МАТЕМАТИЧЕСКИ МЕТОДИ В ЛОГИСТИКАТА

част I

Асен Христов

Съдържание

Предговор

Логистиката е една от модерните професии, занимаваща се с управление на материали, енергия и хора. Основната задача на логистиката е оптималната организация на процеси, включително доставка на необходимите материали на точното място и време при зададени количество и качество с минимални усилия и разходи.

Ясно е, че оптимизирането на каквато и да е човешка дейност предполага използването на математически методи и модели. В логистиката, за разлика на фундаменталните икономически дисциплини микроикономика и макроикономика, на този етап не са изградени стройни математически теории (каквато например е математическата теория на потребителите в микроикономиката), в които на базата на аксиоми се формализира определен тип икономическо поведение и чрез използване на математически апарат се извеждат основни икономически закони. Математическите методи в логистиката представляват голямо разнообразие от конкретни математически модели в логистиката, решавани с използването на разнороден математически апарат. Освен това, тези математически модели намират приложение и в други дисциплини от приложната икономика – маркетинг, мениджмънт и др.

Настоящата работа се състои от четири независими една от друга части. В първата част е направен опит за кратко и достъпно въведение в икономическата наука логистика. В първи параграф е изложена същността на логистичния подход в теоретичен и исторически аспект. Показани са основните източници на икономически ефект от използването на логистиката. Параграф 2 е посветен на въвеждането на основни термини в логистиката – материален поток и съпътстващите го финансов и информационен поток, логистична система и нейната целева функция. В параграф 3 са изложени целите и задачите на логистиката. Методологията на логистиката, като приложна икономическа дисциплина се базира на някои фундаментални научни теории - обща теория на системите, кибернетика, изследване на операциите, прогнозиране. За решаване на проблемите, възникнали в логистиката се използва разнообразен математически апарат - математическо оптимиране, теория на графите, теория на вероятностите и математическа статистика, теория на игрите, теория на размитите множества. На всичко това е посветен параграф 4. В пети параграф са изложени основните представи за стратегия, тактика и планиране в логистиката. Според типа търсене на продукцията на фирмата се формират двата основни вида логистични стратегии – „стройна“ и динамична. Последният от първа част параграф 6 е посветен на методите на управление на логистични потоци в двата основни типа логистични системи – на бутане (push system) и дърпане (pull system).

Втората част от този учебник е посветена на математическата теория за управление на запасите. В седми параграф са изложени основни понятия от логистиката на запасите. В следващия параграф 8 са показани трите основни стандарта за оценяване на запасите, а оттам и на печалбата на фирмата. В параграф 9 са формулирани проблемите, които трябва да разреши математическата теория за управление на запасите. Въведени са основните величини и е направена класификация на моделите от тази теория. В параграф 10 е разгледан базовия за тази теория модел, изведена е формулата на Уилсън и са направени важни коментари. Първото обобщение на базовия модел, а именно производствено-реализационния модел (или модел с отложена доставка) е разгледано в параграф 11. В следващия параграф 12 са разгледани моделите с допускане на дефицит от запаса – с и без изпълнение на поръчките, натрупани през времето на дефицита. Параграф 13 е посветен на максимално общия модел на склад със запас от един вид. В параграф 14 са разгледани модели на склад със запаси от няколко вида. Разгледани са моделите за съвместна доставка на запасите без и с ограничение в обемите на доставка. В последният за част втора параграф 16 са разгледани някои от най-елементарните стохастични модели за управление на запасите, тези с една доставка.

Разпределителните модели са основни за логистиката. В третата част са разгледани най-простите разпределителни модели – линейните. В параграф 16 са дадени основните определения за транспортната задача (ТЗ). В параграф 17 са разгледани различни задачи, водещи до съставянето на ТЗ. В следващите два параграфа (18 и 19) е показано как се решава ТЗ, а в параграф 20 е направен анализ на дислокацията на нови производствени и търговски обекти като пример за прилагането на ТЗ в логистиката. Параграф 21 е посветен на един важен частен случай на ТЗ – задачата за назначенията, показани са приложения в логистиката. В параграф 22 е разгледана линейната разпределителна задача (РЗ) и обобщената разпределителна задача (ОРЗ). В параграф 23 е показано как може да се решава РЗ чрез метода на разрешаващите множители, а в параграф 24 е показан важен частен случай, при който ОРЗ може да бъде сведена до ТЗ.

Последната, четвърта част от настоящия учебник е най-разнородна. В нея са събрани някои интересни математически модели в логистиката, имащи своето приложение и в други икономически области. Параграф 25 е посветен на модела на размяна време-разходи. В параграф 26 е отделено място за превантивното обслужване на оборудването. Последните два параграфа (27 и 28) са посветени на кривата на обучение (опит), като е разгледан диференциалния аспект.

В настоящата работа са разгледани основно (с изключение на параграф 15 от втора част, посветен на стохастическите модели) детерминирани модели в логистиката. Поради огромното разнообразие на логистична проблематика много детерминирани модели не са намерили място в учебника – задачите за дислокация на складови, производствени и търговски обекти; задачите за вземане на решения (в логистичния мениджмънт); теорията на мрежовото планиране и управление; задачите за изготвяне на краткосрочни графици и много други. Да отбележим, че например теорията на нелинейните разпределителни модели предполага познания по математика, надхвърлящи изискванията за бакалавър.

Настоящият учебник е написан за да бъде от полза за студентите от специалност „Бизнес математика“ на ФМИ на ПУ „П. Хилендарски“ – Пловдив. Тя може да бъде полезна за всички математици с интерес към икономиката и на всички икономисти с математически възможности.

ЧАСТ ПЪРВА. ВЪВЕДЕНИЕ В ЛОГИСТИКАТА

1. Същност на логистичния подход

1.1. Логистика: история, определение, новост, специфика

История. Терминът „логистика“ произхожда от древногръцката дума „logistike”, означаваща „мислене, разчет, целесъобразност“. Римляните са разбирали този термин като „разпределение на продуктите за изхранване на населението“. Във Византия са разглеждали логистиката като способ за снабдяване и управление на армията. Така, в първото хилядолетие на нашата ера в лексиката на много страни логистиката се е свързвала с дейността по управление на превозите, планирането и снабдяването на войската с материални ресурси (МР), съдържание на запасите и т.н. В началото на XX век логистиката е била призната за военна наука. Логистичните принципи и методи са се използвали широко в Първата и Втората Световна война. Подобно на изследването на операциите, математическото оптимиране, мрежовото планиране и други методи на приложната математика, логистиката постепенно навлиза в сферата на стопанската практика и започва да се използва широко в икономиката през 60-те и 70-те години на XX век.

Определение. Съществуват няколко десетки определения за логистиката като икономическа дейност. Най-общата трактовка разбира под логистика **управлението на всички видове материални и нематериални** (информационни, финансови, енергийни и др.) **потоци**, съществуващи в икономическите системи. Управлението на всеки обект изисква първо да се вземе решение, а след това то да се реализира. Тъй като решенията се вземат на базата на знания, а реализацията предполага действия, то можем да разглеждаме логистиката от една страна като наука, а от друга – като икономическа дейност.

Логистиката като наука разработва научни принципи и методи, математически модели, позволяващи планиране и управление на транспортирането, складирането и други логистични операции, извършвани в процеса на:

- доставка на суровини и материали до производственото предприятие;
- вътрешнозаводската преработка на суровините и материалите до готова продукция;
- доставка на готовата продукция до потребителя в съответствие с неговите изисквания;
- предаване, съхранение и обработка на съответстващата информация.

Логистиката като икономическа дейност е процеса на управление движението на материалните потоци от първичния източник на суровините до крайния потребител на готова продукция.

Логистиката позволява да се решат на научна основа много разнообразни задачи с различна сложност и мащаб. Ето някои от тях:

- прогнозиране на търсенето и определяне въз основа на това на количествата от необходими запаси;
- определяне на необходимите мощности за производство и транспорт;
- организация на разпределението на готовата продукция;
- планиране и реализация на снабдяването, производството, складирането, продажбите и транспортирането;
- съгласуване на целите и координация на предприятията във вериги на доставка и на отделните подразделения в рамките на едно предприятие.

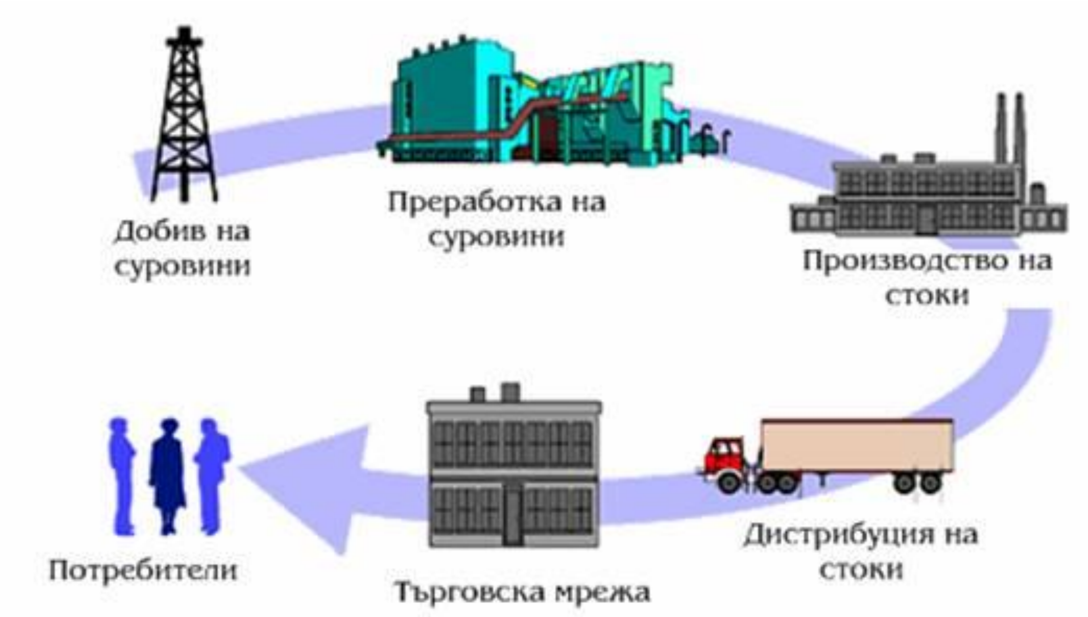


Рис. 1. Материалният поток започва от добива на суровини (материални ресурси), преминава през междинни звена на преработване, за да достигне до потребителя във вид на крайни стоки

Основна задача на логистиката е управлението на материалния поток (МП), преминаващ по логистична верига (ЛВ), започваща от първичния източник на суровината, минаваща през всички междинни процеси, за да достигне до крайния потребител във вид на готова продукция. В хода на движение по логистичната верига МП преминава през стадиите на закупуване, доставка, съхранение, производство, разпределение и потребление.

Новостта на логистиката се състои в смяната на приоритетите между различните видове стопански дейности в полза на увеличаване на значението на управление на междусекторните МП. Отделянето на МП в качеството на обект за управление и свързаното с това абстрихиране от други фактори води до значително опростяване на икономическите процеси и намаляване на размерността на задачите за моделиране.

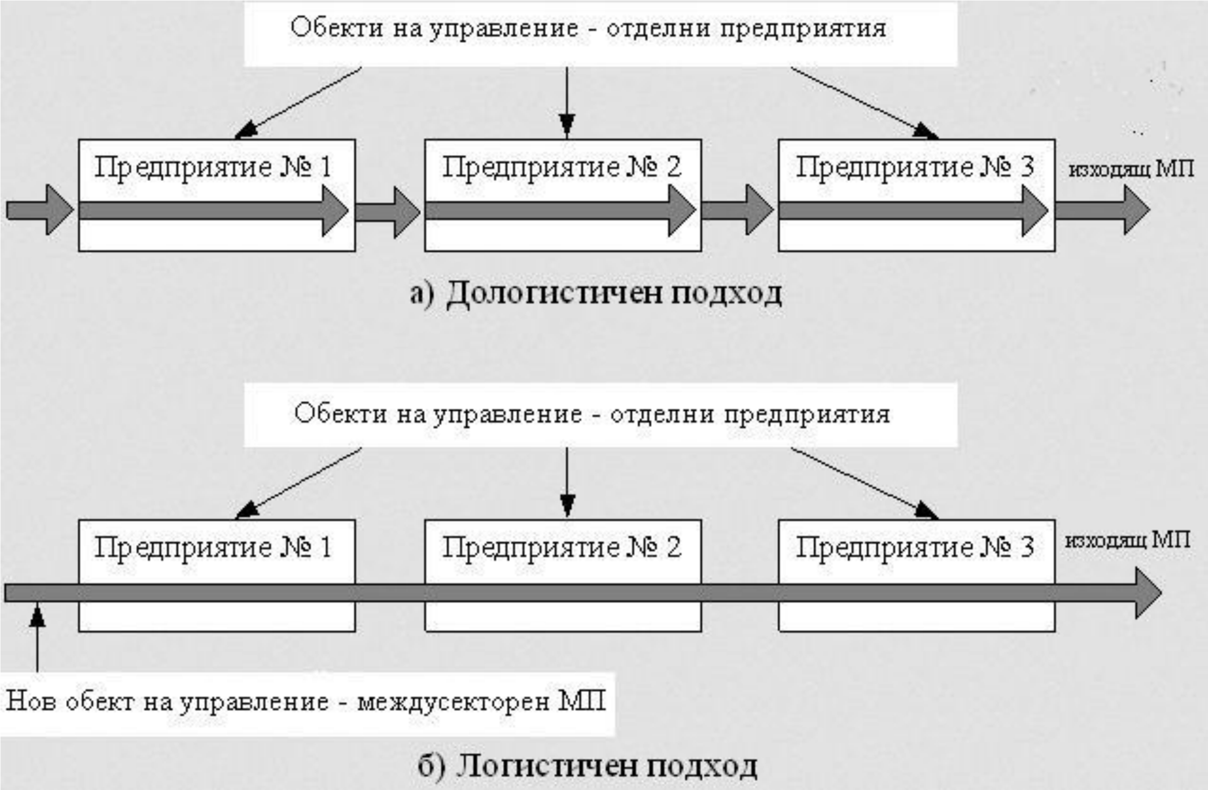


Рис. 2. Дологистичен и логистичен подход към управлението на МП на макрониво

На **макрониво** МП преминава по ЛВ, състояща се от няколко самостоятелни предприятия. Традиционното (дологистично) управление на всяко предприятие се осъществява от неговия собственик. При това междусекторния МП не се отчита и задачата за неговото управление не се поставя и не се решава. В резултат на това такива важни показатели на този поток като себестойност, надеждност на приходите, качество и др. се получават случайно на изхода на веригата и са далеч от оптималните си стойности. При логистичния подход се появява нов обект на управление – междусекторния МП (рис. 2). Нужният товар започва да постъпва на нужното място в нужното време, в необходимото количество и качество. В рамките на цялата верига предвижването на МП се извършва с минимални разходи.

На **микрониво** ЛВ се състои от различни подразделения на едно предприятие. При традиционния (дологистичен) подход задачата за усъвършенстване на междусекторния МП няма приоритетно значение за нито едно от подразделенията (рис. 3. а)). Показателите на МП на изхода на предприятието са далеч от оптималните. При логистичния подход (рис. 3. б)) в предприятието се отделя и получава значителни права отдел „логистика“, за който приоритетна задача е управлението на междусекторния МП, постъпващ отвън, преминаващ през отдел „снабдяване“, производствените цехове, складовете за готова продукция и излизащ от предприятието през отдел „продажби“, за да достигне до потребителите. В резултат показателите на изходящия МП стават управляеми.

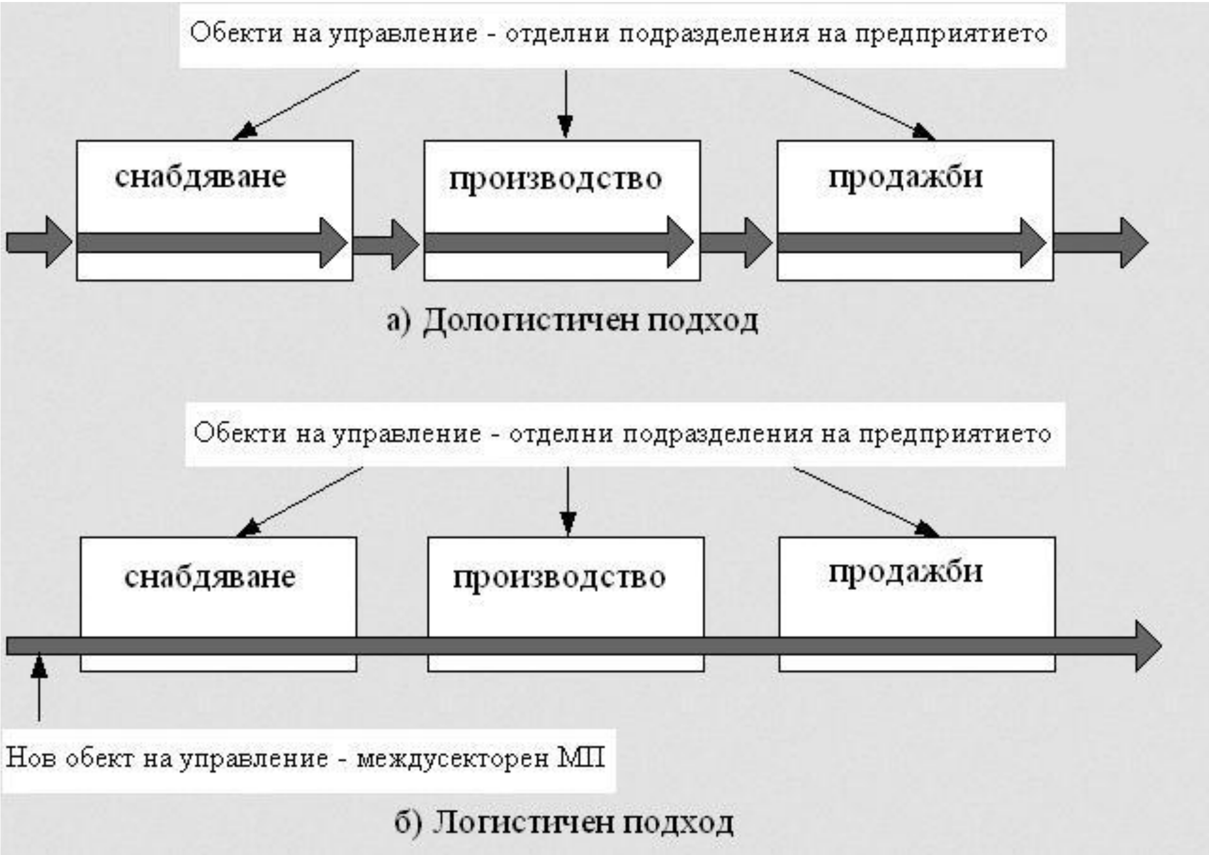


Рис. 3. Дологистичен и логистичен подход към управлението на МП на микрониво

По такъв начин принципиалното различие на логистичния подход при управлението на МП от традиционния се заключава в:

- обединение на несвързаните МП в единен междусекторен МП;
- единно управление на този междусекторен МП;
- техническа, икономическа, финансова и информационна интеграция на отделните звена на ЛВ в единна система (на макрониво – различни предприятия, на микрониво – различни подразделения на едно предприятие).

1.2. Фактори за развитието на логистиката

Обективното развитие на пазарните икономически системи през 60-те и 70-те години на XX век довежда до необходимостта от появата на логистичния подход към управлението на предприятията. Основните фактори (предпоставки), обуславящи появата и развитието на логистиката са следните:

1) Развитие на конкуренцията, довело до преход от пазар на продавачите (характерен с излишък при търсенето) към пазар на купувачите (характерен с излишък при предлагането).

2) Усложняване на системата от пазарни отношения и повишаване на изискванията към качеството на разпределение на стоките.

3) Енергийната криза от 70-те години на XX век, довела до поскъпване на горивата и оттам на транспортните услуги.

4) Научно-техническият прогрес в създаване на гъвкави автоматизирани системи за производство.

5) Научно-техническият прогрес в сферата на информационните и конуникационни технологии.

6) Разработката на теорията на системите и теорията на компромисите.

7) Унификацията на правилата и нормите на външноикономическите дейности, стандартизацията на параметрите на техническите средства в различните страни.

1.3. Етапи в развитието на логистиката

Изброените по-долу етапи в развитието на логистиката са исторически – те възникват последователно и всеки следващ „стъпва“ на предишния. Но от друга страна, на тях трябва да гледаме и като на нива на прилагане на логистиката в конкретната фирма. Всяко следващо ниво разширява логистичния подход в управлението, като се прилага към нови дейности, не обхванати от по-ниското ниво.

1.3.1. **Етап на формиране**. Характеризира се с интеграция на транспортно-складовия процес за разпространение на готовата продукция. Областта на действие на логистичния подход към управлението обхваща съхраняването на готовата продукция, излизаща от предприятието и нейното транспортиране (рис. 4).

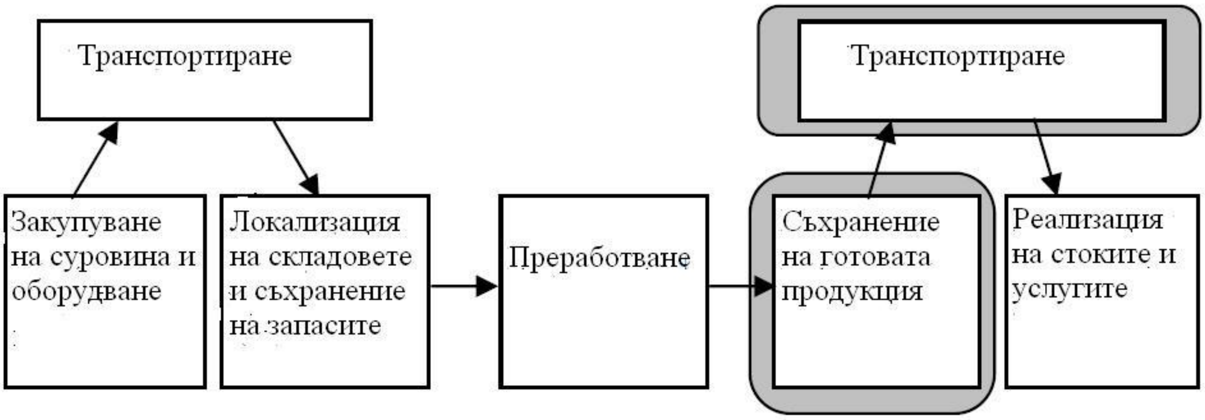


Рис.4. Схема на работата на предприятието и на разпространенеито на логистичния подход (в сиво) при първия стадий на логистиката

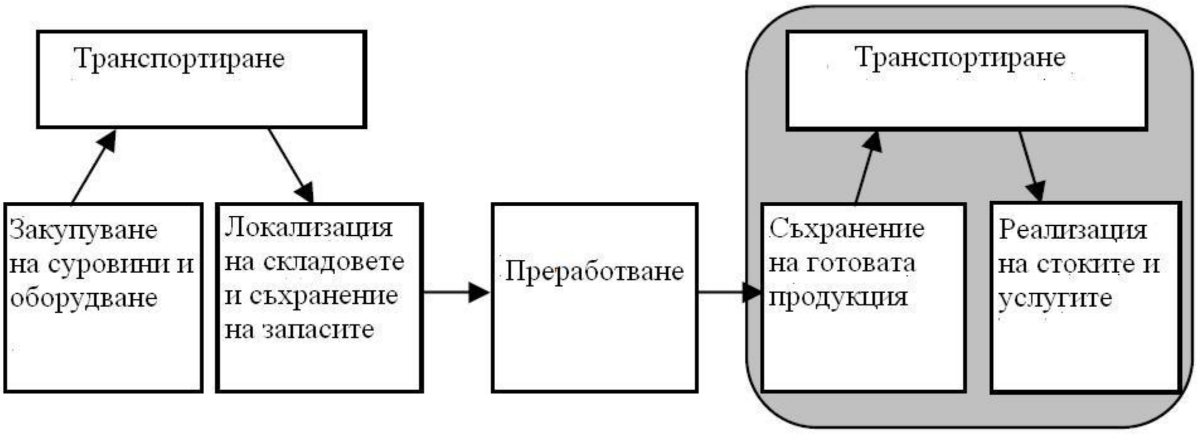


Рис. 5. Схема на работата на предприятието и на разпространение на логистичния подход (в сиво) при втория стадий на логистиката

1.3.2. **Етап на развитие**. Характеризира се с интеграция на транспортно-складовия процес и разпространението на готовата продукция. За компаниите във втория стадий е характерно управлението на потоците на произведената в предприятието готова продукция от последната точка на производствената линия до крайния потребител (рис. 5).

1.3.3. **Етап на интеграция**. Характеризира се с интеграция на входа (снабдяването и транспортно-складовия процес на материалните ресурси) и на изхода (транспортно-складовия процес на готовата продукция и разпространението ѝ). Единствената сфера, която не се контролира от мениджърите в логистиката – това е производствения процес (рис. 6).

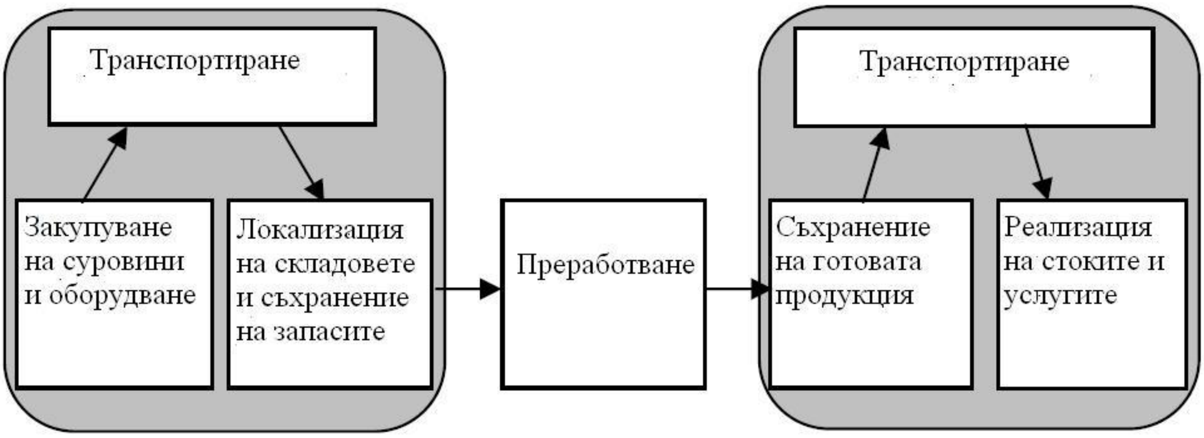


Рис. 6. Схема на работа на предприятието и на разпространение на логистичния подход (в сиво) при третия стадий на логистиката

1.3.4. **Етап на пълна интеграция**. Логистиката практически е навлязла във всички сфери на дейност на предприятието (рис. 7). Компаниите, намиращи се на този стадий интегрират процесите на планиране и контрол на логистичните операции с операциите на снабдяването, производството, маркетинга, разпространението и финансите.

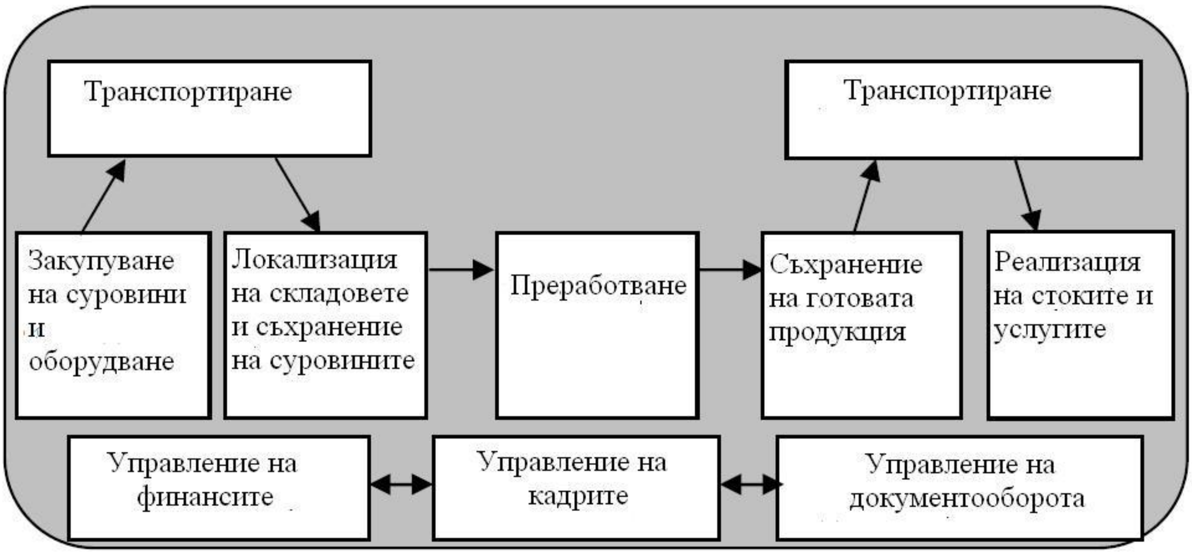


Рис. 7. Схема на работа на предприятието при четвъртия стадий на логистиката

Трябва да се отбележи, че компаниите, намиращи се на това ниво на приложение на логистиката не са много, дори и в страните с високо ниво на развитие на пазарната икономика. На рис. 8 е направена схема на операционно-функционалното представяне на логистиката в предприятие от четвърто ниво.

Практическият опит от работата на фирми в различни страни показва, че преходът от едно ниво на прилагане на логистичния подход към следващото може да се извърши както постепенно, така и (при наличие на благоприятни обстоятелства)

– скокообразно. Такива благоприятни обстоятелства, са сливане (поглъщане) на компании, нов режим на управление, политически инициативи.

Преходът на една компания към по-високо ниво обикновено трае 1-2 години, а преходът от най-ниското нулево (дологистично) ниво до последното – от 10 до 20 години.

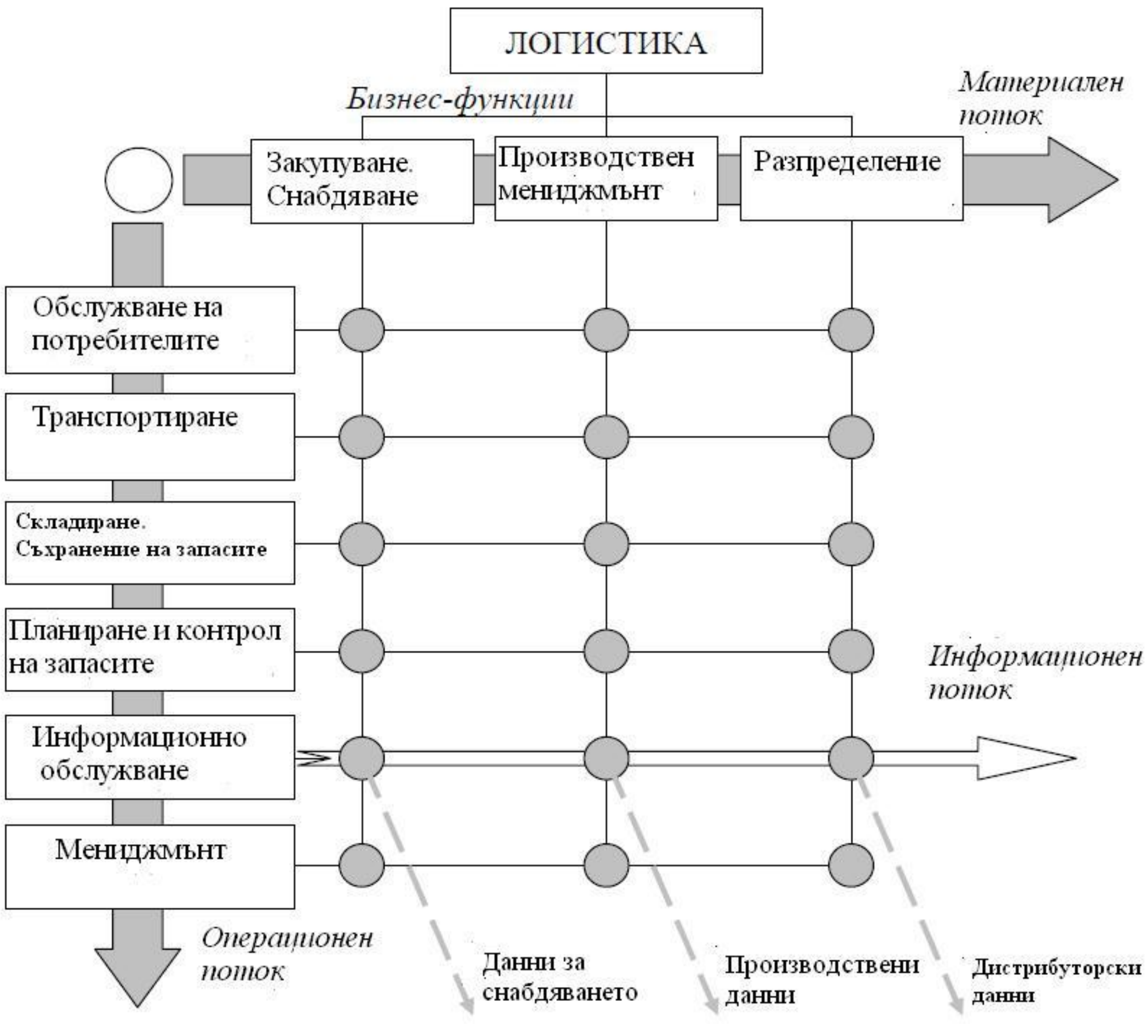


Рис. 8. Операционно-функционално представяне на логистиката в предприятие, намиращо се в четвърти стадий

1.4. Източници на икономически ефект от използването на логистиката

МП, движещ се от източниците на суровини през цялата верига от производствени, транспортни и посреднически звена към крайния потребител, увеличава стойността си постоянно. Изследвания, проведени във Великобритания показват, че в стойността на стоките, попадащи в крайния потребител, около 70% са разходите свързани със съхранение, транспортиране, опаковка и други операции, обезпечаващи предвижването на МП. За мащабите на икономиките на

ЕС на логистичната издръжка се падат 15-20% от БВП. Високият дял на логистичните разходи показва, че оптимизацията на управлението на МП води до подобряване на икономическите показатели на предприятията. Основните източници за това са:

1.4.1. Намаляване на запасите по пътя на движение на МП. По данни на Европейската промишлена асоциация междусекторният мониторинг на МП обезпечава съкращение на материалните запаси с 30-60%. Голямото значение на оптимизацията на запасите се обяснява с това, че:

- голяма част от оборотния капитал на фирмите е блокиран под формата на запаси (10-50% от всички активи);
- в общата структура на логистична издръжка разходите за поддържане на запаси съставляват около 50%;
- в общата структура на производствените разходи разходите за поддържане на запаси съставляват около 25%.

1.4.2. Съкращаване на времето за преминаване на стоки по ЛВ. В страните от ЕС делът на времето за собствено производство от общото време на движение на стоката от източника на суровина до крайния потребител е много малък – 2-5%. Останалите 95-98% от времето се падат на съхранение, складови, транспортни, товаро-разтоварни и други логистични операции (ЛО). Съкращението на тези непроизводствени съставящи позволява да се ускори оборота на капитала, да се увеличи печалбата за единица време и да се намали себестойността и цената на продукцията.

1.4.3. Понижаване на транспортните разходи. Общият обем на транспортните разходи в САЩ съставляват около 6,5% от БВП, а в страните от ЕС този дял е по-висок, поради необходимостта от по-скъпите и по-сложни международни превози. Така, тези разходи достигат до 25-30% от стойността на вносно-износните стоки за сметка на 8-10% при стоките, предназначени за вътрешния пазар. От друга страна транспортните разходи съставляват 30-50% от общата логистична издръжка. По такъв начин понижаването на транспортните разходи е важен резерв за понижаване себестойността на продукцията.

1.4.4. Съкращаване на разходите за ръчен труд при обработването на товари води до значително съкращаване на времето за товаро-разтоварни и складови операции, което води до съкращаване времето за изпълнение на поръчката и общата продължителност на логистичния цикъл.

2. Основни понятия и определения

2.1. Потоци в логистиката

Обекти за изучаване в логистиката като наука са МП и съответстващите им финансови потоци (ФП) и информационни потоци (ИП). При това под поток се разбира съвместното движение на относително еднородни неща (стоки, информация, финанси, услуги, суровини и др.)

2.1.1. Материален поток – това са предвижващи се съвкупности от материалните ресурси, незавършената продукция, готовата продукция, разглеждани в процеса на прилагане към тях на логистични операции (транспортиране, складиране и др.) и отнесени към определен времеви интервал. Размерността на МП е отношението на размерността на продуктите (единици, тонове, литри и др.) към размерността на времевия интервал (дни, месеци и др.). МП може да се изчисли за конкретни участъци от предприятието, за цялото предприятие, за отделни операции с товари. МП, разглеждан във фиксиран момент от времето се превръща в материален запас (МЗ). В таблица 1 е дадена една примерна класификация на МП.

Признак за класификация	Вид МП
Отношение към ЛС и нейните звена	външен, вътрешен, входен, изходен
Асортимент	едноасортиментен, полиасортиментен
Количество на товара	масов, крупен, среден, малък
Тежест на товарите	тежкотоварен, лекотоватен
Степен на съвместимост	несъвместими, съвместими
Консистенция на товара	насипен, наливен, опакован
Номенклатура	еднопродуктов, полипродуктов
Определеност	детерминиран, стохастичен
Непрекъснатост	непрекъснат, дискретен

Таблица 1. Класификация на МП

2.1.2. Информационен поток – на всеки МП съответстват ИП и ФП**.** ИП е поток от съобщения в документална (хартиена и електронна) и друга форма, генериран от изходния поток в логистичната система (ЛС), между ЛС и външната среда и предназначен за реализиране на управленски и контролиращи функции. В таблица 2 е дадена една от възможните класификации на ИП.

Признак за класификация	Вид ИП
Отношение към ЛС и нейните звена	вътрешни, външни, хоризонтални, вертикални, входни, изходни
Вид на носителите на информация	хартиен, магнитен, оптичен, цифров, електронен
Периодичност на използване	регулярен, переодичен, оперативен
Предназначение на информацията	директивен (управляващ), нормативно-справочен, отчетно-аналитичен, спомагателен
Степен на отвореност	отворен, затворен, секретен
Начин на предаване на данните	по куриер, по пощата, телеграф, електронна поща, по телекомуникационна мрежа
Режим на обмен на информацията	„on-line", "off line"
Направление по отношение на МП	в право направление спрямо МП, в обратна посока на МП
Синхронност с МП	изпреварващ, едновременен, последващ

Таблица 2. Класификация на ИП

2.1.3. Финансов поток в логистиката е насочено движение на финансови средства, циркулиращи вътре в ЛС, между ЛС и външната среда, необходимо за обезпечаване на ефективното движение на определен МП. По такъв начин, спецификата на ФП в логистиката е в потребността от обслужване на процеса на преминаване в пространството и времето на съответния поток от стоково-материални или стоково-нематериални ценности. Една класификация на ФП е дадена в таблица 3.

Признак на класификация	Вид на ФП
Отношение към ЛС и нейните звена	външен, вътрешен, входен, изходен
Предназначение	обусловен от процеса на закупуване, инвестиционен, по формиране на материални разходи в производството, обусловен от процеса на процеса на продажба
Начин за прехвърляне на стойността върху стоките	придружаващ движението на дълготрайните активи, дължащ се на движението на оборотния капитал
Вид стопанска връзка	хоризонтален, вертикален
Форма на разчет	Паричен (наличен), информационно-финансов (безналичен), отчетно-финансов

Таблица 3. Класификация на ФП

2.1.4. Поток на услуги – представлява количество услуги (транспортни, куриерски, консултантски, информационни и др.) извършени за определен времеви интервал. Необходимостта от въвеждане на потока от услуги се дължи на нарастващата важност и развитието на индустрията на услугите, концентрираща в себе си все повече хора и компании.

