = S(t).$$

(5) Домакинствата спестяват с постояннна норма на спестяване $\bar{s}$, тоест:

$$I(t) = S(t) = \bar{s}Y(t) \Longrightarrow$$

$$\bar{s}Y(t) = k'(t)N_0e^{nt} + k(t)nN_0e^{nt}.$$

Но от друга страна имаме

$$Y(t) = Y\big(K(t), N(t)\big) = Y(N_0e^{nt}k(t), N_0e^{nt}) = N_0e^{nt}Y(k(t), 1) = N_0e^{nt}y\big(k(t)\big).$$

Така получаваме

$$\bar{s}N_0e^{nt}y\big(k(t)\big) = k'(t)N_0e^{nt} + k(t)nN_0e^{nt}.$$

Като разделим на N_0e^{nt} двете страни на горното равенство, ще имаме

$$\bar{s}y\big(k(t)\big) = k'(t) + k(t)n.$$

Горното равенство показва как във времето трябва да се изменя съотношението капитал/труд, така че да съществува равновесен ръст, обезпечаваш пълно използване на производствените мощностти, съпроводено с пълна заетост *(S(t)=I(t); $N^D(t)=N^S(t)$).*

Какво представлява произведението $\bar{s}y(k)$? Тъй като $y = Y/N$, то $y(k)$ е националния доход на един зает в производството му, следователно

$$s = \frac{S}{N} = \frac{\bar{s}Y}{N} = \bar{s}\frac{Y}{N} = \bar{s}y$$

са спестяванията на един зает в производството на националния доход. От друга страна имаме

$$nk = n\frac{K}{N} = \frac{nK}{N},$$

следователно nk са капиталовложенията (инвестициите) на един нов зает (n е ръстът на работната сила, т.е. делът на новите работници), показващи с колко трябва да бъде допълнен капитала, така че новите заети да бъдат обезпечени с капитал в онази степен, с която са обезпечени старите заети. С други думи $\bar{s}y(k)$ са спестяванията на един зает, а nk – инвестициите на един зает. За постигането на равновесен икономически ръст е необходимо спестяванията да се превърнат в инвестиции, тогава ще имаме

$$\bar{s}y(k) = nk \Leftrightarrow k'(t) = 0.$$

Ако уравнението $\bar{s}y(k) = nk$ притежава решение k_*, то $\bar{s}y(k_*) = nk_*$ и ще следва, че $k(t) = k_* = const$. Освен това $y(t) = const = y_* = y(k(t) = k_*)$. Ще имаме

$$\bar{s}y_* = nk_*$$

като условие за равновесен ръст. От друга страна

$$\sigma = \frac{Y}{K} = \frac{\frac{Y}{N}}{\frac{K}{N}} = \frac{y}{k} = \frac{y_*}{k_*} = \sigma_* \Longrightarrow \sigma(t) = const = \sigma_*$$

и условието за равновесен ръст добива вида

$$\bar{s}\sigma_* = n.$$

Какво получаваме за капитала K и националния доход Y:

$$\frac{K(t)}{N(t)} = k(t) = k_* \Longrightarrow K(t) = k_* N_0 e^{nt}$$

$$\frac{Y(t)}{N(t)} = y(t) = y_* \Longrightarrow Y(t) = y_* N_0 e^{nt}.$$

Следователно, ако е изпълнено условието за равновесен ръст брутния вътрешен продукт, капиталът и трудът ще нарастват с годишен темп n. Същото важи и за спестяванията S, инфлациите I и потреблението C. Съотношението капитал/труд k, средната производителност на труда y и средната производителност на капитала σ ще бъдат константи. Такива ще бъдат и реалният доход от капитал r и реалната работна заплата w.

