Параметризирани повърхнини

Задача 1. Дадена е повърхнината

$$S: \vec{r}(u,v) = (u\sin v, u\cos v, u\,v),\ v\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

Да се намерят:

а) уравнението на допирателната повърхнина към S в т. $P(u=1, v=0)$;

б) уравнението на нормалата към повърхнината S в т. P;

в) коефициентите на първа основна форма за произволна точка от S;

г) ъгълът, който сключват кривите $c_1: u+\cos v=2$ и $c_2: u-\sin v=1$ върху S в точката си на пресичане;

д) да се намерят ортогоналните траектории на u- и v-линиите за S;

е) коефициентите на втората основна форма за произволна точка от S;

ж) пълната (гаусова) кривина K и средната кривина H за произволна точка от S;

з) нормалните кривини по направление на допирателните вектори на кривите c_1 и c_2 за повърхнината в т. P;

и) нормалните кривини по направление на координатните линии за произволна точка от S;

й) всички асимптотични линии върху повърхнината;

к) всички главни линии върху повърхнината;

л) главните кривини в произволна точка от повърхнината.

Решение:

а) Първо ще трябва да намерим координатите на т. P в $\mathbb{R}^3$ (наричат се външни координати за разлика от вътрешните координати, изразяващи се чрез u и v). За целта заместваме $u=1$ и $v=0$ в израза за S. Имаме

$x_P = 1.\sin 0 = 0$, $y_P = 1.\cos 0 = 1$, $z_P = 1.0 = 0 \Rightarrow$
$P(0,1,0)$.

Тъй като ще ползваме уравнение на равнина през точка и нормала, ще ни трябват и координатите на един нормален вектор. За допирателната равнина такъв е векторът $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$. Диференцираме частно по u и по v:

$$\vec{r}_u\,(\sin v,\ \cos v,\ v)$$
$$\vec{r}_v\,(u\cos v,\ -u\sin v,\ u)$$

Сега пресмятаме координатите на тези два базови за допирателната равнина вектори за т. P

$$\vec{r}_u(P)(\ 0\ ,\ 1\ ,\ 0)$$
$$\vec{r}_v(P)(\ 1\ ,\ 0\ ,\ 1)$$

Пресмятаме векторното произведение $\vec{r}_u(P) \times \vec{r}_v(P)$

$$\vec{r}_u(P) \times \vec{r}_v(P)(1\ ,\ 0\ ,\ -1)$$

Съставяме уравнението на равнина през точка с координати $(0,1,0)$ и с нормален вектор с координати $(1,0,-1)$:

$$1(x-0)+0(y-1)-1(z-0)=0$$

или

$$x - z = 0$$

б) Това е права, минаваща през т. P и имаща за колинеарен вектор същия вектор $\vec{r}_u(P) \times \vec{r}_v(P)$. За това каноничното ѝ уравнение е

$$\frac{x-0}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-0}{-1}$$

в) Пресмятаме последователно

$$g_{11}=\vec{r}_u^{\,2}=\sin^2 v+\cos^2 v+v^2=1+v^2$$

$$g_{12}=\vec{r}_u\vec{r}_v=u\sin v\cos v-u\sin v\cos v+uv=uv$$

$$g_{22}=\vec{r}_v^{\,2}=(u\cos v)^2+(-u\sin v)^2+u^2=u^2\cos^2 v+$$
$$+u^2\sin^2 v+u^2=u^2(\cos^2 v+\sin^2 v)+u^2=u^2.1+u^2=2u^2$$

Така за първата основна форма на повърхнината получаваме

$$ds^2=I(du,dv)=g_{11}du^2+2g_{12}dudv+g_{22}dv^2=$$
$$=(1+v^2)du^2+2uv\,du\,dv+2u^2dv^2$$