2.2. Логистична система

Логистичната система е икономическа система от отворен тип. По своята същност тя е динамична, адаптивна, стохастична, сложна система с обратна връзка, изпълняваща различни логистични операции, обединени в логистични функции.

Целева функция на ЛС е доставката на определен вид стоки или услуги в максимално съответствие с изискванията на потребителите, като за това се извършват определени разходи. **Цел на ЛС** е оптимизацията на целевата функция – доставката трябва да се извърши с минимални разходи. Това е основната задача в управлението (логистичния мениджмънт) на ЛС .

Всяка ЛС се състои от подсистеми с отделни логистични функции, на които съответстват дяловете на логистиката като наука. Това се вижда в таблица 4.

Логистична подсистема	Дял от логистиката
Снабдителна подсистема	**Логистика на снабдяването**
Производствена подсистема	**Производствена логистика**
Складова подсистема	**Складова логистика**
Подсистема дистрибуция и продажби	**Дистрибуционна логистика**
Подсистема управление на запасите	**Логистика на запасите**
Транспортна подсистема	**Транспортна логистика**
Информационна подсистема	**Информационна логистика**
Подсистема екология и рециклиране	**Обратна логистика**
Подсистема за логистичното управление	**Логистичен мениджмънт**

Таблица 4. Логистични подсистеми и съответните им дялове от логистиката

Логистичната система се състои от елементи и връзките между тях (както всяка система), които се наричат съответно физически елементи и физически процеси на логистичната система. **Физическите елементи** в логистичната система са групирани в 6 групи:

1. продукти и запаси – това са всички суровини, материали, полуфабрикати и готови изделия, които се движат от точка до точка в логистичния канал или се складират в отделните пунктове, при което се образува запас. Физическите елементи са елементите на МП;

2. пунктове – това са предприятия и складове (постоянни съоръжения) през които преминава МП;

3. транспортни и товаро-разтоварни средства – те осъществяват процеса на транспортиране и складиране;

4. комуникационни средства – тук се включват телефони, интернет, куриерски и пощенски услуги и др.;

5. управленски офиси, техника и консумативи;

6. хората, заети в логистичните дейности (най-важният елемент).

Връзките между физическите елементи са **физическите процеси**. Те са 7 групи:

1. снабдяване – закупуване на суровини и материали за производството;

2. производство на продукти и услуги;

3. дистрибуция – реализация на готовата продукция;

4. манипулации с продуктите и услугите (цел – улесняване движението на МП). Тук се включват всички операции, насочени към промяна на външния вид на продуктите – разфасоване, опаковане, палетизиране, опаковка, маркировка, етикеровка;

5. транспортиране – това е предвижване на продуктите от мястото на зараждане на МП до крайния пункт (клиента) или от пункт до пункт в ЛС. Всяко пространствено преместване на продуктите и запасите се нарича транспортиране;

6. съхранение – целта е да се запазят физическите свойства на продуктите до момента на тяхното потребление. За разлика от другите физически процеси в логистиката, съхранението на продуктите не добавя стойност в стойността на продукта, а води до загуба в другите продукти.

7. складиране – установяване на продуктите и запасите в складовете.

Логистична операция – това е самостоятелна част от логистичният процес, изпълнявана на едно работно място и/или с помощта на едно техническо средство, обособена съвкупност от дейности по преобразуване на МП или ИП.

Логистична функция – това е другото име физическия процес в ЛС: обединение на относително еднородни логистични операции. Логистичните функции се класифицират според различни признаци:

- според съдържанието – на базови (снабдяване, производство, дистрибуция), ключови и поддържащи;
- според характера на изпълняваните задачи – на оперативни и координиращи;
- според концептуалната позиция – на системообразуващи, интегриращи, регулиращи и резултиращи.

Логистична верига (ЛВ) е множество от пунктове (логистични звена) през които преминава МП (последователно, без прекъсване).

Логистичен канал – множество от звена на ЛС, които включват всички ЛВ, през които преминава МП от доставката на материални ресурси до крайния потребител.

Обикновено ЛС, свързани с отделно предприятие са нарича **микрологистична система**. Обединение на такива системи (чрез консорциум, асоциация и др.) се нарича **макрологистична система**. Обикновено нейната цел е различна – тя няма за задача минимизиране на разходите. Често се разглеждат обединения на взаимосвързани ЛС, така се получава **логистична мрежа**. Тя не притежава целева функция и за това липсва логистичен мениджмънт, който да я осъществява.

3. Обект, предмет, задачи, цели и принципи на логистиката

Обект на изучаване в логистиката са междусекторните МП, потоците от услуги и съответстващите им информационни и финансови потоци.

Предмет на логистиката е оптимизирането на МП, потоците от услуги и съответстващите им информационни и финансови потоци.

Съществуват така наречените *„шест правила на логистиката“*, които описват крайната **цел** на логистичното управление**:**

- **товар –** нужният товар;
- **качество –** с необходимото качество;
- **количество –** в необходимото количество;
- **време –** трябва да бъде доставен в нужното време;
- **място –** на нужното място;
- **разходи –** с минимални разходи.

Задачите на логистиката са много разнообразни и са подчинени на постигането на крайната цел на логистичното управление. Различаваме **глобални, общи и конкретни** задачи на логистиката.

Глобални задачи на логистиката са:

- Достигане на максимален ефект от функционирането на ЛС с минимални разходи.
- Моделиране на ЛС и условия за тяхното надеждно функциониране.

Примери за общи логистични задачи:

- Създаване на интегрирана система за контрол на МП и ИП.
- Разработване на система за управление на движението на стоки.
- Определяне на стратегия и технология за физическото преместване на стоките.
- Разработване на система за отчет и анализ на логистичната издръжка.
- Внедряване на система за качество в предприятието.
- Прогнозиране обемите на търсенето, производството, превозите и др.
- Идентифицирането на дисбаланса между търсенето и предлагането.
- Организация на обслужването на потребителите преди и след продажбите.

- Проектиране и оптимизация на автоматизирани складови комплекси.
- Координация на дейностите в различните подразделения на предприятието.
- Идентифициране на вариациите в различни участъци на МП и разработване на стратегия за намаляването им.
- Разработване на логистична стратегия и тактика.

Примери за конкретни логистични задачи:

- Снижение на нивата на осигурителните запаси.
- Съкращение на времето за съхранение на продукцията в запаси.
- Съкращаване на времето за транспортиране.
- Определяне на оптимално количество складова площ на територията на предприятието.
- Избор на доставчици.
- Организация на приемането, разтоварването и складирането на материалните ресурси.
- Повишаване на текущото ниво на сервизно обслужване на потребителите.
- Избор на място за точката на продажба.
- Отстраняване на непроизводителните участъци.
- Изпълнение на поръчките.
- Избор на типа търговски посредник.
- Избор на вида транспорт за превоз на готовата продукция.
- Избор на маршрут за превозите.
- Оформяне на външнотърговските операции на предприятието.

Основните принципи прилагани при анализа и синтеза на логистичните системи са:

1) Принцип на системния подход, който се заключава в разглеждането на всички елементи на ЛС като взаимосвързани и взаимодействащи по между си за постигането на единната цел на управлението на ЛС; спецификата на системния подход (в сравнение с традиционния) е в оптимизация на управлението не на отделните елементи, а на ЛС като цяло.

2) Принцип на пълните разходи, т.е. отчитане на цялата логистична издръжка; критерият за минимализиране на общите логистични разходи се явява основен критерий в оптимизацията на ЛС.

3) Принцип на глобалната оптимизация. При оптимизацията на ЛС е необходимо да се съгласуват локалните цели на звената (елементите) на ЛС за достигане на глобален оптимум. Този глобален оптимум не предполага наличието на локални оптимуми на целевите функции на всички звена в ЛС.

4) Принцип на логистичната интеграция. В процеса на логистичния мениджмънт е необходимо да се достигне до съгласувано интегрално участие на всички звена при управлението на потоците за постигане на целта на ЛС.

5) Принцип на логистично моделиране и информационно–компютърно обслужване. При анализа, проектирането и оптимизацията на ЛС широко се използват различни модели: математически, икономико-математически, графични, имитационни и др. Реализацията на логистичния мениджмънт е невъзможна без информационно-компютърна поддръжка.

6) Принцип на разработване на определени подсистеми, обезпечаващи работата на логистичния мениджмънт.

7) Принцип TQM (total quality management) - всеобщо управление на качеството. Обезпечаване на надеждност на функционирането и високо качество на работа на всяко звено и всяка подсистема на ЛС за обезпечаване на качество на стоките и услугите, предоставяни на крайния клиент.

8) Принцип на неопределеност – трябва да се отчитат събитията със случаен характер, оказващи влияние върху функционирането на ЛС.

4. Методология на логистиката

Съвременната теория на логистиката се базира на четири методологии:

1. ЛВ с движещите се по нея междусекторни МП (и свързаните с тях ИП и ФП) представлява ЛС, следователно може да бъде изследвана със средствата на **общата теория на системите**.

2. ЛС е изкуствена, динамична и целенасочена система с обратна връзка. За такива системи са актуални проблемите на управлението, които се решават чрез методите на **кибернетиката**.

3. Тъй като става дума за управление, то възниква задачата за избор на оптимално решение и оценка на ефективността на управлението. Решението на тези задачи се обезпечава от методите на **изследване на операциите**.

4. Управлението на логистичните потокови процеси са немислими без перспективното им планиране, за което са необходими колкото се може по-точни прогнози за параметрите на външната среда, т.е. необходимо е **прогнозиране.**

4.1. Обща теория на системите

Общата теория на системите изследва общите свойства на всички системи (социални, икономически, биологични) чрез методите на системния анализ. Основните задачи на системния анализ са:

- **декомпозиция** – разделяне на системата на подсистеми, които от своя страна също могат да бъдат разделяни докато се достигне до ниво, състоящо се от неделими части (елементи на системата);
- **анализ -** намиране на свойства на системата чрез изследване на частите ѝ – подсистеми и елементи, връзките между тях, както и връзките на системата с външната среда;
- **синтез** – на базата на знанията, получени от решаването на предните две задачи се създава модел на системата, определя се нейната структура, параметрите, обезпечаващи ефективното ѝ функциониране.

4.2. Кибернетика

Кибернетиката е науката за общите закони за управление в природата, обществото, живите организми и машините, изучаваща информационни процеси, свързани с динамични системи. Кибернетичният подход изследва системите с помощта на идентифициране на прави и обратни връзки, изучава процесите на управление, разглеждайки елементите на системите като „черни кутии“ (системи, при които е достъпна само информацията на входа и на изхода, а вътрешното устройство е неизвестно).

Под управление в кибернетиката се разбира процес на формиране на целенасочено поведение на системата посредством информационно въздействие, подадено от човек или устройство. За да се осъществи ефективно управление на системата, трябва да се решат следните задачи:

- определяне на целта – исканото състояние или поведение на системата;
- стабилизиране – задържане на системата в съществуващото състояние при наличие на нарушаващи състоянието въздействия;
- изпълняване на програмата – привеждане на системата в исканото състояние при условия, когато стойностите на управляваните величини се изменят по известен детерминиран закон;
- приспособяване – обезпечаване на исканото поведение на системата при условия, когато законите за изменение на управляваните величини са неизвестни или стохастични;
- оптимизиране – превеждане и/или задържане на системата в състояние на екстремални значения на характеристиките при дадените условия и ограничения.

4.3. Изследване на операциите

Основният постулат на изследване на операциите е: оптималното решение (управление) е такъв набор от стойности на променливите, при които се достига до оптимално (минимално или максимално) значение на критерия за ефективност (целевата функция) на операциите при спазване на зададените ограничения. Предмет на изследване на операциите в логистиката е задачата за вземане на оптимално решение в ЛС с управление въз основа на оценката за ефективност на функционирането ѝ. Характерни понятия в изследване на операциите са: модел, променливи, ограничения, целева функция.

4.3.1. Математически модел

На рис. 9 са показани основните етапи при съставянето на математически модели

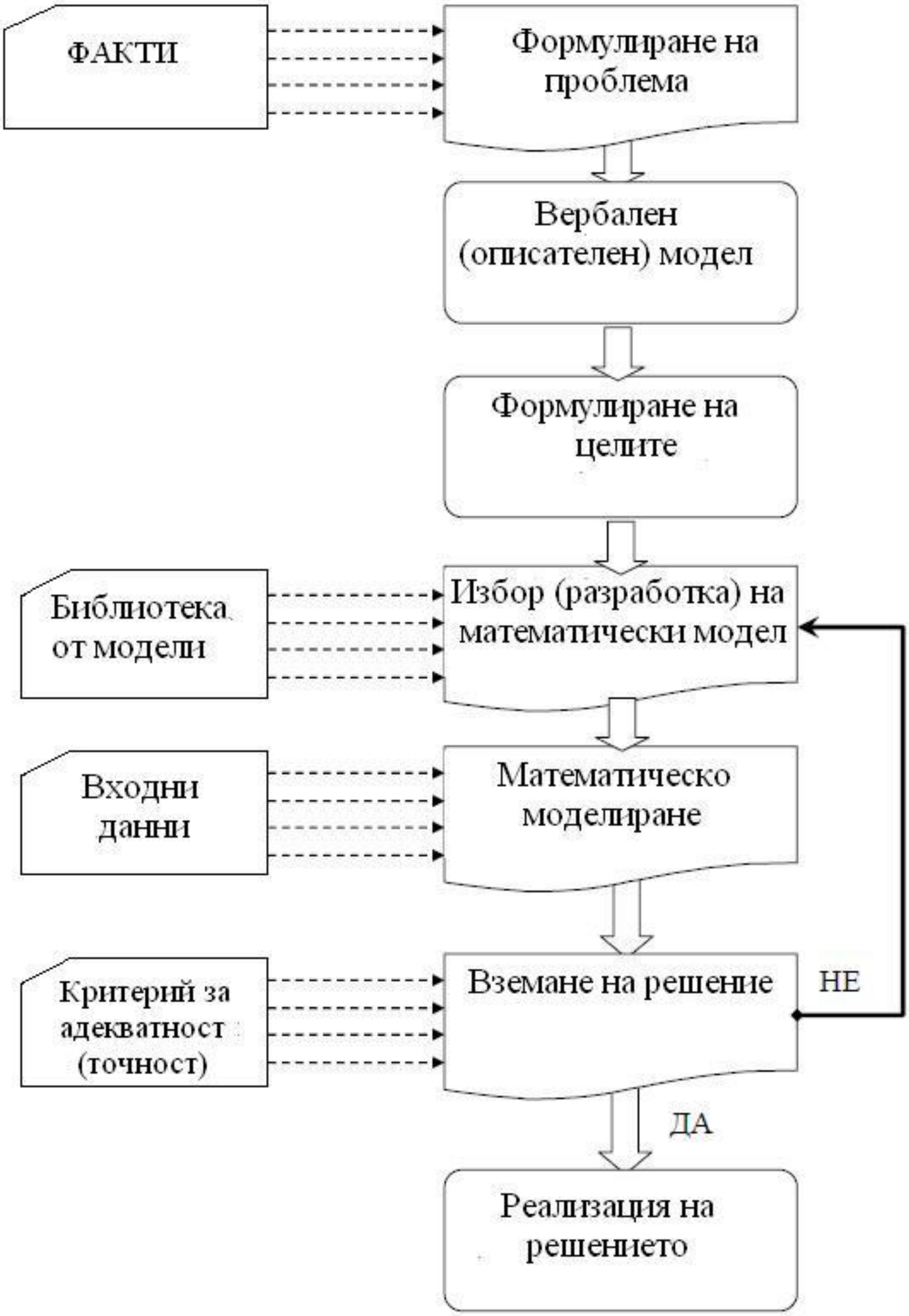


Рис. 9. Основни етапи на съставяне на математически модел

4.3.2. Обзор на типовите задачи за изследване на операциите в логистиката.

1. Разпределителни задачи. Те възникват в случаите, когато наличните ресурси не са достатъчни за извършването на всички дейности по ефективен начин, тогава трябва да се разпределят ресурсите по дейности в съответствие с избран критерий за оптималност. Това може да стане, така че:

- да се максимализира печалбата или да се минимализират разходите;
- да се определи кои дейности да се извършват при зададените ресурси;
- да се определи кои ресурси да се използват при зададени дейности.

2. Задачи за ремонт и смяна на оборудването. Тъй като всяко оборудване се износва и затова се налага превантивен ремонт или смяна на оборудването с ново. Решаването на задачата за оборудването позволява да се определят:

- такива срокове за възстановителен ремонт и моменти на смяна на оборудването, при които се минимализират разходите за ремонт и смяна през целия период на експлоатация;
- такива срокове за профилактичен контрол, при които се минимализира сумата от разходи по контрола и пропуснати ползи от престоя на оборудването.

3. Задачи за управление на запасите. Тя възниква, когато предприятието не може да работи без запаси, тъй като тяхното отсъствие води до престои, неустойки, загуба на клиенти и др. Решаването на тази задача позволява да се отговори на въпросите:

- какво е оптималното количество на поръчка за закупуване или производство, период за заявка на поръчките, големината на запаса, момента на подаване на заявка, така че да се минимализират общите разходи за покупка, производство, доставка и съхранение.
- кое е по-изгодно – да се закупи стоката или да се произведе.
- изгодно ли е да се ползват отстъпки при закупуване на по-големи количества от запаса.

4. Задачи за мрежово планиране. Тя възниква при изпълнението на сложни проекти и се състои в намирането на оптимални графици за изпълнението на дейностите по тези проекти. Използването на мрежови модели позволява да се:

- построи мрежов график, който представлява оптимална взаимовръзка на дейностите по проекта;
- построи календарен график, определящ началното и крайно време на всяка от дейностите, минималното възможно време за изпълнение на проекта, критичните дейности – позволява да се оптимизират параметрите на проекта;
- оперативно да се контролира и коригира хода на изпълнение на проекта.

5. Задачи за избор на маршрут. Типична такава задача е задачата за избор на маршрут между два града при наличие на много алтернативни пътища и междинни пунктове, като на съществуващите маршрути могат да се налагат най-разнообразни ограничения. Задачата се състои в определянето на най-икономичния маршрут по критерий време, разстояние или разходи.

6. Задачи за локализиране на различни елементи от верига за доставки (производствени предприятия, складове и др.), така че с минимални разходи да бъдат задоволени определени потребности на потребителите.

7. Задачи за масово обслужване. Те са свързани с възникване на „опашки" от клиенти, поради случайното постъпване на клиентски заявки. Решаването на тези задачи позволява да се определи какъв брой обслужващи пункта са необходими, за да се минимизират сумарните очаквани загуби от необслужени клиенти и престой на пунктовете за обслужване.

4.3.3. Математически инструментариум на изследване на операциите

Математическо оптимиране – раздел от математиката, разработващ методи за намиране на екстремални значения на целеви функции при наличие на ограничение, наложено върху аргументите на тези функции. Използва се за решаване на разпределителните задачи. Според вида на целевата функция и ограничението разграничаваме:

- **Линейно оптимиране -** целевата функция и ограничението са линейни.
- **Целочислено оптимиране -** търсените екстремални значения трябва да са целочислени.
- **Нелинейно оптимиране -** целевата функция и/или ограничението са нелинейни.
- **Многокритериално оптимиране**, когато има две или повече целеви функции с конфликт между тях (екстремалните стойности за едната не са такува за другата).
- **Динамично оптимиране** – предполага разбиването на задачата на няколко етапа, всеки от които е подзадача за една променлива и се решава отделно от другите подзадачи.

Теория на графите. Задачите, които се решават с помощта на тази теория могат да се формулират и решат като задачи на линейното оптимиране, но специалните методи на теорията на графите позволява да се решат по-ефективно. Примери: задачата за намиране на най-краткия (най-бързия, най-евтиния) маршрут, задачата за максималния поток и др.

Теория на вероятностите и математическа статистика. Този апарат се използва в много задачи за изследване на операции: вероятностно управление на запаси, системи за масово обслужване, имитационно моделиране и др.

Теория на игрите – разглежда процеси на избор на най-добра от няколко алтернативи в условия на определеност (когато точните данни са известни), в условие на риск (данните могат да се опишат чрез случайни величини) или в условие на неопределеност (данните са неизвестни).

Теория на размитите множества - позволява в математическа форма да се представи и използва при вземане на решения субективна експертна информация: предпочитания, оценки на значението на количествени или качествени показатели.

4.4. Прогнозиране в логистиката

Прогнозата е научнообосновано съждение за възможните състояния (в количествено отношение) на обекта на прогнозиране в бъдещето и/или алтернативни пътища и срокове за тяхното достигане. Прогнозирането е интердисциплинарна наука, разработваща методи за прогнозиране на динамични системи. Методи за прогнозиране чрез: моделиране на състоянието (процеса), разработване на алтернативни сценарии, експертни оценки, аналогия, екстраполация или апроксимация, анализ на времеви редове, регресия или корелация са само малка част от богатия инструментариум, използващ се за прогнозиране на ЛС.

5. Стратегия, тактика и планиране в логистиката

Планирането е обща функция на управлението, влизаща в пръстена на управление (рис. 10). Планирането на логистичната дейност е систематичен процес на търсене на възможности за действие, прогнозиране на последиците от действията, разработване на логистични проекти, формиране на **управленски решения**, конкретни мероприятия и срокове за изпълнението им за достигане на поставената цел в бъдещето.

Рис. 10. Пръстен на управлението

Преди началото на планирането трябва да определим:

- обекта на планиране (какво се планира);
- субекта на планиране (кой планира);
- хоризонта на планиране (в какъв срок се планира);
- средствата за планиране (с помощта на какво ще се планира: финансови средства, компютърна техника);
- методика и стандарти на планиране (как ще се планира);
- съгласуваност на плановете (какви, с кого и при какви условия).

Всички **управленски решения** в зависимост от значението им за организацията и степента им на детайлизация се делят на три типа (нива):

- **стратегически решения** – задават общите направления на дейността на организацията, оказват дългосрочно влияние, изискват големи ресурси и са най-рисковани;
- **тактически решения** – свързани са с реализацията на стратегията в средносрочен план, изработват се на по-детайлно ниво, изискват по-малко ресурси и са свързани с определен риск;
- **операционни решения** – подробно детайлизирани, в краткосрочен план, за тях са необходими по-малко ресурси, а рискът е малък.

Съществуват няколко типа стратегически решения (рис. 11)

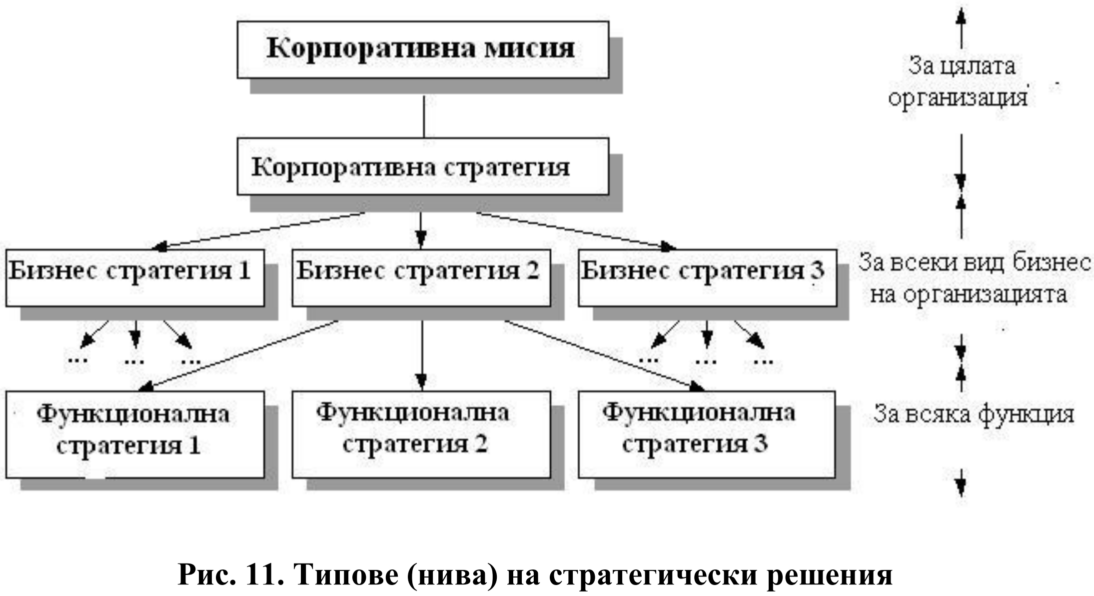


Рис. 11. Типове (нива) на стратегически решения

Корпоративната мисия дава общите цели на организацията. **Корпоративната стратегия** показва как корпорацията ще осъществи мисията си. **Бизнес стратегията** показва как всеки бизнес на корпорацията ще даде своя принос в осъществяването на корпоративната стратегия. **Функционалната стратегия** (в това число логистичната) описва стратегическото направление на всяка от бизнес функциите. С други думи, стратегиите на по-високо ниво задават целите и общите направления на организацията, а функционалните стратегии показват как те могат да се реализират.

Всички дългосрочни решения, свързани с логистиката на предприятието, определят **логистичната стратегия**. Тя се състои от всички стртегически решения, свързани с управлението на веригите на доставки и позволява да се реализира стратегията на предприятието като цяло.

На рис. 12 е представена класификация на видовете логистично планиране по срокове, по степен на детайлизация на решенията и по функционални области.

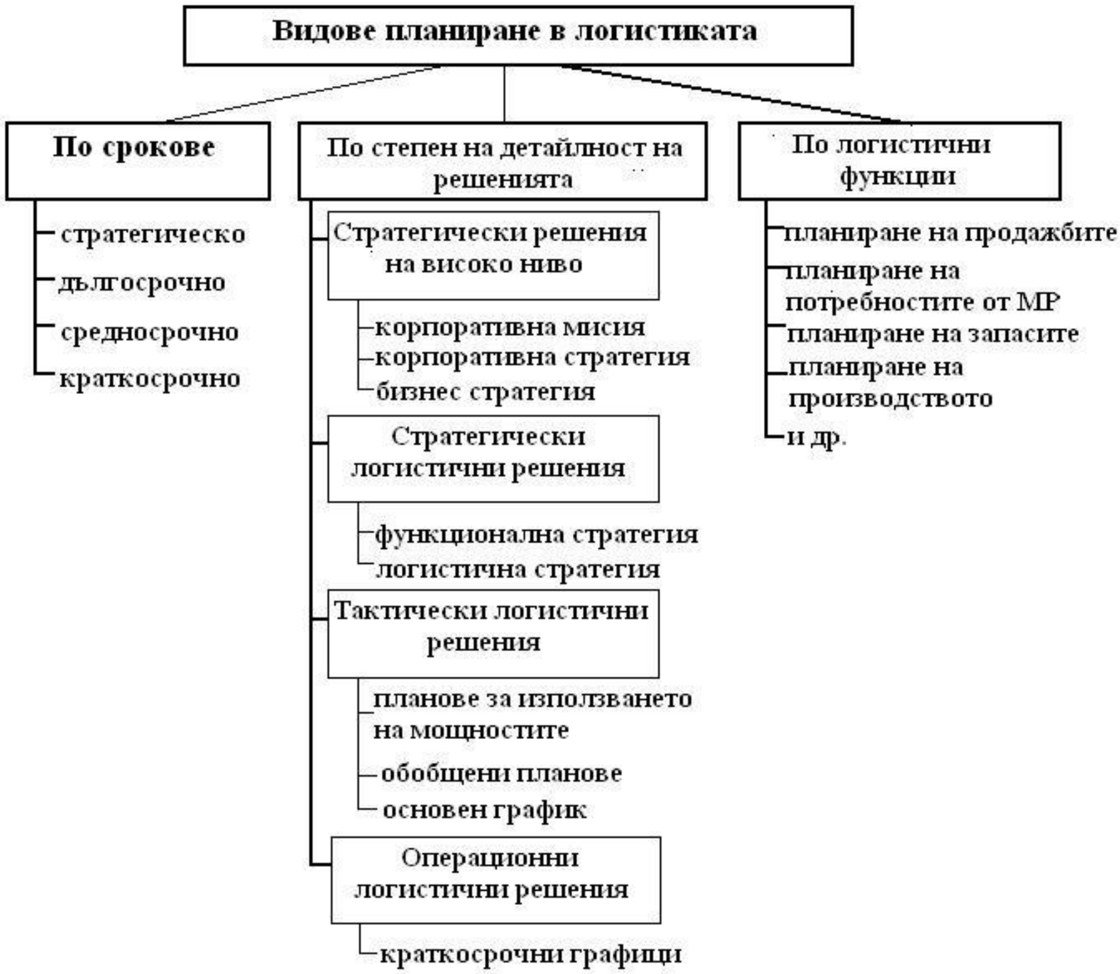


Рис. 12. Видове планиране в логистиката

5.1. Типове логистични стратегии

Най-общо логистичните стратегии се разделят на три типа – „стройна“ стратегия, динамична стратегия и стратегия, основаваща се на стратегически съюзи.

5.1.1. „Стройна“ стратегия

„Стройната“ стратегия се базира на принципа за управление на разходите, т.е. всяко изделие подобно на съответното изделие на конкуренцията трябва да се произведе по-евтино. Целта на „стройната“ логистика е всяка логистична операция да се изпълнява с по-малко разходи на ресурси – хора, пространства, запаси, оборудване, време и др. За това „стройната“ стратегия се стреми да намери начини за премахване на непроизводителните разходи на ресурси.

Първите опити за осъществяване на стратегия от този тип са направени в Toyota. Според известния специалист в областта на мениджмънта Робърт Таунсънд „във всички организации поне 50% от ресурсите се изразходват напразно“. Компанията Toyota определя следните участъци на ЛВ, където най-много се прахосват ресурси:

- **качеството** на влаганите в производството материални ресурси може да бъде по-високо, отколкото това е необходимо;
- неправилно (завишено) **ниво на мощности** в производството;
- **лошо организиран процес** – наличие на ненужни операции, прекалено сложни и/или дълготрайни;
- прекалено много **изчаквания** по веригата;
- прекалено много ненужни или неудобни **премествания** на полуготовата продукция по време на производствения процес;
- наличието на прекалено много **запаси** води до повишаване на разходите.

Типичният подход към реализирането на „стройната“ стратегия е: подробен анализ на текущите операции и отказ от операции, които не добавят стойност; елиминиране на спиранията, намаляване на преместванията; използване на по-съвършена технология за повишаване на ефективността; преместване на мощностите по-близко до потребителите с цел намаляване на транспортните разходи; търсене на възможност да се получи икономия от мащаба; отстраняване от веригата на доставки на ненужните звена.

„Стройните“ стратегии не справят много добре в много динамични или неопределени условия. Тогава се прибягва до стратегии от динамичен тип.

5.1.2. Динамична стратегия

Целта на динамичната стратегия е да обезпечи високо качество в обслужването на потребителите, оперативно да реагира на появата на нови или изменението на предишните условия. Има два аспекта на динамичност:

- **скорост на реагиране** на външните условия – динамичните организации постоянно наблюдават нуждите на потребителите и реагират своевременно;

- **способност за коригиране** на логистичните характеристики с отчитане на нуждите на отделни групи от потребители.

Организациите с доволни потребители получават важни предимства – повторни сделки и положителни препоръки за себе си от други хора и организации.

На пръв поглед целите и характеристиките на „стройната“ и динамичната стратегия изглеждат противоречиви (таблица 5)

Фактор	„Стройна“ логистика	Динамична логистика
Цел	Ефективни операции	Гъвкавост, обезпечаваща удовлетворяване на търсенето
Метод	Премахване на всички непроизводителни участъци	Удовлетворяване на потребителите
Ограничения	Обслужване на потребителите	Разходи
Динамика на измененията	Дългосрочна стабилност	Динамично реагиране на измененията на обстоятелствата
Параметри на дейността	Производителност, пълнота на използване на мощностите и ресурсите	Време за изпълнение на поръчките, ниво на обслужване
Работа	Унифицирана, стандартизирана	Променлива, контрола се осъществява полокално
Управление	В рамките на формализирани цикли на планиране	По-малко структурирано, осъществява се от персонал с по-високи пълномощия

Таблица 5. Сравнителен анализ на „стройната“ и динамичната стратегия

Но на практика няма строго разграничение между двата типа стратегии и организациите не трябва да избират едната за сметка на другата. Например, ако доставчикът подобри връзката си с клиентите чрез електронен обмен на данни или започне да продава чрез „on-line“ магазин, то той едновременно ще съкрати разходите си и ще повиши качеството на обслужване. По същество двете стратегии считат удовлетворените потребители и низките разходи за доминиращи направления, но по различен начин описват процеса на постигане на тези цели.

5.1.3. Стратегически съюзи

Целта на стратегията за формиране на съюзи с доставчиците и клиентите – да се увеличи ефективността на веригата на доставка, като всички членове на съюза работят съвместно и заедно получават изгодата от дългосрочното коопериране.

5.1.4. Други типове логистични стратегии

Други често срещащи се типове логистични стратегии, при които акцентът се слага на по-конкретни аспекти от дейността на предприятието са следните:

- **Стратегия на диференциация** – заключава се в стремеж на предприятието към уникалност, например при обслужването на потребителите.
- **Стратегия, основана на времеви параметри**. В общия случай тези стратегии се основават на стремежа за по-бърза доставка. Пример за такава стратегия е стратегията на „свиване на времето", която прилича на „постната" стратегия, но се концентрира в отстраняването на ненужните разходи на време във веригата на доставки.
- **Стратегия на повишаване на производителността**. Акцентът се слага на максимално възможното оползотворяване на ресурсите, които са на разположение на фирмата. Докато „стройната" стратегия търси начини да се избави от ненужните мощности и ресурси, то дадената стратегия по-скоро е съгласна да остави наличните мощности, като търси по-пълното им оползотворяване.
- **Стратегии с добавена стойност** се стремят да добавят колкото се може повече ценности към крайния продукт. Например, в хода на дистрибуцията на перални компанията може да предлага доставка до дома, монтаж, обучение за експлоатация, договор за постгаранционно обслужване, извозване на старите перални и др.
- **Стратегии на диверсификация или специализация**. Тези стратегии са ориентирани съответно на максимално широк или тесен диапазон на услуги или стоков асортимент. Например, съществуват транспортни компании, предлагащи превози на всичко: от писма до контейнери. Други транспортни компании доставят само петролни продукти със цистерни.
- **Стратегия на фокусиране**. Характеризира се с концентрация на потребителите от един сегмент, без стремеж да се обхване целия пазар.
- **Стратегия на ръст** – основана е на стремежа да се получи икономия от мащаб по пътя на разширяване на обслужваните географски райони, усвояване на повече дейности, увеличаване на пазарния дял и др.

5.2. Разработване и реализация на логистична стратегия на предприятието

5.2.1. Разработване на логистична стратегия

При разработване на логистична стратегия на дадено предприятие трябва да се отчетат:

- **корпоративната стратегия** – да се разбере как логистиката оже да допринесе за нейната реализация;
- **средата, в която се прави бизнес**, включваща факторите, които влияят на логистиката, но които логистиката не може да управлява;
- **особените компетенции на предприятието**, определени от факторите, които предприятието може да управлява и които използва, за да се отличи от другите.

Средата, в която се прави бизнес и особените компетенции показват какво положение заема предприятието в настоящо време, а корпоративната стратегия – какво положение трябва да се достигне в бъдещето.

Трябва да се дефинират:

- **силните и слаби страни** на предприятието, породени от особените му компетенции;
- **възможностите и опасностите**, проявяващи се в средата, в която се прави бизнеса.

Ключов фактор на средата, в която се прави бизнес е **типа търсене**, който обуславя избора на стратегия. Така, „постната“ стратегия е добра при положение, че търсенето е стабилно или в краен случай – предсказуемо. Динамичната стратегия работи добре при широк асортимент на продукция, когато е трудно да се прогнозира търсенето, когато то се променя рязко или операциите се изпълняват по поръчка.

Препоръки при разработване на логистична стратегия:

1. Дайте приоритет на тези области на логистична дейност, осигуряващи дългосрочно подобряване конкурентните позиции на предприятието.
2. Често променяна логистична стратегия с акцент върху използване на краткосрочни пазарни възможности носи мимолетна полза.
3. Бъдете предпазливи при приемане на твърди не гъвкави стратегии, които могат да остареят и да лишат предприятието от възможността за маневриране.

4. Изключвайте стратегии, които могат да доведат до успех само при наличие на най-оптимистичния сценарий. Изходете от това, че конкурентите предприемат ответните мерки и могат да настъпят времена с неблагоприятна пазарна конюнктура.
5. Атакувайте слабите, а не силните страни на конкуренцията и др.

5.2.2. Реализация на логистичната стратегия

За успешното реализиране на логистичната стратегия трябва да се отчете, че има два типа стратегически решения: първият задава правилата и целите, а вторият показва как трябва да се изпълнят тези правила и цели. Например, стратегическото решение на компанията за нарастване на продажбите е правило, а внедряване на допълнителен канал за продажби по Интернет е конкретен начин за реализиране на правилото. По такъв начин, общите цели на стратегията трябва да са подкрепени от решения, свързани с реализацията, които след това се преобразуват в подробни тактически и операционни решения, които се приемат и реализират на по-ниски нива (рис. 13). Да се върнем към примера – стратегическото решение от втори тип за внедряване на допълнителен канал за продажби чрез Интернет води до приемане на средносрочни тактически решения по наемане и подготовка на персонал, по създаване и функциониране на електронна страница, по организация и доставка на стоките на клиентите, по организация на електронното разплащане, по използване на допълнителни складове и т.н. Тези тактически решения от своя страна определят решения на операционно ниво, свързани с покупка на съответното оборудване, контрол на запасите, експедиране, транспортни маршрути и т.н.

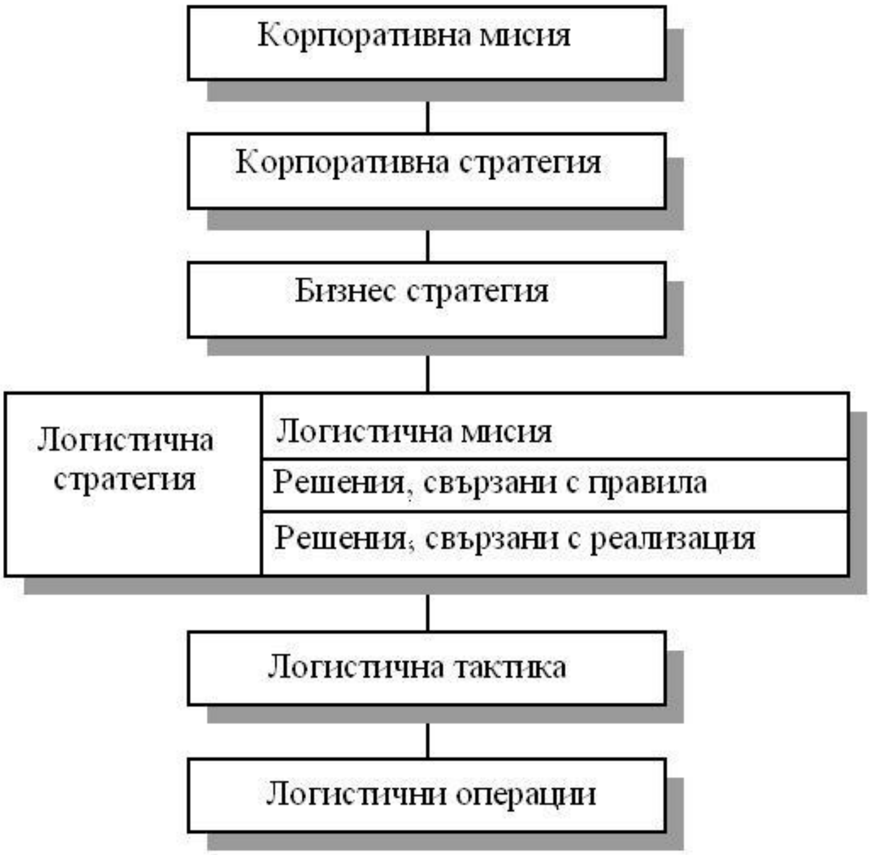


Рис. 13. Нива на логистични решения

При прехода към реализация на логистичната стратегия е необходимо да се разгледат възможните решения за всяка логистична функция, от снабдяването до доставката. Но най-голямо внимание следва да се обърне на следните области:

1. Структура на ЛВ. Различните стратегии водят до различни типове вериги на доставки, различаващи се по дължина (брой нива), широчина (брой паралелни маршрути), пропускателна способност, видове посредници и др.

