

ФРАКТАЛНА ТЕОРИЯ

на

ФИНАНСОВИТЕ ПАЗАРИ



Асен Христов

Пловдив

2021 г.

Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“

Факултет по Математика и Информатика

СЪДЪРЖАНИЕ

Увод.....	3
I. ВЪВЕДЕНИЕ	
1. Финансов пазар.....	6
2. Основни участници на финансовите пазари.....	8
3. Фундаментален анализ на пазарите на ценни книжа.....	10
4. Традиционен технически анализ – общи положения.....	14
5. Традиционен технически анализ – кратък обзор на методите.....	15
6. Времени финансови редове и трендови индикатори.....	18
7. Анализ на трендов модел с използването на пълзящи средни.....	20
8. Осцилатори на времеви редове.....	28
9. Съвременен технически анализ.....	33
10. Стохастичен количествен анализ.....	34
11. Няколко думи за иконофизиката.....	39
12. Игри на малцинства.....	41
13. Модел на катастрофите на фондовите борси.....	46
Любопитни факти.....	48
II. ФРАКТАЛНИ СТРУКТУРИ	
14. Какво представляват фракталите.....	52
15. Видове фрактали.....	55
16. Фрактална размерност.....	63
!7. Определяне на фракталната размерност на някои фрактални структури.....	71
III. ФРАКТАЛЕН АНАЛИЗ НА ВРЕМЕВИТЕ РЕДОВЕ	
18. Първи опити за фрактален анализ на финансовите пазари.....	88
19. Хипотеза за фракталност на финансовия пазар.....	94
20. Корелационна размерност на времеви ред.....	96
21. Индекс на Хърст и R/S анализ на времеви редове.....	98
22. Индекс на фракталност.....	106
Литература.....	123

Увод

Фракталната теория на финансовите пазари е нова и динамично развиваща се теория на границата между математиката и физиката от една страна и финансовата теория и практика, от друга.

С развитието на финансовите пазари през XIX век - първо в англоезичния свят (Великобритания, САЩ), а после и другаде, започват опитите за прилагане на математически инструментариум с цел прогнозиране на бъдещите цени на финансовите активи. Тези опити се развиват в две независими едно от друго течения, които в края на XX век започват да се сближават.

Първото направление, което може да се нарече статистическо (или количествен анализ) получава строгата си математическа обосновка от Норберт Винер през 1920 г. и отначало се ползва с популярност само в академичните среди. През 60-те години на миналия век то еволюира до концепцията за ефективен пазар – пазар, в който цените в пълна степен отразяват цялата достъпна информация“ Съгласно Фаме за съществуването на такъв пазар е необходимо и достатъчно в него да действат голям брой напълно информирани агенти, които мигновено реагират на външните събития, при това рационално и независимо един от друг. Основен модел за поведението на цените при такъв модел е брауновото движение, което се основава на два постулата: 1) изменението на цените във всеки един времеви интервал има гаусово разпределение с нулева средна стойност; 2) измененията върху взаимно непресичащи се интервали са статистически независими. Тази хипотеза обаче не се потвърждава за голяма част от времето – това налага развитието на теории, които се отказват или от нормалността на разпределението или от статистическата независимост. Така се достига до хипотезите за движение на Леви (отказ от 1)), за обобщено брауново движение (отказ от 2)) и за авторегресивен хетроскедастичитет (ARCH).

Второто направление, наричано динамическо се заражда в стедите на практикуващите трейдъри през 30-те години на XX век. Този подход е получил названието технически анализ (като контрапункт на фундаменталния анализ, основан на пресмятането на „справедливата“ цена чрез дисконтиране на стойността на бъдещите доходи от финансовия актив). Идеологическа основа за такъв подход е предположението на Чарлз Доу (изказано още в края на XIX век), че естественото състояние на цената е тренда (движение нагоре или надолу), който е резултат от съвместните действия на тълпата. Цел на техническия анализ е да разкрие вътрешната закономерност на времевия финансов ред, на базата на която да се направи прогноза за прехода от тренд към флет (относително стабилно състояние на пазара) и обратно. По този начин са били открити много форми (наричани фигури на техническия анализ) на относително устойчиво повръдение на времевите финансови

редове. През 80-те години на XX век техническият анализ получава неочаквана поддръжка от теорията на динамичния хаос. От общата теория следва, че времеви ред, който външно изглежда като реализация на случаен процес, напълно успешно може да се разглежда като породен от нелинейна динамична система с малка размерност.