г) Първо трябва да намерим вътрешните координати на точката на пресичане на c_1 и c_2. Те ще бъдат такива стойности на u и v, които удовлетворяват системата

$$\begin{cases} u+\cos v=2 \\ u-\sin v=1 \end{cases}$$

Изваждаме второто уравнение от първото и получаваме $\cos v+\sin v=1$. Ако повдигнем това равенство ~~на~~ на квадрат ще имаме $\cos^2 v+2\cos v\sin v+\sin^2 v=1$. Тъй като $\cos^2 v+\sin^2 v=1$ и $2\cos v\sin v=\sin 2v$, то получаваме $\sin 2v=0 \Rightarrow 2v=0, \pm\pi; \pm 2\pi$ и $v=0, \pm\frac{\pi}{2}; \pm\pi, \dots$. Но в условието $v\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, следователно остава само решението $v=0$. Като заместим в кое да е от уравненията на системата получаваме $u=1$, а това е т. $P=c_1\cap c_2$. За пресмятане на косинуса на ъгъла ~~на~~ между c_1 и c_2 в т. P използваме формулата

$$\cos\varphi = \frac{g_{11}\dot{u}_1\dot{u}_2 + g_{12}(\dot{u}_1\dot{v}_2 + \dot{u}_2\dot{v}_1) + g_{22}\dot{v}_1\dot{v}_2}{\sqrt{g_{11}\dot{u}_1^2 + 2g_{12}\dot{u}_1\dot{v}_1 + g_{22}\dot{v}_1^2}\sqrt{g_{11}\dot{u}_2^2 + 2g_{12}\dot{u}_2\dot{v}_2 + g_{22}\dot{v}_2^2}},$$

където $g_{11}, g_{12}, g_{22}, \dot{u}_1, \dot{v}_1, \dot{u}_2$ и $\dot{v}_2$ са пресметнате в т. P.
От в) получаваме

$$g_{11}(P) = 1 + 0^2 = 1;\ g_{12}(P) = 1.0 = 0;\ g_{22}(P) = 2.1^2 = 2$$

От вътрешните уравнения на c_1 и c_2 виждаме, че и двете криви могат да се параметризират относно v:

$$c_1 : (u_1 = 2 - \cos v_1;\ v_1);\ c_2 : (u_2 = 1 + \sin v_2;\ v_2)$$

Тогава за допирателните им вектори ще имаме:

$$\dot{c}_1(\sin v_1;\ 1) \text{ и } \dot{c}_2(\cos v_2;\ 1)$$

В т. $P(v = v_1 = v_2 = 0)$ получаваме

$$\dot{c}_1(P) = (\underset{\dot{u}_1}{\underset{\parallel}{0}};\ \underset{\dot{v}_1}{\underset{\parallel}{1}}) \text{ и } \dot{c}_2(P) = (\underset{\dot{u}_2}{\underset{\parallel}{1}};\ \underset{\dot{v}_2}{\underset{\parallel}{1}})$$

Заместваме във формулата за $\cos\varphi$
$g_{11} = 1;\ g_{12} = 0;\ g_{22} = 2;\ \dot{u}_1 = 0;\ \dot{v}_1 = 1;\ \dot{u}_2 = 1$ и $\dot{v}_2 = 1$
и получаваме

$$\cos\varphi = \frac{1.0.1 + 0(\cdot) + 2.1.1}{\sqrt{1.0^2 + 2.0.0.1 + 2.1^2}\sqrt{1.1^2 + 2.0.1.1 + 2.1^2}} =$$

$$= \frac{0 + 0 + 2}{\sqrt{0+0+2}\sqrt{1+0+2}} = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

д) Ще използваме същата формула, както в г), но тъй като $\cos\varphi = \cos 90° = 0$, знаменателят няма да има значение, така че

$$g_{11}\dot{u}_1\dot{u}_2 + g_{12}(\dot{u}_1\dot{v}_2 + \dot{u}_2\dot{v}_1) + g_{22}\dot{v}_1\dot{v}_2 = 0$$

– ортогонални траектории на u-линиите. В този случай първите линии са u-линиите ($u, v = const$) с допирателен вектор $(1, 0)$, а вторите линии са неизвестни, така че във формулата заместваме $g_{11} = 1 + v^2$, $g_{12} = uv$, $g_{22} = 2u^2$, $\dot{u}_1 = 1$, $\dot{v}_1 = 0$, $\dot{u}_2 = \dot{u}$ и $\dot{v}_2 = \dot{v}$. Получаваме

$$(1+v^2) \cdot 1 \cdot \dot{u} + uv(1 \cdot \dot{v} + 0 \cdot \dot{u}) + 2u^2 \cdot 0 \cdot \dot{v} = 0$$