2. Планиране на мощностите и в частност планиране използването на съществуващите мощности. Това трябва да се разглежда съвместно с прогнозирането на търсенето и планиране необходимостта от ресурси.

3. Дислокация на елементите на логистичната инфраструктура. След избора на структура на ЛВ трябва да се изясни кои са оптималните локации на елементите на ЛВ като: промишлени предприятия, предприятия за търговия на едро, складове, логистични центрове и др. Когато се вземат решения по този въпрос трябва да се има предвид, че последиците от тези решения са изключително дългосрочни.

4. Стратегически взаимоотношения. Понякога е по-добре логистичните решения и дейности да се възложат на външна специализирана организация – аутосоринг или договорна логистика.

5. Организация на спомагателните процеси, т.е. всички видове дейности, способстващи ефективната работа на ЛВ. Към тях се отнасят: организацията на техническото обслужване на оборудването, информационната технология за обработка на данните, електронния обмен на информацията, различните система за управление на МП и т.н.

5.3. Планиране на мощностите

Мощност на логистична операция – максималната пропусквателна способност за единица време. **Ограничение по мощност** означава, че организацията може да пропусне не повече от определено количество продукция за седмица, месец, година и т.н. Например, ако ФМИ към ПУ „П. Хилендарски" може да приеме не повече от 600 студенти за тази учебна година, значи това е ограничението на факултета по мощност. **Мощност на веригата на доставки** се определя като количеството стоки, което може да се достави на клиентите за определено време. Различаваме **проектна мощност**, която организацията може да развие в идеални условия и **ефективна мощност** – в реални условия. При планиране на веригата на доставки трябва да се отчете, че **фактическата мощност** е по-ниска от проектната и даже от ефективната.

Веригата на доставки се състои от множества звена, имащи различни мощности, следователно звеното с най-малка мощност (тясното място) определя мощността на цялата верига (рис. 14). Тогава, за да се увеличи мощността на цялата ЛВ е достатъчно увеличаването на мощността на звеното (звената) с най-малка мощност.

Целта на планиране на използването на мощностите – да се съпостави мощността на даденото звено със търсенето, предявено към него. Всяко несъответствие говори за неефективност на ЛВ. Ако мощността е по-малка от търсенето, тесните места ограничават движението на материали и качеството на обслужване на клиентите пада; ако мощността е по-голяма от търсенето – остават неизползвани мощности, което също води до неефективна издръжка.

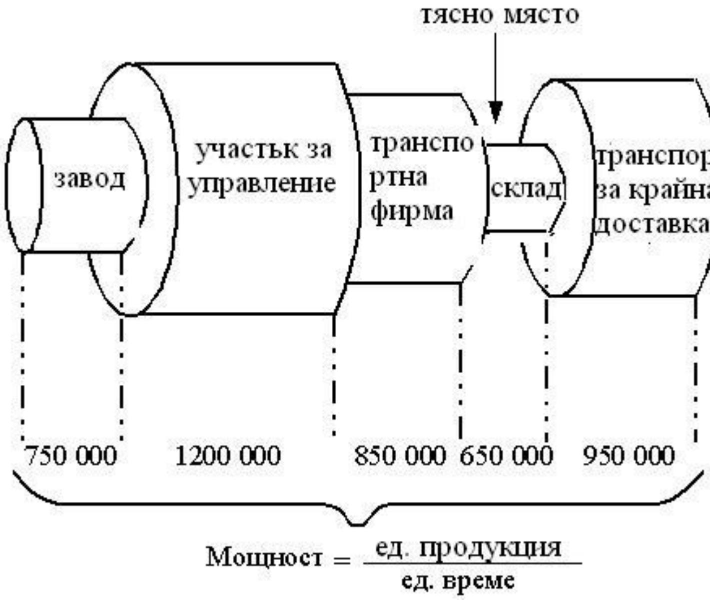


Рис. 14. Звеното с най-малката мощност определя мощността на цялата ЛВ

Съществуват два начина за коригиране на съотношението мощности – търсене в краткосрочен план:

1) **управление на мощностите** с цел довеждането им до съответствие с търсенето;

2) **управление на търсенето** с цел привеждането му в съответствие с мощностите.

5.4. Планиране дислокацията на елементите на логистичната инфраструктура

При избор на места за дислокация на различните елементи на логистичната инфраструктура трябва да се отчитат следните фактори:

- **места за дислокация на клиентите** – близост до крайните потребители;
- **места за дислокация на доставчиците** – близо до източниците на суровини;
- **места за дислокация на производителите** – оптималност при отчитане на предните два фактора (виж рис. 15), пълните разходи и пазара на работна сила;
- **отношение на органите на власт и техните планове**;
- **отчитане на всички разходи** – директни и косвени;
- **отношение на обществеността**;
- **размер и конфигурация на участъците**;
- **транспортна достъпност на местността**;

➢ **конкуренти** – брой, мощ, разположение;

➢ **потенциал за разширяване** или осъществяване на изменения;

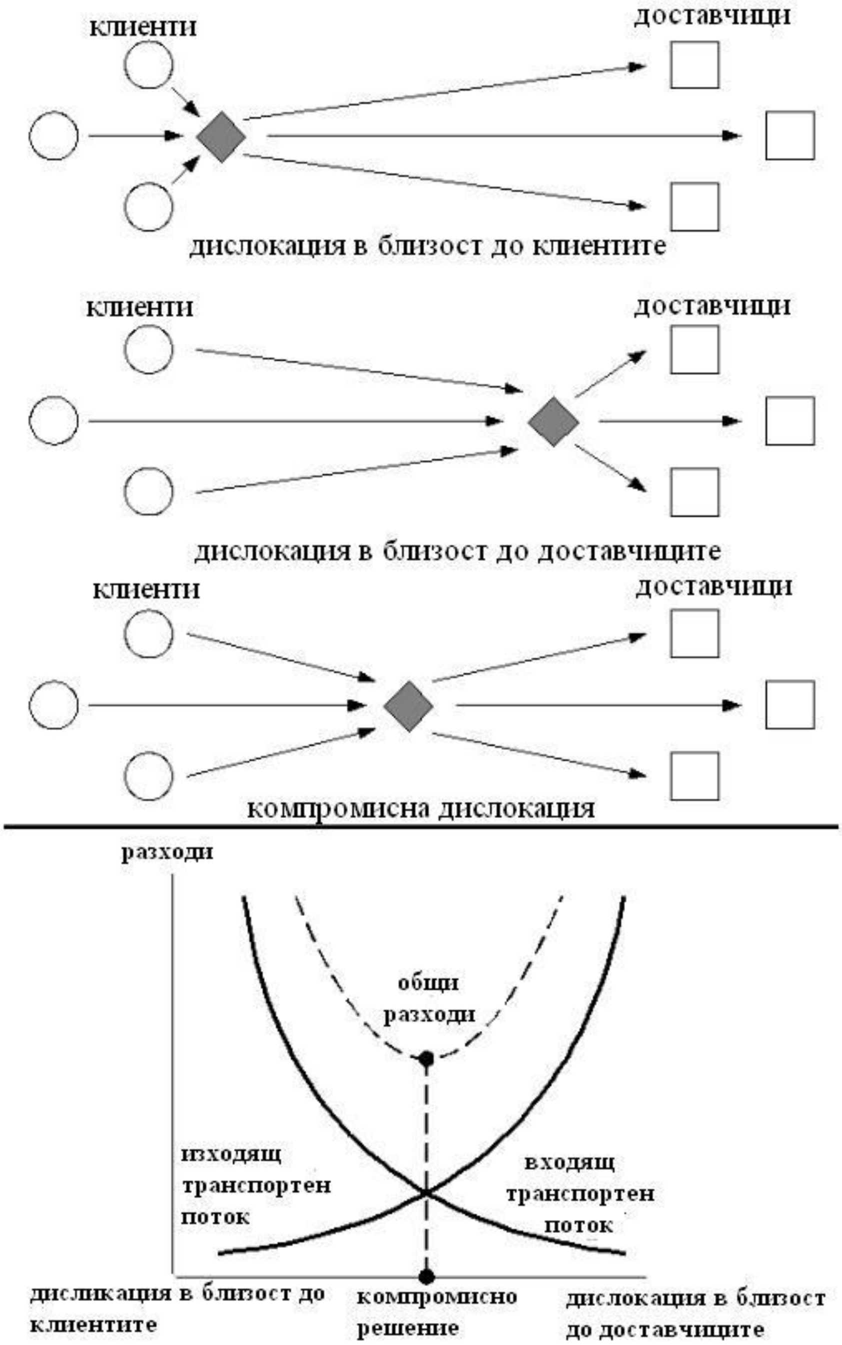


Рис. 15. Различни варианти за разположение на производственото предприятие - до клиентите, до доставчиците и оптимален избор - компромисно решение

➢ **състояние на местните пазари на труд;**

➢ **екологична оценка и др**.

Съществува фактор, който **не** трябва да се има предвид при решаване на задачата за дислокация – **личните предпочитания на мениджъра**.

5.5. Обобщено и краткосрочно планиране

Обобщеното планиране се отнася към категорията на тактическите решения, в хода на които прогнозираното търсене и наличната мощност се преобразуват в график по видове дейност. На това ниво на планиране се разработват обобщени планове и основни графици. В **обобщените планове** се прави анализ по групи дейности, по всяко звено, в средносрочен план (месец, тримесечие), като не се влиза в детайли. След съставяне на обобщения план се пристъпва към **основния график**, разбиващ основния план на съставки и указващ видовете дейност в точни срокове.

Планирането не завършва със съставянето на основния график, тъй като трябва въз основа на него да се разработи подробно разписание по всички видове работа, сътрудници, материали, съоръжения и други ресурси, необходими за изпълнение на задачата, поставена в основния график. **Краткосрочните графици** определят последователността на изпълнението по видове дейности, ресурси, отговорници и сроковете за изпълнение.

Тъй като основният график задава датите на приключване, краткосрочните графици трябва да отчитат тези дати. Съществуват два начина за решаване на тази задача:

- **Обратно съставяне на графика**: съставителите знаят кога дадената работа трябва да бъде приключена. Те тръгват от тази дата назад, включвайки всички видове дейности за да определят кога трябва да се започне, за да се приключи на определената дата.
- **Право съставяне на графика**: съставителите знаят кога дадената работа може да се започне. Съставителите анализират всички видове дейности, за да определят в какъв срок задачата може да бъде изпълнена.

Други методи на краткосрочното планиране се получават чрез използване на различни правила за определяне последователността на отделните дейности. Такива правила са:

- първи дошъл – първи обслужен;
- приоритет по срочност на работите;
- приоритет по краткост на изпълнението на работите.

6. Методи за управление на материалните потоци

6.1. Логистични системи на бутане и дърпане

6.1.1. Системи на бутане (push systems)

Логистичната **система на бутане** е такава организация на движението на МП, при която материалните ресурси (МР) попадат от предишната операция към следващата по отнапред зададен график. МР се „избутват“ от едното звено на ЛС към следващото.

Системите на бутане са традиционно използвани в производството. Всяка операция се завършва според общия график в установеното време. Полученият продукт се „избутва“ по-нататък и се превръща в запас на незавършено производство за следващата операция. Следователно, този метод за организация движението на МП игнорира това, което в този момент върши следващото звено: дали е заето със съвсем друга работа или очаква постъпването на продукцията за обработването ѝ. В резултат се появяват закъснения в работата и/или нарастване на запасите от незавършено производство.

6.1.2. Системи на дърпане (pull systems)

Логистичната **система на дърпане** е такава организация на движението на МП, при която МР се подават на следващата технологична операция от предишната в случай, че следващата направи заявка към предишната. Т.е. следващата операция „издърпва“ от предишната необходимите ѝ МР в необходимото за нея време. Поставянето на поръчки за попълване на запасите от МР или ГП става, когато тяхното количество достигне до критичен минимум. Предишната операция изпраща обработената от нея и заявена продукция тогава и само тогава, когато е получила заявка за това.

В таблица 6 са дадени основните различия между двата типа системи за организация движението на МП, а в рис. 16 - показани движенията на МП и ИП.

Характеристика	Система на бутане	Система на дърпане
Закупуване	Много доставчици, нерегулярни доставки, големи партиди	Малко доставчици, чести доставки, твърд график на доставки
Производство	Максимализиране натоварването на производствените мощности	Ориентирано към търсенето
Оперативно управление	Централизирано	Децентрализирано
Направление на планирането	От първия стадий	От последния стадий
Запаси	Има, в това число „застрахователен“ запас	Практически отсъстват
Информационни разходи	Високи	Ниски
Персонал	Тясно специализиран	Висококвалифициран, универсален
Оборудване	Специализирано	Универсално
Разпределение	Ориентация към „усреднения“ потребител (стандартни партиди ГП)	Ориентация към конкретния потребител (различни партиди ГП)

Таблица 6. Сравнителен анализ (по основни характеристики) на системата на бутане и системата на дърпане

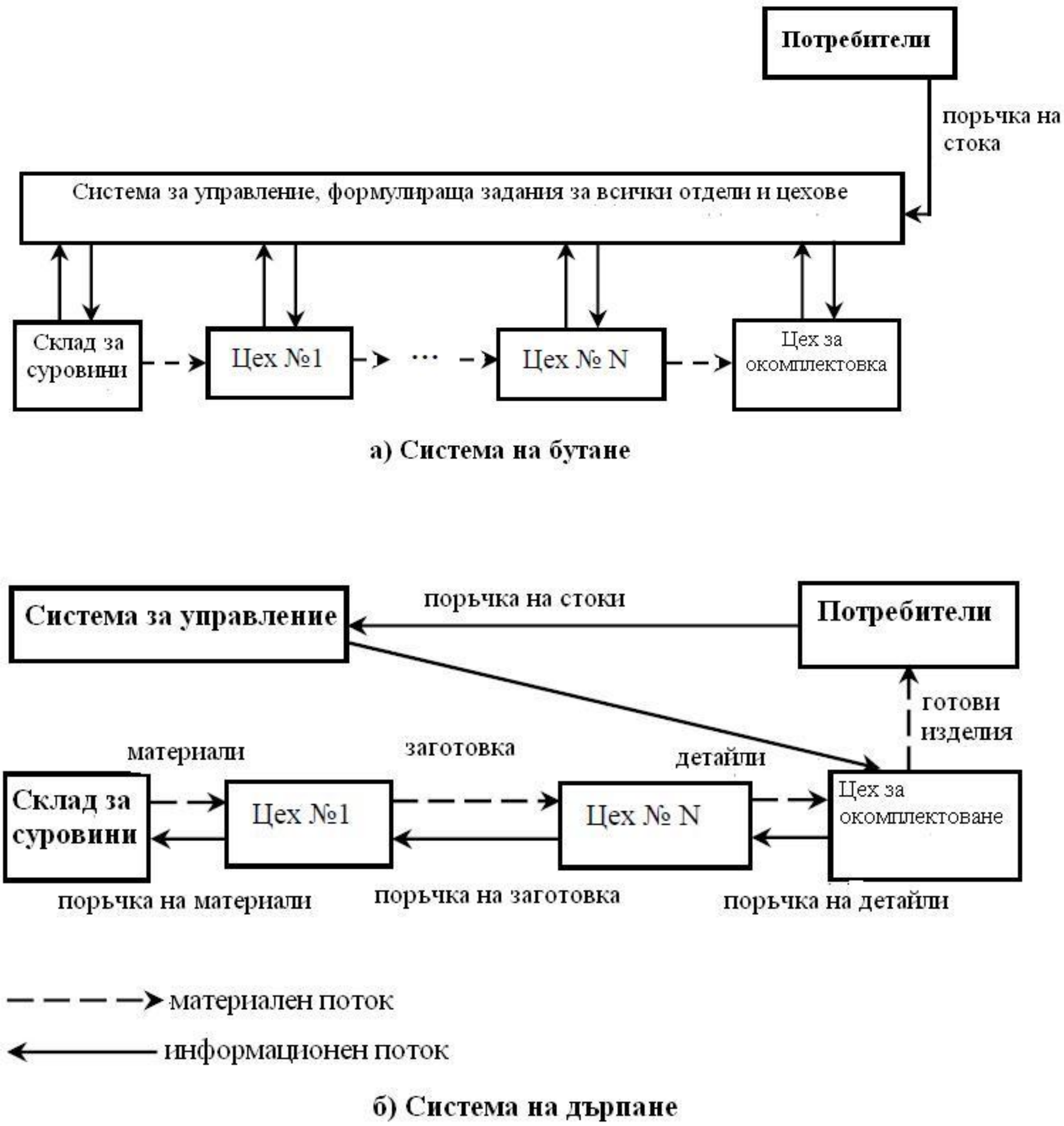


Рис. 16. Сравнителна схема на системата на бутане и системата на дърпане

6.2. Методи за организация движението на МП при системите на бутане

6.2.1. Планиране на потребностите от материали (MRP)

При избора на метод за организация управлението на МП трябва да се изясни какъв е характера на търсенето. Ако общото търсене се формира от много и независими един от друг клиенти, то става дума за **независимо търсене**. В този случай се прави прогноза и се извършва *планиране на потребностите от ресурси.* Ако обаче, продукцията е предназначена за малко на брой корпоративни клиенти и/или е предназначена за допълнителна преработка, тогава се говори за **зависимо търсене**. Тогава може да се приложи **планиране на потребностите от материали** (material requirements planning) или **MRP.**

Същност на MRP – заключава се в разчет на потребностите на всички видове материали, суровини, комплектоващи детайли, необходими за производството на всяка стока от основния график в изискуемия обем и подаване на съответните поръчки за доставка. Общата последователност от действия е следната:

1) основния график са разбива на отделните стоки, определя се обема им;
2) по спецификационна ведомост на материалите се определят всички видове материали, суровини, детайли, необходими за производството на стоките в набелязаните обеми, определят се количествата им (брутна потребност от материали);
3) проверяват се наличностите от материали към настоящия момент в складовете и се определя чистата потребност от материали;
4) определя се времето за подаване на заявката за материали.

По такъв начин при независимо търсене или при отсъствие на MRP запасите не се свързват непосредствено с производствения план и затова трябва да са достатъчно високи, за да се удовлетвори произволно търсене. При използването на MRP нивото на запаси е ниско и се увеличава само непосредствено преди изпълнението на клиентската поръчка.

Предимства на MRP

- MRP оперира с данни не от минало потребление, а от настоящо;
- снижение обема на запасите, т.е. икономия на финанси, площи, персонал и др.;
- повишаване скоростта на обръщаемост на запасите;
- отсъствие на забавяния, причинени от липса на материали;
- намаляване броя на спешните поръчки.

Проблеми на MRP

- трябва голям обем подробна и точна информация и изчисления;
- малката гъвкавост на метода не позволява да се реагира на външни промени;
- наличието на сложна система за управление, което предпоставя възможността за сривове в системата;
- MRP може да не отчита ограничението по мощност;
- скъпоструващо и дълговременно внедряване.

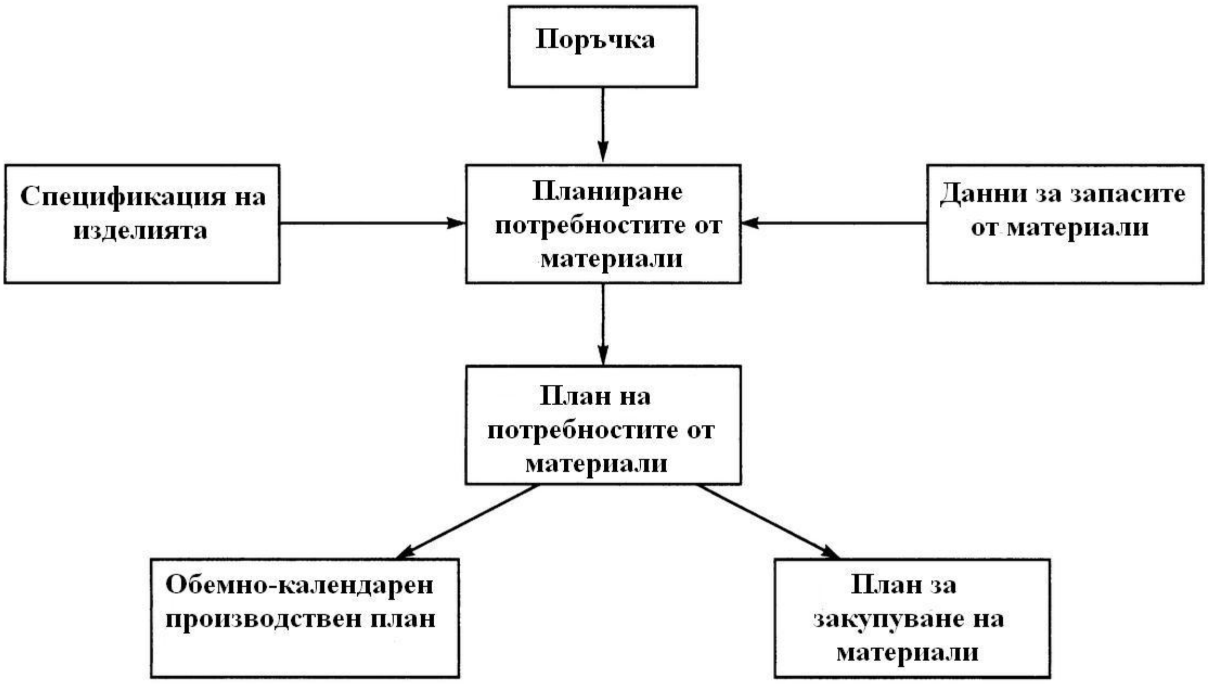


Рис. 17. Стандарт за планиране потребностите от материали MRP

6.2.2. Съвременни стандарти на планиране, базирани на MRP

Едно от мащабните разширения на MRP е **планирането на производствените ресурси** (manufacturing resource planning) или **MRPII.** Този стандарт на планиране включва MRP и добавя CRP (Capacity Requirements Planning) – разчет на потребностите от производствени мощности. Можем условно да запишем

MRPII = MRP + CRP.

Окрупненият стандарт на планиране MRPII е представен на рис. 18

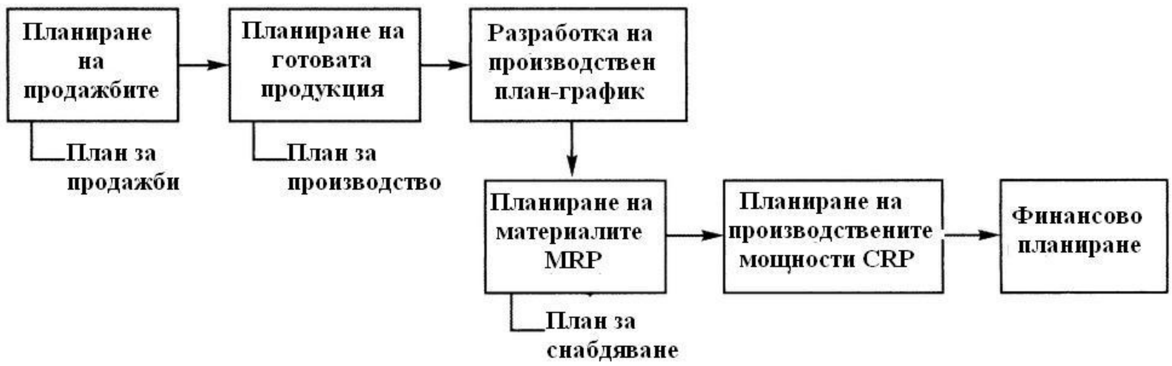


Рис. 18. Окрупнен стандарт на планиране MRPII

Както се вижда от рис. 18 новият блок в сравнение с MRP е блокът CRP. На рис. 19 е представена неговата окрупнена блок-схема

Рис. 19. Стандарт на разчет за производствените мощности CRP

За разчета за производствените мощности CRP е необходима следната входяща информация:

1) обемно-календарен план на производството (в рамките на MRP);
2) технологични маршрути за изготвяне на изделията;
3) поръчки, чието изпълнение е стартирало по-рано.

В резултат се получава потребността от оборудване, необходимо за изпълнение на поръчката.

С времето стандартът MRPII се допълвал, тъй като при него не се обезпечава необходимата интеграция със системите за проектиране и конструиране. Освен това, в него не се обръща достатъчно внимание на управлението на разходите, а връзка с кадрите отсъства въобще. Системата **ERP** (Enterprise Resource Planning) – **планиране на ресурсите на предприятието** по настоящем има претенциите за световен стандарт. Можем да я определим по следния начин: ERP е интегрирана система, обезпечаваща планирането и управлението на всички ресурси на предприятието, неговото снабдяване, продажби, кадри и работна заплата, научно-изследователски и конструкторски дейности. По такъв начин, ERP = MRPII + интегрирано планиране и управление на допълнителни направления (персонал, научно-развойна дейност и др.).

Ключов компонент на ERP-системите е единната база данни, обединяваща информацията от различните сфери на дейност на предприятието (рис. 20).

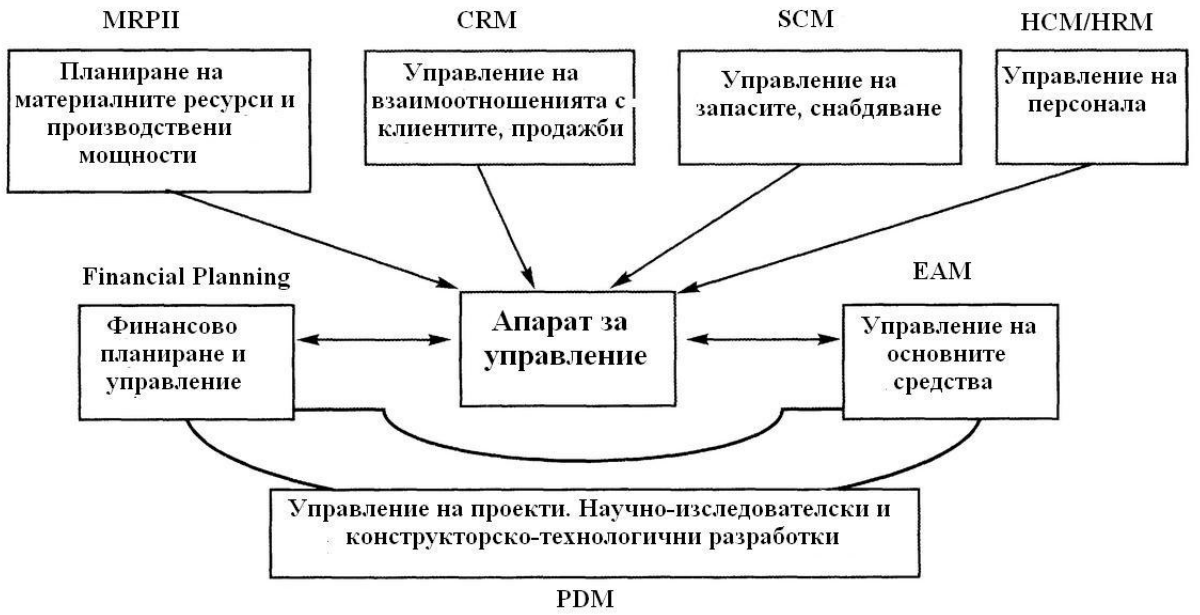


Рис. 20. Типов състав на функциите и модулите на ERP-системата

Системите от класа ERP, ориентирани към производството, трябва да позволяват организацията и информационното обезпечение на етапите на снабдяване, производство и реализация, а също и финансова отчетност и планиране. На рис. 21 е представен типов опростен състав на ERP-система.

Рис. 21. Опростен типов минимален състав на ERP-система

Той се състои от модулите:

- SCM (Supply Chain Management) – управление на веригата от доставки. Включва: снабдяване на производството, управление на складовете и управление на транспорта;
- CRM (Customer Relationship Management) – управление на взаимоотношенията с клиентита. Включва: търсене и анализ на информация за клиентите, планиране на пазара и взаимодействие с клиентите;
- MRPII (Material Requirements Planning + Capacity Requirements Planning) – планиране на материали и производствени мощности;
- Financial Planning – модул за финансови отчети и управление.

6.2.3. Необходими условия за реализиране на концепцията планиране на ресурсите. Тази концепция за управление на МП е подходяща при наличието на зависимо търсене. Планирането на материали/ресурси е производственоориентирана стратегия (система на бутане). При нея на базата потребителска заявка, рецептура на изделията и наличностите от запаси се изготвя формира нуждата от материали и на тази база се изготвят планове за снабдяване и производство. По такъв начин се постига оптималност – ако запасите са повече ще има загуби от блокиран капитал, ако са по-малко – престои и неизпълнение на заявката в срок. По-нататъшното развитие на концепцията включва цялостно оптимално управление на ресурсите на предприятието – оборудване и човешки ресурси. Необходими условия за внедряване на системата за планиране на ресурсите са:

- използване на ефективни математически методи за прогнозиране, оптимиране и планиране на производствените процеси;
- разработване на компютърни програми, позволяващи да се автоматизират решенията на оптимизационните задачи, планирането и управлението на производството;
- наличието на стремеж към дългосрочно сътрудничество с клиентите на предприятието.

6.3. Методи за организиране движението на МП при системите на дърпане

6.3.1. Концепция „точно в срок“ JIT

Традиционният подход предполага, че запасите са важен елемент от цялата система, гарантиращ липсата на сривове при изпълнение на операциите. MRP съкращава обемите на запасите, за да осъществи по-близко взаимодействие между доставката на материали и търсенето им, като оставя някакъв „застрахователен“ запас в случай на непредвидими проблеми. Очевидно, колкото повече се обезпечи съответствие между доставката и търсенето, толкова по-малка ще е необходимостта от запаси. Ако успеем напълно да отстраним несъответствието между доставка и търсене, запаси въобще не са необходими. На това се основава системата „точно в срок“ (just in time). В основата на тази концепция е увереността, че запасите възникват като последица от лошо управление. Следователно, трябва да се намерят причините за несъответствието между търсене и предлагане, да се подобри изпълнението на операциите и запасите ще изчезнат. В по-широк смисъл, JIT разглежда предприятието като набор от проблеми, пречещи на ефективното изпълнение на операциите, например, по-голямо време за изпълнение на поръчките, нестабилност при доставка на поръчките, небалансирани една с друга операции, ограничения по мощност, неизправност на оборудването, бракувани материали, ненадеждни доставчици и много други. Мениджърите, опитвайки се да решат тези проблеми създават запаси, закупуват допълнителни мощности, инсталират резервно оборудване и т.н. Конструктивният подход се състои в това, че за да се решат истинските проблеми, първо трябва да се заявят. Концепцията JIT води до промяна на възгледите в следните направления:

- **Запаси.** Стремеж към минимални (нулеви) запаси от материали, незавършена продукция и готова продукция.
- **Качество.** Пълно отсъствие на брак на базата на комплексно управление на качеството.
- **Доставка.** Клиентите трябва да могат напълно да разчитат на доставчиците си.
- **Производствени партиди.** Малки партиди, кратки производствени цикли, за да не се натрупват производствени излишъци.
- **Време за изпълнение на поръчките.** Колкото е по-кратко това време, толкова се намалява неопределеността, породена от конюнктурни промени.
- **Надеждност.** Всички операции трябва да се изпълняват непрекъснато без сривове, престои, брак, повреди и т.н.
- **Работници.** Необходим е дух на сътрудничество между мениджъри и работници.
- **Информационно обслужване** – трябва да позволява оперативен обмен на информация и да синхронизира всички процеси на доставка на материали, производство и монтаж, доставка на готова продукция.

По този начин JIT е не само метод за минимализиране на запасите, но и система за подобряване на координацията и повишаване на ефективността.

Предимства на JIT. В някои организации, внедрили JIT се е постигнало 90% съкращаване на запасите, 40% съкращаване на складовите и производствени площи, 15% съкращаване на разходите за снабдяване и т.н. Към предимствата се отнасят:

- съкращаване на запасите от материали и незавършени производство;
- съкращаване на времето за производство на продукцията;
- повишаване на производителността на оборудването и работниците;
- повишаване качеството на материалите и готовата продукция;
- намаляване на брака и отпадъците и др.

Проблеми при реализацията на JIT:

- високи първоначални инвестиции и разходи по реализацията на JIT;

- неспособност за справяне с непредвидими обстоятелства;
- зависимост от качеството на доставяните материали;
- големи колебания в търсенето на готова продукция;
- отсъствие на дух на сътрудничество и доверие в персонала и др.

6.3.2. Концепция на ефективния отговор на потребителското търсене (ECR)

JIT заставя доставчиците да променят методите си на работа, за да обезпечат по-бързи доставки, по-високо качество, по-малки партиди и абсолютна надеждност. Очевидният начин да се удовлетворят тези изисквания е доставчиците да вземат на въоръжение метода JIT. Това гарантира, че цялата ЛВ ще работи съгласувано въз основа на едни и същи цели и принципи. Концепцията за ефективен отговор на потребителското търсене (efficient consumer response) ECR предполага разширението на зоната на JIT върху цялата верига на доставки. В условията на ECR съобщението за търсене се разпространява назад по веригата на доставки, в резултат на което МП се придвижва напред, т.е. ECR „протяга ръце“ за стоки чрез организациите, влизащи в ЛВ.

Голям интерес към ECR възниква през втората половина на 1990-те години в сектора на хранителни стоки. Понастоящем във веригите от супермаркети, използващи този подход когато купувачът закупи пакет бисквити, касата автоматично подава сигнал към доставчика да замени този пакет, доставчикът подава сигнал на своя доставчик, т.е. този сигнал се предава по цялата верига назад. Именно в рамките на ECR е възникнала технологията на запасите, управлявани от купувача.

Необходими условия за внедряването на концепцията ECR:

- наличие на надеждни доставчици в икономическата система;
- отношения на партньорство между организациите във веригата на доставки;
- използване на електронна система за обмен на информацията;
- висока скорост на доставките на материални ресурси;
- точна информация за текущото състояние на производството.

Проблеми при внедряването на ECR:

- сезонност в производството на някои от доставяните ресурси;
- несъгласие на някоя от организациите по веригата на доставки;
- ако ЛВ преминава през граница, където МП се спира по някакви причини.

ЧАСТ ВТОРА. МАТЕМАТИЧЕСКА ТЕОРИЯ НА УПРАВЛЕНИЕ НА ЗАПАСИТЕ

7. Логистика на запасите

7.1. Създаване и поддържане на материалните запаси

Материален запас (МЗ) – това е намиращата се в различните стадии на производство и обръщение продукция, очакваща да влезе в производствено или потребителско потребление.

Понятието МЗ е ключово в логистиката. Снижаването на нивото на запаси е един от основните източници на икономически ефект от използването на логистиката. Следователно, управлението на запасите (УЗ) е важен инструмент на логистиката и фактор за повишаване на ефективността на функциониране на предприятието.

7.1.1. Причини са създаване на МЗ

1) възможността за **нарушаване на установения график** на доставки (*последствие* – спиране на производствения процес);

2) възможността за **колебание на търсенето** (*последствие* – неудовлетворено търсене, пропуснати ползи, загуба на имидж);

3) **сезонни колебания на производството** на някои видове стоки при относително равномерното им потребление (*последствие* – необходимост от съхраняване на стоката за допълнително равномерно разпределение през годината);

4) възможността за **равномерно изпълнение на операциите на производство и разпределение** (наличието на запаси от готова продукция изглажда колебанията в интензивността на производството, *последствие* – равномерност при разпределението на продукцията; наличието на производствени запаси изглажда колебанието при доставката на суровини, *последствие* – равномерност при производството на продукцията);

5) **отстъпки** при закупуване на големи партиди стока (*последствие* – снижаване на себестойността на продукцията);

6) възможността за генериране на **печалба от спекулация** при предвидено рязко покачване на цената на стоката или снижаване на себестойността на продукцията при предвидено рязко поскъпване на суровината;

7) възможността за **намаляване на разходите по доставката** (*последствие* – увеличаване на количеството на поръчките, а оттам и на запасите);

8) необходимостта от **бързо обслужване на клиентите** (*последствие* – отсъствие на откази на клиенти, повишаване на конкурентоспособността);

9) **минимизиране на производствените престои**, причинени от отсъствието на резервни части или материали (*последствие* – снижаване на себестойността и продължителността на производствения цикъл);

10) **опростяване на процеса на управление на производството**: наличието на производствени запаси позволява да се понижат изискванията към степента на съгласуваност на производствените процеси, което намалява издръжката на управлението на тези процеси (*последствие* – съкращаване на извънредните ситуации и престоите).

7.1.2. Основни разходи по създаване и поддържане на запаси

1) замразени финансови средства – блокиран капитал;

2) разходи за складови помещения;

3) разходи за поддържане на специални условия за съхраняване на МР;

4) работна заплата на персонала;

5) загуби вследствие на разваляне и кражби на запасите;

6) загуби от евентуално презапасяване;

7) загуби от евентуално обезценяване на запасите.

7.2. Класификация на материалните запаси

7.2.1. Класификация по отношение към логистичните операции

Запаси в снабдяването – МР, намиращи се във веригата на доставки от доставчиците до складовете на МР на стокопроизводителя, предназначени за обезпечаване производството на готова продукция.

Производствени запаси – запаси от МР и незавършено производство, намиращи се в предприятието, предназначени за производствено потребление.

Разпределителни (стокови) запаси – запаси от ГП, транспортни запаси, намиращи се в складовете за ГП на производителя и в разпределителната мрежа и предназначени за удовлетворяване на потребителското търсене.

Складови запаси – запаси от продукция, намиращи се в складове от различен тип и ниво на определени звена от логистичната верига (ЛВ), както вътрешнофирмени, така и на логистични посредници.

Транспортни запаси (запаси на път, транзитни запаси) – запаси от МР, незавършено производство или ГП, намиращи се в процес на транспортиране от едно звено на ЛВ към друго.

7.2.2. Класификация по функционално назначение

Текущи запаси – съответстват на нивото на запаси в момента на отчитане.

Застахователен (гарантиращ) запас – предназначен е за намаляването на логистичните и финансови рискове, свързани с колебания в търсенето на ГП, нарушаване на срокове по договори за доставка, качеството на МР, сривове в производството и други непредвидими (но възможни) обстоятелства. Застрахователният запас е постоянна величина и при нормални обстоятелства – неприкосновена.

Подготвителен запас – част от производствения (разпределителния) запас, предназначен за подготовката на МР и ГП за потребление. Наличието на този тип запаси се определя от необходимостта за изпълнение на конкретни логистични операции по приемане, регистриране, товарене и разтоварване, обучение и др.

Сезонни запаси – това са запаси от МР и ГП, създавани и поддържани при явно изразени сезонни колебания на търсенето или характера на производството. Те трябва да обезпечат нормалната работа по време на сезонното прекъсване на производството, потреблението или транспортирането.

Запаси за промотиране на ГП – формират се и се поддържат в дистрибуторските канали за бърз отговор на текущата пазарна политика чрез промотиране на стоки на пазара, обикновено придружени от реклама в голям мащаб. Тези запаси, трябва да отговарят на потенциалното нарастване на търсенето на ГП.

Спекулативни запаси – обикновено се създават от фирмите за МР (компоненти, полуфабрикати) с цел защита от възможно повишаване на цените им или въвеждане на протекционистки квоти или мита.

Остарели (неликвидни) запаси – образуват се вследствие влошаване качеството на запасите по време на съхранение или морално амортизиране, вследствие на несъвпадението на логистичния цикъл на производство и разпространение с жизнения цикъл на стоката.

7.2.3. Класификация по количествено ниво

Максимално желан запас е това ниво на МЗ, което е икономически целесъобразно за дадена система на управление на запаси. В различните системи за управление максимално желания запас се използва като ориентир при разчета на обемите за поръчки.

Прагово ниво на запасите – в някои модели на управление на запасите се използва за определяне на момента от времето за следващата поръчка.