32. Модел на Солоу–Сван с производствена функция на Кооб-Дъглас

Нека технологията на производството на националния доход е зададена с производствената функция на Кооб–Дъглас, т.е.

$$Y(K,N) = K^{\alpha}N^{1-\alpha}.$$

Тогава за еднофакторната производствена функция ще имаме

$$y(k) = Y(k,1) = k^{\alpha}.$$

Условието за съществуване на равновесен ръст на икономиката добива вида

$$\bar{s}k^{\alpha} = nk \Longrightarrow k^{1-\alpha} = \frac{\bar{s}}{n} \quad \text{и} \quad k_* = \left(\frac{\bar{s}}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}; y_* = \left(\frac{\bar{s}}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}};\ \sigma_* = \frac{n}{\bar{s}}.$$

При условие за оптимално (от микроикономическа гледна точка) поведение и съвършена конкуренция ще имаме

$$Y = \frac{\partial Y}{\partial K}K + \frac{\partial Y}{\partial N}\,N = rK + wN.$$

Да припомним, че първото равенство е вярно по силата на формулата на Ойлер за хомогенни функции от първи ред, а второто е следствие от условието за максимализиране на печалбата.

От друга страна получаваме

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha K^{\alpha-1}N^{1-\alpha} = \alpha\frac{K^{\alpha}N^{1-\alpha}}{K} = \alpha\frac{Y}{K} = \alpha\sigma = \alpha\sigma_* = \frac{\alpha n}{\bar{s}}.$$

Така за реалната доходност на капитала r ще имаме

$$r = \frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{\alpha n}{\bar{s}}.$$

Аналогично, за другата частна производна получаваме

$$\frac{\partial Y}{\partial N} = (1-\alpha)K^{\alpha}N^{-\alpha} = (1-\alpha)\frac{K^{\alpha}N^{1-\alpha}}{N} = (1-\alpha)\frac{Y}{N} = (1-\alpha)y = (1-\alpha)y_*$$
$$= (1-\alpha)\left(\frac{\bar{s}}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}},$$

Следователно, за реалната работна заплата w ще имаме

$$w = \frac{\partial Y}{\partial N} = (1-\alpha)\left(\frac{\bar{s}}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Пример 32.1. Нека технологията на производство на националния доход да се задава с производствената функция

$$Y_t = K_t^{1/3} N_t^{2/3},$$

нормата на спестяване е $\bar{s} = 25\%$, а в базовата година ($t = 0$) е приложен капитал $K_0 = 256$ и труд $N_0 = 32$.

а) При какъв темп на нарастване на предлагането на труд ще съществува равновесен ръст на икономиката.

б) Да се изразят Y, K и N като функции на t.

в) Да се пресметнат k_*, y_*, σ_*, r и w в условие на равновесен икономически ръст.

Решение:

а) За еднофакторната производствена функция ще имаме

$$y(k) = k^{1/3}.$$

Тогава условието за равновесен ръст ще бъде

$$\bar{s}k^{1/3} = nk.$$

След повдигане на трета степен на двете страни на равенството, получаваме

$$\bar{s}^3 k = n^3 k^3 \Longrightarrow \bar{s}^3 = n^3 k^2.$$

При равновесен ръст ще имаме

$$\frac{K_t}{N_t} = const = k_* = \frac{K_0}{N_0} = \frac{256}{32} = 8.$$

Заместваме в равенството $\bar{s}^3 = n^3 k^2$ $k = k_* = 8$ и $\bar{s} = 0{,}25$, получаваме

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3 = n^3 8^2 \Longrightarrow n^3 = \frac{1}{4^3 8^2} = \frac{1}{2^{12}} \Longrightarrow n = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} = 0{,}0625.$$

б) Тъй като

$$Y_0 = K_0^{1/3} N_0^{2/3} = \sqrt[3]{256}\sqrt[3]{32^2} = \sqrt[3]{2^8 2^{10}} = \sqrt[3]{2^{18}} = 2^6 = 64,$$

тогава ще имаме

$$Y_t = Y_0(1+n)^t = 64(1{,}0625)^t,$$

$$K_t = K_0(1+n)^t = 256(1{,}0625)^t,$$

$$N_t = N_0(1+n)^t = 32(1{,}0625)^t.$$

в) Тъй като $k_* = 8$, то $y_* = y(k_*) = 8^{1/3} = 2$ и

$$\sigma_* = \frac{y_*}{k_*} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Имаме разлагането

$$Y = rK + wN.$$

От друга страна, при производствена функция на Кооб-Дъглас (от мултипликативен вид) съотношението на доходите от капитал и труд е равно на съотношението на степенните показатели, т.е.

$$rK = \frac{1}{3}Y \quad \text{и} \quad wN = \frac{2}{3}Y.$$

При $t = 0$ ще имаме

$$rK_0 = \frac{1}{3}Y_0 \Longrightarrow r = \frac{Y_0}{3K_0} = \frac{64}{3 \cdot 256} = \frac{1}{12} = 0{,}0833,$$

следователно, реалната доходност на капитала е 8,33%.