или

$$(1+v^2)\dot{u} + uv\dot{v} = 0$$

Ако неизвестните криви са параметризирани относно q, то

$$\dot{u} = \frac{du}{dq} \quad \text{и} \quad \dot{v} = \frac{dv}{dq}$$

Така че ще имаме

$$(1+v^2)\frac{du}{dq} + uv\frac{dv}{dq} = 0$$

и след умножение с dq:

$$(1+v^2)\,du + u\,v\,dv = 0$$

или

$$(1+v^2)\,du = -uv\,dv$$

Това е обикновено диференциално уравнение от първи ред с разделени променливи (от най-прост вид). За да можем да интегрираме (по u отляво и по v отдясно) разделяме с $(1+v^2)$ и u и получаваме

$$\frac{du}{u} = -\frac{v\,dv}{1+v^2}$$

Тъй като

$$\int \frac{du}{u} = \ln u + const$$

и

$$\int \frac{dv}{1+v^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dv^2}{v^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(v^2+1)}{v^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(v^2+1) = \ln\sqrt{v^2+1} + const$$

получаваме

$$\ln u = -\ln\sqrt{v^2+1} + \ln C$$

(~~ко~~ интеграционните константи са произволни, така че ги избираме както ни е удобно) или

$$\ln u = \ln\frac{C}{\sqrt{v^2+1}}$$

Като се освободим от логаритъма ще имаме

$$u = \frac{C}{\sqrt{v^2+1}} -$$

това са ортогоналните траектории на всички u-линии върху S. Те са безкрайно много, защото C може да взема произволни стойности. Така например, ако искаме да намерим тази от тях, която минава през т. P ще трябва да заместим $u=1$ и $v=0$, от което ще определим C:

$$1 = \frac{C}{\sqrt{0^2+1}} \Rightarrow C = 1$$

Тогава линията $u\sqrt{v^2+1}=1$, разположена в/у S е ортогонална на u-линията през т. P (т.е. с вътрешно уравнение $v=0$).

— ортогонални траектории на v-линиите.
Аналогично заместваме $\dot{u}_1=0$ и $\dot{v}_1=1$ (g_{11}, g_{12}, g_{22}, $\dot{u}_2$ и $\dot{v}_2$ са същите) и получаваме диференциалното уравнение

$$(1+v^2).0.\dot{u} + uv(0.\dot{v}+1.\dot{u}) + 2u^2.1.\dot{v} = 0$$

или

$$uv\dot{u} + 2u^2\dot{v} = 0$$

Разделяме с u (при $u \neq 0$) и получаваме

$$v\dot{u} + 2u\dot{v} = 0$$

или

$$v\frac{du}{dq} + 2u\frac{dv}{dq} = 0$$

След умножаване с dq:

$$v\,du + 2u\,dv = 0$$

или

$$v\,du = -2u\,dv$$

Делим на произведението uv и получаваме

$$\frac{du}{u} = -2\frac{dv}{v} \Rightarrow \int\frac{du}{u} = -2\int\frac{dv}{v}$$

след интегриране

$$\ln u = -2\ln v + \ln c = \ln\frac{c}{v^2}$$

или

$$u = \frac{c}{v^2} -$$

това са ортогоналните траектории на v-линиите в/у пов. S.

е) Тъй като

$$h_{11} = \vec{r}_{uu}\vec{N} = \frac{\vec{r}_{uu}(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$$

$$h_{12} = \vec{r}_{uv}\vec{N} = \frac{\vec{r}_{uv}(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$$

$$h_{22} = \vec{r}_{vv}\vec{N} = \frac{\vec{r}_{vv}(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|},$$

то първо ще пресметнем скаларните произведения $\vec{r}_{uu}(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)$, $\vec{r}_{uv}(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)$ и $\vec{r}_{vv}(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)$ и след това ще нормираме с $|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|$.