8. Методи за оценка на запасите

Основна задача при управление на запасите е оценяването на тяхната стойност. Оценяването на запасите по себестойност не е най-доброто решение на проблема – предприятието може да разполага (в даден момент) с голямо количество запаси от един вид, закупени по различно време и на различни цени. Затова, практически е невъзможно да се установи себестойността на всяка единица от запасите. Ясно е, че тази задача няма еднозначно математическо решение. Понастоящем съществуват три основни метода (стандарта) за оценяване на запасите:

- ФИФО (First In First Out – FIFO);
- ЛИФО (Last In First Out – LIFO);
- по средно претеглена цена.

8.1. Метод за оценяване на запасите ФИФО – предполага се, че партидата от запаси, която първа е постъпила в склада се реализира първа.

Пример 1: Предполага се, че липсват начални запаси. През март се закупуват и заскладяват 500 единици от дадена стока по цена 10 лева за единица. През април се закупуват 400 единици от същата стока по цена от 11 лева за единица. През май се продават 400 единици от стоката за 15 лева единицата. През юни се продават 200 единици за 16 лева единицата. През юли се закупуват 150 единици по цена 11,50 лева, а през август се реализират 100 единици по 16,50 лева. Да се определи стойността на запасите в края на периода по метода ФИФО.

Месец	Закупуване, лв. (по цена на закупуване)	Продажба, лв. (по оценъчна стойност)	Запаси след операция покупко-продажба, лв. (по оценъчна стойност)
Март	500×10		500×10
Април	300×11		500×10
			300×11
Май		400×10	100×10
			300×11
Юни		100×10	200×11
		100×11	
Юли	$150 \times 11,50$		200×11
			$150 \times 11,50$
Август		100×11	100×11
			$150 \times 11,50$

Да поясним как се запълва горната таблица. Във втория стълб са указани покупките за съответния месец. В третия стълб – продажбите, а в четвъртия – запасите след покупко-продажбата за съответния месец. След мартенските покупки в склада има 500 единици от стоката по цена от 10 лв, а след априлските – 500 единици по 10 лв. и 300 единици по 11 лв. При метода за оценяване на запасите ФИФО се прави предположението, че първите, постъпили в склада стоки се реализират първи. Тогава продадените 400 единици през май са всъщност от закупените през март по 10 лева и в склада остават още 100 единици от тях и всички 300 единици закупени през април по 11 лв. През юни се продават 200 единици: 100 от тези, закупени през март (по 10 лв.) и 100 от априлските (по 11 лв.). Тогава остават 200 по 11 лв. През юли става попълване на склада с още 150 единици по 11,50 лв. През август са продадени 100 единици (от априлските) по 11 лв. Така накрая остават 100 единици по 10 лв. и 150 по 11,50 лв. – следователно запасите в края на периода се оценяват на $100 \times 11 + 150 \times 11{,}5 = 2825$ лв.

8.2. Метод за оценяване на запасите ЛИФО – предполага се, че партидата от запаси, която последна е постъпила в склада се реализира първа.

Пример. 2: Да се определи стойността на запасите от Пример 1. в края на периода по метода ЛИФО.

Месец	Закупуване, лв. (по цена на закупуване)	Продажба, лв. (по оценъчна стойност)	Запаси след операция покупко-продажба, лв. (по оценъчна стойност)
Март	500×10		500×10
Април	300×11		500×10
			300×11
Май		300×11	400×10
		100×10	
Юни		200×10	200×10
Юли	$150 \times 11{,}50$		200×10
			$150 \times 11{,}50$
Август		$100 \times 11{,}50$	200×10
			$50 \times 11{,}50$

Да поясним как се запълва горната таблица. При метода за оценка на запасите ЛИФО се предполага, че запасите, постъпили последни се реализират първи. Тогава продадените през май 400 единици са всички, закупени през април 300 по 11 лв. и 100 от мартенските по 10 лв. и в склада остават 400 по 10 лв. (от мартенските). През юни се реализират 200 от тях и остават 200 (по 10 лв.). Към тях се добавят 150 по 11,50 през юли, тогава продадените 100 през август са от юлските (по 11,50 лв.). Следователно запасите в края на периода се оценяват на $200 \times 10 + 50 \times 11{,}5 = 2575$ лв.

8.3. Метод за оценяване на запасите по средно претеглена цена.

При този метод на оценка всички запаси, намиращи се в склада се оценяват по средно претеглена цена и след това се реализират по тази цена. Този метод се прилага там, където има относително малки и трудно различими единици продукция с ниска стойност и която трудно се идентифицира с конкретна цена.

Пример 3: Да се направи оценка на запасите от Пример 1. По метода на средно претеглената цена.

Месец	Закупуване, лв. (по цена на закупуване)	Продажба, лв. (по оценъчна стойност)	Запаси след операция покупко-продажба, лв. (по оценъчна стойност)
Март	500×10		500×10
Април	300×11		$800 \times \frac{500 \times 10 + 300 \times 11}{800} = 800 \times 10{,}375$
Май		$400 \times 10{,}375$	$400 \times 10{,}375$
Юни		$200 \times 10{,}375$	$200 \times 10{,}375$
Юли	$150 \times 11{,}50$		$350 \times \frac{200 \times 10{,}375 + 150 \times 11{,}5}{350} = 350 \times 10{,}857$
Август		$100 \times 10{,}857$	$250 \times 10{,}857$

Пояснение на таблицата. След априлската покупка в склада има 800 единици на обща стойност $500 \times 10 + 300 \times 11 = 3300$ лв., следователно среднопретеглената цена е $3300/800 = 10{,}375$ лв. Тогава през май се продават 400 единици по 10,375 лв. и остават 400 по 10,375 лв., а през юни се реализират 200 единици от тях и остават 200 единици. Новата юлска покупка променя средно претеглената цена: в склада има 350 единици на стойност $200 \times 10{,}375 + 150 \times 11{,}5 = 3800$ лв., т.е среднопретеглената цена вече е $3800/350 = 10{,}857$ лв. През август се продават 100 единици и остават 250. Така оценката на запасите в края на разглеждания период е $250 \times 10{,}857 = 2714$ лв.

8.4. Влияние на различните методи за оценяване на запасите върху разчетите за печалбата.

Брутната печалба се изчислява по формулата:

Брутна печалба = Обем на продажбите (по цени на реализацията) – Себестойност на продадената продукция

като

Себестойност на продадената продукция = Запаси в началото на периода + Покупки (по цени на покупката) – Запаси в края на периода (по оценъчна стойност)

Тъй като запасите в края на периода (а също и тези в началото на периода) се оценяват по различен начин в зависимост от избрания метод на оценка на запасите, то и за брутната печалба ще се получават различни стойности.

Пример 4. Да се определи брутната печалба при условията на Примери 1, 2 и 3.

Във всеки от случаите обемът на продажбите (по цени на реализация) е един и същ - $400 \times 15 + 200 \times 16 + 100 \times 16{,}5 = 10850$ лв., запасите в началото на периода са 0, а покупките - $500 \times 10 + 300 \times 11 + 150 \times 11{,}5 = 10025$ лв. Попълваме таблицата

	ФИФО (лв.)	ЛИФО (лв.)	Метод на среднопретеглените цени (лв.)	
Обем на продажбите	10850	10850	10850	A
Запаси в началото на периода	0	0	0	B
Покупки	10025	10025	10025	C
Запаси в края на периода	2825	2575	2714	D
Себестойност на продадената продукция	7200	7450	7311	E
Брутна печалба	3650	3400	3539	F

Очевидно $A = E + F$ и $E = B + C - D$.

Виждаме, че в условия на повишаване на цените методиката ФИФО дава най-висока стойност на брутната печалба, а ЛИФО – най-ниска.

9. Стратегия за управление на запасите

9.1. Основни характеристики на моделите на управление на запаси

Проблемите на управление на запасите възникват в предприятията в много различни ситуации. Това могат да бъдат запасите от готова продукция, произведена в предприятието. Могат да бъдат и запаси от входните суровини и материали, инструменти и резервни части. В предприятията възникват и вътрешни запаси от полуфабрикати, произведени и подлежащи на допълнителна преработка. Всички тези запаси, възникнали по различни причини в различни ситуации са обединени от обща проблематика. Как да се организира процеса на вземане на управленски решения, така че да не възникват прекъсвания при снабдяването с продукти? Как при това да се минимализира издръжката, свързана със запасите? Правилното и своевременно определяне на оптималната стратегия за управление на запасите позволява да се освободят значителни средства, замразени във вид на запази, което в крайна сметка повишава ефективността на използваните в производството и търговията стоки и ресурси.

Да разгледаме основните характеристики на моделите на управление на запаси.

Търсене – то може да бъде детерминирано (в най-простия случай – постоянно във времето) или случайно. Случайността на търсенето се описва или като случаен момент на търсенето, или като случаен обем търсене в детерминиран или случаен момент от времето.

Попълване на склада – може да се осъществява или периодично или при изчерпване на запасите, т.е. при снижаването им до някакво критично ниво.

Обем на поръчката. Поръчката обикновено се подава за един и същ обем при достигане на запаса до критичното му ниво.

Време на доставка. Обикновено се предполага, че поръчаното попълнение на запаса се доставя в склада мигновено. В други модели се разглежда закъснение на доставката с фиксиран или случаен времеви интервал.

Разходи по доставката. Като правило, се предполага, че стойността на доставката е сума на два компонента – общи разходи, не зависещи от обема на доставката и разходи, зависещи (обикновено линейно) от този обем.

Разходи по съхранението – предполага се, че за всяка единица запас за единица време се заплаща фиксирана цена.

Глоба за дефицит. Всеки склад е създаден за да предотвратява дефицита на определен вид изделия. Отсъствието на запас в определен момент води до загуби. Тези загуби ще наричаме глоба за дефицит. Тя е фиксирана цена на дефицит на единица запас за единица време.

Номенклатура на запаса. В базовите модели се смята, че в склада се съхранява запас от еднотипни, хомогенни изделия. В по-сложни случаи се разглеждат складове със запаси от няколко вида.

Структура на складовата система. Най-пълно са разработени математическите модели на единичния склад. На практика обаче, се срещат по-сложни структури – йерархични системи от складове с различни периоди на попълване и времена на доставка, с възможности за обмен на запасите между складове на едно йерархично ниво.

Възникващите ситуации в логистиката на запасите са много различни по между си и не съществува единна рецепта, приготвена за всички случаи. Тук ще формулираме общ подход за решаване на различните задачи, свързани с управлението на запаси.

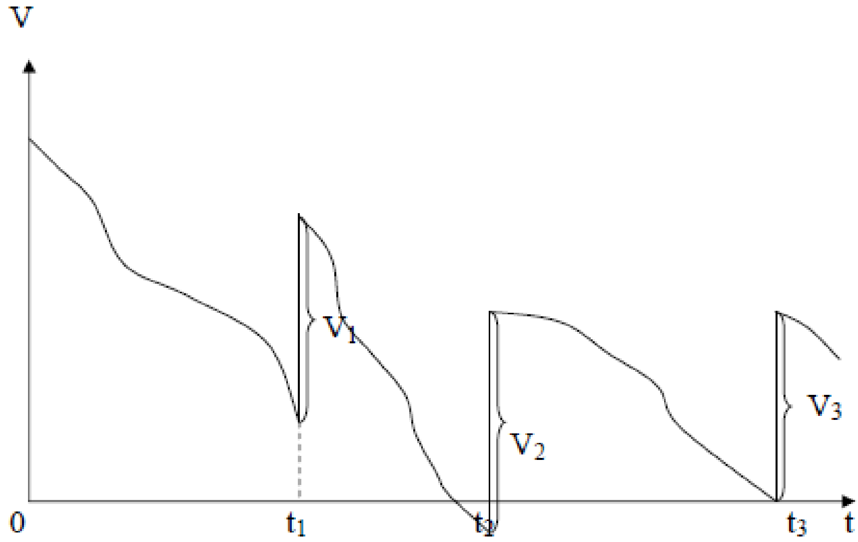


Рис. 22. Характерна графика на изменението на количеството запаси в склада като функция от времето

На рисунката е представена типична картина на динамиката на складовите запаси като графика на изменението на обема на запаси V като функция от времето t. Обемът на запасите постепенно намалява в съответствие с търсенето. В някои моменти от времето (на графиката това са моментите t_1, t_2, t_3) в склада постъпват доставки (с обеми V_1, V_2, V_3). Доставката в момент t_1 постъпва при положение, че в склада има запаси. Доставката в момент t_2 идва в момента на съществуващия дефицит, а в момент t_3 – точно в момент на изчерпване на запаса. Размерите на различните доставки могат да не съвпадат, самите доставки могат да постъпват в склада нерегулярно.

Ще разгледаме един прост модел на управление на запаси. Нека функциите $A(t)$ и $B(t)$ да изразяват съответно попълването и изразходването на запаса във времевия интервал $[0, t]$. В моделите за управление на запаси обикновено се използват производните на тези функции $a(t)$ и $b(t)$, наричани съответно интензивност на попълването и изразходването на запаса.

Нивото на запаса в момента от времето t се пресмята по формулата

$$V(t) = V_0 + A(t) - B(t),$$

където V_0 е количеството запас в началото: $V_0 = V(0)$. Горното уравнение по-често се използва в интегрална форма:

$$V(t) = V_0 + \int_0^t a(\tau)d\tau - \int_0^t b(\tau)d\tau$$

Пример 5. Интензивността на попълване на запасите в един склад в началото на смяната е 5бр./мин., като в първия час нараства линейно и достига до 10 бр./мин. и след това остава постоянна. Изразходването на запаса започва в началото на четвъртия час с интензивност b бр./мин., намалява линейно до края на смяната (8 часа) до 0 бр./мин. Да се определи b, така че в края на смяната наличните запаси да са колкото в началото на смяната. Да се пресметнат количествата на запасите на всеки кръгъл час, ако в началото няма запаси.

Решение. Интензивността на попълването нараства линейно в рамките на първия час, т.е. $a(t) = c + kt$. От $a(t) = c = 5$ и $a(60) = c + k60$ определяме $c = 5$ и $k = 1/12$. Тогава обемът на запасите през първия час ще се изчислява по формулата

$$V(t) = \int_0^t \left(5 + \frac{\tau}{12}\right) d\tau = 5t + \frac{t^2}{24} \quad \text{при } t \in [0,60]$$

В края на първия час обемът на запасите е $V(60) = 450$. За втория и третия час нивото на запасите ще се пресмята по формулата

$$V(t) = 450 + \int_{60}^t 10dt = 450 + 10t - 600 = 10t - 150 \quad \text{при } t \in [60,180]$$

В началото на четвъртия час започва изразходването на запаси, като интензивността на изразходване е линейна намаляваща функция, т.е. $b(t) = c - kt$. От $b(180) = c - k180 = b$ и $b(480) = c - k480 = 0$ получаваме $c = 1{,}6b$ и $k = b/300$. Тогава обемът на запасите от началото на четвъртия час до края на смяната ще се изчисляват по формулата

$$V(t) = 10t - 150 - \int_{180}^t \left(1{,}6b - \frac{b\tau}{300}\right) d\tau = 10t - 150 - b\left(1{,}6t - \frac{t^2}{600} - 234\right)$$

Неизвестната величина b ще бъде корен на уравнението

$$V(480) = 10.480 - 150 - b\left(1{,}6.480 - \frac{480^2}{600} - 234\right) = 0$$

или $b = 31$. Като заместим получената стойност на b във формулата за обема на запасите при $t \in [180,480]$ получаваме

$$V(t) = 7104 - 39{,}6t + \frac{31}{600}t^2$$

Чрез заместване на стойностите на t, съответстващи на кръглите часове получаваме

t	0	60	120	180	240	300	360	420	480
$V(t)$	0	450	1050	1650	576	-126	-459	-414	0

Горната таблица показва, че от известен момент $t_0 < 300$ (което може да бъде намерено като един от корените на уравнението $V(t) = 0$, получаваме $t_0 = 286{,}45$) обемите на запаса трябва да бъдат отрицателни. Разбира се, това е невъзможно и трябва да приемем, че $V(t)$ се изчислява по горната формула за $t \in [180, t_0]$, а при $t \in [t_0, 480]$ ще имаме $V(t) = 0$. Това означава, че в последния интервал интензивността на изразходването на запаса няма да бъде такава, каквато се предполагаше, а ще е равна на интензивността на попълване на запаса.

9.2. Ефективна стратегия за управление на запаси

Формирайки стратегия на управление на запасите, ние се стремим да управляваме дискретни доставки, приспособявайки се към неуправляемо, но прогнозируемо търсене. Стратегията на управление на запасите се състои от последователност от решения, определящи моментите за доставки и техните обеми. Качеството на една такава стратегия се определя от разходите. Стратегията е ефективна, ако разходите са минимални, следователно в качеството на целева функция на математическите модели на управление на запаси се използва функцията на общите разходи. **Управлението на запасите се състои в намирането на такава стратегия за попълване и изразходване на запасите, при която функцията на общите разходи приема минимална стойност.**

Разходите са свързани с:

- Доставката на запасите;
- Съхранението на запасите;
- Характера на търсенето;
- Характера на доставката (дали може цялото необходимо количество да се достави наведнъж или постепенно;)
- Капацитета на склада и/или на превозното средство (контейнера), извършващо доставката;
- Възможността за допускане или недопускане на дефицит от запаса.

Разходите по доставката се подразделят на постоянни и променливи (зависещи от обема на доставката).

- Постоянни разходи по доставката – това са разходи, независещи от размера на доставката. Към тях се отнасят организацията на поръчката, телефонните преговори, командировъчни и частично транспортните разходи. Те трябва да се включват в анализа на разработваната стратегия на управление на запасите. Означаваме тези разходи с C_0.

- Променливите разходи по доставката са разходите по закупуване (производство) на стоката, застрахователни и митнически, сборове, изчислявани като процент от стойността на това и др. Разглеждаме дълъг период от време. В условие на бездефицитна работа, системата трябва да покрива целия обем търсене за този период. Обемът на търсене не зависи от решенията за доставки, от това големи или малки са партидите, рядко или често се попълват запасите. Ясно е, че променливите разходи се определят от обема на търсене. По такъв начин те могат да не се отчитат при разработване на стратегията на управление на запасите.

Разходите по съхранение също се подразделят на постоянни и променливи.

- Постоянните разходи по съхранението на запаса свързани с арендата на складовите помещения, заплащане работата на персонала, заплащане на ток, охрана и др. Тези разходи не се променят при промяна на решенията на за управление на запасите, затова те не се включват в разглежданата стратегия.

- Променливите разходи по съхранение на запасите са пропорционални на обема на запасите и на продължителността на времето, в което те се съхраняват. Тук попадат пропуснатите ползи от замръзналите оборотни средства, застраховките на запаса, заплащане на разтоварване и претоварване на запаса, предпродажбената му подготовка, препакетирането му и др. Тези разходи за съхранение на единица запас за единица време играят роля в теорията на управление на запасите, ще ги означим с C_1.

По този начин, в изграждането на математическата теория на запасите ще участват две величини: величината C_0 на постоянните разходи по една доставка и величината C_1 – коефициент на променливите разходи по съхранение на запаса.

Ще отбележим, че в анализа се включват само разходите, зависещи от решенията за доставка. Например, разходите по закупуване на стоката се определят от търсенето и не влиза в оптимизационните разчети. Обаче, ако стойността на закупената стока не е пропорционална на обема ѝ (например, при отстъпки за количество), тя също трябва да бъде включена в тези разчети.

В качеството на критерий за оптималност се разглежда средната издръжка на запаса за единица време. Тази величина трябва да се минимизира. Ако за времето

t има $n = n(t)$ на брой доставки, то общата издръжка за това време е величината $R = R(t)$:

$$R(t) = C_0 n(t) + C_1 \int_0^t V(x)\,dx,$$

Където $V(t)$ е количество от запаса в момент на времето t.

Величината $M(t)$:

$$M(t) = \frac{R(t)}{t}$$

е средната издръжка за единица време.

Оптимизираната величина не трябва да зависи от избора на конкретен времеви интервал t затова в качеството на критерии се разглежда величината L:

$$L = \lim_{t \to \infty} M(t)$$

Разбира се, изменението (намаляването) обема на запаса $V(t)$ е в зависимост от търсенето на този запас $D = D(t)$, което трябва да бъде зададено екзогенно (вън от модела).

9.3. Класификация на моделите на управление на запас

По-долу е предложена една класификация на моделите на управление на запаси на принципа на дихотомията.

Детерминирани и стохастични модели. В зависимост от характера на търсенето различаваме детерминирани и стохастични модели. Като най – прост пример за детерминиран модел е такъв, при който търсенето е регулярно – за равни периоди от време се търсят равни обеми от запаса. Детерминираните модели в теория на запасите обикновено се свързват с вътрешно търсене (в рамките на предприятието) или при сключване на дългосрочни договори за реализация на продукцията.

Статични и динамични модели. Ако всички параметри на модела не се променят във времето, моделът се нарича статичен, а в противния случай – динамичен. Статичните модели се прилагат при вземане на еднократно решение за нивото на запасите, а динамичните – в случай на вземане на последователни решения или коригиране на решения, взети по-рано с отчитане на настъпилите промени.

Модели с внезапна или отложена доставка. Друга класификация на моделите за управление на запаси се свързва с това, дали доставката на всяко количество от запаса може да се извърши едновременно или постепенно. Обикновено втората възможност се реализира, ако запасът се произвежда в самото предприятие. Такива модели се наричат производствено – реализационни. При тях освен за темп на търсене става дума и за темп на доставка (производство), като вторият темп трябва да превъзхожда първия.

Модели с допускане или недопускане на дефицит. По – голямата част от моделите на управление на запасите са такива, при които не се допуска наличието на дефицит от запаса. Дефицитът е свързан с многобройни загуби – губят се не само текущи ползи, но и бъдещи възможности, губят се клиенти и перспективи. Въпреки това, в теорията на управление на запасите съществуват модели с планиран дефицит. При тези модели се въвежда величината C_2 – разход (глоба) за единица дефицитно количество от запаса за единица време. Очевидно, тази величина също е променлив разход и $C_2 \gg C_1$. Бездефицитните модели могат да се разглеждат като частен случай на дефицитните, ако положим $C_2 = \infty$.

Модели с ограничен или неограничен капацитет на склада. Друга класификация на моделите идва по линия на това, дали капацитетът на склада и/или превозното средство (контейнера) за доставка е неограничен или ограничен – различават се модели с неограничена или ограничена доставка.

Модели с един или няколко вида запаси. И на последно място, различаваме еднопродуктови и многопродуктови модели. При многопродуктовите модели, разбира се, може да се проведе оптимизация по всеки запас поотделно, но получените оптимални величини обикновено не водят до минимизиране на общите разходи по управление на многопродуктовия запас. В такъв случай възниква необходимостта от съчетани многопродуктови модели.

10. Базов модел на управление на запасите

10.1. Формула на Уилсън за оптималния размер на доставката

Във всички разглеждани модели ще предполагаме, че:

- разглеждания интервал от времето е една година, която се състои от N работни дни;
- става дума за единичен склад;
- запасът е неограничено делим.

Предпоставките на базовия модел на управление на запасите са:

- разглежда се еднотипен и хомогенен запас;
- търсенето е равномерно и постоянно – ако годишният обем на търсене е D количествени единици от запаса, то интензивността на търсенето е по D/N количествени единици дневно;
- моделът не допуска наличието на дефицит, т.е. изразходването на запаса винаги е равно на неговото търсене;

- складът и превозното средство, извършващо доставката са с неограничен капацитет;
- времето за доставка (изпълнение на поръчката) е постоянно;
- всеки път се поръчва едно и също количество - оптималния размер на поръчката.

Тогава ще имаме

$$TC(q) = TC_0(q) + TC_1(q)\,,$$

Където q е обема на доставката, $TC_0(q)$ са общите разходи за всички доставки през разглеждания период, $TC_1(q)$ са общите разходи по съхранението на запаса, а $TC(q)$ – общите разходи по образуване и съхранение на запаса.

Тъй като годишното търсене на запаса е D количествени единици, а една доставка е в размер на q количествени единици, то броят на доставките (поръчките) ще бъде D/q и понеже C_0 е разхода за една доставка, то

$$TC_0(q) = C_0\frac{D}{q}$$

ще бъдат общите разходи за всички доставки през разглеждания период.

Тъй като q е максималното количество от запаса, а 0 – минималното и запасът се изчерпва равномерно, $q/2$ ще бъде средното количество от съхранявания в склада запас и понеже C_1 е разходът за съхранение на единица запас за една година, то

$$TC_1(q) = C_1\frac{q}{2}$$

ще бъдат общите разходи за съхранението на запаса през разглеждания период.

Така за целевата функция на базовия модел получаваме

$$TC(q) = C_0\frac{D}{q} + C_1\frac{q}{2}$$

Решаването на модела се състои в намирането на оптимален обем за доставка q, при който общите разходи са минимални. Намираме първата поизводна на функцията на общите разходи

$$TC'(q) = -C_0\frac{D}{q^2} + \frac{C_1}{2}$$

$$TC'(q) = 0 \Leftrightarrow C_0\frac{D}{q^2} = \frac{C_1}{2} \Leftrightarrow q = \sqrt{\frac{2C_0D}{C_1}}$$

Тъй като $TC''(q) = 2C_0\frac{D}{q^3} \Longrightarrow TC''\left(\sqrt{\frac{2C_0D}{C_1}}\right) = C_1\sqrt{\frac{C_1}{2C_0D}} > 0$, то действително става дума за минимум.

Полученият израз за оптималният размер на поръчката q

$$q = \sqrt{\frac{2C_0D}{C_1}}$$

е известен като **формула на Уилсън** и намира много широко приложение в икономиката. Като заместим оптималния размер за доставка във формулата за общите разходи, получаваме минималните общи разходи

$$TC_{min} = TC\left(\sqrt{\frac{2C_0D}{C_1}}\right) = \sqrt{2C_0C_1D}$$

Графиката на функцията на общите разходи ще изглежда така:

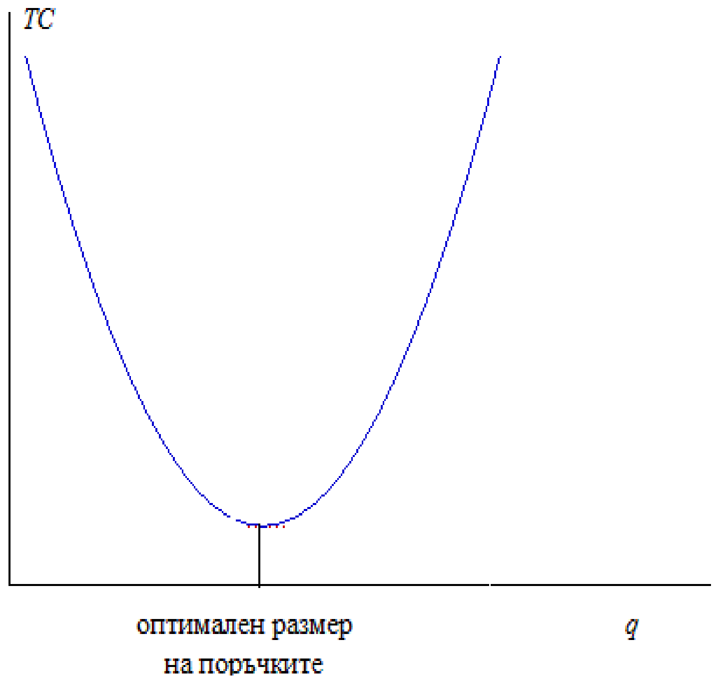


Рис. 23. Графика на функцията на общите разходи

Формулата на Уилсън може да се получи и без използване на производни. Произведението на $TC_0(q)$ и $TC_1(q)$ е константа:

$$TC_0(q)TC_1(q) = C_0\frac{D}{q}C_1\frac{q}{2} = \frac{C_0C_1D}{2}$$

Известно е, че ако произведението на две величини е константа, то сумата им ще е минимална, ако те са равни по между си, следователно

$$TC_0(q) = TC_1(q) = \sqrt{\frac{C_0 C_1 D}{2}}$$

Горното равенство се получава само ако q се изразява чрез формулата на Уилсън. Така се вижда, че *минимумът на общите разходи по управлението на запасите се достига при изравняване на разходите за създаване и съхранение на запаса.*

Пример 6: Годишното търсене е D=1500 единици, стойността на подаване на заявката е C_0=150 лева за една поръчка; издръжката за съхранение на единица продукция е 45 лева за година; времето на доставката е 6 дни. Ще считаме, че 1 година има 300 работни дни. Да се намерят: оптималния размер на поръчката; общата издръжка на запасите; нивото на запасите, при които се подава поръчката; броят на циклите за една година; разстоянието между циклите.

Решение: По формулата на Уилсън ще имаме:

$$q = \sqrt{\frac{2C_0 D}{C_1}} = \sqrt{\frac{2.15.1500}{45}} = \sqrt{\frac{2.1.500}{3}} = \sqrt{10000} = 100 \text{ единици.}$$

Общата издръжка на запасите ще бъде:

$$TC(100) = \frac{C_0 D}{q} + \frac{C_h D}{2} = \frac{150.15}{100} + \frac{45.1}{2} = 2250 + 2250 = 4500\text{лева}$$

За 300 работни дни се реализират 1500 единици, от което следва, че за един работен ден се реализират 5 единици, следователно 6 работни дни са равни на 30 единици, следователно, когато в склада останат 30 единици трябва да се подаде заявката. Броят на циклите за една година е $\frac{D}{q} = \frac{1500}{100} = 15$, като разстоянието между тях е $\frac{300}{15} = 20$ работни дни.

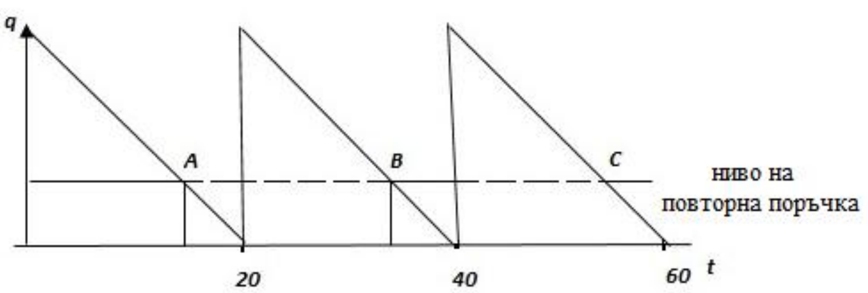


Рис. 24. Подаване на поръчка при базовия модел на управление на запасите

Забележка: *A,B,C* са точки на подаване на поръчката.

10.2. Устойчивост на общите разходи

На практика, обаче, обемът на доставката може да се различава от оптималния обем, пресметнат по формулата на Уилсън. Например, това може да стане при ограничен капацитет на превозното средство, извършващо доставката. Нека капацитета е $Q < q$ – оптималния обем. Възниква въпросът: как се изменят (нарастват) минималните общи разходи при отклонение на обема на доставката от оптималния?

За да отговорим на този въпрос ще развием функцията на общите разходи $TC(Q)$ в ред на Тейлор в околност на точката $Q = q$ при достатъчно малки отклонения $\Delta Q = Q - q$, ограничавайки се с първите три члена на реда:

$$TC(Q) = TC(q) + TC'(q)\Delta Q + \frac{TC''(q)}{2}\Delta Q^2 + \cdots$$

Отчитайки, че при $Q = q$ $TC'(q) = 0$ и

$$TC''(q) = C_1\sqrt{\frac{C_1}{2C_0 D}}$$

получаваме

$$\Delta TC = TC(Q) - TC(q) \approx \sqrt{\frac{{C_1}^3}{8C_0 D}}\Delta Q^2$$

и

$$\frac{\Delta TC}{TC(q)} \approx \sqrt{\frac{{C_1}^2}{16{C_0}^2 D^2}}\Delta Q^2 = \frac{C_1}{4C_0 D}\Delta Q^2$$

Но според формулата на Уилсън

$$q^2 = \frac{2C_0 D}{C_1}$$

Така окончателно получаваме

$$\frac{\Delta TC}{TC} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta Q}{q}\right)^2$$

Горната формула показва, че е налице сравнителна устойчивост на общите разходи по отношение на оптималния обем за поръчка, тъй като при малки отклонения ΔQ относителното изменение на разходите е с порядък по-малко от относителното изменение на обема от оптималния.

Пример 7. При данните от пример 6 да се намери с колко процента се повишават общите разходи по управление на запасите, ако се налага обема на доставката да бъде не по-голям от 84 количествени единици от запаса?

Решение:

Тъй като оптималният обем на доставката е $q = 100$ и за по-малки обеми функцията на общите разходи е намаляваща, то ще трябва обема на доставката да бъде $Q = 84$. Тогава $\Delta Q = q - Q = 16$ и относителното отклонение от обема ще бъде

$$\frac{\Delta Q}{q} = 0{,}16$$

Като използваме горната формула, получаваме

$$\frac{\Delta TC}{TC} \approx \frac{1}{2}(0{,}16)^2 = 0{,}0128,$$

което показва, че при отклонение на обема за доставка от оптималния с 16% общите разходи нарастват спрямо минималните само с 1,28%.

10.3. Модел с отстъпка за количество

Много често, ако поръчаното количество от стоката е по-голямо от определено число, се предоставя отстъпка. В този случай се понижават разходите за покупка, но се повишават разходите за съхранение. Тогава ще имаме:

Обща издръжка = закупуване + издръжка $TC(q) = CD + \frac{C_0 D}{q} + \frac{C_1 q}{2}$,

където C е цената на купуване на продукта. В този случай е необходимо да се изясни, необходимо ли е да се възползваме от отстъпката?

Пример 8: Годишното търсене на стоката е D е 1000 единици, стойността на подаване на заявката $C_0 = 40$ лева за поръчка, цената за закупуване е $C = 50$ лева за единица, годишният разход за съхраняване на една единица е 25% от цената и. Може да се получи отстъпка от доставчиците в размер на 3% от цената, в случай, че се заявят не по-малко от 200 единици. Струва ли си да се възползваме от отстъпката?

Решение:

А) без отстъпка

$$C_1 = 0{,}25C = 0{,}25.5 = 12{,}5 \text{ лева за единица.}$$

Да намерим общата издръжка в случая без отстъпка:

$q = \sqrt{\frac{2C_0 D}{C_h}} = \sqrt{\frac{2.4.1000}{12{,}5}} = 80$ единици.

Общата издръжка е:

$$TC = CD + \frac{C_0 D}{q} + \frac{C_1 q}{2} = 50.1000 + \frac{40.1000}{80} + \frac{12{,}5.80}{2} =$$

$$= 50000 + 500 + 500 = 51000 \text{ лева.}$$

Б) с отстъпка

Тогава цената на закупуване ще бъде:

$$C = 0{,}97.50 = 48{,}51 \text{ лева за единица.}$$

Тогава за $C_1 = 0{,}25.48{,}5 = 12{,}125$ лева за единица.

В този случай оптималният размер на поръчката ще бъде:

$$q = \sqrt{\frac{2C_0D}{C_1}} = \sqrt{\frac{2.40.1000}{12{,}125}} \approx 81 \text{ единици.}$$

Но отстъпката се дава за 200 единици, тоест ако $q \geq 200$, да положим $q = 200$. Тогава общите разходи ще бъдат:

$$TC = CD + \frac{C_0D}{q} + \frac{C_1q}{2} = 48{,}5.1000 + \frac{40.1000}{200} + \frac{12{,}125.200}{2} =$$

$$= 48500 + 200 + 1212{,}5 = 49912$$

Извод: Вижда се, че общата издръжка се намалява, следователно трябва да се възползваме от отстъпката, като поръчваме всеки път по 200 единици. Броят на поръчките е $\frac{1000}{200} = 5$ за година, а за интервала между тях- $\frac{1}{5}$ година равна на 73 дни.

11. Производствено-реализационни модели за управление на запасите

Технологичният процес може да бъде организиран чрез редуване на циклите на производството и реализация на продукцията.

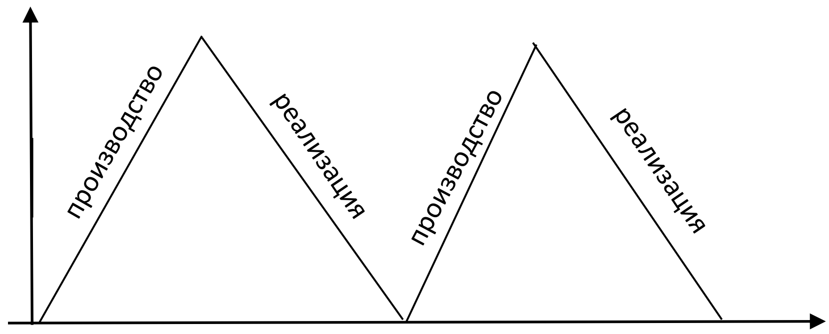


Рис. 25. Технологичен процес на отделени цикли на производство и реализация

Какъв трябва да бъде размерът на q на икономичната партида?

Означаваме с C_s стойността на организацията на производствения цикъл (фиксирана издръжка на производството).

Издръжката ТС е равна на стойността на организацията на производствения процес плюс разходите за съхранение.

$$\text{TC} = \frac{C_s D}{q} + \frac{C_1 q}{2} \to min.$$

Решението на задачата е по формулата на Уилсън:

$$q = \sqrt{\frac{2C_s D}{C_1}}$$

Пример 9: Годишното търсене на стоката е $D = 14800$ единици; стойността на организация на производствения цикъл $C_s = 100$ лева, издръжката за съхранение на една единица е $C_1 = 8$ лева за година.

Решение:

Икономичният размер на партидата е:

$$q = \sqrt{\frac{2C_s D}{C_1}} = q = \sqrt{\frac{2.100.14800}{8}} \approx 608 \text{ единици.}$$

Следователно трябва да се произведат 608 единици, да се спре производството, да се реализира произведената продукция и отново да се пристъпи към производство.

Издръжката ТС е равна на:

$$\mathrm{TC}(608) = \frac{C_s D}{q} + \frac{C_1 D}{2} = \frac{100.14800}{608} + \frac{8.608}{2} = 2434 + 2432$$
$$= 4866 \text{ лева за година.}$$

Броят на циклите за една година е $\frac{14800}{608} \approx 24{,}3$.

Дължината на един цикъл е $\approx$ 15 дни.

11.1. Обобщение на модела

Нека сега да разрешим използването (реализацията на продукцията) и по време на производството.

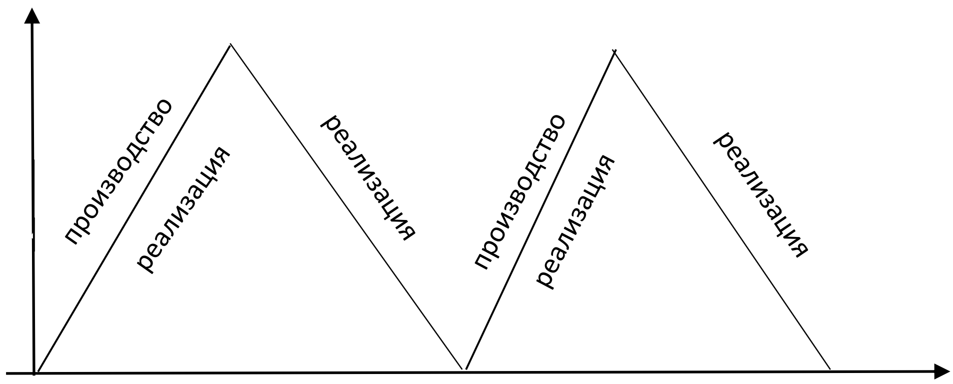


Рис. 26. Графика на производствено-реализационен модел

Нека P е темпът на производство, D - темпа на реализация. $(P > D)$. Отначало започваме производсво и същевременно реализация, като произведем оптимална партида q броя, спираме производството и започваме само реализация. При спиране на производството в склада няма да има q единици от продукцията, защото част от нея вече е реализирана. По-точно в склада ще има количество $\frac{P-D}{P}q$.