Аналогично, за реалната работна заплата ще имаме

$$wN_0 = \frac{2}{3}Y_0 \Longrightarrow w = \frac{2Y_0}{3N_0} = \frac{2 \cdot 64}{3 \cdot 32} = \frac{4}{3} = 1{,}33.$$

Тогава, за произволно t ще бъде в сила разлагането

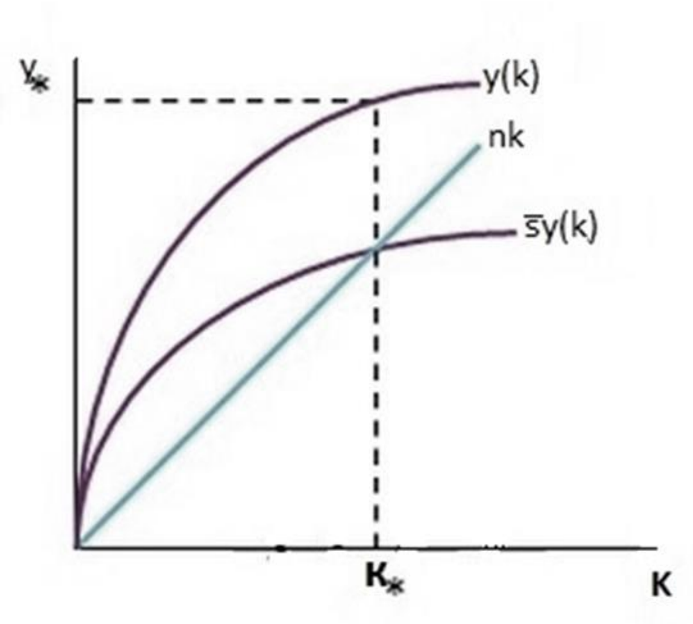
$$Y_t = \frac{1}{12}K_t + \frac{4}{3}N_t,$$

Тъй като реалният доход от капитал и реалната работна заплата са постоянни в модела на Солоу-Сван.

Таблица на основните макроикономически показатели през първите 3 години.

t	K	I=S	C	Y	N
0	256	16	48	64	32
1	272	17	51	68	34
2	289	$18\frac{1}{16}$	$54\frac{3}{16}$	$72\frac{1}{4}$	$36\frac{1}{8}$

33. Математическа обосновка на модела на Солоу–Сван



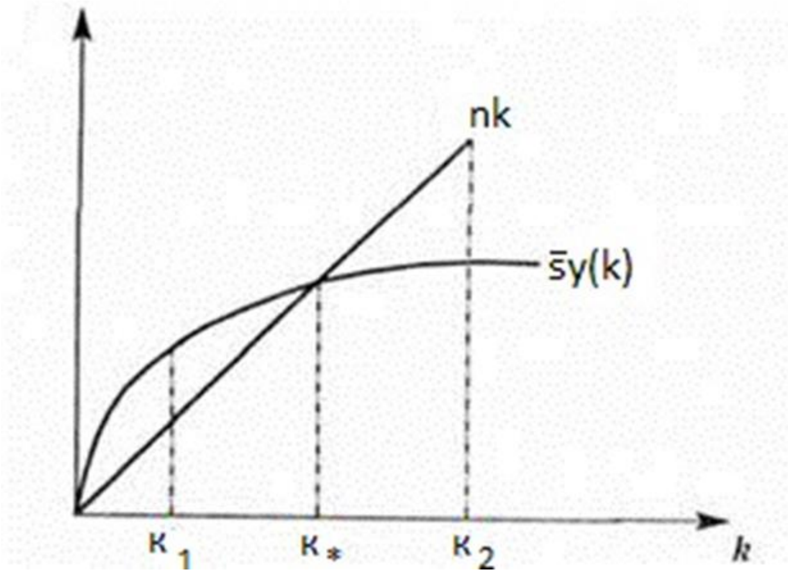
Фиг. 30. Графична илюстрация на модела на Солоу–Сван

От математическите свойства на $y(k)$ (вдлъбната или растяща), очевидно следва, че графиката на $\bar{s}y(k)$ при $0 < \bar{s} < 1$ и правата nk ще имат единствена обща точка $k_*: nk_* = \bar{s}y(k_*)$. Това добре се вижда на рис. 2.