Пресмятаме

$$\vec{r}_{uu} = \frac{\partial}{\partial u}\vec{r}_u = \frac{\partial}{\partial u}(\sin v, \cos v, v) = (0, 0, 0)$$

$$\vec{r}_{uv} = \frac{\partial}{\partial v}\vec{r}_u = \frac{\partial}{\partial v}(\sin v, \cos v, v) = (\cos v, -\sin v, 1)$$

$$\vec{r}_{vv} = \frac{\partial}{\partial v}\vec{r}_v = \frac{\partial}{\partial v}(u\cos v, -u\sin v, u) = (-u\sin v, -u\cos v, 0)$$

Тогава за скаларните произведения ще имаме

$$\vec{r}_{uu}(\vec{r}_u \times \vec{r}_v) = 0 \; (\vec{r}_{uu} \text{ е нулев вектор})$$

$\vec{r}_{uv}(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)\overset{*}{=}$ (първо ще трябва да пресметнем векторното произведение $\vec{r}_u\times\vec{r}_v$:

$$\vec{r}_u(\sin v,\ \cos v,\ v)$$
$$\vec{r}_v(u\cos v,\ -u\sin v,\ u)$$
$$\vec{r}_u\times\vec{r}_v(u\cos v+uv\sin v,\ uv\cos v-u\sin v,\ -u\sin^2 v-u\cos^2 v)$$

Тъй като за третата координата имаме $-u\sin^2 v-u\cos^2 v=-u(\sin^2 v+\cos^2 v)=-u.1=-u$, то

$$\vec{r}_u\times\vec{r}_v(u\cos v+uv\sin v,\ uv\cos v-u\sin v,\ -u))\overset{*}{=}$$

$=\cos v(u\cos v+uv\sin v)-\sin v(uv\cos v-u\sin v)+$
$+1(-u)=u\cos^2 v+uv\cancel{\sin v\cos v}-uv\cancel{\cos v\sin v}+$
$+u\sin^2 v-u=u(\cos^2 v+\sin^2 v)-u=u.1-u=0$

$\vec{r}_{vv}(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)=-u\sin v(u\cos v+uv\sin v)$
$-u\cos v(uv\cos v-u\sin v)+0(-u)=$
$=-u^2\cancel{\cos v\sin v}-u^2v\sin^2 v-u^2v\cos^2 v+$
$+u^2\cancel{\cos v\sin v}=-u^2v(\sin^2 v+\cos^2 v)=-u^2v.$

Сега трябва да пресметнем $|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|$:

$$|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|=\sqrt{(u\cos v+uv\sin v)^2+(uv\cos v-u\sin v)^2+(-u)^2}=$$

$$=\sqrt{u^2\cos^2 v+2u^2v\cancel{\cos v\sin v}+u^2v^2\sin^2 v+u^2v^2\cos^2 v-2u^2v\cancel{\cos v\sin v}+u^2\sin^2 v+u^2}=$$

$$=\sqrt{u^2(\cos^2 v+\sin^2 v)+u^2v^2(\sin^2 v+\cos^2 v)+u^2}=$$

$$=\sqrt{u^2+u^2v^2+u^2}=\sqrt{2u^2+u^2v^2}=u\sqrt{2+v^2}$$

Окончателно за коефициентите на втора основна форма намираме

$$h_{11}=0;\ h_{12}=0;\ h_{22}=-\frac{u^{\cancel{2}}v}{\cancel{u}\sqrt{2+v^2}}=-\frac{uv}{\sqrt{2+v^2}}$$

ж) Пресмятаме пълната (гаусова) кривина по формулата

$$K = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

Тъй като $h_{11} = h_{12} = 0$, числителят е нула, следователно $K = 0$.

Пресмятаме средната кривина H по формулата

$$H = \frac{g_{11}h_{22} + g_{22}h_{11} - 2g_{12}h_{12}}{2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)}$$

За числителя получаваме

$$g_{11}h_{22} + g_{22}h_{11} - 2g_{12}h_{12} = g_{11}h_{22} + g_{22}\cdot 0 - 2g_{12}\cdot 0 =$$

$$= g_{11}h_{22} = (1+v^2)\left(-\frac{uv}{\sqrt{2+v^2}}\right) = -\frac{uv(1+v^2)}{\sqrt{2+v^2}}$$

За знаменателя:

$$2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2) = 2\left((1+v^2)2u^2 - (uv)^2\right) =$$

$$= 2\left(2u^2 + 2u^2v^2 - u^2v^2\right) = 2\left(2u^2 + u^2v^2\right) = 2u^2(2+v^2)$$

Пресмятаме H:

$$H = -\frac{\cancel{u}v(1+v^2)}{\sqrt{2+v^2}\left(2u^{\cancel{2}}(2+v^2)\right)} = -\frac{v(1+v^2)}{2u(2+v^2)^{3/2}}$$

3) Ще използваме формулата

$$\nu = \frac{h_{11}\dot{u}^2 + 2h_{12}\dot{u}\dot{v} + h_{22}\dot{v}^2}{g_{11}\dot{u}^2 + 2g_{12}\dot{u}\dot{v} + g_{22}\dot{v}^2}$$

— По направление на $\vec{c}_1$.