Издръжката TC е равна на сбора на разходите по организацията на технологичния процес и разходите за съхранение.

$$TC = \frac{C_s D}{q} + \frac{C_1(P-D)}{2P} q \to min,$$

където q е икономичния размер на партидата.

За да се получи решение ще приложим формулата на Уилсън, като заместим C_1 с $\frac{C_1(P-D)}{P}$. Така получаваме

$$q = \sqrt{\frac{2C_sD}{C_1}}\sqrt{\frac{P}{P-D}}$$

Пример 10: Компания произвежда електрически ножове, като може да произведе средно по 150 ножа на ден. Търсенето обаче е 40 ножа на ден. Годишната издръжка за съхранение е $C_1 = 8$ лева на нож, стойността на организация на производствения цикъл е $C_s = 100$ лева. Приемаме, че в годината има 250 работни дни. Да се намерят: а) икономичния размер на партидата; б) общата издръжка; в) броят на производствените цикли за година и разстоянието между тях.

Решение:

$P = 150$ ножа на ден, от което следва, че за година 37500 ножа. $\mathrm{D} = 40$ ножа на ден $= 10000$ ножа за година.

$q = \sqrt{\frac{2C_SD}{C_1}}\sqrt{\frac{P}{\mathrm{P-D}}} = q = \sqrt{\frac{2.100.10000}{8}}\sqrt{\frac{3750}{3750-10000}} = 500.1{,}168 \approx 584$ ножа.

$$TC = \frac{C_sD}{q} + \frac{C_1(P-D)}{2P}q = 100.\frac{10000}{584} + \frac{8.27500}{2.37500}.584 = 1712 + 1713 = 3425$$

Броят на произведените цикли е $\frac{10000}{584} \approx 17{,}12$.

Разстоянието между тях е $\frac{250}{17{,}12} \approx 14{,}60$, което е дължината на всеки от тях.

Цикълът производство с реализация трае $\frac{584}{150} \approx 3{,}89$ дни, а цикълът само на реализация е $10{,}71$ дни.

Най-големият запас е $3{,}89.110 = 428$ ножа.

Забележка: Често производствено-реализационните модели в теорията на управление на запасите се наричат модели със забавена доставка. В този случай интерпретираме P като темп на доставка. Има се пред вид, че в базовия модел доставеното количество пристига в склада незабавно, а при тези модели – постепенно. Тогава за базовия модел ще имаме $P = \infty$ и от формулата

$$q = \sqrt{\frac{2C_sD}{C_1}}\sqrt{\frac{P}{P-D}}$$

получаваме формулата на Уилсън.

12. Модели с планиран дефицит

В някои случаи издръжката за съхранение е изключително висока. За това има смисъл да се допусне наличието на регулярен дефицит от запасите в склада.

Разбира се, това допускане кореспондира и с наличието на глоба (загуби, пропуснати ползи) при наличието на такъв дефицит.

Общата издръжка се получава от сбора на разходите за поръчка, разходите за съхранение и глобите за дефицит. Възможни са два подхода:

- Получената нова продукция не отива за изпълнение на заявки за стоката по времето на нейното отсъствие в склада;
- Част от получената нова продукция се изразходва за погасяването на заявки, постъпили по времето на дефицита.

12.1. Случай на неизпълнение на заявките

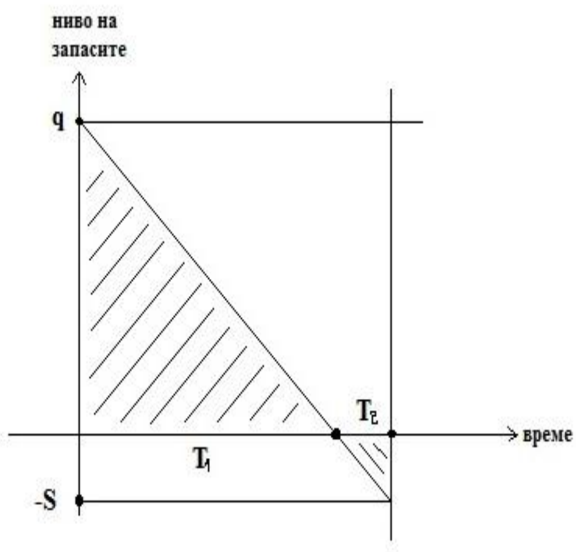


Рис. 27. Модели с планиран дефицит - случай на неизпълнение на заявките

Нека q е оптималния размер на партидата, S – оптималния размер на дефицита. Нека T_1 е времето без дефицит, T_2 – времето с дефицит, а $T_1 + T_2 = T$ – дължината на цикъла. Тогава от подобието на защрихованите триъгълници ще имаме $\frac{T_1}{T_2} = \frac{q}{S} \Rightarrow T_1 = \frac{q}{q+S}T$ и $T_2 = \frac{S}{q+S}T \Rightarrow \frac{q}{q+S}$ от времето в склада няма да има дефицит, а $\frac{S}{q+S}$ – ще има дефицит.

Нека C_o са разходите за организиране на цикъла (подаване на поръчката), C_1 - разходите за съхранение на единица от стоката за година; C_2 – глоба за дефицит от единица от стоката за година, тогава:

- $\frac{D}{q+S}$ - брой на циклите (поръчките) за година;
- $C_o \frac{D}{q+S}$ - разходите за поръчките;

- $\frac{q}{q+S}\frac{q}{2}C_1$ - разходите за съхранение (средната наличност на запаса е $\frac{q}{2}$);
- $\frac{S}{q+S}\frac{S}{2}C_2$ - разходите за глобата (средният размер на дефицита е $\frac{S}{2}$).

Тогава

$$TC(q,S) = C_o\frac{D}{q+S} + C_1\frac{q^2}{2(q+S)} + C_2\frac{S^2}{2(q+S)}$$

Намираме критичните точки чрез решаване на системата

$$\frac{dTC(q,S)}{dq} = \frac{dTC(q,S)}{dS} = 0$$

Ще имаме

$$\frac{dTC}{dq} = 0 \Leftrightarrow -2C_oD + C_1q^2 + 2C_1qS - C_2S^2 = 0$$

$$\frac{dTC}{dS} = 0 \Leftrightarrow -2C_oD + C_2S^2 + 2C_2qS - C_1q^2 = 0$$

Решенията на горната система са

$$q = \sqrt{\frac{2C_oD}{C_1}}\sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}\ ;\ S = \sqrt{\frac{2C_oD}{C_2}}\sqrt{\frac{C_1}{C_1+C_2}}$$

Проверява се, че тези критични точки съответстват на глобален максимум.

Тогава ще имаме

$$q + S = \sqrt{\frac{2C_oD}{C_1C_2}}\sqrt{C_1+C_2}$$

и общите разходи ще възлизат на

$$TC = \sqrt{\frac{2C_oDC_1C_2}{C_1+C_2}}$$

За броя на циклите през годината получаваме $\sqrt{\frac{DC_1C_2}{2C_o(C_1+C_2)}}$

Пример 11: Годишното търсене е $D = 500$ ед., разходите за подаване на поръчката са $C_o = 40$лв. за поръчка, издръжката за съхранение - $C_1 = 5$лв. за единица за година, глобата $C_2 = 20$лв. за отсъствието на единица за една година. Да се намерят екзогенните величини на модела и да се сравни с модела без дефицит. (Предполага се, че годината има 250 работни дни).

Решение:

1. Без да се допуска дефицит (базов модел)

$$q = \sqrt{\frac{2C_oD}{C_1}} = \sqrt{\frac{2.40.500}{5}} = 89{,}44$$

$$TC_1 = \frac{C_oD}{q} + \frac{C_1q}{2} = \frac{40.500}{89{,}44} + \frac{5.89{,}44}{2} = 447{,}21$$

2. С допускане на дефицит

$$q = \sqrt{\frac{2C_oD}{C_1}}\sqrt{\frac{C_2}{C_1 + C_2}} = \sqrt{\frac{2.4.500.20}{5.25}} = 80$$

$$S = \sqrt{\frac{2C_oD}{C_2}}\sqrt{\frac{C_1}{C_1 + C_2}} = \sqrt{\frac{2.40.500.5}{20.25}} = 20$$

$$TC_2 = C_o\frac{D}{q+S} + C_1\frac{q^2}{2(q+S)} + C_2\frac{S^2}{2(q+S)} =$$

$$= \frac{40.500}{20+80} + \frac{5.80^2}{2(20+80)} + \frac{20.20^2}{2(20+80)} =$$

$$= \frac{40.500}{100} + \frac{5.80^2}{200} + \frac{20.20^2}{200} =$$

$$= 200 + 160 + 40 = 400$$

Вижда се, че разходите са спаднали

$$TC_1 = 447{,}21 > 400 = TC_2$$

Броят на циклите е $\frac{D}{q+S} = \frac{500}{80+20} = 5$, а разстоянието между тях - $\frac{250}{50} = 50$ работни дни = Т. От тях $\frac{q}{q+S}T = \frac{80}{100}50 = 40$ работни дни няма дефицит, а през останалите работни дни има дефицит.

Като цяло търсенето е задоволено на $80\% = 400$.

Очевидно е, че

$$\frac{q}{S} = \frac{\sqrt{2C_oD}}{\sqrt{C_1}}\frac{\sqrt{C_2}}{\sqrt{C_2 + C_1}}\frac{\sqrt{C_2}}{\sqrt{2C_oD}}\frac{\sqrt{C_2 + C_1}}{\sqrt{C_1}} = \frac{C_2}{C_1}$$

т.е. съотношението на максималните количества на наличност и дефицит е в обратна пропорция на съотношението на разходите за съхранение на наличностите и глобите за дефицит.

Задоволеното търсене е

$$D_o = \frac{q}{q+S}D = \frac{C_2}{C_2+C_1}D$$

Този метод е разумно да се прилага само в случаите на голямо съотношение $C_2 : C_1$ или, когато глобата за неналичие на стоката е много по-голяма от разходите по съхранението ѝ.

12.2. Случай на изпълнение на заявките

Ако обемът на поръчката е q, а допустимият дефицит - S, то при пристигане на стоката трябва да се изпълнят заявките, постъпили по време на дефицита, т.е. максималното наличие на запаса ще бъде $q - S$.

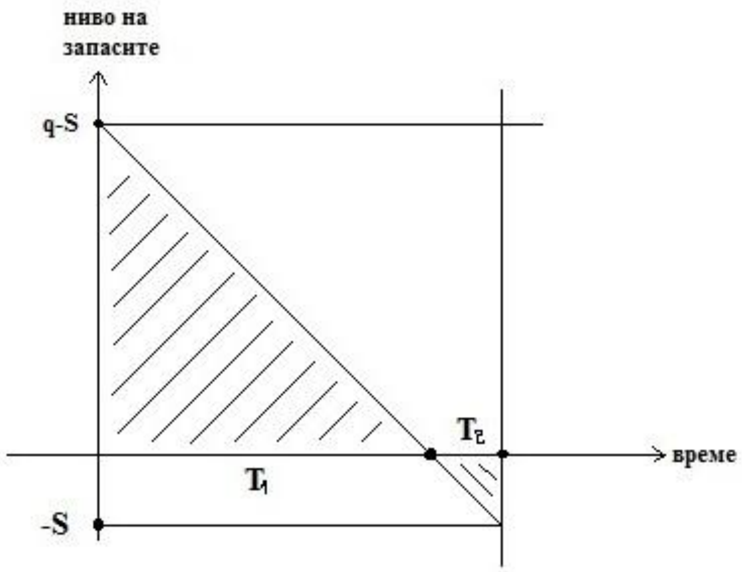


Рис. 28. Модели с планиран дефицит - случай на изпълнение на заявките

От подобието на защрихованите триъгълници се вижда, че $\frac{T_1}{T_2} = \frac{q-S}{S}$.

Тъй като

$$T_1 + T_2 = T \Rightarrow T_1 = \frac{q-S}{q}T \text{ и } T_2 = \frac{S}{q}T$$

Тогава, общите разходи за запасите ще са равни на сбора от разходите за поръчките, разходите за съхранението и глобата за дефицит.

- Разходи за поръчка = C_o ×(броя на поръчките) = $C_o \frac{D}{q}$;
- Разходи за съхранение = $C_1 \times$ (делът от времето без дефицит) $\times$ (средният размер на запаса) $= C_1 \frac{q-S}{q} \frac{q-S}{2} = \frac{C_1(q-S)^2}{2q}$;
- Разходи за глоба = $C_2 \times$ (делът от времето с дефицит) $\times$ (средният размер на дефицита) $= C_2 \frac{S}{q} \frac{S}{2} = C_2 \frac{S^2}{2q}$;

следователно

$$TC(q,S) = C_o \frac{D}{q} + C_1 \frac{(q-S)^2}{2q} + C_2 \frac{S^2}{2q}$$

Ще имаме

$$\frac{dTC}{dq} = -2C_o D + C_1(q^2 - S^2) - C_2 S^2 = 0$$

$$\frac{dTC}{dS} = C_1(S-q) + C_2 S = 0$$

От последното равенство получаваме

$$S = \frac{C_1}{C_1 + C_2} q$$

Заместваме в първото, от където:

$q = \sqrt{\frac{2C_o D}{C_1}} \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_2}}$ и $S = \sqrt{\frac{2C_o D}{C_2}} \sqrt{\frac{C_1}{C_1 + C_2}}$

и общите разходи ще възлизат на

$$TC = \sqrt{\frac{2C_o D C_1 C_2}{C_1 + C_2}}$$

Пример 12: Да се пресметнат параметрите на модела за дефицит с изпълнение на поръчката при данните на Пример 11.

Решение:

$$q = \sqrt{\frac{2.40.500.25}{5.20}} = \sqrt{1000} = 100$$

$$S = 20$$

$$TC = 40 \frac{500}{100} + 5 \frac{(100-20)^2}{2.100} + 20 \frac{20^2}{2.100} =$$

$$= 40.5 + 5\frac{80^2}{200} + 20.2 =$$

$$= 200 + 160 + 40 = 400$$

Броят на циклите е $\frac{D}{q} = \frac{500}{100} = 5$;

Разстоянието между тях $T = \frac{250}{5} = 50$ работни дни.

През 40 дни няма дефицит и се реализират 80 бройки, а през следващите 10 дни се натрупва дефицит в размер на 20 бройки. Поръчката от 100 бройки се разпределя така: 20 бройки отиват за погасяване на натрупаният от предишния цикъл дефицит, а останалите за изпълнение на заявките през следващите бездефицитни 40 работни дни.

12.3. Плътност на загубите от дефицит

Величината

$$\rho = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$$

се нарича плътност на загубите от неудовлетвореното търсене и играе важна роля в управлението на запасите. Ясно е, че $0 \leq \rho \leq 1$. Ако значението на C_2 е малко, в сравнение с това на C_1, то ρ е близко до нула, а когато C_2 превъзхожда значително C_1 (такава ситуация е най-често срещана) ρ е близко до единица. Недопускането на дефицит е равнозначно на предположението, че $C_2 = \infty$ или $\rho = 1$. Ако използваме плътността ρ горните формули могат да се запишат в по-компактен вид:

$$q_1 = q\sqrt{\rho}$$

$$q_2 = \frac{q}{\sqrt{\rho}} = q_1 + S_1$$

$$S_1 = S_2 = \frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}}q$$

$$TC_2 = TC_1 = TC\sqrt{\rho}$$

Където с q и TC сме означили оптималните стойности на базовия модел; с q_1, S_1 и TC_1 – на модела с планиран дефицит и неизпълнение на заявките, а с q_2, S_2 и TC_2 – на модела с планиран дефицит и изпълнение на заявките.

13. Производствено – реализационен модел с допускане на дефицит и изпълнение на заявките

Сега ще разгледаме най – общият детерминиран модел с производство и реализация, постоянна интензивност на търсенето, допускане на дефицит и изпълнение на заявките (търсене по време на дефицита). Цикълът на управление се разделя на четири части, $T = T_1{}' + T_1{}'' + T_2{}' + T_2{}'$

В течение на $T' = T_1{}' + T_2{}'$ имаме едновременно производство и реализация, а през $T'' = T_1{}'' + T_2{}''$ – само разход на запаса. Частта $T_1 = T_1{}' + T_1{}''$ е бездефицитната част от времето, а $T_2 = T_2{}' + T_2{}''$ - дефицитната.

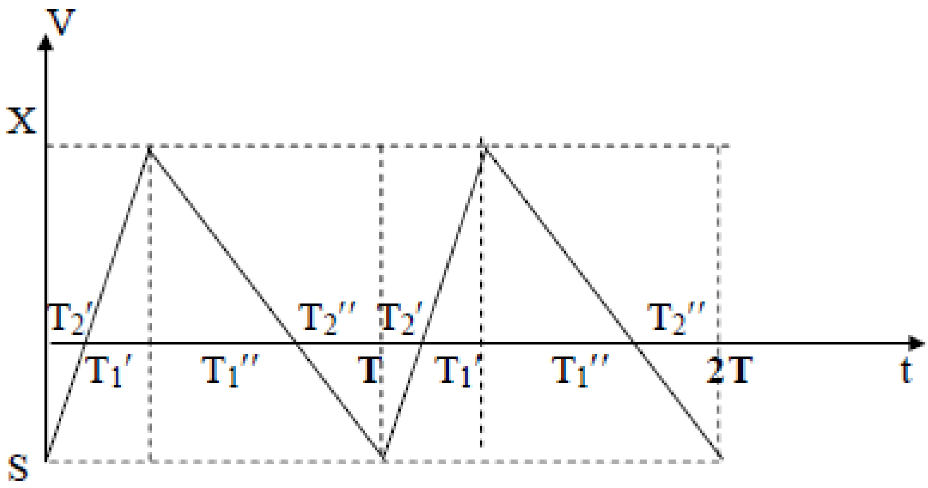


Рис. 29. Производствено-реализационен модел с планиран дефицит и изпълнение на заявките - графична картина

Параметри на модела:

D – количество търсена стока за разглеждания период от време (интензивност на търсенето);

P – възможно количество произведена стока за периода (интензивност на производството);

C_0 – фиксирана издръжка, свързана с еднократно попълнение на запасите в склада;

C_1 – издръжка за съхранение на единица от запаса през разглеждания период от време;

C_2 – издръжка за единица дефицитно количество през периода.

Нека T е дължината на цикъла на управление на запасите.

$T_1{}'$ – интервал на удовлетворяване на търсенето (интервал на наличие на запас и отсъствие на дефицит) в условие на съществуване на производството;

$T_1{}''$ – интервал на удовлетворяване на търсенето в условие на спряно производство;

$T_2{}'$ – интервал на дефицит при наличие на производство;

T_2'' – интервал на дефицит при отсъствие на производство;

q – търсеното оптимално количество за доставка на запасите;

S – търсеният оптимален допустим размер на дефицита;

x – максималният наличен обем в склада.

Тогава общите разходи $TC(q,S)$ ще се полчат при сумирането на три вида разходи:

- Разходи за организиране на производството $= C_0 \times$(броят на циклите)$= C \times \frac{D}{q}$.
- Разходи по съхранение $= C_1 \times$ (делът на времето без дефицит) $\times$ (средният размер на запаса) $= C_1 \times \frac{T_1' + T_1''}{T} \times \frac{x}{2}$
- Разходи по издръжка на дефицита (глоба) $= C_2 \times$ (делът от времето с дефицит) $\times$ (средният размер на дефицита) $= C_2 \times \frac{T_2' + T_2''}{T} \times \frac{S}{2}$

Максималното количество x се получава от фармулата:

$$x = x_1 - S,$$

Поради това, че заявките, натрупани по време на дефицита трябва да се използват (модел на планиран дефицит с изпълнение на заявките). В горната формула x_1 е максималното количество за модела производство – реализация, т.е.

$$x_1 = \frac{P - D}{P} q$$

Така окончателно получаваме:

$$x = \frac{P - D}{P} q - S$$

Ясно е, че

$-\frac{D}{P}$ – частта от времето с производството;

$-\frac{P-D}{P}$ – частта от времето без производство.

Тогава

$$\frac{T_1' + T_2'}{T} = \frac{D}{P}$$

От друга страна, от подобието на правоъгълните триъгълници, ще имаме

$$\frac{T_1'}{T_2'} = \frac{x}{S}$$

Като решим горната система (с неизвестни T_1' и T_2') получаваме:

$$\frac{T_1{}'}{T} = \frac{x}{x+S}\frac{D}{P} \qquad \frac{T_2{}'}{T} = \frac{S}{x+S}\frac{D}{P}$$

Аналогично

$$\frac{T_1{}'' + T_2{}''}{T} = \frac{P-D}{P}$$

А от другите подобни правоъгълни триъгълници ще имаме

$$\frac{T_1{}''}{T_2{}''} = \frac{x}{S}$$

Решенията на тази система са:

$$\frac{T_1{}''}{T} = \frac{x}{x+S}\frac{P-D}{P};\ \frac{T_2{}''}{T} = \frac{S}{x+S}\frac{P-D}{P}$$

Нека сега да изразим общите разходи $TC(q,S)$, като функции само на променливите q и S. Означаваме с TC_1 разходите за организиране на производството, с TC_2 – разходите по съхранение и с TC_3 – разходите по издръжка на дефицита. За TC_2 ще имаме

$$TC_2 = \frac{C_1}{2}\left(\frac{T_1{}'}{T} + \frac{T_1{}''}{T}\right)x = \frac{C_1}{2}\left(\frac{x}{x+S}\frac{D}{P} + \frac{x}{x+S}\frac{P-D}{P}\right)x = \frac{C_1}{2}\frac{x^2}{x+S}$$
$$= \frac{C_1}{2}\frac{\left(\frac{P-D}{P}q - S\right)^2}{\frac{P-D}{P}q}$$

За TC_3 получаваме:

$$TC_3 = \frac{C_2}{2}\left(\frac{T_2{}'}{T} + \frac{T_2{}''}{T}\right)S = \frac{C_2}{2}\left(\frac{S}{x+S}\frac{D}{P} + \frac{S}{x+S}\frac{P-D}{P}\right)S = \frac{C_2}{2}\frac{S^2}{x+S} = \frac{C_2}{2}\frac{S^2}{\frac{P-D}{P}q}$$

Означаваме $\frac{P-D}{P} = \alpha$ и за общите разходи $TC(q,S)$ ще имаме

$$TC(q,S) = C_0\frac{D}{q} + \frac{C_1}{2}\frac{(\alpha q - S)^2}{\alpha q} + \frac{C_2}{2}\frac{S^2}{\alpha q}$$

Трябва да намерим критичните точки от решенията на системата $\frac{dT(q,S)}{dq} = 0.$

$\frac{dT(q,S)}{dS} = 0$. Ще имаме

$$-2C_0D + \frac{C_1}{\alpha}(\alpha^2q^2 - S^2) - \frac{C_2}{\alpha}S^2 = 0$$

$$-C_1(\alpha q - S) + C_2 S = 0$$

От второто уравнение получаваме:

$$S = \frac{\alpha q C_1}{C_1 + C_2}$$

Заместваме в първото, откъдето

$$q = \sqrt{\frac{2C_0 D}{\alpha C_1}} \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_2}}$$

или

$q = \sqrt{\frac{2C_0D}{C_1}}\sqrt{\frac{P}{P-D}}\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}$ и $S = \sqrt{\frac{2C_0D}{C_2}}\sqrt{\frac{P-D}{P}}\sqrt{\frac{C_1}{C_1+C_2}}$

На базата на получените оптимални стойности за обема на доставката q и величината на допуснатия дефицит S можем да получим и други параметри на модела, например:

$$x = \sqrt{\frac{2C_0 D}{C_2}} \sqrt{\frac{P-D}{P}} \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_1} + \frac{C_1}{C_1 + C_2}}$$

и

$$T = \frac{q}{D} = \sqrt{\frac{2C_0}{C_1 D}} \sqrt{\frac{P}{P-D}} \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_2}}$$

Като заместим във формулата за общите разходи намерените оптимални стойности за q и S получаваме

$$TC_{min} = \sqrt{2C_0 C_1 D} \sqrt{\frac{P-D}{P}} \sqrt{\frac{C_2}{C_1 + C_2}}$$

Ако използваме плътността на загубата от дефицит ρ и означим с q_3, x_3, S_3 и TC_3 параметрите на този обобщен модел, а с q и TC – параметрите на базовия модел, ще получим формулите

$$q_3 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{\rho}} q, \quad x_3 = \sqrt{\alpha}\sqrt{\rho} q, \quad S_3 = \sqrt{\alpha} \frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}} q \quad \text{и} \quad TC_3 = \sqrt{\alpha}\sqrt{\rho}\, TC$$

При $\rho = 1$ и $\alpha \in (0,1)$ получаваме оптималните стойности на производствено-реализационния модел (модела с постепенна доставка) без дефицит, а при $\alpha = 1$ и $\rho \in (0,1)$ – оптималните стойности на модела с наличие на дефицит, удовлетворено търсене и незабавна доставка.

Пример 13: Да се пресметнат параметрите на производствено – реализационния модел с планиран дефицит и изпълнение на доставките, ако $P = 2000$ количествени единици за година, $D = 750$, $C_0 = 50$, $C_1 = 4$ и $C_2 = 12$.

Годината се състои от 300 работни дни.

Решение:

По формулите пресмятаме

$$q = \sqrt{\frac{2 \times 50 \times 750 \times 2000 \times 16}{4 \times 1250 \times 12}} = \sqrt{40000} = 200$$

$$S = \sqrt{\frac{2 \times 50 \times 750 \times 1250 \times 4}{12 \times 2000 \times 16}} = \sqrt{\frac{15625}{16}} = \frac{125}{4} = 31{,}25$$

Минималните общи разходи по управлението на запаса ще бъдат:

$TC\left(200, \frac{125}{4}\right) = 50 \times \frac{750}{200} + \frac{4}{2}\frac{\left(\frac{5}{8}200 - \frac{125}{4}\right)^2}{\frac{5}{8}200} + \frac{16}{2}\frac{\left(\frac{125}{4}\right)^2}{\frac{5}{8} \times 200} = \frac{750}{4} + \frac{1125}{8} + \frac{250}{4} = \frac{3125}{8} =$ $390{,}625$, като съответно $\frac{750}{4} = 187{,}5$ са разходите за организиране на производствените цикли; $\frac{1125}{8} = 140{,}625$ – разходите по съхранение на запасите и $\frac{250}{4} = 62{,}5$ – разходите по издръжка на дефицита (глоби). Броят на производствено – реализационните цикли е $\frac{D}{q} = \frac{750}{200} = \frac{15}{4} = 3{,}75$ цикъла, като всеки от тях е с времетраене $300 \times \frac{4}{15} = 80$ дни.

Пресмятаме и максимално наличният запас

$$x = \frac{P - D}{P}q - S = \frac{1250}{2000} \times 200 - \frac{125}{4} = \frac{375}{4} = 93{,}75$$

Да пресметнем отделните части на цикъла на управление на запасите. Ще имаме $T' = \frac{D}{P}T = \frac{750}{2000} \times 80 = 30$ дни, тогава за T'' получаваме 50 дни. Тъй като

$$\frac{T_1{}'}{T_2{}'} = \frac{x}{S} = \frac{\frac{375}{4}}{\frac{125}{4}} = 3$$

и

$T_1{}' + T_2{}' = 30$, то $T' = 22{,}5$ *и* $T_2{}' = 7{,}5$.

Аналогично

$\frac{T_1''}{T_2''} = \frac{x}{S} = 3$ следователно $T_1'' = 37{,}5$ $и$ $T_2'' = 12{,}5$.

14. Многопродуктови модели на управление на запасите

В складовете се съхраняват запаси от много на брой различни стоки. Ако те не взаимодействат помежду си (не се конкурират), то запасите от всеки вид могат да се оптимизират по отделно, независимо от другите.

Обаче, обикновено между запасите възниква взаимодействие. Например, съхраняването на един вид запас може да налага такива условия за осветеност, влажност, температура, които не се съгласуват с условията за съхранение на други видове запаси. Стоките се конкурират за режим на съхранение. Освен това, сумарната стойност от оптималните партиди може да не се вписва в бюджета на компанията. Възниква конкуренция за ограничения разход по управление на запасите. Едновременно постъпващите оптимални партиди от различни стоки могат да не се вместват в обема на склада – възниква конкуренция за ограничения капацитет на склада. Съвместното търсене на партидите до склада на различни стоки може да надхвърли вместимостта на превозното средство (контейнера) – възниква конкуренция за обема на контейнера.

При такива случаи, индивидуалната оптимизация по отделните стокови запаси не върши работа, налага се съвместна оптимизация.

14.1. Базов модел на съвместна оптимизация на многопродуктови запаси

Предполагаме, че доставката до склада на n вида запаси се осъществява от една точка и следователно е възможна. Ще направим анализ на съвместния многопродуктов модел на управление на запасите с оглед на намаляване на общите разходи по доставки и съхранение.

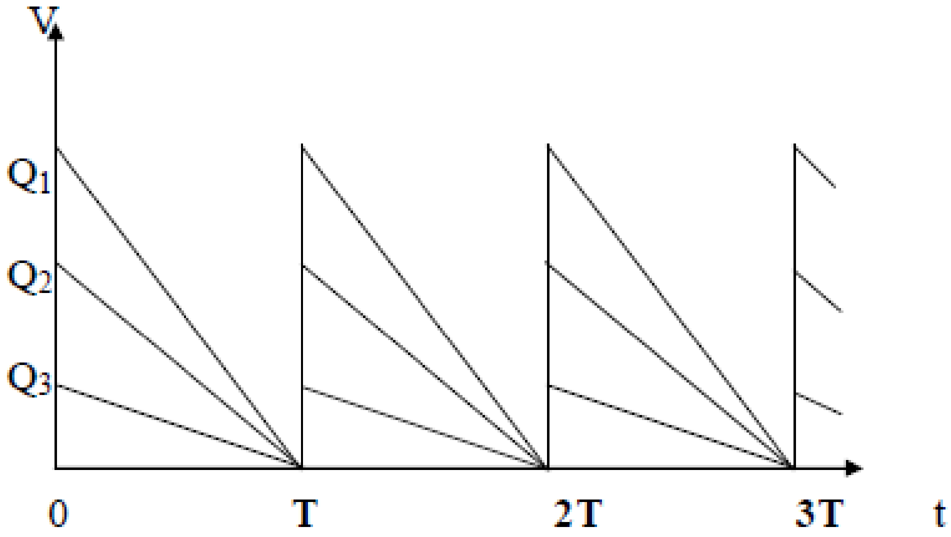


Рис. 30. Модел на многопродуктов запас - случай на съвместна доставка

Екзогенни величини на модела:

- a – постоянни разходи по доставка (едни и същи за всички видове запаси);
- b_i – коефициент на променливи разходи (по съхранение) на i-я вид запас;
- D_i – интензивност на търсенето на i-я вид запас, за целия разгледан период (година).

Ще изхождаме от предположението, че стратегията на управление на запасите е регулярна. Ако доставката се извършва съвместно за всички n на брой продкта, то периодичността на доставката е еднаква за тях. Означаваме съответния период (цикъл на управлението на запасите) с T. Нека с q_i да означим размера на партидата за i-я вид запас. Тогава ще имаме

$$T = \frac{q_1}{D_1} = \frac{q_2}{D_2} = \cdots = \frac{q_i}{D_i} = \cdots = \frac{q_n}{D_n}$$

(като T се разбира като част от целия разглеждан период)

и

$$q_i = D_i T; i = 1,2, \dots, n$$

При такива обеми на доставките запасите от всички стоки се изчерпват едновременно в края на периода T, тогава постъпва нова партида и цикълът се възобновява.

Тогава пълните разходи по управление на запасите ще се изразяват по формулата

$$TC = a\frac{D_i}{q_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{q_i}{2},$$

Като първото събираемо се равнява на разходите по доставката ($\frac{D_1}{q_1} = \cdots = \frac{D_i}{q_i} = \cdots = \frac{D_n}{q_n}$ е броя на доставките за разглеждания период, а a – разходите за една доставка) а второто събираемо – разходите за съхранение (сума от разходите за съхранение на всички видове запаси - b_i – цената за съхранение на количествена единица от i-я запас, умножена със средното количество $\frac{q_i}{2}$ от този запас, намиращ се в склада). В горната формула заместваме $q_i = DiT; i = 1,2, \dots, n$ и получаваме

$$TC = \frac{a}{T} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i D_i T = \frac{a}{T} + \frac{T}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i D_i,$$

Следователно функцията на общите разходи по управление на запасите може да се разглежда като функция на една променлива,

$$TC = TC(T)$$

Тогава

$$TC' = -\frac{a}{T^2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i D_i$$

И от $TC' = 0$ получаваме критична стойност

$$T = \sqrt{\frac{2a}{\sum_{i=1}^{n} b_i D_i}}$$

Тъй като $TC'' = \frac{2a}{T^3} > 0$, то действително при така получената стойност за T функцията TC се минимализира. Лесно получаваме оптималните количества на стойностите:

$$q_k = D_k T = D_k \sqrt{\frac{2a}{\sum_{i=1}^{n} b_i D_i}}$$

Да пресметнем минималните общи разходи, като заместим във формулата за TC T с $\sqrt{\frac{2a}{S}}$ (положили сме $S = \sum_{i=1}^{n} b_i D_i$);

$$TC = \frac{a}{\sqrt{\frac{2a}{S}}} + \frac{\sqrt{\frac{2a}{S}}}{2} S = \sqrt{\frac{aS}{2}} + \sqrt{\frac{aS}{2}} = \sqrt{2aS}$$

Да отбележим, че и при този модел, както при монопродуктовия модел общите разходи достигат минимума си, когато разходите за доставка и съхранение се изравнят.

14.2. Съвместен многопродуктов модел с ограничен обем на доставка

Ако има възможност да се съвмести транспортирането на различните стоки, то това се прави съгласно горните калкулации. В общия случай се предполага, че обемът на превозното средство, извършващо доставката е ограничен от величината P. Пресметнатите по – горе оптимални количества q_i от стоките за съвместна доставка могат обаче да превишат P. За да се коригира партидата, трябва да се сравни сумата на оптималните величини q_k с капацитета за доставка P. Означаваме с R сумата на оптималните количества на стоките

$$R = \sum_{k=1}^{n} q_k$$

Ако $R \leq P$, то размерът на партидата от стоки трябва да се съхрани според направените по – горе разчети и количества за доставка да бъдат $q_k; k = 1,2,\dots,n$. При положение, че капацитетът на контейнера е надхвърлен, т.е. $R > P$, тези количества q_k трябва да се коригират до $\overline{q_k}$.

Новите величини $\overline{q_k}$ трябва да съответстват на условието за единен цикъл на управление на запасите, т.е.

$$\bar{T} = \frac{\bar{q}_1}{D_1} = \cdots = \frac{\bar{q}_i}{D_i} = \cdots = \frac{\overline{q_n}}{D_n},$$

Където $\bar{T}$ е големината на коригирания цикъл.

Тъй като

$$\overline{q_i} = D_i T; i = 1,2,\dots,n$$

и

$$P = \sum_{k=1}^{n} \overline{q_k} = \sum_{k=1}^{n} D_k \bar{T} = \bar{T} \sum_{k=1}^{n} D_k,$$

То получаваме

$$\bar{T} = \frac{P}{\sum_{k=1}^{n} D_k}$$

Коригираните обеми на партидата за доставка се пресмятат по формулата

$$\overline{q_i} = \frac{P D_i}{\sum_{k=1}^{n} D_k}; i = 1,2,\dots,n$$

И наистина, тези величини напълно се вписват в капацитета на доставка:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{q_i} = \frac{P \sum_{i=1}^{n} D_i}{\sum_{k=1}^{n} D_k} = P$$

и съответстват на един цикъл на управление на запасите $\overline{T}$.

Да отбележим, че новите обеми на партидата q_k и новата дължина на единния цикъл $\overline{T}$ са пропорционални на предишните оптимални величини q_k и T с коефициент на пропорционалност h, равен на $h = \frac{P}{R}$

И наистина, при $P = R$ сумата от оптималните количества точно се вмества в контейнера, тъй като при това условие ще получим

$$T = \frac{R}{\sum_{k=1}^{n} D_k} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i}{\sum_{k=1}^{n} D_k} = \frac{\sum_{i=1}^{n} T D_i}{\sum_{k=1}^{n} D_k} = T$$

Следователно

$$\overline{T} = \frac{P}{\sum_{i=1}^{n} D_i} = \frac{P}{\sum_{i=1}^{n} D_i} \times \frac{R}{R} = h \frac{R}{\sum_{i=1}^{n} D_i} = hT$$

Аналогично

$$\overline{q_k} = D_k \overline{T} = D_k h T = h \times D_k T = h q_k$$

Да оценим какви са общите разходи по управление на запасите след корекцията.

Ще имаме

$$\overline{TC} = a \frac{D_i}{\overline{q_i}} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} b_k \overline{q_k} = a \frac{D_i}{h q_i} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} b_k h q_k = \frac{1}{h}\left(a \frac{D_i}{q_i}\right) + h\left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} b_k q_k\right)$$
$$= \frac{1}{h}\left(\frac{1}{2} TC\right) + h\left(\frac{1}{2} TC\right) == \frac{1}{2}\left(h + \frac{1}{h}\right) TC$$

Да отбележим, че при горния извод сме използвали, че разходите за доставка и съхранение (за некоригирания модел) са равни помежду си и всеки от тях е половината от общите разходи. Така окончателно получаваме

$$\overline{TC} = H \times TC,$$

Като

$$H = \frac{1}{2}\left(h + \frac{1}{h}\right)$$

Минималното значение на този коефициент на пропорционалност H е 1, той се достига при $h = 1$, т.е. $R = P$. В този случай коригираните съвпадат с оптималните. При $h \to 0$ имаме $H \to +\infty$. В долната таблица се приведени данни за коефициента на пропорционалност на издръжката H, съответстващи на някои значения на h.

Връзка между коефициентите на пропорционалност

h	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
H	5,05	2,60	1,82	1,45	1,25	1,13	1,06	1,03	1,01	1,00

Пример 14: Да се преметнат величините на трипродуктов модел на управление на запасите, ако разходите по доставката са $a = 150$; разходите за съхранение на продуктите са $b_1 = 3, b_2 = 5, b_3 = 1$; годишното им търсене е $D_1 = 300, D_2 = 600, D_3 = 900$.

a) При неограничена вместимост на контейнера за доставка;

b) При капацитет на контейнера за доставка $P = 225$. (годината има 300 работни дни).

Решение:

a) Пресмятаме $S = b_1D_1 + b_2D_2 + b_3D_3 = 3 \times 300 + 5 \times 600 + 1 \times 900 = 900 + 3000 + 900 = 4800$

Тогава за дължината на цикъла на управление T получаваме

$$T = \sqrt{\frac{2a}{S}} = \sqrt{\frac{2 \times 150}{4800}} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4},$$

Следователно за една година ще има $\frac{1}{T} = 4$ цикъла на управление на запаси, всеки с дължина $\frac{1}{4} \times 300 = 75$ работни дни. Оптималните количества за доставка ще бъдат:

$$q_1 = TD_1 = \frac{1}{4} \times 300 = 75$$

$$q_2 = TD_2 = \frac{1}{4} \times 600 = 150$$

$$q_3 = TD_3 = \frac{1}{4} \times 900 = 225$$

Общите (минимални) разходи по управление на запасите ще бъдат:

$$TC = \frac{a}{T} + \frac{1}{2}(b_1q_1 + b_2q_2 + b_3q_3) = 150 \times 4 + \frac{1}{2}(3 \times 75 + 5 \times 150 + 1 \times 225)$$
$$= 600 + \frac{1}{2} \times 1200 = 600 + 600 = 1200$$

b) Тъй като общото количество за доставка е

$$R = q_1 + q_2 + q_3 = 75 + 150 + 225 = 450$$

а капацитета на контейнера е $P = 225$, то ще трябва да се направи корекция. Тъй като коефициента на корекцията е $h = \frac{P}{R} = \frac{225}{450} = \frac{1}{2}$, то с толкова ще се коригират величините $T_i q_1, q_2, q_3$.