По-важно е да обосновем, че в модела на Солоу-Сван има сходимост към равновесно значение на $k = \frac{K}{N} = k_*$. Да допуснем, че в изходната система от цени оптималното съотношение капитал/труд е $k_1 < k_*$ (рис. 3), следователно графиката на кривата $\bar{s}y(k)$ ще бъде разположена над графиката на правата nk при $k = k_1$ ($\bar{s}y(k_1) > nk_1$). Тогава ще има излишък от предлагане на капитал ($S > I$) и цената на капитала ще спадне, следователно инвестициите ще нараснат, от там ще нарасне количеството капитал, което ще доведе до покачване на k, т.е. k ще се измени в посока от k_1 към k_*. При $k_2 < k_*$ ще имаме $\bar{s}y(k_2) < nk_2$ и логическата последователност ще бъде следната:

1. Недостиг на капитал ($S < I$) $\Longrightarrow$
2. Излишък на труд $\Longrightarrow$
3. Спад на цената на труда $\Longrightarrow$
4. Търсенето на труд нараства $\Longrightarrow$

5. Съотношението капитал/труд ще намалее, т.е. k ще се измени в посока от k_2 към k_*.



Фиг. 31. Сходимост в модела на Солоу–Сван

Другият вид на условието за равновесен икономически ръст е

$$\sigma(k)\bar{s} = n.$$

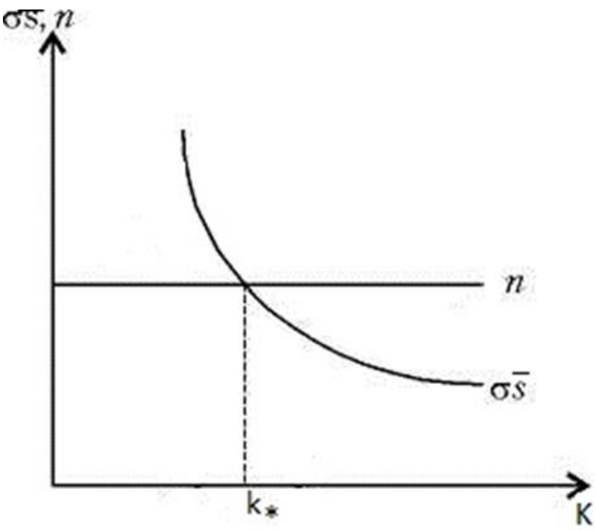
Тъй като

$$\sigma(k) = \frac{y(k)}{k},$$

то

$$\lim_{k\to\infty} \sigma(k) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{k\to 0} \sigma(k) = \infty.$$

Тогава графиката на функцията $\sigma(k)\bar{s}$ ще има хиперболичен вид (такава крива се нарича квазихипербола). Тя ще се пресича с правата n, която е успоредна на абсцисата (фиг. 32).



Фиг. 32. Графична илюстрация на модела на Солоу–Сван

Това условие само външно прилича на условието за равновесен ръст на Харод-Домар. В този модел постоянството на производителността на капитала σ е предпоставено от технологията и не се влияе от икономически конюнктура. В модела на Солоу-Сван

$$\sigma = \frac{Y}{K} = const = \sigma_*.$$

това е само при условие на равновесен ръст и то не по технологични, а по икономически причини. При неравновесен ръст $\sigma = \sigma(K(t))$ се променя като се стреми към σ_*.

