Основни сведения от Аналитична геометрия

Нека $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ са два вектора

1. Колинеарност. Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни ($\vec{a} \parallel \vec{b}$) точно тогава, когато съществува реално число λ и е изпълнено $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ или покоординатно

$$a_1 = \lambda b_1; \; a_2 = \lambda b_2; \; a_3 = \lambda b_3,$$

т.е. координатите им са пропорционални.
При $\lambda > 0$ говорим за еднопосочна колинеарност $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, а при $\lambda < 0$ – за разнопосочна $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

2. Скаларно произведение на два вектора – число, което е равно на сумата от произведенията на съответните координати:

$$\vec{a}\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Скаларното произведение на два ненулеви вектори е нула точно тогава, когато те са перпендикулярни.
Големина на вектор:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + b_1^2}$$

Ъгъл между два вектора:

$$\cos\gamma = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

3. Векторно произведение на два вектора – това е трети вектор $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$ като

$$c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2; \; c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3; \; c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

като $\vec{c}$ е перпендикулярен на $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
Векторното произведение по-лесно се пресмята така – векторите-множители се записват един под друг (важен е реда, защото $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$)

$$\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$$
$$\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$$

За да пресметнем първата координата на вектор $\vec{c}$ трябва да зачеркнем първата колона (a_1 и b_1). От останалите координати образуваме матрица, нейната детерминанта е c_1:

$$\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$$
$$\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$$
$$c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$$

За пресмятането на c_2 се прави същото, но се взема със знак „−“:

$$\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$$
$$\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$$
$$c_2 = -(a_1 b_3 - a_3 b_1) = a_3 b_1 - a_1 b_3$$

Третата координата се пресмята като първата:

$$\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$$
$$\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$$
$$c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

4. Смесено произведение на три вектора – това е число, пресмятащо се по формулата

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} := (\vec{a} \times \vec{b})\,\vec{c},$$

т.е.

1) пресмятане на вектора векторно произведение на $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2) скаларно умножаване на така получения в 1) вектор с вектор $\vec{c}$.

Смесеното произведение на три ненулеви вектора е нула точно тогава, когато те са линейно ~~неза~~зависими (компланарни).

Пропуск: векторното произведение на два ненулеви вектора е нулевия вектор точно тогава, когато те са линейно зависими (колинеарни).

5. Уравнение на права в пространството.

Дадени са точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектор $\vec{m}(A, B, C)$. Уравненията

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}$$

се наричат канонично уравнение на права, минаваща през точката M_0 и имата вектор $\vec{m}$ за колинеарен вектор (всеки вектор, колинеарен на $\vec{m}$ също е колинеарен вектор на правата, т.е. всяка права притежава единствен колинеарен вектор с точност до множител).

6. Уравнение на равнина в пространството.

Уравнението

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

се нарича уравнение на равнина по точка и нормала, т.е. равнината с това уравнение минава през т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и има за нормален (перпендикулярен) вектор $\vec{m}(A, B, C)$. (Всеки вектор, колинеарен на $\vec{m}$ също е нормален вектор на равнината, т.е. всяка равнина притежава единствен нормален вектор с точност до множител). За да получим общото уравнение на равнината

$$Ax+By+Cz+D=0$$

трябва само да разкрием скобите и да извършим действията ($D=-Ax_0-By_0-Cz_0$).