Ще имаме

$\bar{T} = \frac{1}{2}T = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$; $\overline{q_1} = hq_1 = \frac{1}{2} \times 75 = 37{,}5$; $\overline{q_2} = hq_2 = \frac{1}{2} \times 150 = 75$; $\overline{q_3} = hq_3 = \frac{1}{2} \times 225 = 112{,}5$.

Общите разходи трябва да се коригират с коефициента на пропорционалност $H = \frac{1}{2}\left(h + \frac{1}{h}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 2\right) = 1{,}25$ и ще възлизат на $\overline{TC} = H \times TC = 1{,}25 \times 1200 = 1500$. (За една година ще има $\frac{1}{T} = 8$ цикъла на управлеие на запасите, всеки с дължина $\frac{1}{8} \times 300 = 37{,}50$ дни.)

15. Стохастични модели за управление на запаси

Ще разгледаме най-простия вероятностен модел за управление на запаси – модела с една доставка. Разглеждаме само един фиксиран период от време, в течение на който се извършва едно попълване на запаса. Предполага се, че доставката на запаса е моментална. Трябва да се минимизират разходите по управление на запаса.

В разглежданите по долу модели се предполага, че търсенето на запаса е случайно. Това обстоятелство се отразява съществено на съответните модели и значително усложнява техния анализ, за това ще се ограничим с най-прости модели от този вид.

Ще предполагаме, че интензивността на търсенето x за разглеждания интервал от време се явява случайна величина и е зададена или чрез закон за разпределение $p(x)$ (в случай на дискретна сл. в.) или чрез плътност на разпределение $f(x)$ (при непрекъсната сл. в.). Обикновено функциите $p(x)$ и $f(x)$ се оценяват чрез опитни или статистически данни. Ако търсенето е по-малко от наличността на запаса, то за съхранението на излишното количество се правят разходи от C_1 за единица количество, а при търсене, превъзхождащо наличността на запаса се начислява глоба за дефицит в размер на C_2 за единица дефицит.

В качеството на функция на пълните разходи в този модел се взема средната стойност (математическото очакване) на пълните разходи.

Да разгледаме модел на дискретно зададено случайно търсене x, зададено чрез закон за разпределение $p(x)$ (за целта трябва да знаем вероятностите $p(0)$, $p(1)$, $p(2)$,…, като сумата от тези вероятности трябва да бъде единица). Тогава математическото очакване на пълните разходи $C(q)$ ще бъде:

$$C(q) = C_1 \sum_{x=0}^{q} (q-x)p(x) + C_2 \sum_{x=q+1}^{\infty} (x-q)p(x).$$

В горния израз първото събираемо отчита разходите за съхранение (придобиване) на излишъка от $q-x$ количествени единици от запаса (при $q \geq x$), а второто – глобата за дефицит от $x-q$ единици (при $q < x$).

В случай на непрекъснато случайно търсене, зададено чрез плътността на разпределение $f(x)$, изразът за математическото очакване $C(q)$ добива вида

$$C(q) = C_1 \int_0^q (q-x)f(x)dx + C_2 \int_q^{\infty} (x-q)f(x)dx.$$

Задачата за управление на запасите се състои в определянето на такова количество на запаса $q = q_0$, при което математическото очакване на пълните разходи да е минимално.

За да определим това количество на запаса $q = q_0$ ще разгледаме случая на непрекъснато случайно търсене. Да припомним, че функцията на разпределение $F(q)$ на такава сл. в. се определя от

$$F(q) = P(x < q) = \int_0^q f(x)dx \Rightarrow F'(x) = f(x) \text{ и } dF(x) = f(x)dx.$$

Тогава изразът за $C(q)$ можем да запишем по следния начин

$$C(q) = C_1 \int_0^q (q-x)dF(x) + C_2 \int_q^{\infty} (x-q)dF(x).$$

Диференцираме горният израз по правилото на Лайбниц и получаваме

$$C'(q) = C_1 \int_0^q dF(x) - C_2 \int_q^{\infty} dF(x) = C_1\big(F(q) - F(0)\big) - C_2\big(F(\infty) - F(q)\big)$$
$$= C_1 F(q) - C_2\big(1 - F(q)\big) = (C_1 + C_2)\, F(q) - C_2.$$

Тъй като функцията $C(q)$ е изпъкнала ($C''(q) = (C_1 + C_2)F'(q) > 0$, тъй като функцията $F(q)$ е растяща функция по определение), оптималният размер на доставката на запаса $q = q_0$ ще се определя от нулирането на $C'(q)$. Тогава ще имаме

$$C'(q_0) = 0 \Leftrightarrow F(q_0) = \frac{C_2}{C_1 + C_2} = \rho,$$

където ρ е плътността на загубите (от неудовлетворено търсене).

В случай на дискретно зададено случайно търсене (чрез закона на разпределение $p(x)$, минимумът на математическото очакване на пълните разходи се постига при ниво на запасите $q = q_0$, за което е изпълнено неравенството

$$F(q_0) < \rho < F(q_0 + 1).$$

Забележка. Оптималното количество на запасите $q = q_0$ може да се определи и графически, ако функцията на разпределение $F(q)$ е зададена по такъв начин.

Пример 15. Предприятие закупува агрегат с резервни блокове към него. Стойността на един резервен блок е 5 парични единици. Ако агрегатът излезе от строя заради повреден блок, то пропуснатите ползи от неработещия агрегат и спешната поръчка на блок ще струва на предприятието 65 парични единици. Разпределението на агрегатите според броя на блоковете, които ще трябва да се заменят е определено на база на предшестващия опит както следва:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(x)$	60%	18%	12%	7%	2%	0,7%	0,2%	0,1%	0%

Да се определи оптималния брой резервни блокове, които трябва да се закупят заедно с агрегата. Да се пресметне математическото очакване на пълните разходи при това положение и да сравни с пълните разходи, при положение, че се закупят толкова агрегати, колкото е математическото очакване на дефектиралите агрегати.

Решение:

Според условието ще имаме $C_1 = 5$ и $C_2 = 65$. Изчисляваме плътността на загубите от недостиг на резервни блокове:

$$\rho = \frac{C_2}{C_1 + C_2} = \frac{65}{5 + 65} = 0{,}929.$$

Определяме функцията на разпределение на случайното търсене. В случай на дискретно зададено случайно търсене тя се определя от

$$F(q) = P(x < q) = p(0) + p(1) + \cdots + p(q - 1).$$

Ще имаме

q	1	2	3	4	5	6	7	8	>8
$F(q)$	0,60	0,78	0,90	0,97	0,99	0,997	0,999	1	1

Очевидно получаваме $q_0 = 3$, защото

$$F(3) = 0{,}90 < \rho = 0{,}929 < 0{,}97 = F(4).$$

Тогава математическото очакване на пълните разходи ще възлиза на

$$\begin{aligned} C(3) = C_1\big((3-0)p(0) + (3-1)p(1) + (3-2)p(2)\big) \\ + C_2\big((4-3)p(4) + (5-3)p(5) + (6-3)p(6) + (7-3)p(7)\big) \\ = 5(3.0{,}6 + 2.0{,}18 + 1.0{,}12) \\ + 65(1.0{,}02 + 2.0{,}007 + 3.0{,}002 + 4.0{,}001) = 5.2{,}28 + 65.0{,}144 \\ = 11{,}4 + 9{,}36 = 20{,}76. \end{aligned}$$

Да пресметнем математическото очакване на дефектиралите блокове. Ще имаме

$$\begin{aligned} \bar{x} = \sum_{n=0}^{\infty} n.p(n) = 0.p(0) + 1.p(1) + 2.p(2) + 3.p(3) + 4.p(4) + 5.p(5) \\ + 6.p(6) + 7.p(7) \\ = 1.0{,}18 + 2.0{,}12 + 3.0{,}07 + 4.0{,}02 + 5.0{,}007 + 6.0{,}002 + 7.0{,}001 \\ = 0{,}764. \end{aligned}$$

Тъй като работим с цели блокове, то в този случай ще трябва да закупим агрегата с един резервен блок. Тогава за математическото очакване на пълните разходи ще имаме

$$\begin{aligned} C(1) = C_1(1-0)p(0) \\ + C_2\big((2-1)p(2) + (3-1)p(3) + (4-1)p(4) + (5-1)p(5) \\ + (6-1)p(6) + (7-1)p(7)\big) \\ = 5.1.0{,}6 \\ + 65(1.0{,}12 + 2.0{,}07 + 3.0{,}02 + 4.0{,}007 + 5.0{,}002 + 6.0{,}001) \\ = 5.0{,}6 + 65.0{,}364 = 26{,}66. \end{aligned}$$

Вижда се, че при оптимално управление на запасите в сравнение с наивния подход, основаващ се на математическото очакване на случайното търсене, в случая са спестени $26{,}66 - 20{,}76 = 5{,}9$ парични единици.

Пример 16. При условията на предишната задача търсенето е непрекъсната сл. в., разпределена по показателния закон

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x},$$

като $F(1)$ има същата стойност, като в предишната задача. Да се определи оптималното количество на запаса $q = q_0$.

Решение:

Ще имаме $F(1) = 1 - e^{-\lambda} = 0{,}6 \Rightarrow -\lambda = \ln 0{,}4$. Тогава за функцията на разпределение получаваме $F(x) = 1 - (0{,}4)^x$ за $x \geq 0$. Оптималното количество на запаса $q = q_0$ определяме от условието

$$F(q_0) = 1 - (0{,}4)^{q_0} = \rho = 0{,}929 \Rightarrow (0{,}4)^{q_0} = 0{,}071 \Rightarrow q_0 = \frac{\ln 0{,}071}{\ln 0{,}4}$$
$$= \frac{(-2{,}645)}{(-0{,}916)} = 2{,}888 \cong 3.$$

Да разгледаме така наречената „задача на вестникопродавача“. Условието е следното: нека вестникопродавачът да заплаща по a парични единици за един вестник, а да го продава по b парични единици в периода, когато вестникът е актуален и по c парични единици след това. Очевидно трябва да са изпълнени неравенствата $b > a > c$. Тогава, в случай на излишък (ако е закупил повече, отколкото е реалното търсене), той ще губи $C_1 = a - c$ парични единици, а при недостиг ще има пропуснати ползи в размер на $C_2 = b - a$ парични единици. Плътността на загубите ще възлиза на

$$\rho = \frac{C_2}{C_1 + C_2} = \frac{b - a}{a - c + b - a} = \frac{b - a}{b - c}.$$

В случай, че $c = 0$ се получава така наречената „задача за коледните елхи“.

Пример 17. Собственик на будка за вестници купува вестника USA Now за 50 цента броя и го продава до излизането на новия брой за 1$. Останалите непродадени броеве продължават да се продават по 25 цента за брой. Какво е оптималното количество вестници, при положение, че търсенето им е нормално разпределена сл. в. с математическо очакване 300 броя и стандартно отклонение 30 броя.

Да припомним, че нормалното (гаусово) разпределение се задава с плътност на разпределение

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

където μ е средната стойност, а σ – стандартното отклонение. Тогава за функцията на разпределение ще имаме

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Величината

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

има стандартно нормално разпределение с плътност на разпределение

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

и с функция на разпределение

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

с математическо очакване 0 и стандартно отклонение 1.

Решение:

За плътността на загубите ще имаме

$$\rho = \frac{b-a}{b-c} = \frac{1,00-0,50}{1,00-0,25} = \frac{2}{3} = 0,667.$$

Тогава, ще трябва да търсим такова z от стандартното нормално разпределение, за което $\Phi(z) = 0,667$.

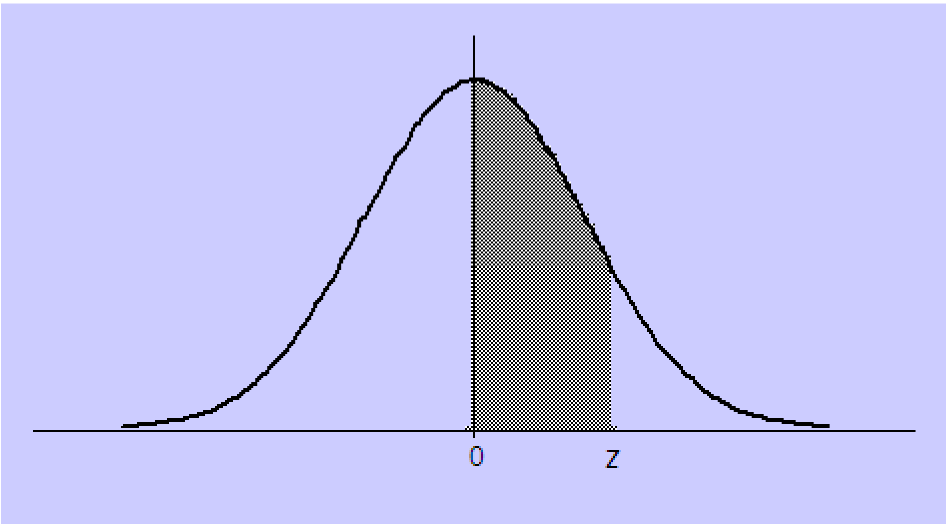


Таблица 1. Лица под нормалната крива, ограничени в интервала между 0 и *z*

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0280	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0575	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,091	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1102	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,148	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,17	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,195	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,219	0,2224
0,6	0,2258	0,2291	0,2324	0,2356	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2518	0,2549
0,7	0,258	0,2612	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,291	0,2939	0,2967	0,2996	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,334	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,377	0,379	0,381	0,383
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3906	0,3925	0,3944	0,3962	0,398	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,437	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,443	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4648	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,47	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,475	0,4756	0,4762	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,483	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,485	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4874	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,489
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,492	0,4922	0,4924	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,494	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4958	0,496	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,497	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,498	0,498	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990

От таблица 1 може да се намери z при дадено $\Phi(z)$, като имаме пред вид, че $\Phi(z)$ се получава като към 0,5 прибавим (извадим) лицето на защрихованата фигура, в случай, че $z > 0$ ($z < 0$). В нашият случай имаме $\Phi(z) = 0{,}667 = 0{,}5 + 0{,}167$. Най-близко до $0{,}167$ е стойността $0{,}164$, която съответства на $z = 0{,}43$. Сега можем да определим оптималното количество $q = q_0$ от условието

$$0{,}43 = \frac{q_0 - 300}{30} \Longrightarrow q_0 \cong 313.$$

Пример 18. Продавач на коледни елхи ги закупува по 4 лв./бр., а ги продава по 10 лв./бр. След бъдни вечер, естествено, коледните елхи са непродаваеми. Предполага се, че случайното търсене на коледните елхи е равномерно разпределено между 200 бр. и 400 бр. Да се определи оптималното количество коледни елхи, които трябва да се закупят.

Решение:

Съгласно условието на задачата, плътността на разпределение ще бъде

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ за } x \in [0,200) \\ \dfrac{1}{200} \text{ за } x \in [200,400) \\ 0 \text{ за } x \in [400,\infty) \end{cases}$$

Тогава можем да получим съответната функция на разпределение

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ за } x \in [0,200) \\ \dfrac{x-200}{200} \text{ за } x \in [200,400) \\ 1 \text{ за } x \in [400,\infty). \end{cases}$$

За плътността на загубите ще имаме

$$\rho = \frac{b-a}{b-c} = \frac{10-4}{10-0} = \frac{6}{10} = 0{,}6.$$

Тогава оптималното количество $q = q_0$ ще се получава от условието

$$0{,}6 = \frac{q_0 - 200}{200} \Longrightarrow q_0 = 320.$$

Пример 19. Продавач на книги закупува книгите по 10 лв./бр., а ги продава по 20 лв./бр. След изтичането на определен срок, той ги преоценява и ги продава по 6 лв./бр. Предполага се, че плътността на разпределение на случайното търсене на книгите е нулева за по-малко от 200 бр. и за повече от 400 бр., а между 200 бр. и 300 бр. има линейно нарастване, а между 300 бр. и 400 бр. – линейно намаляване. Да се определи оптималното количество книги, които трябва да се закупят.

Пример 20. Продавач на хляб го закупува (на едро) по цена от 50 ст./бр. и го продава през деня за 80 ст./бр. През следващия ден го преоценява на 40 ст./бр., като се предполага, че винаги успява да продаде всички преоценени бройки. Плътността на разпределение на случайното търсене на хляб е нулева за по-малко от 150 бр. и за повече от 300 бр., а между 150 бр. и 200 бр. има линейно нарастване, между 250 бр. и 300 бр. – линейно намаляване, а между 200 бр. и 250 бр. е равномерно. Да се определи оптималното количество хляб, който трябва да се закупи ежедневно.

ЧАСТ ТРЕТА. ЛИНЕЙНИ РАЗПРЕДЕЛИТЕЛНИ МОДЕЛИ

16. Транспортна задача

Разпределителните модели възникват в икономическите ситуации, когато наличните ресурси не достигат за изпълнението на всички набелязани дейности и е необходимо ресурсите да се разпределят по дейности съгласно набелязаните критерии за оптималност.

16.1. Стандартна транспортна задача.

Транспортната задача (ТЗ) се явява основен пример за линейна разпределителна задача. В ТЗ дейностите и необходимите за тях ресурси се измерват с едни и същи единици (имат еднаква размерност). Ш тези задачи ресурсите могат да се разпределят между дейностите и отделните дейности могат да се изпълняват с различни комбинации от ресурси. Пример за типична ТЗ се явява задачата за разпределението (транспортирането) на продукция, намираща се в складове на доставчици до обекти на потребители.

Стандартната ТЗ се определя като задача за разработването на най-икономичен план за транспортиране на продукция от един вид от няколко входни пунктове (доставчици или производители) до други изходни пунктове (потребители).

Входящи (дадени) величини на ТЗ (екзогенни величини на модела):

1) n на брой доставчици $A_1, A_2, \dots, A_n$ и m на брой потребители $B_1, B_2, \dots, B_m$;
2) a_i – запас от стоката ш пункта на доставчика A_i, $i = 1,2, \dots, n$;
3) b_j – търсене на стоката от потребителя B_j, $j = 1,2, \dots, m$;
4) c_{ij} – стойността на превоза на единица количество от стоката от доставчика A_i до потребителя B_j.

Изходящи (търсени) величини на ТЗ (ендогенни величини на модела):

1) x_{ij} – количеството стока, което трябва да се транспортира от доставчика A_i до потребителя B_j, така че общите транспортни разходи да са минимални;
2) $L(X)$ – общите минимални транспортни разходи.

Математическият модел на ТЗ може да се запише така:

$$L(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to min$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \,, i = 1,2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \,, j = 1,2, \dots, m$$

Целевата функция $L(X)$ са общите транспортни разходи по досташката на стоката от пунктовете на доставчиците до пунктовете на потребителите. Първата група от n ограничения означава, че всички запаси от стоката, намиращи се при доставчиците трябва да бъдат изчерпани. Втората група от m ограничения означава, че търсенето на всички потребители трябва да бъде задоволено. Нагледна форма за представчне на ТЗ се явява транспортната таблица

Пунктове на доставчици	Пунктове на потребители					Запаси на доставчици
	B_1		B_j		B_m	
A_1	c_{11}		c_{1j}		c_{1m}	a_1
A_i	c_{i1}		c_{ij}		c_{im}	a_i
A_n	c_{n1}		c_{nj}		c_{nm}	a_n
Търсене на потребители	b_1		b_j		b_m	$\sum a_i = \sum b_j$

Ако сумата от запасите на всички доставчици е равна на сумата от потребностите на всички потребители, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j \ ,$$

ТЗ се нарича затворена (балансирана). Това е стандартната ТЗ. Тя е основен пример за двуиндексна задача на линейното програмиране.

16.2. Модификации на ТЗ.

Първата възможност за модифициране на стандартната ТЗ, това е **отворената (небалансирана) ТЗ**. Получава се когато горното балансово равенство се превърне в неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \neq \sum_{j=1}^{m} b_j \ .$$

В случай, че сумарните запаси на доставчиците превишат сумарното търсене на потребителите

$$\sum_{i=1}^{n} a_i > \sum_{j=1}^{m} b_j$$

се въвежда допълнителен (фиктивен) потребител B_{m+1} с търсене равно на излишъка от запасите

$$b_{m+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j$$

и така моделът става балансиран.

Ако сумарните запаси са недостатъчни за задоволяване на сумарното търсене

$$\sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{j=1}^{m} b_j$$

се въвежда допълнителен (фиктивен) доставчик A_{n+1} с количество на запаси равно на реално съществуващия дефицит от стоката

$$a_{n+1} = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i$$

За въведените фиктивни доставчици или потребители се въвеждат и съответните фиктивни тарифи c_{im+1} или c_{n+1j} които (обикнивенно) са равни на нули.

Така двата варианта на отворена (небалансирана) ТЗ се свеждат до затворена (балансирана) ТЗ, която се решава. В първия случай, товарът предназначен за фиктивния потребител остава при доставчиците, а във втория случай, търсенето на потребителите, които трябва да получат стока от фиктивния доставчик остава незадоволено.

Друга възможност за модифициране на стандартната ТЗ идва от **недопустимите превози.** Понякога в определено направление, например $A_k \to B_l$ транспортирането на продукцията е невъзможно (например поради ремонт на пътя). Такива ситуации се моделират с помощта на така наречените забранителни тарифи c_{kl}. Те трябва да направят неизгодни превозите в съответното направление. Това става, ако забранителната тарифа е много по-голяма от всички други тарифи: $c_{kl} \gg max\{c_{ij}, i \neq k, j \neq l\}$. Аналогичен е случаят с приоритетните превози. Тогава се въвежда приоритетна тарифа c_{kl} много по-малка от останалите тарифи: $c_{kl} \ll min\{c_{ij}, i \neq k, j \neq l\}$.

При многопродуктовите ТЗ от всеки пункт на доставчиците кън всеки пункт на потребителите могат да се транспортиран няколко различни стоки. При свеждането на многопродуктовия модел до стандартна ТЗ може да се използва един от следните варианти:

- За всеки вид стока се съставя отделна ТЗ;
- За всички видове стоки се използва обща транспортна матрица, като се използват забранителни тарифи в клетките, свързващи различни видове продукция.

Някога се срещат транспортни модели, изискващи максимализирането на целевата функция $L(X)$, например когато става дума за общ доход, общи на печалби, обем на продажби и др. Ш такива случаи вместо исканата целева функция де разглежда целевата функция $L_1(X) = -L(X)$, в която тарифите се умножават с -1. По такъв начин максимализирането на $L(X)$ ще съответства на минимализиране на $L_1(X)$.

Задача за назначенията. Тя е частен случай на ТЗ, в която броят на входящите пунктове е равен на броя на изходящите пунктове ($n = m$). Обемът на потребностите и предлагането във всички тези пунктове е единица. Типичен пример за задача за назначенията е задачата за разпределението на n на брой работници на същия брой работни места (дейности), ако са даден времената c_{ij} за които i-я работник изпълнява j-тата дейност и трябва да се минимализира общото време за изпълнение на всички дейности. Търсените величини на задачата за назначенията са определени по следния начин

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ако } i - \text{я работник е разпределен на } j - \text{тата дейност} \\ 0, \qquad \text{в противен случай} \end{cases}$$

17. Примери за задачи, водещи до ТЗ

Пример 21. Заводите на една автомобилна компания са разположени в градовете A, B, C. Основните центрове за дистрибуция са в градовете D и E. Обемите на производство на трите завода са 1000, 1300 и 1200 автомобила съответно. Обемите на търсене са 2300 и 1400 автомобила. Стойностите на превозите за един автомобил са както следва

	D	E
A	80	215
B	100	108
C	102	68

Да се построи математически модел, позволяващ да се определят броя на автомобилите, транспортирани от всеки завод до всеки дистрибуционен център, така че общите транспортни разходи да са минимални.

Съответната транспортна таблица има вида

Заводи	Дистрибуционни центрове		Мощности на заводите
	D	E	
A	80	215	1000
B	100	108	1300
C	102	68	1200
Фиктивен завод	0	0	200
Търсене	2300	1400	3700

Целевата функция е

$$L(X) = 80x_{11} + 215x_{12} + 100x_{21} + 108x_{22} + 102x_{31} + 68x_{32} + 0x_{41} + 0x_{42} \rightarrow min$$

Ограниченията, свързани с мощностите на заводите са

$$\begin{array}{lllllllll}
x_{11} & +x_{12} & & & & & & & = 1000 \\
 & & x_{21} & +x_{22} & & & & & = 1300 \\
 & & & & x_{31} & +x_{32} & & & = 1200 \\
 & & & & & & x_{41} & +x_{42} & = 200
\end{array}$$

Ограниченията, свързани с търсенето от страна на дистрибуционните центрове са

$$\begin{array}{lllllllll}
x_{11} & & +x_{21} & & +x_{31} & & +x_{41} & & = 2300 \\
 & x_{12} & & +x_{22} & & +x_{32} & & +x_{42} & = 1400
\end{array}$$

Пример 22. При условията от пример 21 се въвежда допълнително изискване: за всеки не доставен автомобил в разпределителните центрове D и E се налагат глоби от 200 и 300 парични единици съответно. Освен това от завод A не трябва да се доставят автомобили в разпределителен център E.

Ясно е, че не доставените автомобили до D и E са автомобилите, „доставени“ до D и E от фиктивния завод. За това тарифите за превоз от фиктивния завод до разпределителни центрове D и E стават 200 и 300 съответно. Забраната за доставка по направление $A \rightarrow E$ се решава със забранителна тарифа: от 215 тази тарифа може да стане например 1000. Така получаваме транспортната таблица

Заводи	Дистрибуционни центрове		Мощности на заводите
	D	E	
A	80	1000	1000
B	100	108	1300
C	102	68	1200
Фиктивен завод	200	300	200
Търсене	2300	1400	3700

Пример 23. Автомобилна компания произвежда автомобили от четири различни марки M, N, P, Q. В завод A се произвеждат автомобили от марките P и Q, в B - M, N и Q, а в C – M и N. Търсенето в разпределителните центрове D и E и производството в заводите A, B и C са дадени в следната таблица

	Марки автомобили			
заводи	M	N	P	Q
A			700	300
B	500	600		400
C	800	400		
центрове				
D	700	500	500	600
E	600	500	200	100
общо	1300	1000	700	700

Цените на превозите са същите както в пример 1. Да се състави модел на стандартна ТЗ.

Под доставчик ще разбираме съчетанията между завод и марка, следователно доставчиците ще са $AP, AQ, BM, BN, BQ, CM, CN$ или общо 7 на брой. Аналогично под потребител ще разбираме съчетанието между разпределителен център и марка - $DM, DN, DP, DQ, EM, EN, EP, EQ$. Тогава, имайки пред вид и тарифите, транспортната таблица на стандартната ТЗ ще бъде:

доставчици	потребители								мощности
	DM	DN	DP	DQ	EM	EN	EP	EQ	
AP	80	80	80	80	215	215	215	215	700
AQ	80	80	80	80	215	215	215	215	300
BM	100	100	100	100	108	108	108	108	500
BN	100	100	100	100	108	108	108	108	600
BQ	100	100	100	100	108	108	108	108	400
CM	102	102	102	102	68	68	68	68	800
CN	102	102	102	102	68	68	68	68	400
търсене	700	500	500	600	600	500	200	100	3700

Пример 24. Три енергогенериращи станции с мощности от 25, 40, 30 мВт/ч предоставят електроенергия в три града. Максималното потребление на градовете е 30, 35 и 25 мВт/ч. Цените за мВт/ч са дадени в таблица

станция	град		
	1	2	3
1	600	700	400
2	320	300	350
3	500	480	450

През месец август потреблението във всеки от градовете нараства с 20%. Недостатъкът от електроенергия може да бъде компенсиран от друга електростанция по цена от 800 за 1 мВт/ч за всеки от градовете, като третият град не може да се превключи към тази станция. Да се формулира задачата за енергоснабдяването на трите града през месец август в термините на ТЗ.

Пример 25. Една компания притежава три ферми, в които се отглежда зелен фасул и два хладилни завода, в които фасула се замразява. Компанията продава замразения фасул по 300 лв за тон. В таблица 7 са дадени производствените разходи по отглеждането и преработването на фасула във фермите и заводите, а в таблица 8 – транспортните разходи между фермите и заводите.

Таблица 7.

		Производствени разходи в лв/т	Производствен капацитет в т
ферми	1	90	2000
	2	95	3000
	3	87	1500
заводи	1	20	3750
	2	23	3250

Таблица 8.

ферми	заводи	
	1	2
1	10	15
2	12	12
3	18	9

Да се формулира задачата за максимализиране на печалбата на компанията в термините на ТЗ.

Пример 26. Фирма произвежда туристически раници. Търсенето им през месеците март, април, май и юни е 100, 200, 180 и 300 броя съответно. В течение на тези месеци фирмата може да произведе 50, 180, 280 и 270 броя съответно (, защото обемът на производството на раници зависи и от производството на други изделия). През всеки месец търсенето може да се удовлетвори за сметка на:

1) производството от текущия месец;
2) производството от предишни месеци;
3) производството от следващите месеци.

Раницата се продава за 300 лв. Във втория случай се начисляват разходи за съхранение от 10 лв за една раница на месец, а в третия – 30 лв глоба за просрочие на една раница за един месец. Да се построи транспортен модел за максимализиране на печалбата на фирмата от продажба на раници.

Пример 27. Един от бизнесите на дадена компания е свързан с изкупуване, замразяване и продажба на замразени къпини. Изкупната кампания е през месеците юли, август и септември. През юли се изкупуват 120 т къпини по 800 лв./т, през август – 80 т по 900 лв./т, а през септември – 50 т по 1050 лв./т. Капацитетите на хладилния завод за замразяване на къпините (съобразно другите плодове за замразяване) по месеци са както следва: юли – 40 т, август – 80 т, септември – 0 т, октомври – 80 т и ноември – 80 т. Разходите за съхранение на незамразените къпини са юли 100 лв./т, а през другите месеци – с по 10 лв./т по-малко в сравнение с предходния месец. Разходите за замразяване са 100 лв./т, а разходите за съхранение на замразените къпини са 50 лв./т за един месец. През месеците август, септември, октомври, ноември и декември компанията има възможност да реализира по 60 т замразени къпини, като цената е 1800 лв./т през август, а всеки следващ месец цената се покачва с 100 лв./т. Да се построи транспортен модел за максимализиране на печалбата на фирмата от бизнеса с къпините.

Пример 28. Съществуват 4 бази A_1, A_2, A_3, A_4 и 4 търговски пункта B_1, B_2, B_3, B_4. Разстоянията между базите и търговските пунктове са зададени с матрицата

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 & 12 & 5 \\ 3 & 14 & 9 & 1 \\ 13 & 8 & 6 & 9 \\ 7 & 15 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

Необходимо е да се намери такова взаимноеднозначно съответствие между бази и търговски пунктове, при което сумата от разстоянията да е минимална.

Пример 29. Съществуват 4 машини A_1, A_2, A_3, A_4 и 4 изделия B_1, B_2, B_3, B_4. Производителността на машините по отношение на изделията (по колко броя от всяко изделие могат да се произведат от всяка от машините за единица време) е зададена с матрицата

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 & 4 & 8 \\ 4 & 6 & 7 & 11 \\ 5 & 8 & 8 & 4 \\ 6 & 12 & 15 & 9 \end{bmatrix}$$

Необходимо е да се намери такова взаимноеднозначно съответствие между машини и изделия, при което сумата от произведените от машините изделия да е минимална.

Примерите 28 и 29 са типични примери за задачата за назначенията – пример 28 е стандартна задача за назначенията, при която целевата функция са минимализира, докато при пример 29 трябва елементите на матрицата да се вземат със знак „$-$" – това привежда задачата към стандартен вид с целева функция, подлежаща на минимализиране.

18. Метод на северозападния ъгъл за построяване на начален опорен план на стандартната ТЗ

Под опорен план на ТЗ ще разбираме всеки план за превози от доставчиците до потребителите, който е възможен. Измежду всички опорни планове на една стандартна ТЗ има такъв (такива) който е оптимален. Решаването на ТЗ се състои в намирането на оптимален опорен план. За това се минава през следните процедури:

1) Намиране на начален опорен план;
2) Проверка за оптималност на опорния план;
3) Ако оптималността е налице задачата е решена, ако не е – опорния план се подобрява и се връщаме към стъпка 2).

Има много методи за построяване на начален опорен план. Ние ще се спрем на метода на северозападния ъгъл.

Пример 30. При доставчиците A_1, A_2 и A_3 са съсредоточени съответно количества от 30, 190 и 250 единици от хомогенна стока, които е необходимо да се доставят до потребителите B_1, B_2, B_3 и B_4 в размер на 70, 120, 150 и 130 количествени единици съответно. Стойността по доставката на единица продукция от доставчиците за потребителите се задава с матрицата

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Да се построи начален опорен план по метода на северозападния ъгъл.

Решение:

Тъй като сумарната мощност на доставчиците е

$$30 + 190 + 250 = 470,$$

а сумарното търсене на потребителите е

$$70 + 120 + 150 + 130 = 470,$$

то дадената ТЗ е от затворен тип и можем да продължаваме (в противен случай я привеждаме към затворен тип чрез евентуалното добавяне на фиктивен доставчик или потребител).

Нанасяме всички данни в специална транспортна таблица

	70	120	150	130
30	4	7	2	3
190	3	1	2	4
250	5	6	3	7

В първия стълб са указани мощностите на доставчиците, а в първия ред – търсенето на потребителите. Числата в десния горен ъгъл на клетките са транспортните разходи от съответния доставчик до съответния потребител, т.е. значенията от дадената в условието матрица.

За да считаме, че сме намерили начален опорен план, трябва празната част на $3 \cdot 4 = 12$-те клетки да бъде запълнена, и то така, че сумите на елементите на всеки ред да са равни на числото от първия стълб на съответния ред и сумите на елементите от всеки стълб да са равни на числото от първия ред в съответния стълб.

Северозападният ъгъл на таблицата е нейния ляв горен ъгъл, т.е. клетката (1,1). Затова разглеждаме първия доставчик A_1 и първия потребител B_1. Намираме $min\{a_1, b_1\} = min\{30,70\} = 30$ и записваме в клетката (1,1) числото 30. Така, доставчикът A_1 е изразходвал цялото си количество и се изключва от нанатъшното разглеждане. Следователно всички други клетки (1,2), (1,3) и (1,4) от първия ред (съответстващ на A_1) остават празни. След първата стъпка нашата таблица добива вида

	70	120	150	130
30	4 30	7	2	3
190	3	1	2	4
250	5	6	3	7

Северозападният ъгъл в новата таблица е клетката (2,1). Мощността на A_2 е 190, а остатъчното търсене на B_1 - $70 - 30 = 40$. Имаме $min\{190,40\} = 40$ и записваме в тази клетка числото 40. По такъв начин се изчерпва търсенето на B_1 и клетка (3,1) остава празна. Сега таблицата добива вида

	70	120	150	130
30	4 30	7	2	3
190	3 40	1	2	4
250	5	6	3	7

Северозападният ъгъл на новата таблица е клетка (2,2). Остатъчната мощност на A_2 е $190-40=150$, а търсенето на B_2 – 120. Тъй като $min\{150{,}120\}=120$, записваме числото 120 в тази клетка и изчерпваме търсенето на B_2, следователно клетка (3,2) остава празна и таблицата добива вида

	70	120	150	130
30	4 30	7	2	3
190	3 40	1 120	2	4
250	5	6	3	7

Северозападният ъгъл на ново получената таблица е клетка (2,3). Остатъчната мощност на A_2 е $190-40-120=30$, а търсенето на B_3 – 150. Тъй като $min\{30{,}150\}=30$, записваме 30 в клетка (2,3), а клетка (2,4) остава празна (изчерпана е мощността на A_2). Новата таблица изглежда така

	70	120	150	130
30	4 30	7	2	3
190	3 40	1 120	2 30	4
250	5	6	3	7

Северозападният ъгъл на новата таблица е клетка (3,3). Мощността на A_3 е 250, а остатъчното търсене на B_3 - $150-30=120$, затова записваме числото $120=min\{250{,}120\}$ в тази клетка, а в клетка (3,4) – 130. Така получаваме последната таблица

	70	120	150	130
30	4 30	7	2	3
190	3 40	1 120	2 30	4
250	5	6	3 120	7 130

С това ние сме получили един начален опорен план, който на следващ етап (евентуално) ще подобряваме. При него доставчикът A_1 доставя целия си запас от 30 ед. на потребителя B_1; A_2 доставя 40 ед. на B_1, 120 ед. на B_2 и 30 ед. на B_3; A_3 доставя 120 ед. на B_3 и още 130 ед. на B_4.

След изпълнението на поредната стъпка ние изключваме от разглеждане или ред или стълб (само при последната стъпка отпадат ред и стълб едновременно). Затова при попълване на таблицата трябва да е изпълнено съотношението: броя на попълнените клетки = броя на редовете + броя на стълбовете – 1. В нашият случай това е така: $6 = 3 + 4 - 1$. Ако горното съотношение не е изпълнено, възниква така нареченият особен случай, който ще бъде разгледан отделно.

Да пресметнем сумарните разходи $TC = 4.30 + 3.40 + 1.120 + 2.30 + 3.120 + 7.130 = 120 + 120 + 120 + 60 + 360 + 910 = 1690$.

Особен случай.

Пример 31. Нека е зададена ТЗ с транспортната таблица

	30	20	50
50	1	3	5
30	3	3	2
20	4	1	2

Да намерим начален опорен план по метода на северозападния ъгъл.

Стъпка 1. За клетка (1,1) имаме $min\{50,30\} = 30$, следователно в нея записваме числото 30. А клетки (2,1) и (3,1) оставаме празни. Таблицата добива вида

	30	20	50
50	1 30	3	5
30	3	3	2
20	4	1	2

Стъпка 2. Северозападният ъгъл е клетка (1,2). Тъй като $min\{50-30,20\}=20$ и ако поставим в тази клетка числото 20, едновременно ще отпаднат първи ред и втори стълб и няма да бъде изпълнено съотношението: брой на запълнени клетки $=$ брой на редовете $+$ брой на стълбовете – 1. Затова слагаме в клетка (2,2) символичен превоз 0. Таблицата добива вида

	30	20	50
50	1 30	3 20	5
30	3	3 0	2
20	4	1	2

и въпросното съотношение ще бъде налице. Така се постъпва винаги, когато при поредната стъпка отпадат едновременно ред и стълб. Разбира се, окончателният вид на таблицата е

	30	20	50
50	1 30	3 20	5
30	3	3 0	2 30
20	4	1	2 20

19. Разпределителен метод за решаване на ТЗ

Основната част от разпределителния метод са оценките на клетките: оценка на клетката $(i,j)=$ оценката на ред $i+$ оценката на стълб $j+$ числото в горния десен ъгъл на клетката или

$$v_i^j=v_i+v^j+c_i^j.$$

Оценките на редовете и стълбовете се правят така, че оценките на всички попълнени клетки да са равни на нула. След като се направят оценки на всички клетки, те се записват в матрица на оценките. Ако тази матрица не съдържа отрицателни числа, значи е получен оптимален план на превозите. В противен случай се прави подобряване на опорния план. Движейки се от клетка с отрицателна оценка през попълнени клетки (като е забранено да се правят два последователни хода в един и същи ред или стълб) се създава така наречения преизчислителен цикъл. Вътре в този цикъл се преразпределят превозите. За ново получената транспортна таблица се намира матрицата на оценките и т. н., докато се получи оптимален транспортен план.

Пример 32. Да се намери решение (оптимален транспортен план) за ТЗ от пример 30.

По метода на северозападния ъгъл бяхме намерили начален опорен план със съответната транспортна таблица

	70	120	150	130
30	4 30	7	2	3
190	3 40	1 120	2 30	4
250	5	6	3 120	7 130

Може да се започне от произволен ред или стълб. Нека да започнем с първия стълб, като му припишем оценка 0, т.е $v^1 = 0$ (при първата стъпка може да му се припише произволна оценка). Ш първият стълб има две попълнени клетки – (1,1) и (2,1). Техните оценки трябва да са нукеви, т.е. $v_1^1 = 0$ и $v_2^1 = 0$. При това положение, на база оценката на първия стълб можем да направим оценки на първия и втория ред: $v_1^1 = v_1 + v^1 + c_1^1$ или $0 = v_1 + 0 + 4 \Rightarrow v_1 = -4$ и $v_2^1 = v_2 + v^1 + c_2^1$ или $0 = v_2 + 0 + 3 \Rightarrow v_2 = -3$.