Сега ще се върнем към диференциалното уравнение

$$k'(t) = \bar{s}\,y(k(t)) - k(t)n,$$

което при производствената функция на Кооб-Дъглас има вида

$$k'(t) = \bar{s}\, k^{\alpha}(t) - k(t)n\text{-}$$

това е бернулиево диференциално уравнение. Такива уравнения се решават със субституцията $z = k^{1-\alpha}$ от което следва, че

$$z' = (1-\alpha)k^{-\alpha}k' \quad \Rightarrow \quad k' = \frac{1}{1-\alpha} z' k^{\alpha}$$

$$\text{Но } k = z^{\frac{1}{1-\alpha}} \Rightarrow k^{\alpha} = z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \Rightarrow \frac{1}{1-\alpha} z'\, z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \bar{s}\, z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - z^{\frac{1}{1-\alpha}}.n \,|: Z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

и получаваме

$$\frac{1}{1-\alpha} z' = \bar{s} - zn,$$

което е линейно диференциално уравнение с неизвестна функция $z(t)$.

Решаваме съответното хомогенно диференциално уравнение, т.е. при $\bar{s} = 0$. Ще имаме

$$\frac{z'}{1-\alpha} = -zn \Rightarrow \frac{dz}{dt} = -n(1-\alpha)z \Rightarrow \frac{dz}{z} = -n(1-\alpha)dt$$

следователно $lnz = -n(1-\alpha)t$ и

$$z = c.e^{-n(1-\alpha)t}.$$

Сега намираме решението на нехомогенното линейно диференциално уравнение чрез вариране на константата, което значи че търсим решение от вида:

$$z(t) = c(t).e^{-n(1-\alpha)t} \Rightarrow$$

$$z'(t) = c'(t).e^{-n(1-\alpha)t} + c(t).(e^{-n(1-\alpha)t})'$$

$$z'(t) = c'(t).e^{-n(1-\alpha)t} - c(t)n(1-\alpha).e^{-n(1-\alpha)t}$$

$$\frac{c'(t)}{1-\alpha}.e^{-n(1-\alpha)t} - c(t)n.e^{-n(1-\alpha)t} = \bar{s} - nc(t).e^{-n(1-\alpha)t}$$

$$\Rightarrow c'(t) = \bar{s}(1-\alpha).e^{n(1-\alpha)t}$$

$$\Rightarrow c(t) = c_0 + \bar{s}(1-\alpha)\int e^{n(1-\alpha)t}\, dt = c_0 + \frac{\bar{s}}{n}.e^{n(1-\alpha)t}$$

Тогава

$$z(t) = \left(c_0 + \frac{\bar{s}}{n}.e^{n(1-\alpha)t}\right).e^{-n(1-\alpha)t} = c_0.e^{-n(1-\alpha)t} + \frac{s}{\bar{n}}$$

Връщаме се в първоначалното полагане:

$$k = z^{\frac{1}{1-\alpha}} \Longrightarrow k(t) = [c_0.e^{-n(1-\alpha)t} + \frac{s}{\bar{n}}]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\lim_{t\to\infty} k(t) = [\frac{s}{\bar{n}}]^{\frac{1}{1-\alpha}} = k_*$$

Така получихме, че при всяко съотношение на параметрите на модела на Солоу–Сван с производствена функция на Кооб–Дъглас съществува сходимост на съотношението капитал/труд към равновесната стойност k_*. Това е така, дори и първоначалните стойности на $\bar{s}$, n и k да предполагат неравновесие – след достатъчно дълго време, такова ще се установи.

Пример 33.1. Националният доход се произвежда по технология, зададена чрез производствената функция $Y_t = \sqrt{K_t N_t}$, като в базовата година t=0, $K_0 = 625$, $N_0 = 25$. Предлагането на труд нараства с темп от 5% годишно. Нормата на спестявани я е 1) $\bar{s} = 30\%$; 2) $\bar{s} = 25\%$; 3) $\bar{s} = 20\%$

а) Пресметнете k_0, y_0, σ_0, r_0 и w_0.

б) Пресметнете равновесните гранични стойности k_*, y_*, σ_*, r_* и w_*. Кой от двата фактора - капитал или труд е в недостиг?

в) С какви темпове ще нарастват капита и брутния вътрешен продукт през първата година?

г) Да се изразят k_t,K_t, N_t и Y_t.

д) да се попълни таблица с всичките стойности на K, N, Y ,$C=I=dK$; $\frac{dK}{K}$; $dY, \frac{dY}{Y}$; k; y; σ; r, w до седем години включително.

Решение:

Ще решим всички подусловия на задачата, при положение, че $\bar{s} = 30\%$.