И в двата случая коефициентите на първа и втора основна форма трябва да бъдат пресметнати в т. P:

$g_{11}(P) = 1$; $g_{12}(P) = 0$; $g_{22}(P) = 2$ (от 2))

$h_{11}(P) = 0$; $h_{12}(P) = 0$; $h_{22}(P) = -\frac{1.0}{\sqrt{1}} = 0$

Тъй като коефициентите на втора основна форма в т. P са нули (h_{11} и h_{12} са нули навсякъде) т. P е равнинна точка за повърхнината и нормалната кривина $\nu = 0$ по всички допирателни направления.

и)

– за u-линиите имаме $\dot{v} = 0$, следователно

$$\nu = \frac{h_{11}\dot{u}^2 + 2h_{12}\dot{u}.0 + h_{22}0^2}{g_{11}\dot{u}^2 + 2g_{12}\dot{u}.0 + g_{22}0^2} = \frac{h_{11}}{g_{11}} = 0$$

– за v-линиите ($\dot{u} = 0$)

$$\nu = \frac{h_{11}0^2 + 2h_{12}0.\dot{v} + h_{22}\dot{v}^2}{g_{11}0^2 + 2g_{12}0.\dot{v} + g_{22}\dot{v}^2} = \frac{h_{22}}{g_{22}} =$$

$$= -\frac{v}{\sqrt{2+v^2}} \cdot \frac{1}{2u^2} = -\frac{v}{2u\sqrt{2+v^2}}$$

й) Асимптотичните линии са решенията на диференциалното уравнение

$$h_{11}du^2 + 2h_{12}du\,dv + h_{22}dv^2 = 0$$

Тъй като за тази повърхнина имаме $h_{11} = h_{12} = 0$, то получаваме $h_{22}dv^2 = 0$. В случаите, когато $h_{22} \neq 0$ (т.е. $u \neq 0$ и $v \neq 0$) ще имаме $dv = 0 \Rightarrow v = const.$ – това са всичките u-линии на S. Освен тях асимптотична линия е v-линията $u = 0$.

к) Главните линии са решенията на диференциалното уравнение

$$\begin{vmatrix} g_{11}du + g_{12}dv & g_{12}du + g_{22}dv \\ h_{11}du + h_{12}dv & h_{12}du + h_{22}dv \end{vmatrix} = 0$$

Тъй като за тази повърхнина $h_{11} = h_{12} = 0$, получаваме

$$\begin{vmatrix} g_{11}du + g_{12}dv & g_{12}du + g_{22}dv \\ 0 & h_{22}dv \end{vmatrix} = 0$$

или $\quad h_{22}dv(g_{11}du + g_{12}dv) = 0$

При $h_{22} \neq 0$ ($u \neq 0$ и $v \neq 0$) това диференциално уравнение има две решения. Първото е $dv = 0 \Rightarrow v = const.$ – това е семейството на u-линиите. Второто решение се получава от

$$g_{11}du + g_{12}dv = (1+v^2)du + uv\,dv = 0$$

Това е диференциалното уравнение на ортогоналните траектории на u-линиите (от g)) с решение

$$u = \frac{c}{\sqrt{v^2+1}}$$

л) Главните кривини k_1 и k_2 могат да се намерят по два начина:
– като нормални кривини на главните линии, намерени в к);
– като корени на квадратното уравнение

$$k^2 - 2Hk + K = 0,$$

където K е пълната, а H – средната кривина. Тъй като K и H са пресметнати (за произволна точка от S) в ж), ще използваме втория начин. Тъй като $K = 0$, ще имаме $k^2 - 2Hk = k(k-2H) = 0$ с корени $k_1 = 0$ (нормалната кривина на първата фамилия главни линии – u-линиите) и $k_2 = 2H = -\frac{v(1+v^2)}{u(2+v^2)^{3/2}}$ (нормалната кривина на втората фамилия главни линии – ортогоналните траектории на u-линиите).