Нанасяме получените оценки на редове и стълбове в нова транспортна таблица, като оценките на стълбовете ги записваме в нов ред отдолу, а оценките на редовете – в нов стълб отдясно.

	70	120	150	130	v_i
30	4 30	7	2	3	-4
190	3 40	1 120	2 30	4	-3
250	5	6	3 120	7 130	
v^j	0				

Сега трябва да намерим запълнена клетка, за която е известна оценката на съдържащ я ред или стълб. Такава е клетката (2,2). Имаме $v_2^2 = v_2 + v^2 + c_2^2$ или $0 = -3 + v^2 + 1 \Rightarrow v^2 = 2$. Така получаваме новата транспортна таблица

	70	120	150	130	v_i
30	30 | 4	7	2	3	-4
190	40 | 3	120 | 1	30 | 2	4	-3
250	5	6	120 | 3	130 | 7	
v^j	0	2			

За запълнената клетка (2,3) ще имаме $v_2^3 = v_2 + v^3 + c_2^3$ или $0 = -3 + v^3 + 2 \Rightarrow v^2 = 1$. Новата транспортна таблица е

	70	120	150	130	v_i
30	30 | 4	7	2	3	-4
190	40 | 3	120 | 1	30 | 2	4	-3
250	5	6	120 | 3	130 | 7	
v^j	0	2	1		

За попълнената клетка (3,3) равенството на оценките има вида $v_3^3 = v_3 + v^3 + c_3^3$ или $0 = v_3 + 1 + 3 \Rightarrow v_3 = -4$, което нананасяме в транспортната таблица и получаваме

	70	120	150	130	v_i
30	30 | 4	7	2	3	-4
190	40 | 3	120 | 1	30 | 2	4	-3
250	5	6	120 | 3	130 | 7	-4
v^j	0	2	1		

Оценката на последния, четвърти стълб получаваме от попълнената клетка (3,4): $v_3^4 = v_3 + v^4 + c_3^4$ или $0 = -4 + v^4 + 7 \Rightarrow v^4 = -3$. Окончателният вид на транспортната таблица със всички оценки на редове и стълбове за този опорен план ще има вида

	70	120	150	130	v_i
30	4 30	7	2	3	-4
190	3 40	1 120	2 30	4	-3
250	5	6	3 120	7 130	-4
v^j	0	2	1	-3	

Получените оценки на редовете и стълбовете ни позволяват да направим оценки за всички не попълнени клетки. Например, за клетката (1,2) ще имаме $v_1^2 = v_1 + v^2 + c_1^2$ или $v_1^2 = -4 + 2 + 7 = 5$; за клетка (1,3): $v_1^3 = v_1 + v^3 + c_1^3$ или $v_1^3 = -4 + 1 + 2 = -1$; за клетка (1,4): $v_1^4 = v_1 + v^4 + c_1^4$ или $v_1^4 = -4 - 3 + 3 = -4$ и т.н. Окончателно получаваме следната матрица на оценките

$$V = \left(v_i^j\right) = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тъй като тази матрица съдържа отрицателни елементи, то началният опорен транспортен план е неоптимален и подлежи на подобряване.

Подобряване на опорния транспортен план. Избираме клетката с най-малка оценка, в случая, това е клетка (1,4), нейната оценка е -4. Целта е да построим преизчислителен цикъл. Изхождайки от клетка (1,4) и движейки се само през запълнени клетки, трябва да се върнем пак в същата клетка. При това е забранено да правим два последователни хода в един и същи ред или стълб. Например, подходящ е цикъла $\big((1,4) - \text{празна}\big) \to \big((1,1) - 30\big) \to \big((2,1) - 40\big) \to \big((2,3) - 30\big) \to \big((3,3) - 120\big) \to \big((3,4) - 130\big) \to \big((1,4) - \text{празна}\big)$. На стартовата клетка поставяме знак „+“ и след това редуваме знаците: $\big((1,4) - \text{празна}\big)^+ \to \big((1,1) - 30\big)^- \to \big((2,1) - 40\big)^+ \to \big((2,3) - 30\big)^- \to \big((3,3) - 120\big)^+ \to \big((3,4) - 130\big)^- \to \big((1,4) - \text{празна}\big)^+$. Сред клетките от цикъла със знак „–“ (това са клетките $(1,1)$, $(2,3)$ и $(3,4)$) намираме минималния превоз: $min\{30,30,130\} = 30$. След това в клетките със знак „–“ намаляваме превозите с 30, а в клетките със знак „+“ ги увеличаваме също с 30. Получаваме нов опорен план

	70	120	150	130
30	4	7	2	3 30
190	3 70	1 120	2 0	4
250	5	6	3 150	7 100

По такъв начин клетката (1,4) ще стане запълнена клетка. Ако се получи само една клетка с нулев превоз, тя ще остане незапълнена. Ако това са две клетки (както в случая са клетките (1,1) и (2,3)), незапълнена ще остане клетката с по-голяма тарифа (тарифата на (1,1) е 4, а тарифата на (2,3) е 2, следователно (1,1) ще остане незапълнена). В другата клетка (в случая (2,3)) ще нанесем нулев превоз и те ще се считa за запълнена“ това се прави за да е изпълнено съотношението: брой на запълнените клетки = брой на редове + брой на стълбове – 1. Така получаваме нов опорен план на превозите. Нужно е да се следи, дали сумите на превозите по редове и стълбове съвпадат с мощностите на доставчиците и с търсенето на потребителите съответно. За този нов опорен план извършваме оценки на редовете и стълбовете

	70	120	150	130	v_i
30	4	7	2	3 30	0
190	3 70	1 120	2 0	4	-3
250	5	6	3 150	7 100	-4
v^j	0	2	1	-3	

Новата матрица на оценките има вида

$$V = \left(v_i^j\right) = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Наличието в нея на отрицателна оценка (това е оценката $v_2^4 = -2$ на клетката (2,4)) показва, че транспортният план все още не е оптимален.

Построяваме преизчислителен цикъл $\left((2,4) - \text{празна}\right)^+ \rightarrow \left((2,3) - 0\right)^- \rightarrow \left((3,3) - 150\right)^+ \rightarrow \left((3,4) - 100\right)^- \rightarrow \left((2,4) - \text{празна}\right)^+$. Клетките от цикъла със знак „–“ са $(2,3)$ и $(3,4)$ с превози 0 и 100 съответно. Тъй като $min\{0{,}100\} = 0$, клетка (2,4) става запълнена (с превоз 0), а клетка (2,3) – празна. Получаваме нова транспортна таблица за новия опорен план

	70	120	150	130
30	4	7	2	3 30
190	3 70	1 120	2	4 0
250	5	6	3 150	7 100

Извършваме оценки на редовете и стълбовете

	70	120	150	130	v_i
30	4	7	2	3 30	-2
190	3 70	1 120	2	4 0	-3
250	5	6	3 150	7 100	-6
v^j	0	2	3	-1	

Въз основа на тези оценки получаваме нова матрица на оценките:

$$V = \left(v_i^j\right) = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Все още този опорен план е неоптимален – в матрицата на оценките има отрицателна оценка, това е $v_3^1 = -1$. Построяваме преизчислителен цикъл, започващ от клетката (3,1) с отрицателна оценка: $\big((3{,}1) - \text{празна}\big)^+ \to \big((3{,}4) - 100\big)^- \to \big((2{,}4) - 0\big)^+ \to \big((2{,}1) - 70\big)^- \to \big((3{,}1) - \text{празна}\big)^+$. Клетките от цикъла със знак „–“ са $(3{,}4)$ и $(2{,}1)$ с превози 100 и 70 съответно. Тъй като $min\{100{,}70\} = 70$, към превозите в клетките със знак „+“ се прибавя 70, а от превозите в клетките със знак „–“ – се изважда 70. Получаваме нова транспортна таблица за новия опорен план

	70	120	150	130
30	4	7	2	3 30
190	3	1 120	2	4 70
250	5 70	6	3 150	7 30

Извършваме оценки на редовете и стълбовете

	70	120	150	130	v_i
30	^{4}	^{7}	^{2}	^{3} 30	-1
190	^{3}	^{1} 120	^{2}	^{4} 70	-2
250	^{5} 70	^{6}	^{3} 150	^{7} 30	-5
v^j	0	1	2	-2	

Въз основа на тези оценки получаваме нова матрица на оценките:

$$V = \left(v_i^j\right) = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тъй като в нея няма отрицателни оценки, полученият опорен транспортен план е оптимален. Минималните транспортни разходи са $TC_{min} = 3.30 + 1.120 + 4.70 + 5.70 + 3.150 + 7.30 = 90 + 120 + 280 + 350 + 450 + 210 = 1500$. Да отбележим, че транспортните разходи за началния опорен план бяха 1690.

20. Анализ на дислокацията на нови производствени и търговски обекти

Всеки нов завод, производствен или търговски склад е свързан с появата на ново разпределение на превозите на стоките, зависещо от производствените, транспортните или други логистични разходи.

Пример 33. Заводите на една компания, намиращи се в пунктовете A и B снабдяват дистрибуционните центрове C и D. Информацията за мощностите на заводите (доставчиците), търсенето на дистрибуционните центрове (потребителите), както и транспортните тарифи са приведени в таблицата

	$C, 50$	$D, 80$
$A, 40$	^{2}	^{3}
$B, 60$	^{5}	^{4}

За да покрие цялото търсене, компанията решава да построи още един завод в един от двата пункта: E или F. Стойността на превоза на единица стока от пункта E (F) до пунктовете C и D е равна на 5 и 2 (3 и 4). Да се определи вариант, при който общата стойност на транспортните разходи е минимална.

Решение:

Мощността на новия завод е 50 + 80 – (40 + 60) = 30. За всеки от пунктовете E и F (като потенциални дислокации на новия завод) ще решим отделни транспортни задачи.

В случай на построяване на нов завод в пункта E транспортната задача ще има вида

	50	80
40	2	3
60	5	4
30	5	2

Изготвяме начален опорен транспортен план по метода на северозападния ъгъл. Той има вида

	50	80
40	2 / 40	3
60	5 / 10	4 / 50
30	5	2 / 30

За този план правим оценки на редовете и стълбовете

	50	80	v_i
40	2 / 40	3	-2
60	5 / 10	4 / 50	-5
30	5	2 / 30	-3
v^j	0	1	

Матрицата на оценките ще има вида

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

което показва, че началният опорен план е оптимален. За общите транспортни разходи ще имаме

$$TC^E_{min} = 2.40 + 5.10 + 4.50 + 2.30 = 80 + 50 + 200 + 60 = 390$$

Сега да разгледаме транспортната задача, свързана с изграждането на новия завод в пункт F. Тя има вида

	50	80
40	2	3
60	5	4
30	3	4

Разбира се началният опорен план е същият. Правим оценки на редовете и стълбовете

	50	80	v_i
40	2 40	3	-2
60	5 10	4 50	-5
30	3	4 30	-5
v^j	0	1	

и матрица на оценките

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Поради наличието на отрицателно число (оценката на клетка (3,1) е -2) този опорен план е неоптимален и се налага неговото подобряване. Правим преразпределителен цикъл: $\big((3,1) - \text{празна}\big)^+ \to \big((2,1) - 10\big)^- \to \big((2,2) - 50\big)^+ \to \big((3,2) - 30\big)^- \to \big((3,1) - \text{празна}\big)^+$. Тъй като клетките със знак „–“ са $(2,1)$ с превоз 10 и $(3,2)$ с превоз 30 и $min\{10,30\} = 10$ от тези клетки се изважда 10, а към клетките със знак „+“ (това са клетки $(3,1)$ и $(2,2)$) се прибавя 10. Това води до нов транспортен план

	50	80
40	40 ^{2}	^{3}
60	^{5}	60 ^{4}
30	10 ^{5}	20 ^{2}

Оценките на редовете и стълбовете са

	50	80	v_i
40	40 ^{2}	^{3}	-2
60	^{5}	60 ^{4}	-3
30	10 ^{3}	20 ^{4}	-3
v^j	0	-1	

а матрицата на оценките

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

което показва, че транспортният план е оптимален. Тогава минимумът на общите транспортни разходи ще бъде

$$TC_{min}^{F} = 2.40 + 4.60 + 3.10 + 4.20 = 80 + 240 + 30 + 80 = 430$$

Тъй като

$$TC_{min}^{E} = 390 < 430 = TC_{min}^{F},$$

то новият завод трябва да бъде построен в пункт E.

В пример 33 търсенето превъзхожда предлагането. По аналогичен начин се решава въпроса когато производствените мощности надвишават капацитетите на търсене в пунктовете за дистрибуция – решават се няколко транспортни модели за алтернативни дистрибуционни центрове.

21. Унгарски метод за решаване на задачата за назначенията

Алгоритъма на така наречения унгарски метод за решаване на задачата за назначенията е следния:

1) Във всеки ред намираме минимален елемент и го изваждаме от всички елементи в реда;
2) Във всеки стълб на получената матрица намираме минимален елемент и го изваждаме от всички елементи на стълба;
3) Намираме ред с една нула. Тази нула заграждаме в кръгче 0 и наричаме отбелязана. В стълба, в който е отбелязаната нула всички останали нули се зачеркват и повече не се разглевдат. Тази стъпка продължаваме докато е възможно.
4) Намираме стълб с една нула и я отбелязваме. В реда, в който е отбелязаната нула се зачеркват всички останали нули. Тази стъпка продължава докато е възможно.
5) Ако след стъпки 3) и 4) има още неотбелязани нули, то отбелязваме коя да е от тях, а в реда и стълба, в която е отбелязаната нула всички останали нули се зачеркват.
6) Ако всеки ред и стълб съдържа по една отбелязана нула, то оптималното решение е намерено. Всяка от отбелязаните нули указва съответствието между доставчик и потребител. В противен случай прекарваме минималния възможен брой пресичащи се вертикални и хоризонтални линии през всички нули. Сред останалите не зачеркнати елементи намираме минималния, изваждаме го от всички не зачеркнати елементи и го прибавяме към всички елементи, намиращи се на пресечните точки на линиите. Към получената матрица прилагаме алгоритъма, започвайки от 3).

Пример 34. Има четири бази A_1, A_2, A_3 и A_4 и четири търговски точки B_1, B_2, B_3 и B_4. Разстоянията между базите и търговските точки са зададени с матрицата

10	20	12	5
3	14	9	1
13	8	6	9
7	15	8	10

Трябва да се намери взаимно еднозначно съответствие между бази и търговски точки, така че сумата от разстоянията да е минимална.

Решение:

Намираме минимумите по редове и ги изваждаме от всички елементи на съответния ред

10	20	12	5	-5	$\to$	5	15	7	0
3	14	9	1	-1	$\to$	2	13	8	0
13	8	6	9	-6	$\to$	7	2	0	3
7	15	8	10	-7	$\to$	0	8	1	3

Намираме минимумите по стълбовете на получената матрица и ги изваждаме от всички елементи на съответния стълб

10	20	12	5	$\to$	5	13	7	0
3	14	9	1	$\to$	2	11	8	0
13	8	6	9	$\to$	7	0	0	3
7	15	8	10	$\to$	0	6	1	3
-0	-2	-0	-0					

Първият и четвъртият ред са с по една нула. Получаваме

5	13	7	0
2	11	8	~~0~~
7	0	0	3
0	6	1	3

Вторият и третият стълб са с по една нула. Ако изберем втория, получаваме

5	13	7	0
2	11	8	~~0~~
7	0	~~0~~	3
0	6	1	3

Назначителният план е неоптимален (има само три отбелязани нули). Минималният брой линии, зачеркващи всички нули е 3 – третия ред, първия и четвъртия стълб. Получаваме

5	13	7	0
2	11	8	~~0~~
7	0	~~0~~	3
0	6	1	3

Тъй като $min\{13,7,11,8,6,1\} = 1$, то получаваме нива матрица на назначенията

5	12	6	0
2	10	7	0
8	0	0	4
0	5	0	3

която преработваме по същия начин и получаваме

5	12	6	0
2	10	7	0
8	0	0	4
0	5	0	3

Имаме $min\{5,12,6,2,10,7\} = 2$ и получаваме нов назначителен план

3	10	4	0
0	8	5	0
8	0	0	6
0	5	0	5

Във всеки ред и стълб на горната назначителна матрица има по една отбелязана нула. Това е оптималното разпределение. Възможно е то да не е единствено.

Съответствията (назначенията) са $A_1 \leftrightarrow B_4$, $A_2 \leftrightarrow B_1$, $A_3 \leftrightarrow B_2$ и $A_4 \leftrightarrow B_3$. Сумарните разстояния са (от първоначално зададения вид на матрицата)

$$c_{14} + c_{21} + c_{32} + c_{43} = 5 + 3 + 8 + 8 = 24.$$

22. Линейна разпределителна задача

Съществената отлика на линейната разпределителна задача (РЗ) от ТЗ е това, че в РЗ дейностите и ресурсите се измерват в различни измервателни единици.

Входящи (дадени) величини на ТЗ (екзогенни величини на модела):

1) n на брой изпълнители $A_1, A_2, \dots, A_n$ и m на брой дейности $B_1, B_2, \dots, B_m$;
2) a_i – запас от ресурса на изпълнителя A_i, $i = 1,2, \dots, n$. Тези величини се измерват в единици на ресурса;
3) b_j – обем от дейността B_j, която трябва да бъде извършена; $j = 1,2, \dots, m$. Тези величини се измерват в единици на дейността;
4) p_{ij} – интензивност (технологична норма) на изпълнението на дейността B_j от изпълнителя A_i – измерва се в единици на дейността/единици на ресурса.

Изходящи (търсени) величини на ТЗ (ендогенни величини на модела):

1) x_{ij} – планираното количество от ресурса на изпълнителя A_i за изпълнение на дейността B_j, така че общите изразходени ресурси да са минимални. Тези величини се измерват в единици на ресурса;
2) $F(X)$ – общото количество изразходени ресурси на изпълнителите.

Търсените величини x_{ij} трябва да изпълняват следните ограничения:

1) Всички дейности трябва да бъдат извършени в планирания обем:
$$\sum_{i=1}^{n} p_{ij} x_{ij} = b_j \quad \text{за } j = 1,2, \dots, m.$$
2) Не трябва да се превишават ресурсите на изпълнителите:
$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq a_i \quad \text{за } i = 1,2, \dots, n.$$

При така наложените ограничения, трябва да се минимализира сумата от вложените планови ресурси на всички изпълнители за извършване на всички дейности, т.е.

$$F(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \to min$$

Обобщена разпределителна задача. Предполага се, че може да се направи остойностяване: нека c_{ij} разхода за извършване на единица от дейността B_j от изпълнителя A_i, измерена в лв. за единица от дейността. Тогава общите разходи ще бъдат

$$F_1(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}p_{ij}x_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}y_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} s_{ij}x_{ij}\,,$$

където $y_{ij} = p_{ij}x_{ij}$ е обема на дейността B_j, извършена от изпълнителя A_i (измерва се в единици от дейността), а $s_{ij} = c_{ij}p_{ij}$ е разхода за влагане на единица от ресурса на изпълнителя A_i за извършване на дейността B_j (измерва се в лв за единица от ресурса). Тогава под обобщена разпределителна задача (ОРЗ) ще разпираме минимализирането на общите разходи за извършването от всички дейности, т.е.

$$F_1(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}p_{ij}x_{ij} \to min$$

при наличието на всички ограничения като в РЗ. Разбира се, ако ресурсите и дейностите се измерват в една и съща единица и всички интензивности съвпадат, то ОРЗ се превръща в ТЗ.

Забележка. Горните три форми на записване на целевата функция на ОРЗ са еквивалентни. Може да се използва коя да е от тях, като съответно се калкулират финансови показатели на единица от дейността (при c_{ij}) или на единица от ресурса (при s_{ij}).

Системата от ограничения за РЗ и ОРЗ е много близка до тези при ТЗ. Единственото отличие от ТЗ е наличието на технологични коефициенти (интензивности) p_{ij}. Ако те са пропорционални, т.е. технологичната матрица

$$P = \left(p_{ij}\right) = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nm} \end{pmatrix}$$

е с пропорционални редове, РЗ (и ОРЗ) може да бъде сведена до ТЗ, в противен случай има методи за решаване на РЗ, различни от тези за ТЗ. РЗ (в общия случай) е промеждутъчна по трудност между ТЗ и общата задача на линейното програмиране (решаваща се със симплекс метод).

РЗ се използва често при решаването на различни логистични модели:

1) за разпределението на товари в различни видове вагони, контейнери, товарни автомобили, самолети, речни и морски плавателни съдове;
2) за разпределението на машинно, строително и друго оборудване по видове дейности и изделия;
3) за разпределението на многономенклатурни производствени програми между предприятията на един холдинг.

23. Решаване на РЗ по метода на разрешаващите множители

Методът на разрешаващите множители се прилага в случаите, когато редовете на технологичната матрица $P = \left(p_{ij}\right)$ са непропорционални.

Алгоритъмът на метода на разрешаващите множители се състои в следното. Отначало се съставя разпределителен план, обезпечаващ минимум на целевата функция, но неотговарящ на ограниченията на задачата. След това се търси допустим оптимален план. За целта:

1) Във всеки стълб се намира клетка с максимална интензивност. В нея се поставя целия обем на дейността за този стълб и необходимия ресурс за изпълнението ѝ, принадлежащ на изпълнителя, намиращ се на този ред (според въпросната интензивност).
2) Пресмятат се сумите от ресурси, техните излишъци или дефицити по редове. Задачата се счита за решена, ако всички редове са с еднакви знаци – „–“, съответстващ на недостиг на ресурс или „+“, съответстващ на излишък. В случай, че това не е така, се прави корекция на началния план за разпределение на дейностите по изпълнители.
3) За тази корекция за всеки стълб се намира разрешаващ множител λ_j, пресмятащ се по формулата

$$\lambda_j = \frac{p_j^{*(-)}}{p_j^{max(+)}}$$

където $p_j^{*(-)}$ е интензивността в заета клетка с недостиг на ресурс; $p_j^{max(+)}$ - максималната интензивност на клетките в редовете с излишък на ресурс. Разрешаващите множители за всички стълбове се сравняват помежду си и за

следващите разчети се взема минималния разрешаващ множител.

4) Всички интензивности в редовете с „+“ (излишък на ресурс) се умножават с разрешаващия множител. Чрез клетките, при които се получава изравняване на интензивностите се прави преразпределение на обемите от дейности и ресурси. Тези корекции се извършват съобразно истинските интензивности и така, че сумата от излишък и недостиг да е минимална.
5) Ако задачата не е решена, се повтарят всички стъпки, започвайки от 2).

Пример 35. Разполагаме с три вида вагони A_1, A_2 и A_3, на които трябва да се натоварят четири вида стоки B_1, B_2, B_3 и B_4. В следващата таблица са дадени: наличните ресурси (брой вагони от всеки вид), плановите дейности (тонове от всяка стока, които трябва да се натоварят на вагоните) и интензивностите (колко тона от всеки вид стока могат да бъдат натоварен на всеки тип вагони).

Количество вагони (брой)		Количество стоки за натоварване (тона)			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		100	120	150	150
A_1	10	10	11	13	15
A_2	15	12	14	10	11
A_3	20	13	10	11	12

Да се намери оптимален разпределителен план за натоварване на всички количества стоки, като се използват наличните вагони.

Решение:

В първия стълб най-голямата интензивност е на A_3 – 13; за да може цялото количество от първата стока да бъде натоварено във вагони от третия вид, ще ни трябват $100/13 = 7{,}69$ вагона. Тъй като вагоните са неделими, ще използваме 8 вагона и в клетка (3,1) записваме 8/100. Във втория стълб най-високата интензивност е тази на A_2 – 14, за цялото колияество от втората стока са необходими $120/14 = 8{,}57$ вагона от втория вид, затова в клетка (2,2) записваме 9/120. По аналогичен начин в клетка (1,3) ще трябва да запишем 12/150, а в клетка (1,4) – 10/150. Така получаваме началния оптимален план

Количество вагони (брой)		Количество стоки за натоварване (тона)			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		100	120	150	150
A_1	10	10	11	13 12/150	15 10/150
A_2	15	12	14 9/120	10	11
A_3	20	13 8/100	10	11	12

Сега ще трябва да оценим излишъците/дефицитите по редове. За първия ред – използвани са $12 + 10 = 22$ вагона при налични 10, следователно ще имаме недостиг от 12 вагона от първия вид и в новия най0десен стълб на разпределителната таблица ще запишем -12. За вагоните от втория вид при този разпределителен план ще има излишък от 6 вагона, затова в последния стълб за втори ред записваме $+6$. Аналогично за третия вид вагони излишъкър е 12, записваме $+12$. Така получаваме таблицата

Количество вагони (брой)		Количество стоки за натоварване (тона)				Излишъци Или дефицити
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		100	120	150	150	
A_1	10	10	11	13 12/150	15 10/150	-12
A_2	15	12	14 9/120	10	11	$+6$
A_3	20	13 8/100	10	11	12	$+12$

Сега чрез разрешаващите множители λ_j стоки от вагоните A_1 (с недостиг) към вагоните A_2 и A_3 (с излишък). Преди това да отбележим, че стойността на целевата функция е

$$F(X) = x_{13} + x_{14} + x_{22} + x_{31} = 12 + 10 + 9 + 8 = 39$$

но ограниченията на разпределителната задача не са изпълнени. Ще трябва да пресметнем разрешаващите множители λ_3 и λ_4. За λ_3 имаме $p_3^{*(-)} = p_{13} = 13$; $p_3^{max(+)} = max\{p_{23}, p_{33}\} = max\{10{,}11\} = 11$, следователно $\lambda_3 = 13/11 = 1{,}182$. Аналогично за λ_4 имаме $p_4^{*(-)} = p_{14} = 15$; $p_4^{max(+)} = max\{p_{24}, p_{34}\} =$

$max\{11{,}12\} = 12$ и $\lambda_4 = 15/12 = 1{,}25$. В новата разпределителна таблица добавяме още един ред за разрешаващите множители и получаваме

Количество вагони (брой)		Количество стоки за натоварване (тона)				Излишъци Или дефицити
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		100	120	150	150	
A_1	10	10	11	13 12/150	15 10/150	−12
A_2	15	12	14 9/120	10	11	+6
A_3	20	13 8/100	10	11	12	+12
λ_j		-	-	$\lambda_3 = 1{,}182$	$\lambda_4 = 1{,}25$	

За разрешаващ множител в случая ще вземем по-малкия - $\lambda_3 = 1{,}182$. Всички интензивности от втория и третия ред (с излишъци) умноваваме с $\lambda_3 = 1{,}182$ и получаваме

Количество вагони (брой)		Количество стоки за натоварване (тона)				Излишъци Или дефицити
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		100	120	150	150	
A_1	10	10	11	13 12/150	15 10/150	−12
A_2	15	14,18	16,55 9/120	11,82	13	+6
A_3	20	15,37 8/100	11,82	13	14,18	+12

Изравняване на новите интензивности по стълбове (като следим запълнените клетки от първия ред) имаме при клетки (1,3) – запълнена и (3,3) – празна. Следователно ще трябва да преразпределяме товари и вагони от клетка (1,3) към клетка (3,3). Това преразпределяне е на базата на истинските (дадени по условие) интензивности. Нека x на брой вагони от първия вид да заменим с вагони от третия вид, тогава (като имаме пред вид, че истинските интензивности на вагоните от първи и трети вид по отношение на третата стока са 13 и 11 съответно) вагоните от третия вид ще бъдат $\frac{13}{11}x$ на брой. При това положение дисбалансът при вагоните от първия вид ще бъде $12 - x$ за $0 < x \leq 12$(дефицит), а дисбалансът при вагоните от третия вид - $\left|12 - \frac{13}{11}x\right|$. Минимумът на общия дисбаланс $12 - x + \left|12 - \frac{13}{11}x\right|$ се достига при $\left|12 - \frac{13}{11}x\right| = 0$ или $x = 10{,}15$. Понеже ни трябва целочислен брой вагони, вземаме най-близкото цяло число, следователно $x = 10$. Тогава (за третата стока) намаляме вагоните от първия вид с 10, а увеличашаме вагоните от втория тип с 12. Ако използваме пълния капацитет на вагоните от третия вид, то в тях може да сложим 132 тона от третата стока, тогава за двата вагона от първия вид остават 18 тона (капацитетът им е 26 тона). Така получаваме новата разпределителна таблица

Количество вагони (брой)		Количество стоки за натоварване (тона)				Излишъци Или дефицити
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		100	120	150	150	
A_1	10	10	11	13 2/18	15 10/150	−2
A_2	15	14,18	16,55 9/120	11,82	13	+6
A_3	20	15,37 8/100	11,82	13 12/132	14,18	0

От новата таблица се вижда, че оценката на третия ред е 0 (липса както на излишък, така и на дефицит), така че може да забравим за него. Може да продължим да преразпределяме по метода на разрешаващите множители, но може и да забележим, че тези 18 тона, поставени във вагоните от първи вид могат да се поберат и в два вагона от втори вид (тъй като при истинска интензивност по отношение на третата стока 10, техния капацитет е 20 тона). Така получаваме допустимото разпределение

Количество вагони (брой)		Количество стоки за натоварване (тона)				Излишъци Или дефицити
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		100	120	150	150	
A_1	10	10	11	13	15 10/150	0
A_2	15	14,18	16,55 9/120	11,82 2/18	13	+4
A_3	20	15,37 8/100	11,82	13 12/132	14,18	0

Стойността на целевата функция е

$$F(X) = x_{14} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{33} = 10 + 9 + 2 + 8 + 12 = 41.$$

Това е решението на задачата – първата стока се товари на 8 вагона от трети вид, втората – на 9 вагона от втори тип, третата – на 2 вагона от втори тип и на 12 вагона от трети, четвъртата – на 10 вагона от първи вид, като 4 вагона от втори вид са излишни.

Пример 36. Едно предприятие разполага с три машини A_1, A_2 и A_3, с които трябва да се произведат четири детайла B_1, B_2, B_3 и B_4 в количества от 800, 1000, 600 и 400 бройки съответно. Свободното машинно време на машините (поради натовареността им и с производството на други детайли) е 2, 3 и 4 часа съответно. В таблица са дадени интензивностите на всяка от машините по отношение на всеки от детайлите, измерени в брой детайли за една минута машинно време

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	2	3	4
A_2	3	4	5	2
A_3	5	6	4	3

Да се състави план за производство на детайлите в необходимите бройки, като се използват машините в рамките на капацитетите им от машинно време.

Решение:

Съставяме оптимален план, оценяваме дисбалансите по редове и пресмятаме разрешаващите множители

Машини със съответното им машинно време в мин.		Детайли, които трябва да се произведат в бр.				Излишъци Или дефицити
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		800	1000	600	400	
A_1	120	1	2	3	4 100/400	$+20$
A_2	180	3	4	5 120/600	2	$+60$
A_3	240	5 160/800	6 167/1000	4	3	-87
λ_j		$\lambda_1 = 1{,}67$	$\lambda_2 = 1{,}5$	-	-	

Вземаме по-малкия от двата разрешаващи множителя $\lambda_2 = 1{,}5$ и с негова помощ преизчисляваме всички интензивности в първи и втори ред. Получаваме

Машини със съответното им машинно време в мин.		Детайли, които трябва да се произведат в бр.				Излишъци Или дефицити
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		800	1000	600	400	
A_1	120	1,5	3	4,5	6 100/400	$+20$
A_2	180	4,5	6	7,5 120/600	3	$+60$
A_3	240	5 160/800	6 167/1000	4	3	-87

Изравняване на интензивностите имаме в клетките (2,2) и (3,2), така че трябва да преразпределяме детайли от втори вид от третата машина към първата. Ако от третата машина отнемем x мин. машинно време, то към втората нашина ще трябва да прибавим $1{,}5x$ мин. (на базата на истинските им интензивности за втория детайл, които са 6 бр./мин. за третата и 4 бр./мин за втората). Тогава общия дисбаланс за двете машини ще бъде $87 - x + |60 - 1{,}5x|$ при $x \leq 87$. Минимален дисбаланс се получава ако $|60 - 1{,}5x| = 0$ или $x = 40$. Така получаваме нов разпределителен план със съответните дисбаланси и разрешаващи множители

Машини със съответното им машинно време в мин.		Детайли, които трябва да се произведат в бр.				Излишъци Или дефицити
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		800	1000	600	400	
A_1	120	1,5	3	4,5	6 100/400	$+20$
A_2	180	4,5	6 60/240	7,5 120/600	3	0
A_3	240	5 160/800	6 127/760	4	3	-47
λ_j		$\lambda_1 = 3{,}33$	$\lambda_2 = 2$	-	-	

Вземаме $\lambda_2 = 2$ и преизчисляваме интензивностите от първия ред

Машини със съответното им машинно време в мин.		Детайли, които трябва да се произведат в бр.				Излишъци Или дефицити
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		800	1000	600	400	
A_1	120	3	6	9	12 100/400	$+20$
A_2	180	4,5	6 60/240	7,5 120/600	3	0
A_3	240	5 160/800	6 127/760	4	3	-47

Изравнените интензивности между пълна и празна клетка във втори стълб са в клетки (3,2) и (1,2), така че ще прехвърляме бройки от второя детайл от третата към първата машина. Ако от третата машина отнемем x мин. машинно време, то към първата нашина ще трябва да прибавим $3x$ мин. (на базата на истинските им интензивности за втория детайл, които са 6 бр./мин. за третата и 2 бр./мин за първата). Тогава общия дисбаланс за двете машини ще бъде $47 - x + |20 - 3x|$ при $x \leq 47$. Минимален дисбаланс се получава ако $|20 - 3x| = 0$ или $x = 6{,}67$. Вземаме най-близкото цяло число (приели сме машинното време да се пресмята в цели минути), така че $x = 7$. Получаваме следния разпределителен план

Машини със съответното им машинно време в мин.		Детайли, които трябва да се произведат в бр.				Излишъци Или дефицити
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		800	1000	600	400	
A_1	120	3	6 20/40	9	12 100/400	0
A_2	180	4,5	6 60/240	7,5 120/600	3	0
A_3	240	5 160/800	6 120/720	4	3	-40

който не подлежи на подобряване. Така че производствения план не мове да бъде изпълнен – необходимо е още 40 мин. машинно време на втората машина. В рамките на съществуващите капацитети на машините трябва да се избира мевду две възможности – да не се произведат 200 броя от планираните 800 броя от първия детайл или да не се произведат 240 броя от планираните 1000 броя за втория детайл.

24. Решаване на ОРЗ чрез свеждането ѝ до ТЗ

Това може да стане само в случаите, когато матрицата на интензивностите

$$P = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nm} \end{pmatrix}$$

е с пропорционални редове.

Етапи на решаване на ОРЗ.

I. Преобразуване на ОРЗ в ТЗ

1) Избор на базов изпълнител. От всички номера на изпълнителите $i = 1,2,\dots,n$ фиксираме един, например $i = k$; тогава пресмятаме нормираните интензивности

$$\lambda_i = \frac{p_{ij}}{p_{kj}}$$

Припомняме, че интензивностите са пропорционални, т.е. $\frac{p_{i1}}{p_{k1}} = \cdots = \frac{p_{ij}}{p_{kj}} = \dots = \frac{p_{in}}{p_{kn}}$.

2) Преизчисляване на запасите от ресурси на изпълнителите по формулата

$$a_i' = \lambda_i a_i$$

3) Преизчисляване на планираните обеми на дейностите по формулата

$$b_j' = \frac{b_j}{p_{kj}}$$

Тъй като b_j се измерват в единици от дейността, а p_{kj} – в единици от дейността/единци от ресурса, то величините b_j' ще се измерват в единици от ресурса. Следователно a_i' и b_j' ще се измерват в едни и същи единици (така, както е при ТЗ).

4) Преизчисляване на тарифните коефициенти по формулата

$$c_{ij}' = p_{kj} c_{ij}$$

Да припомним, че c_{ij} се измерват в лв/единица дейност, а p_{kj} – в единици от дейност/единци от ресурс, то новите тарифни коефициенти c_{ij}' ще се измерват в лв/единица ресурс.

Така вече всички екзогенни величини на модела са приведени към ресурси, следователно ОРЗ се е превърнала в ТЗ.

II. **Проверка на баланса**

$$\sum_{i=1}^{n} a'_i = \sum_{j=1}^{m} b'_j$$

и построяване на транспортна таблица.

III. **Намиране на оптималното решение на съответната ТЗ**

$$X' = (x'_{ij})$$

IV. **Преобразуване на оптималното решение на ТЗ в оптимално решение на ОРЗ** по формулата

$$x_{ij} = \frac{x'_{ij}}{\lambda_i}$$

Тъй като x'_{ij} се измерват в единици ресурс, а λ_i е нормиращ множител, то x_{ij} ще се измерва в единици ресурс.

V. **Определяне на обемите дейности, които трябва да бъдат извършени от изпълнителите** по формулата

$$y_{ij} = p_{ij}x_{ij}$$

VI. **Пресмятане на целевата функция на ОРЗ.**

Пример 37. Във фабрика се експлоатират три типа тъкачни станове и се произвеждат четири типа тъкани. Известни са следните данни за производството:

1) Производителността на становете по тъкани в м./ч.

$$(p_{ij}) = \begin{vmatrix} 24 & 30 & 18 & 42 \\ 12 & 15 & 9 & 21 \\ 8 & 10 & 6 & 14 \end{vmatrix}$$

2) Себестойността на тъканите по станове в лв/м.

$$(c_{ij}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

3) Машинното време на становете: 90, 220 и 180 ч.
4) Планирания обем производство на тъканите: 1200, 900, 1800 и 840 м.

Трябва да се разпределят тъканите по станове, така че всички тъкани да бъдат произведени в планираните обеми с минимални разходи.

Решение:

Нека x_{ij} е времето през което i-ят стан трябва да произвежда j-тата тъкан. Разпределителната таблица ще изглежда така

Станове със съответното им машинно време в мин.		Тъкани, които трябва да се произведат в м.			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		1200	900	1800	840
A_1	90	2 24	1 30	3 18	1 42
A_2	220	3 12	2 15	4 9	1 21
A_3	180	6 8	3 10	5 6	2 14

Целевата функция ще има вида

$$
\begin{aligned}
F(X) = {} & 2.24.x_{11} + 1.30.x_{12} + 3.18.x_{13} + 1.42.x_{14} + 3.12.x_{21} + 2.15.x_{22} \\
& + 4.9.x_{23} + 1.21.x_{24} + 6.8.x_{31} + 3.10.x_{32} + 5.6.x_{33} + 2.14.x_{34} \\
& = 48x_{11} + 30x_{12} + 54x_{13} + 42x_{14} + 36x_{21} + 30x_{22} + 36x_{23} + 21x_{24} \\
& + 48x_{31} + 30x_{32} + 30x_{33} + 28x_{34} \to min
\end{aligned}
$$

Ограниченията ще са

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 90$$

$$x_{21} + x_{22} + 36 + x_{24} \leq 220$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 180$$

$$24x_{11} + 12x_{21} + 8x_{31} = 1200$$

$$30x_{12} + 15x_{22} + 10x_{32} = 900$$

$$18x_{13} + 9x_{23} + 6x_{33} = 1800$$

$$42x_{14} + 21x_{24} + 14x_{34} = 840$$

Преобразуваме ОРЗ в ТЗ, т.е. представяме задачата във вида, при който всички тъкани се произвеждат от един стан – базовия и всички параметри на задачата са съгласувани с неговите характеристики. В качеството на базов стан може да се избере всеки, например стана с най-висока производителност A_1. Определяме интензивностите λ_i, нормирани по базовия стан.

$$\lambda_1 = \frac{p_{1j}}{p_{1j}} = 1;\ \lambda_2 = \frac{p_{2j}}{p_{1j}} = \frac{1}{2};\ \lambda_3 = \frac{p_{3j}}{p_{1j}} = \frac{1}{3}$$

Преизчисляваме запасите от време (все едно, че всички станове работят с производителността на първия стан)

$$a_1' = \lambda_1 a_1 = 1.90 = 90;\ a_2' = \lambda_2 a_2 = \frac{1}{2} \cdot 220 = 220;\ a_3' = \lambda_3 a_3 = \frac{1}{3} \cdot 180 = 60$$

Преизчисляваме планираните обеми в часове, необходими за първият стан да ги произведе

$$b_1' = \frac{b_1}{p_{11}} = \frac{1200}{24} = 50;\ b_2' = \frac{b_2}{p_{12}} = \frac{900}{30} = 30;\ b_3' = \frac{b_1}{p_{13}} = \frac{1800}{18} = 100;\ b_4' = \frac{b_4}{p_{14}} = \frac{840}{42}$$

Преизчисляване на тарифните коефициенти по формулата

$$c_{ij}' = p_{1j} c_{ij}$$

и получаваме транспортната таблица

Станове		Тъкани			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		50	30	100	20
A_1	90	48	30	54	42
A_2	110	72	60	72	42
A_3	60	144	90	90	84

Извършваме проверка за балансираност на така получения транспортен модел

$$a_1' + a_2' + a_3' = 90 + 110 + 60 = 260$$

$$b_1' + b_2' + b_3' + b_4' = 50 + 30 + 100 + 20 = 200$$

Моделът е небалансиран, следователно трябва да въведем още една (фиктивна) тъкан B_5 с общ ресурс $b_5' = 60$ и нулеви коефициенти c_{i5}' и получаваме транспортната таблица

Станове		Тъкани				
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
		50	30	100	20	60
A_1	90	48	30	54	42	0
A_2	110	72	60	72	42	0
A_3	60	144	90	90	84	0

Решаваме ТЗ и получаваме оптималния транспортен план

$$X' = (x'_{ij}) = \begin{vmatrix} 50 & 30 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 90 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 60 \end{vmatrix}$$

Да припомним, че x'_{ij} означава колко часа трябва да работи i-я стан за да произвежда j-тата тъкан, ако има производителността на първия (базов) стан.