а) Като заместим $K_0 = 625$, $N_0 = 25$ в производствената функция, получаваме $Y_0 = 125$. Да пресметнем k_0, y_0, σ_0, r_0 и w_0 . Ще имаме

$$k_0 = \frac{K_0}{N_0} = \frac{625}{25} = 25,$$

$$y_0 = \sqrt{k_0}=\sqrt{25} = 5,$$

$$\sigma_0 = \frac{Y_0}{K_0} = \frac{y_0}{k_0} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

$$r_0 = \alpha \frac{Y_0}{K_0} = \frac{1}{2}\sigma_0 = 0{,}2.\frac{1}{2} = 0{,}1; \quad w_0 = (1-\alpha)\frac{Y_0}{N_0} = \frac{1}{2}y_0 = \frac{1}{2}.5 = 2{,}5.$$

б) Сега (като използваме зададената норма на спестяване $\bar{s} = 30\%$) ще пресметнем равновесните стойности на модела - k_*, y_*, σ_*, r_* и w_*. Ще имаме

$$\bar{s}y = nk \Longrightarrow \bar{s}\sqrt{k} = nk \ (^2)\!\Longrightarrow \ \bar{s}^2 = n^2k^2 \Longrightarrow k = \left(\frac{\bar{s}}{n}\right)^2.$$

Но

$$\frac{\bar{s}}{n} = \frac{30\%}{5\%} = 6 \Longrightarrow k_* = 6^2 = 36\,.$$

Тъй като $k_0 = 25 < 36 = k_*$, от това следва, че има недостиг на капитал (излишък на труд) и K ще нараства с по-бърз темп от N. Получаваме $y_* = \sqrt{k_*} = 6;\ \sigma_* = \frac{y_*}{k_*} = \frac{1}{6};\ r_* = \frac{1}{2}.\sigma_* = \frac{1}{2}.\frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ и $w_* = \frac{1}{2}y_* = 3$.

в) Тъй като

$$S_0 = I_0 = \bar{s}Y_0 = 0{,}3.125 = 37{,}5 \Longrightarrow K_1 = K_0 + I_0 = K_0 + dK_0 \Longrightarrow {}^{dK_0}\!/_{K_0} = {}^{37{,}5}\!/_{625} = 0{,}06 = 6\%,$$

или темпът на нарастване на капитала ще бъде 6% годишно.

В общият случай $Y = K^\alpha N^{1-\alpha}$ и n е темпа нарастване на $N;$ $m-$ темпа на нарастване на K. Да пресметнем какъв ще бъде темпа на нарастване на националния доход Y.

Следователно

$$K_t = e^{mt}K_0 \text{ и } N_t = e^{nt}N_0 \Longrightarrow Y_t = (e^{mt}K_0)^\alpha\,(e^{mt}N_0)^{1-\alpha} = e^{m\alpha+n(1-\alpha)}Y_0,$$

тоест темпа на нарастване на Y е $m\alpha + n(1-\alpha)$. В нашия случай $n = 5\%$; m=*6%* от което ства ясно че брутният вътрешен продукт нараства с *5,5%* годишен темп (за първата година).

г) От решението на бернулиевото диференциално уравнение имаме:

$$k(t) = [c_0 e^{-n(1-\alpha)t} + \frac{\bar{s}}{n}]^{\frac{1}{1-\alpha}} \Longrightarrow$$

$$k_t = [c_0(1 - n(1-\alpha)^t + \frac{\bar{s}}{n}]^{\frac{1}{1-\alpha}} \Longrightarrow$$

$$k_t = [c_0(1 - 0{,}025)^t + 6]^2 = [c_0(0{,}975)^t + 6]^2.$$

$$k_{0=}[c_0 + 6]^2 = 5^2 \Longrightarrow c_0 = -1$$

$$k_t = (6 - (0{,}975)^t)^2$$

$$N_t = (1{,}05)^t 25$$

$$K_t = k_t N_t = (1{,}05)^t (6 - (0{,}975)^t)^2 25$$

$$Y_t = \sqrt{K_t N_t} = (1{,}05)^t (6 - (0{,}975)^t) 25.$$

д) Таблица с всичките стойности до седем години включително.

t	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***
K	625	662,5	702,06	743,79	787,80	834,22	883,17	934,78
N	25	26,25	26,25	28,94	30,39	31,91	33,51	35,19
Y	125	131,87	139,11	146,71	154,72	163,15	172,02	181,36
dY	-	6,87	7,24	7,60	8,01	8,43	8,87	9,34
dY/Y	-	5,586	5,49%	5,47%	5,46%	5,45%	5,44%	5,43%
dK	-	37,5	39,56	41,73	44,01	46,42	48,95	51,61
dK/K	-	6%	5,97%	5,94%	5,92	5,89%	5,87%	5,84%
S=I	37,5	39,56	41,73	44,01	46,42	48,95	51,61	54,41
k	25	25,24	25,47	25,70	25,92	26,16	26,36	26,57
y	5	5,02	5,05	5,07	5,09	5,11	5,13	5,15
σ	0,200	1,199	0.198	0,197	0,196	0,196	0,195	0,194
r	0,100	0,100	0,099	0,099	0,098	0,098	0,097	0,097
w	2,500	2,510	2,525	2,595	2,545	2,565	2,565	2,575

34. Златно правило на натрупването в модела на Солоу–Сван

Сега поставяме въпроса за максимализиране на потреблението. Ще разгледаме потреблението на един заeт. То е (в условие на равновесен ръст):

$$c = (1-\bar{s})y(k) = y(k) - \bar{s}y(k) = y(k) - nk = \frac{C}{N} = \frac{Y-S}{N} = \frac{Y-I}{N}$$

$$c'(k) = y'(k) - n \Longrightarrow \; y'(k) = \frac{dy}{dk} = n,$$

$$\text{но } \frac{dy}{dk} = \frac{d\frac{Y}{N}}{d\frac{K}{N}} = \frac{\partial Y}{\partial K} \Longrightarrow \frac{\partial Y}{\partial K} = n.$$

(Очевидно $y''(k) < 0$, защото $y(k)$ е вдлъбната функция.) Така получаваме, че потреблението достига своя максимум точно тогава, когато тепма на ръст на капитала съвпада с маргиналната му производителност.

Сега да направим максимализиране на c по $\bar{s}$ при условие че, $k = k_*$. Ще имаме:

$$c(\bar{s}) = (1-\bar{s})y(k_*) = (1-\bar{s})(\frac{\bar{s}}{n})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \Longrightarrow$$

$$c'(\bar{s}) = -(\frac{\bar{s}}{n})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} + (1-\bar{s})\frac{\alpha}{1-\alpha}(\frac{\bar{s}}{n})^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}}.\frac{1}{n} \Longrightarrow$$

$$c'(\bar{s}) = 0 \Longleftrightarrow \; (\frac{\bar{s}}{n})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = (1-\bar{s})\frac{\alpha}{1-\alpha}(\frac{\bar{s}}{n})^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}}.\frac{1}{n}$$

$$\frac{\bar{s}}{n} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{n}(1-\bar{s}) \Longrightarrow$$

$\bar{s} = (1-\alpha) = \alpha(1-\bar{s})$ от което следва, че $\bar{s} = \alpha$.

$$\text{Тогава } k_g = \left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

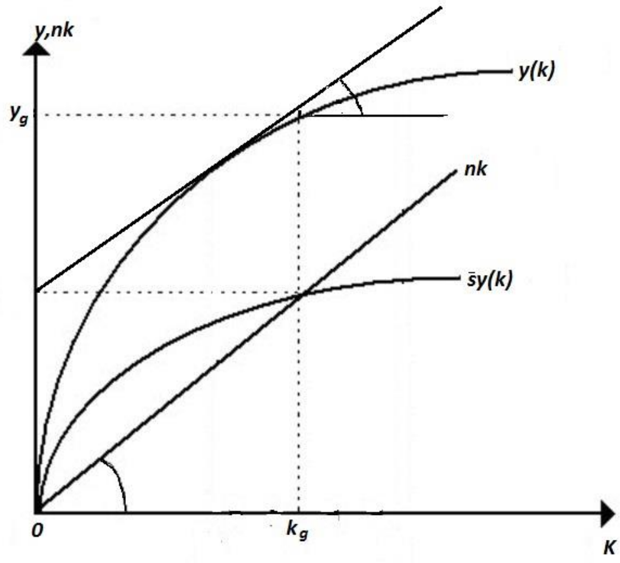
Забележка: g от gold.