Сега пресмятаме x_{ij} по формулата $x_{ij} = \frac{x'_{ij}}{\lambda_i}$ с което получаваме яасовете работа на становете по тъкани

$$X = (x_{ij}) = \begin{vmatrix} 50 & 30 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 180 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 180 \end{vmatrix}$$

По такъв начин първият стан трябва да работи 50 ч. за да произвежда първата тъкан, 30 ч. за производството на втората тъкан и 10 ч. за производството на третата. Вторият стан ще е ангажиран 180 ч. за производството на третата тъкан и 40 ч. за производството на четвъртата. Третият стан няма да работи (защото му се пада да произвежда с целия си ресурс петата, фиктивна тъкан).

Може да пресметнем и по колко м. от тъканите ще произведат всички станове (по формулата $y_{ij} = p_{ij}x_{ij}$). Получаваме

$$Y = (y_{ij}) = \begin{vmatrix} 1200 & 900 & 180 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1620 & 840 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & - \end{vmatrix}$$

ЧАСТ ЧЕТВЪРТА. ДРУГИ МАТЕМАТИЧЕСКИ МОДЕЛИ В ЛОГИСТИКАТА

25. Размяна време-разходи (Time-cost trade off)

Много често в предприятието възниква следната ситуация: печалбата започва да спада поради ред причини като:

- Физическа амортизация на съществуващата техника и оборудване;
- Морална амортизация, неконкурентност на използваната в производството технология;
- Неадекватност на съществуващата организация на предприятието.

Тогава се налага кардинална промяна на техниката, технологията на производство или организацията на предприятието, например, внедряване на нова информационна система. Това обаче струва определени разходи. Тези разходи обикновено са много по-големи, ако това обновление се форсира във времето. Със скъсяването на развойния график на въвеждане на иновацията, следва да се изпълняват много задачи едновременно и така изпълнението на всяка задача бави изпълнението на другите задачи, има повече неуспешни стартове и неефективни дейности. Освен това, струпването на повече технически изпълнители при изпълнението на проекта води до понижаване на ефективността на всеки от тях. Ако се цели изпълнението на проекта за обновление в много кратък срок, вероятно ще се наложи и привличането на външни за фирмата, скъпо струващи специалисти. По такъв начин фирмата се изправя пред функцията на замяна на време с разходи и трябва да определи какъв е оптималния срок за въвеждане на иновацията, отчитайки и това, че с времето печалбата спада още повече. Отговорът зависи от зависимостта между брутната печалба (като функция на времето) и разходите по внедряване на иновацията (също зависещи от времето).

Нека $\Pi(t)$ е функцията на брутната печалба (без разходите по внедряване на иновацията) на фирмата. Предполага се, че това е намаляваща функция (в противен случай не се налага обновление), т.е.

$$\Pi'(t) < 0.$$

С $C(t)$ означаваме разходите по внедряване на иновацията. И за тази функция се предполага, че е намаляваща (поне до определен момент), т.е.

$$C'(t) < 0.$$

Тогава печалбата с приспаднати разходи по внедряване на обновлението ще бъде $\Pi(t) - C(t)$. Задачата за размяна време-разходи се свежда до следната оптимизационна задача

$$\Pi(t) - C(t) \to max.$$

Условието от първи ред за тази задача за безусловен максимум предполага нулиране на първата производна:

$$\Pi'(t) - C'(t) = 0 \Leftrightarrow \Pi'(t) = C'(t).$$

От решаването на горното уравнение получаваме оптималното време за въвеждането на иновацията $t = t_0$, за което е изпълнено равенството $\Pi'(t_0) = C'(t_0)$. В този случай се казва, че оптималното време за въвеждане на иновацията трябва да изравни маргиналната печалба с маргиналния разход по въвеждане на иновацията. За да е изпълнено това, необходимо е за тази стойност $t = t_0$ да е валидно условието от втори ред

$$\Pi''(t_0) - C''(t_0) < 0 \Leftrightarrow \Pi''(t_0) < C''(t_0).$$

Пример 38. Дадена компания от химическата промишленост иска да въведе нова пластмаса, защото произвежданата от нея пластмаса става все по-неконкурентна на пазара и функцията на брутната печалба е

$$\Pi(t) = 480 - 20t.$$

Разходите по внедряване на производството на новата пластмаса са

$$C(t) = 500 - 100t + 5t^2.$$

(и в двата случая времето t се изменя в месеци). Да се определи за колко месеца трябва да бъде внедрено производството на новата пластмаса.

Решение:

Тъй като

$$C'(t) = -100 + 10t \Longrightarrow C'(t) < 0 \text{ при } t < 10.$$

От друга страна, маргиналната печалба е

$$\Pi'(t) = -20.$$

От изравняването на маргиналната печалба с маргиналните разходи по внедряването на новата пластмаса в производство получаваме

$$\Pi'(t) = C'(t) \Leftrightarrow -20 = -100 + 10t \Leftrightarrow t = 8.$$

Условието от втори ред за тази задача е изпълнено за всяко t:

$$\Pi''(t) = 0 < 10 = C''(t).$$

Полученият максимум на брутната печалба с приспаднати разходи при внедряване за 8 месеца е

$$\Pi(8) - C(8) = (480 - 20 \cdot 8) - (500 - 100 \cdot 8 + 5 \cdot 8^2) = 320 - 20 = 300.$$

Забележка. В горният пример за функция на разходите по внедряването беше използвана функцията

$$C(t) = a - bt + ct^2,$$

където коефициентите a, b и c са положителни и $a \gg b \gg c$. Тъй като за първата производна имаме

$$C'(t) = -b + 2ct \Rightarrow C'(t) < 0 \text{ при } t < \frac{b}{2c},$$

то за тази функция е характерно, че от $t = 0$ (когато разходите възлизат на $C(0) = a$) до $t = \frac{b}{2c}$ разходите спадат, достигайки своя минимум

$$C\left(\frac{b}{2c}\right) = a - \frac{b^2}{4c},$$

а след това започват да нарастват.

Пример за функция на постоянно спадащи разходи е функцията

$$C(t) = C_0 + \frac{a}{t - t_0} \quad \text{при} \quad t > t_0.$$

И наистина, за първата производна имаме

$$C'(t) = -\frac{a}{(t - t_0)^2} < 0, \text{като}$$

$$\lim_{t \to \infty} C(t) = C_0,$$

т.е. правата $C = C_0$ играе ролята на хоризонтална асимптота за графиката на функцията $C = C(t)$, с други думи, минималните разходи $C = C_0$ никога не могат да бъдат достигнати.

Много често спадът на печалбата се счита за косвен разход (indirect cost) и се бележи с $IC(t)$. Тогава формулата за печалбата ще изглежда така

$$\Pi(t) = \Pi_0 - IC(t),$$

където Π_0 е достигнатото максимално ниво на печалба, преди тя да започне да спада (т.е. преди да се появи косвеният разход). Естествено, косвеният разход расте с времето и той става причината за появата на прекия разход (direct cost) $DC(t)$, който всъщност е разхода по внедряването на иновацията, който преди означавахме с $C(t)$.

Тогава задачата за максимализиране на печалбата с приспаднати разходи по внедряване на иновацията ще се модифицира така

$$\Pi_0 - IC(t) - DC(t) = \Pi_0 - \big(IC(t) + DC(t)\big) \to max,$$

което означава, че модифицираната оптимизационна задача е

$$IC(t) + DC(t) \to min,$$

т.е., ще трябва да минимизираме сумата от преките и косвени разходи.

Условието от първи ред за тази оптимизационна задача е

$$IC'(t) + DC'(t) = 0.$$

Ако $t = t_0$ е решението на горното уравнение, то за него трябва да е изпълнено условието от втори ред

$$IC''(t) + DC''(t) > 0.$$

Пример 39. Очаква се, че печалбата ще започне да спада след 30 дена, като спадът ще бъде от 10000$ дневно. Внедряването на новата технология може да започне най рано след 85 дни. Ако това стане за 15 дена (т.е. от $t = 85$ до $t = 100$) разходите за това ще възлизат на 1300000$, а за 75 дена (от $t = 85$ до $t = 160$) – 700000$. Предполага се, че функцията на преките разходи е от вида

$$DC(t) = C_0 + \frac{a}{t - t_0}.$$

Да се намери оптималното време за внедряване на новата технология.

Решение:

Ясно е, че косвените разходи се задават с формулата

$$IC(t) = -300 + 10t \quad \text{за} \quad t \geq 30.$$

Сега трябва, използвайки данните да намерим функцията на преките разходи. Ясно е, че $t_0 = 85$, тогава за нея ще имаме

$$DC(t) = C_0 + \frac{a}{t - 85}$$

и тя ще бъде възстановена, ако намерим коефициентите C_0 и a. Заместваме данните за нея и получаваме

$$DC(100) = C_0 + \frac{a}{100 - 85} = 1300 \Longrightarrow 15C_0 + a = 19500$$

$$DC(160) = C_0 + \frac{a}{160 - 85} = 700 \Longrightarrow 75C_0 + a = 52500.$$

Изваждаме първото от второто уравнение и получаваме

$$60C_0 = 33000 \Longrightarrow C_0 = 550.$$

Тогава за другия коефициент a намираме $a = 11250$ и окончателният вид на функцията на преките разходи ще бъде

$$DC(t) = 550 + \frac{11250}{t - 85}.$$

(Всички парични величини се измерват в хиляди $).

Условието от първи ред за тази оптимизационна задача е

$$IC'(t) + DC'(t) = 0.$$

За съответните производни намираме

$$IC'(t) = 10,$$

$$DC'(t) = -\frac{11250}{(t - 85)^2}.$$

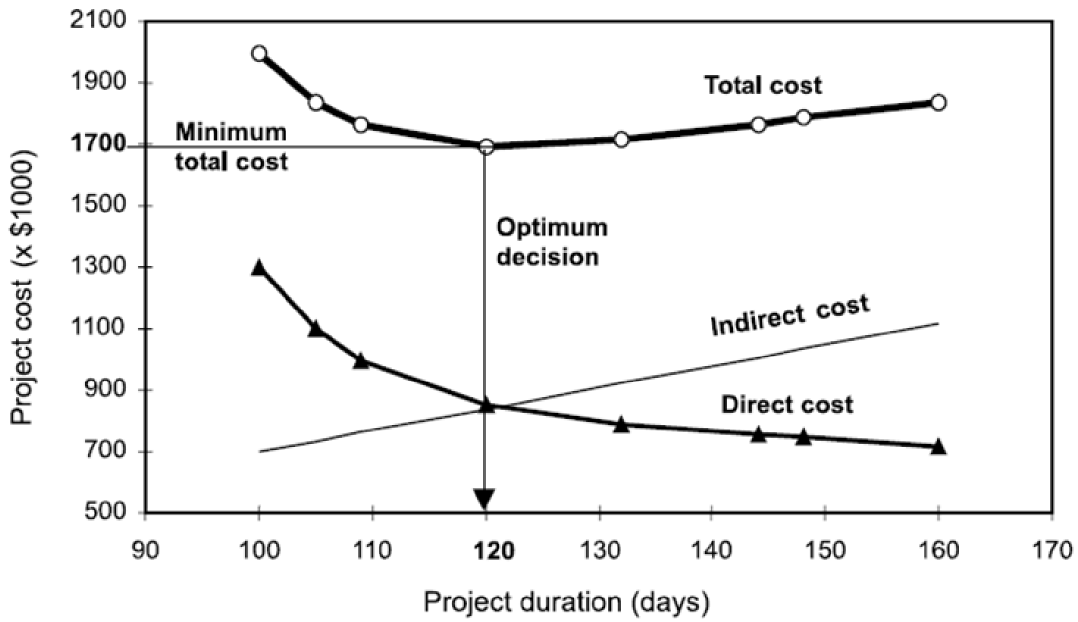
Като заместим в горното уравнение получаваме

$$\frac{11250}{(t - 85)^2} = 10 \Longrightarrow (t - 85)^2 = 1125 \Longrightarrow t - 85 = 35 \text{ и } t = 120.$$

Това е времето минимизиращо сумата от преките и косвени разходи. Тази минимална сума е

$$\{IC(t) + DC(t)\}_{min} = IC(120) + DC(120) = 900 + 900 = 1800.$$

На рис. 31 данните от примера са нанесени графично.



Source: Optimization of construction time - Cost trade-off analysis using genetic algorithms by Hegazy, and Ayed (1999). pp.682

Рис. 31. Минимизиране на сумата от преките и косвени разходи – графика

26. Превантивно обслужване на оборудването

С течение на времето оборудването и съоръженията остаряват. Все по-често се наблюдават дефекти, произвежданата продукция има повече брак, качеството ѝ се понижава. Съществува начин да се противопоставим на този процес чрез превантивното обслужване на оборудването.

При провеждане на превантивното обслужване на оборудването детайла (агрегата), при който е възможно счупване след някакъв период от време, се заменя, независимо от текущото му състояние. Това дава възможност за поддържане на оборудването в състояние, позволяващо постигането на нелоши резултати.

Колко често трябва да провеждаме превантивно обслужване на оборудването? Ако това е прекалено често, нарастват разходите по него, а ако е прекалено рядко – нарастват разходите (пропуснатите ползи) в следствие на брак и повреди.

Пример 40. Предприятие иска да реши въпроса с каква честота да провежда превантивно обслужване на оборудването. Провеждането на такова обслужване струва 40000 лв. Амортизационните отчисления за оборудването са 4000 лв. на месец. Допълнителната информация е приведена в таблицата

Брой на месеците след обслужването	1	2	3	4	5	6
Разходи за месеца	0	2000	6000	8000	64000	120000

Превантивното обслужване на оборудването позволява оборудването технически да се доведе до състояние на ново оборудване. Да се определи оптималната честота за провеждане на превантивно обслужване на оборудването.

Заб. Под „разходи за месеца“ се разбират пропуснатите ползи от брак, понижено качество и други разходи, свързани с остаряване на оборудването.

Решение:

Запълваме таблицата

Брой на месеците след обслужването	1	2	3	4	5	6
Разход за обслужването	40000	40000	40000	40000	40000	40000
Разходи за месеца	0	2000	6000	8000	64000	120000
Разходи с натрупване	0	2000	8000	16000	80000	200000
Амортизационни отчисления	4000	8000	12000	16000	20000	24000
Общи разходи	44000	50000	60000	72000	140000	264000
Средно месечни общи разходи	44000	25000	20000	18000	28000	44000

Намираме минимума в последния ред – 18000 лв. Тогава превантивното обслужване на оборудването трябва да се извършва на всеки четири месеца и средно месечните общи разходи ще са минимални.

Обикновено разходите (пропуснатите ползи) вследствие на износване на оборудването нарастват във времето, затова функцията на тези разходи с натрупване е изпъкнала функция. Най-прост пример за такава функция е квадратния тричлен $TC(t) = at^2 + bt + c$, където a, b, c са (неопределени) коефициенти, а t е времето, измервано в месеци, седмици или други времеви единици.

Пример 41. Предприятие иска да реши въпроса с каква честота да провежда превантивно обслужване на оборудването. Провеждането на такова обслужване струва 40000 лв. Амортизационните отчисления за оборудването са 4000 лв. на месец, а зависимостта на общите разходи от износване на оборудването от времето (в месеци) се изразява чрез функция от втора степен $TC(t) = at^2 + bt + c$, като за първия месец пропуснати ползи няма, за втория месец те са 2000 лв., а за третия – 5000 лв. Да се определи оптималната честота за провеждане на превантивно обслужване на оборудването и минималните средно месечни разходи.

Решение:

Търсим функцията $TC(t)$ във вида $TC(t) = at^2 + bt + c$, където a, b, c са неопределени коефициенти, а t е времето, измервано в месеци. За определянето на a, b, c ще използваме условието. Ще имаме

$$TC(1) = a + b + c = 0, TC(2) = 4a + 2b + c = 2 \text{ и } TC(3) = 9a + 3b + c = 7.$$

Решаваме горната линейна система от три уравнения с три неизвестни и получаваме $a = 1{,}5;\ b = -2{,}5$ и $c = 1$. За функцията $TC(t)$ ще имаме

$$TC(t) = 1{,}5t^2 - 2{,}5t + 1.$$

Тъй като разходите по извършване на превантивното обслужване на оборудването са 40 (работим в хил. лв.), а амортизационните разходи - $4t$, то общите разходи възлизат на

$$C(t) = 1{,}5t^2 - 2{,}5t + 1 + 40 + 4t = 1{,}5t^2 + 1{,}5t + 41,$$

а средно месечните разходи:

$$AC(t) = \frac{C(t)}{t} = 1{,}5t + 1{,}5 + \frac{41}{t}.$$

За първата производна $AC'(t)$ ще имаме

$$AC'(t) = 1{,}5 - \frac{41}{t^2} = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{41}{1{,}5}} \cong 5{,}23.$$

Тъй като $AC''(5{,}23) > 0$, то при $t = 5{,}23$ средните месечни разходи достигат своя минимум, който е $AC(5{,}23) = 1{,}5 \cdot 5{,}23 + 1{,}5 + 41/5{,}23 = 17{,}18$. Следователно, превантивното обслужване на оборудването трябва да се извършва на всеки 5,23 месеца и средните месечни разходи ще са 17180 лв.

27. Крива на обучението – диференциален модел

Разглеждаме функцията на обучение $L(t)$. Тази функция може да описва, например, производителността на служителя. Нека L_{max} бъде максималната възможна стойност на $L(t)$. В много случаи е на лице правилото: скоростта на обучение е пропорционална на оставащия обем (все още не научен) материал. Математически, това е представено с уравнението:

$$\frac{dL}{dt} = k(L_{max} - L)$$

където k е коефициент на пропорционалност. Това диференциално уравнение е уравнение с разделени променливи и лесно може да бъде решено в общ вид:

$$\frac{dL}{dt} = k(L_{max} - L) \Rightarrow \frac{dL}{(L_{max} - L)} = kdt$$
$$\Rightarrow \int \frac{dL}{(L_{max} - L)} = \int kdt \Rightarrow -\int \frac{d(L_{max} - L)}{(L_{max} - L)} = kt + \ln C$$
$$\Rightarrow -\ln(L_{max} - L) = kt + \ln C \Rightarrow \ln(L_{max} - L)$$
$$= -kt + \ln C \Rightarrow \ln(L_{max} - L) = \ln e^{-kt} + \ln C.$$

След като се отървем от логаритмите, ние получаваме общото решение на диференциалното уравнение:

$$(L_{max} - L) = Ce^{-kt}.$$

Константата C може да бъде определена от първоначалното състояние: $L(t = 0) = M$. Следователно, $C = L_{max} - M$, в резултат на това кривата на обучение е описана с формулата:

$$L(t) = L_{max} - (L_{max} - M)e^{-kt}$$

В последният израз параметъра M представлява първоначалното ниво на знания или умения. В най-простият случай, може да се предположи, че $M = 0$. Другият параметър k е "контрол" на скоростта на обучение. Криви на обучение за различните стойности на M и k са показани на Рис. 32 и Рис. 33.

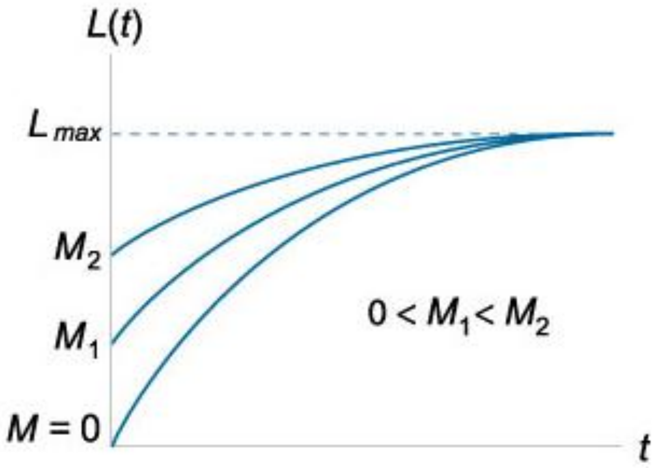


Рис. 32. Графики на криви на обучението при различни стойности на параметъра M

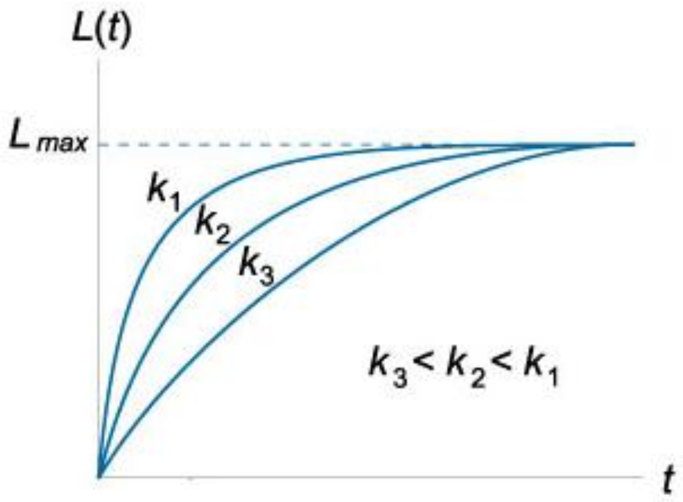


Рис. 33. Графики на кривата на обучението при различни стойности на параметъра k

Както може да се види, кривата на обучение L във всички случаи отбелязва по-бързо нарастване в началото на процеса, след това с доближаване до максималната стойност L_{max} се наблюдава намаляване скоростта на обучение. Разбира се, колкото по-голяма е стойността на параметъра k толкова по-стръмна е линията на обучението (в началото).

Да разгледаме дискретният вариант, т.е. диференчното уравнение, съответстващо на диференциалното уравнение, задаващо линията на опита. Тъй като

$$\frac{dL}{dt} \cong \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{L_{t+1} - L_t}{(t+1) - t} = L_{t+1} - L_t,$$

то получаваме

$$L_{t+1} - L_t = k(L_{max} - L_t) \quad \text{или} \quad \frac{L_{t+1} - L_t}{L_{max} - L_t} = k = const.$$

Преобразуваме малко диференчното уравнение и получаваме

$$L_{t+1} = (1-k)L_t + kL_{max}.$$

Такава числова редица се нарича геометрико-аритметична прогресия. В общият случай тя се задава по следния начин

$$a_{n+1} = qa_n + d.$$

За a_1 получаваме

$$a_1 = qa_0 + d.$$

За a_2 ще имаме

$$a_2 = q(qa_0 + d) + d = q^2a_0 + qd + d = q^2a_0 + (1+q)d = q^2a_0 + \frac{1-q^2}{1-q}d.$$

Индукционното допускане е, че общият член на тази числова редица има вида

$$a_n = q^n a_0 + \frac{1-q^n}{1-q} d.$$

Тогава за a_{n+1} ще имаме

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= q\left(q^n a_0 + \frac{1-q^n}{1-q} d\right) + d = q^{n+1} a_0 + \frac{1-q^n}{1-q} qd + d \\ &= q^{n+1} a_0 + \left(\frac{1-q^n}{1-q} q + 1\right) d = q^{n+1} a_0 + \frac{q - q^{n+1} + 1 - q}{1-q} d \\ &= q^{n+1} a_0 + \frac{1-q^{n+1}}{1-q} d.\end{aligned}$$

С това ние доказахме формулата по метода на математическата индукция.

В нашият случай ще имаме $a_0 = L_0 = M,\ q = 1-k$ и $d = kL_{max}$. Заместваме в получената формула за общия член на геометрико-аритметичната прогресия и получаваме

$$\begin{aligned}L_t &= (1-k)^t M + \frac{1-(1-k)^t}{1-(1-k)} kL_{max} = (1-k)^t M + (1-(1-k)^t) L_{max} \\ &= L_{max} - (L_{max} - M)(1-k)^t.\end{aligned}$$

Пример 42. Фармацевт в аптека трябва да провери 1000 рецепти на ден. Нов фармацевт след една седмица работа може да провери 100 рецепти на ден. Да се изчисли броят на рецептите, които фармацевта ще бъде в състояние да провери на ден след още една седмица работа.

Решение:

За простота, първоначалното ниво на умения, нека бъде нула: $M = 0$. Процесът на обучение може да бъде описан от следния закон:

$$L(t) = L_{max}(1 - e^{-kt}),$$

и тъй като по условие имаме $L_{max} = 1000$, то формулата за седмичната производителност на фармацевта ще бъде

$$L(t) = 1000(1 - e^{-kt}).$$

Ние ще определим параметъра k, знаейки, броят на рецептите, които са проверени след една седмица:

$$L(1) = 1000(1 - e^{-k}) = 100 \Rightarrow e^{-k} = 0{,}9$$

След логаритмуване получаваме

$$-k = \ln 0{,}9 \Rightarrow k = -\ln 0{,}9 = 0{,}105$$

Така намираме формулата за седмичната производителност на фармацевта

$$L(t) = 1000(1 - e^{-0{,}105t})$$

Сега може да се изчисли ефективността на новия фармацевт, две седмици след началото на работата:

$$L(2) = 1000(1 - e^{-0{,}105\cdot 2}) = 1000(1 - e^{-0{,}21}) = 1000(1 - 0{,}811) = 189.$$

Пример 43. Да предположим, че новините, които се разпространяват в медиите са описани със на закона на кривата на обучение. Какъв трябва да бъде процентът на "населението", което е наясно в самото начало с тази новина, така че през първата седмица нивото е 50%, а след четири седмици - 90%?

Решение.

Новината се разпространи по закона:

$$L(t) = L_{max} - (L_{max} - M)e^{-kt}$$

В горната формула времето t се изразява в седмици. Сега параметъра M представяме като rL_{max}, където r е в интервала $0 \leq r \leq 1$ и законът за разпространение добива вида

$$L(t) = L_{max}(1 - (1 - r)e^{-kt}).$$

Сега ще използваме данните за разпространение на новините – през първата седмица имаме $L(t) = 0{,}5L_{max}$ и през четвъртата - $L(4) = 0{,}9L_{max}$. Заместваме $t = 1$ и $t = 4$ във формулата за разпространение и получаваме

$$L(1) = L_{max}(1 - (1 - r)e^{-k}) = 0{,}5L_{max}$$

$$L(4) = L_{max}(1 - (1 - r)e^{-4k}) = 0{,}9L_{max}$$

Разделяме на L_{max}, ние получаваме система от уравнения с две неизвестни, които са r и k:

$$(1 - (1 - r)e^{-k}) = 0{,}5 \Rightarrow (1 - r)e^{-k} = 0{,}5$$

$$(1 - (1 - r)e^{-4k}) = 0{,}9 \Rightarrow (1 - r)e^{-4k} = 0{,}1$$

Логаритмуваме двете страни на всяко едно от уравненията:

$$\ln(1 - r) - k = \ln 0{,}5 = -0{,}693$$

$$\ln(1 - r) - 4k = \ln 0{,}1 = -2{,}303$$

Умножавам първото уравнение с (-4) и след това събирам двете уравнения:

$$-3\ln(1 - r) = 4 \cdot 0{,}693 - 2{,}303 = 2{,}772 - 2{,}303 = 0{,}469 \Rightarrow \ln(1 - r) = -0{,}156 \Rightarrow (1 - r) = e^{-0{,}156} = 0{,}856 \Rightarrow r = 0{,}144$$

В този случай, първоначалното ниво на разпространение на новината, трябва да бъде:

$$L(t) = M = rL_{max} = 0{,}144L_{max} = 14{,}4\% \text{от} L_{max}.$$

Пример 44. В едно предприятие през първата седмица са произведени 1000 изделия, а втората – 1560. Смята се, че повече от 2400 изделия седмично не могат да се произведат. Да се определи функцията на производителност $L(t)$ и да се пресметне количеството, произведено през третата седмица.

Решение:

Допускаме, че производителността се задава чрез формулата

$$L(t) = L_{max} - (L_{max} - M)e^{-kt},$$

където $L(t)$ е количеството, произведено през t –тата седмица в хил. бр. тъй като (по условие) $L_{max} = 2{,}4$, то ще имаме

$$L(t) = 2{,}4 - (2{,}4 - M)e^{-kt}$$

Използваме, че през първата седмица (т.е. при $t = 1$) са произведени 1 хил. бр.:

$$L(1) = 2{,}4 - (2{,}4 - M)e^{-k} = 1,$$

а през втората седмица – 1,56 хил. бр.:

$$L(2) = 2{,}4 - (2{,}4 - M)e^{-2k} = 1{,}56.$$

Така получаваме следната система от две уравнения за неизвестните коефициенти M и k

$$(2{,}4 - M)e^{-k} = 1{,}4$$

$$(2{,}4 - M)e^{-2k} = 0{,}84.$$

Логаритмуваме горните уравнения и получаваме

$$\ln(2{,}4 - M) - k = \ln 1{,}4 = 0{,}336$$

$$\ln(2{,}4 - M) - 2k = \ln 0{,}84 = -0{,}174.$$

То извадим второто уравнение от първото, получаваме коефициента $k = 0{,}51$. Тогава от първото уравнение ще имаме

$$\ln(2{,}4 - M) = 0{,}336 + 0{,}51 = 0{,}846.$$

След антилогаритмуване получаваме

$$(2{,}4 - M) = e^{0{,}846} = 2{,}33.$$

Тогава, окончателният вид на линията на опита ще бъде

$$L(t) = 2{,}4 - 2{,}33e^{-0{,}51t}.$$

За да получим количеството, произведено през третата седмица, необходимо е да намерим

$$L(3) = 2{,}4 - (2{,}33)e^{-1{,}53} = 1{,}895.$$

28. Крива на обучението – обобщен диференциален модел

Законът за производителността в процеса на обучение (натрупване на опит) беше изведен на база на предположението, че скоростта на нарастване на производителността е пропорционална във всеки момент на разликата между пределната производителност и достигнатата към този момент производителност.

Но не всички емпирични данни от реални процеси на обучение потвърждават това предположение. Така например, ако $L(1) = 10$, $L(2) = 16$, $L(3) = 21$, $L(4) = 25$ (примера в началото на параграф 9), то би следвало да е изпълнено

$$\frac{L(2) - L(1)}{L_{max} - L(1)} = \frac{L(3) - L(2)}{L_{max} - L(2)} = \frac{L(4) - L(3)}{L_{max} - L(3)},$$

Като всички тези пропорции трябва да са равни на k. От първото равенство ще имаме

$$\frac{16 - 10}{L_{max} - 10} = \frac{21 - 16}{L_{max} - 16} \Rightarrow 6(L_{max} - 16) = 5(L_{max} - 10) \Rightarrow L_{max} = 46 \text{ и}$$

$$\frac{L(2) - L(1)}{L_{max} - L(1)} = \frac{L(3) - L(2)}{L_{max} - L(2)} = \frac{1}{6}.$$

От второто равенство ще имаме

$$\frac{21 - 16}{L_{max} - 16} = \frac{25 - 21}{L_{max} - 21} \Rightarrow 5(L_{max} - 21) = 4(L_{max} - 16) \Rightarrow L_{max} = 41 \text{ и}$$

$$\frac{L(3) - L(2)}{L_{max} - L(2)} = \frac{L(4) - L(3)}{L_{max} - L(3)} = \frac{1}{5}.$$

Т.е. получават се две различни стойности за параметрите на модела L_{max} и k.

Това ни навежда на мисълта да направим обобщение на диференциалния модел на кривата на обучение, при който коефициентът на пропорция k може да се променя с времето, т.е. $k = k(t)$. Тогава диференциалното уравнение на модела ще бъде

$$\frac{dL}{dt} = k(t)(L_{max} - L),$$

По същият начин получаваме общото решение

$$(L_{max} - L) = Ce^{-kt}.$$

$$L(t) = L_{max} - Ce^{-\int k(t)dt}.$$

Пример 45. Предполага се, че за модел на обучение с променлива пропорция $k(t)$ е от вида

$$k(t) = \frac{k_0}{at + 1},$$

като $k(0) = 0{,}2$ и $k(50) = 0{,}1$. Ако допуснем, че $L(0) = M = 0$, то след колко време ще бъде достигната 90% от максималната производителност? А 99%?

Решение:

Да намерим общото решение за $L(t)$ при функция $k(t)$ от такъв вид. Първо ще трябва да интегрираме $k(t)$:

$$\int k(t)dt = \int \frac{k_0}{at+1}dt = \frac{k_0}{a}\int \frac{d(at+1)}{at+1} = \frac{k_0}{a}\ln(at+1).$$

Тогава за $e^{-\int k(t)dt}$ ще имаме

$$e^{-\int k(t)dt} = e^{-\frac{k_0}{a}\ln(at+1)} = \frac{1}{(at+1)^{\frac{k_0}{a}}}.$$

Окончателно, за общото решение получаваме

$$L(t) = L_{max} - \frac{C}{(at+1)^{\frac{k_0}{a}}}.$$

Заместваме $t = 0$ за да определим интеграционната константа C:

$$L(0) = L_{max} - \frac{C}{(a \cdot 0 + 1)^{\frac{k_0}{a}}} = L_{max} - C \Rightarrow C = L_{max} - L(0) = L_{max} - M.$$

Така получаваме окончателният вид на функцията на производителност $L(t)$ при променлив коефициент от такъв вид:

$$L(t) = L_{max} - \frac{L_{max} - M}{(at+1)^{\frac{k_0}{a}}}.$$

Тъй като допускаме, че $M = 0$, то за $L(t)$ получаваме

$$L(t) = L_{max}\left(1 - \frac{1}{(at+1)^{\frac{k_0}{a}}}\right).$$

Остава да определим параметрите k_0 и a на функцията $k(t)$ от условията на задачата. Ще имаме

$$k(0) = \frac{k_0}{a \cdot 0 + 1} = 0{,}2 \Rightarrow k_0 = 0{,}2 \text{ и } k(t) = \frac{0{,}2}{at+1}$$

$$k(50) = \frac{0{,}2}{a \cdot 50 + 1} = 0{,}1 \Rightarrow a \cdot 50 + 1 = 2 \Rightarrow a = 0{,}02 \text{ и } k(t) = \frac{0{,}2}{0{,}02t+1}.$$

Тогава за $L(t)$ получаваме

$$L(t) = L_{max}\left(1 - \frac{1}{(0{,}02t + 1)^{10}}\right).$$

Да направим сравнение с крива на обучение, получаваща се при $k = const = 0{,}2$ (в разглеждания случай $k(t)$ е намаляваща функция). Съгласно изводите от предишния параграф за $k = 0{,}2$ ($M = 0$ и произволно L_{max} ще имаме

$$L(t) = L_{max}(1 - e^{-0{,}2t}).$$

Сравнението между двата модела правим за $t = 1{,}2{,}3{,}5{,}10$ и $L_{max} = 100$.

t	$L(t)$ при $k = const = 0{,}2$	$L(t)$ при $k(t) = \frac{0{,}2}{0{,}02t+1}$
1	18,13	17,97
2	32,97	32,44
3	45,12	44,16
5	63,21	61,45
10	86,47	83,85

Вижда се, че при разглеждания модел има забавяне (увеличаващо се с течение на времето) в сравнение със стандартния модел.

Сега трябва да отговорим на въпроса: при каква стойност на t ще бъде достигната 90% от максималната производителност? Ще имаме

$$L_{max}\left(1 - \frac{1}{(0{,}02t + 1)^{10}}\right) = 0{,}9L_{max} \Longrightarrow \frac{1}{(0{,}02t + 1)^{10}} = 0{,}1 \Longrightarrow (0{,}02t + 1)^{10} = 10 \Longrightarrow 0{,}02t + 1 = 10^{0{,}1} \cong 1{,}26 \text{ и } t \cong 13.$$

И наистина

$$L(13) = L_{max}\left(1 - \frac{1}{(0{,}02 \cdot 13 + 1)^{10}}\right) = 0{,}9008L_{max}.$$

Аналогични са пресмятанията за 99% от L_{max}:

$$L_{max}\left(1 - \frac{1}{(0{,}02t + 1)^{10}}\right) = 0{,}99L_{max} \Longrightarrow \frac{1}{(0{,}02t + 1)^{10}} = 0{,}01 \Longrightarrow (0{,}02t + 1)^{10} = 100 \Longrightarrow 0{,}02t + 1 = 100^{0{,}1} \cong 1{,}58 \text{ и } t \cong 29.$$

$$L(29) = L_{max}\left(1 - \frac{1}{(0{,}02 \cdot 29 + 1)^{10}}\right) = 0{,}9897L_{max}.$$

Литература

1. Д. Македонска, Ив. Димитров, Р. Петров, Логистика (учебник), Варна, 2005
2. Цв. Цветков, Стопанска логистика, Издателска къща "Стено" - Варна, 2005
3. ТРАНСПОРТ И ЛОГИСТИКА (списание), издание на БТП ЕООД
4. Г. Л. Бродецкий, Д. А. Гусев, Экономико-математические методы и модели в логистике (учебник), Москва, Изд. ц-р „Академия“, 2012,
5. Зайцев, Е. И., Экономико-математические методы и модели в логистике (учебник), 2009
6. Б. К. Плоткин, Л., А., Делюкин, Экономико-математические методы и модели в логистике (учебник), Изд. С-т Пет. У-та Экон. и Фин. 2010
7. В. С. Лубенцова, Математические методы и модели в логистике, Самара, 2008
8. Алесинская Т.В., Основы логистики. Общие вопросы логистического управления (учебное пособие), Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2005
9. Алесинская Т.В., Учебное пособие по решению задач по курсу "Экономико-математические методы и модели", Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2002
10. Исследование операций в экономике (учебник), под редакцией Н. Ш. Кремера, Юнити, Москва, 2002
11. Г. И. Просветов, Математические методы в логистике (задачи и решения), Альфа–Прес, Москва, 2012
12. А.А. Тюхтина, МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ, Учебно-методическое пособие, Нижний Новгород, 2017
13. http://www.math24.ru Математический анализ, Дифференциальные уравнения
14. T. Gudehus, H. Kotzab, Comprehensive Logistics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2012
15. G. Mutanov, Mathematical Methods and Models in Economic Planning, Management and Budgeting, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2015
16. G. Hadley and T. M. Whitin, A Review of Alternative Approaches to Inventory Theory, the RAND Corp., sept. 1964
17. Operation Management/Industrial Engineering, by Paul A. Jensen, Internet, 2004, https://www.me.utexas.edu/~jensen/ORMM/omie/operation/index.html