Горното равенство представлява „златното правило на Фелпс за натрупване“: ако нормата на спестовност е равна на еластичността на националния доход по капитала, то средната норма на потребление достига максимума си при пълно използване на труда и капитала.

Означаваме $k_g \coloneqq k_*$ при $\bar{s} = \alpha$:

$$k_g = (\frac{\alpha}{n})^{\frac{1}{1-\alpha}};\quad y_g = (\frac{\alpha}{n})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}};\quad \sigma_g = \frac{n}{\alpha}\ ;\ \ r_g = n;\quad w_g = (1-\alpha)(\frac{\alpha}{n})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Тъй като $Y = \frac{\partial Y}{\partial K}.K + \frac{\partial Y}{\partial N}.N$ и $\frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{\alpha Y}{K}$; $\frac{\partial Y}{\partial N} = \frac{(1-\alpha)Y}{N}$, то $Y = \frac{\alpha Y}{K}.K + \frac{(1-\alpha)Y}{N}.N$ следователно при $\bar{s} = \alpha$, в съответствие със златното правило целият доход от капитал (и само той) трябва да се (спести и) инвестира.



Фиг. 33. Златно правило на натрупване

Геометрична интерпретация. При зададена технология на прозиводството (тоест $y = y(k)$) фиксиран ръст на трудовите ресурси n всяка норма на спестовност си има свое устойчиво равновесно съотношение капитал/труд. За да определелим каква норма $\bar{s}$ обезпечава максимума на c към графиката на производствената функция $y(k)$ да прекараме допирателна, успоредна на правата nk, тъй като в съответствие с златното правило $y'(k) = n$. Точката на пресичане на препендикуляра към абцисата от точката на допиране с лъча nk определя оптималната норма на спестяване. През тази точка трябва мине кривата $\bar{s}y(k)$ (фиг. 33).

Литература

1. А. Христов, Аналитична макроикономика, http://fmi-plovdiv.org/manev/Asen/AMaI.htm

2. Йордан В. Йорданов, Лекции по макроикономика, София, 2012

3. Аласдър Смит, Математическо въведение в икономиката, Университетско издателство „Св. Климент Охридски“, София, 2000, ISBN 9540714052

4. Борис Михайлов, Приложна макроикономика, Нова звезда, София, 2010, ISBN 9789548933414

5. Тарасевич Л., Гребенников П., Леусский А., МАКРОЭКОНОМИКА, Москва, Высшее образование, 2006, ISBN 5-9692-0044-1, http://economicus.ru/site/grebenikov/E_Macro/index.html

6. Мицкевич А. А., Сборник заданий по экономике, изд. Вита Прес, Москва, 1998, ISBM 5-7755-0053-9

7. Задачи по экономике, https://ecson.ru/economics/

8. М. В. Облаухова, Математические модели макроэкономике, Новосибирск, 2012

9. В. А. Колемаев, Математическая экономика, Юнити, Москва, 2002, ISBM 5-238-00464-8

10. О. О. Замков, А. В. Толстопятекко, Ю. Н. Черемных, Математические методы в экономике, Москва, „Дело и Сервис“, 1999, ISBM 5-86509-054-2

11. А. М. Попов, В. Н. Сотников, Экономико-математические методы и модели, Москва, Юрайт, 2011, ISBN 978-5-9916-1378-1

12. Б. И. Герасимов, Н. П. Пучков, Д. Н. Протасов, Дифференциальные динамические модели, изд. ГОУ ВПО ТГТУ, Тамбов, 2010, ISBN 978-5-8265-0947-0

13. О. А. Кузнецова, Экономико-математическое моделирование, Самара, 2013

14. А. М. Ахтямов, Математические модели экономических процесов, Уфа, РИЦ БашГу, 2009

15. J. Garın, Robert Lester, Eric Sims, Intermediate Macroeconomics, This Version: 3.0.0, 2018

16. Matthias Doepke, Andreas Lehnert, Andrew W. Sellgren, MACROECONOMICS, University of Chicago, 1999