За да се разреши противоречието между двата подхода трябва да се вземат под внимание резултатите от експерименталните изследвания на финансовите пазари. Те показват, че в реалния пазар цялата съвкупност от агенти се разпада на клъстери (референтни групи), във всеки от които агентите подражават един на друг. Клъстерите могат да образуват сложни йерархични структури, могат да се сливат в по-крупни или да се разпаднат в по-малки. При това е ясно, че концепцията за ефективен пазар и концепцията на Доу са граничните случаи. В първия случай на пазара присъстват голям брой примерно еднакви клъстери. Пазарът се намира в своето най-стабилно състояние и неговата промяна зависи най-вече от външната информация (която има случаен характер по отношение на него). Във втория случай на пазара присъства един голям клъстер и динамиката му се подчинява преди всичко от вътрешни фактори. Във връзка с казаното по-горе възниква въпросът – по какъв закон еволюира клъстерната структура и каква е причината за образуване на големи клъстери? За да се отговори на този въпрос трябва да се направи синтез на двете концепции. Такъв синтез е направен в края на XX век от Бенуа Манделброт в развитата от него фрактална теория на времевите финансови редове.

Настоящата работа съдържа три последователни раздела. В първия раздел е направено сравнително обширно (но необходимо) въведение в тематиката. В параграф 1 е описана структурата на финансовия пазар, а в §2 са посочени основните групи участници в него. Параграф 3 е посветен на основните положения на фундаменталния анализ на финансовите пазари. В §4 и §5 е отделено място за традиционния технически анализ – в §4 са дадени общите положения, а в §5 е направен кратък обзор на методите му. Тъй като централна за техническия анализ е концепцията на Доу за трендовия характер на изменението на цените, в §6 се въвеждат времевите финансови редове и се въвеждат някои важни инструменти за тяхното анализиране – проста, експоненциална и претеглена пълзяща средна и лента на Болинджър. В §7 е направен числов анализ на времеви ред при хипотезата за тренд и с метода на линейната регресия. Параграф 8 е посветен на другата част (освен тренда) от времевите редове – флета и са въведени числови характеристики за флет като осцилатор и стохастик. В §9 е направено кратко резюме на новите направления на техническия анализ (едно от които е фракталната теория), а в §10 накратко е показана алтернативата на техническия анализ – количествения анализ, основаващ се на статистически методи. В последните три параграфа (11, 12 и 13)

е направен обзор на методите на иконофизиката – игри на малцинства, модели на катастрофи и др.

Вторият раздел е посветен на новите и доста необичайни геометрични обекти – фракталите. Това е така, защото математикът, който ги е въвел Бенуа Мандельброт в монографията си „Фрактална геометрия на природата“ пръв е забелязал ползата от тях при съставянето на модели на времеви финансови редове. Освен това тази раздел може да се използва като кратко въведение в изучаването на тези интересни фрактални структури. Параграф 14 отговаря на въпроса „Какво представляват фракталите“ и каква е разликата между тях и обичайните геометрични обекти – прави, триъгълници, окръжности и др. Това преди всичко е в тяхното самоподобие (частта е подобна на цялото) и в дробната им размерност. В §15 е направена класификация на фракталите – детерминирани и стохастични, геометрични, алгебрични и др. Последните два параграфа от този раздел (16 и 17) са посветени на дефиниране и пресмятане на най-важната характеристика на фракталите – тяхната дробна размерност. Посочени са и примери на така наречените социални фрактали.

Третият раздел е най-съществения за тази работа – първите два са подготовка за него. В него са дадени класически и съвременни методи за фрактален анализ на времеви финансови редове. В §18 са изложени първите опити за фрактален анализ, а в §19 са формулирани предпоставките за него. Трябва да отбележим, че алтернативата на фракталния анализ са много по-сложните от математическа гледна точка динамични нелинейни системи от обикновени диференциални уравнения от теорията на динамичния хаос. В §20 е отделено място за корелационната размерност на времеви ред, а в следващия §21 е дефиниран станалия вече класически индекс на Хърст, основа за така наречената R/S-статистика. Последният §22 е посветен на въведения от М.М. Дубовиков, Н.В. Старченко индекс на фракталност. Счита се, че той улавя динамиката на времевите финансови редове по-добре от индекса на Хърст.

Настоящият учебник е написан за да бъде от полза за студентите от всички специалности на ФМИ на ПУ „П. Хилендарски“ – Пловдив за едноименната избираема дисциплина. Тя може да бъде полезна за всички математици с интерес към такива необичайни приложения на „сухата“ математика, както и на трейдърите на финансовите пазари, за да се запознаят с теория, която може да ги направи много по-успешни участници на тези пазари.

I. ВЪВЕДЕНИЕ

1. Финансов пазар

Финансовият пазар може да се определи като институционална структура или като механизъм, обезпечаващ създаването и обмена на финансовите активи. На финансовите пазари се извършва мобилизация на капитал, предоставяне на кредит и разпределение на финансовите средства в производството. Съвкупността от търсене и предлагане на пари и капитал от страна на кредитополучателите и кредиторите от различни държави образува световния финансов пазар.

Структурата на финансовия пазар включва в себе си **паричните пазари** и **фондовите (капиталови) пазари**.

На паричния пазар става обръщение на краткосрочни дългови инструменти (със срок на погасяване до една година), и разбира се, пари (като стока).

На фондовия пазар се търгуват дългосрочни финансови инструменти със срок на обръщение над една година. Структурата на фондовия пазар, който се нарича още и пазар на ценни книжа е дадена на схемата от рис. 1

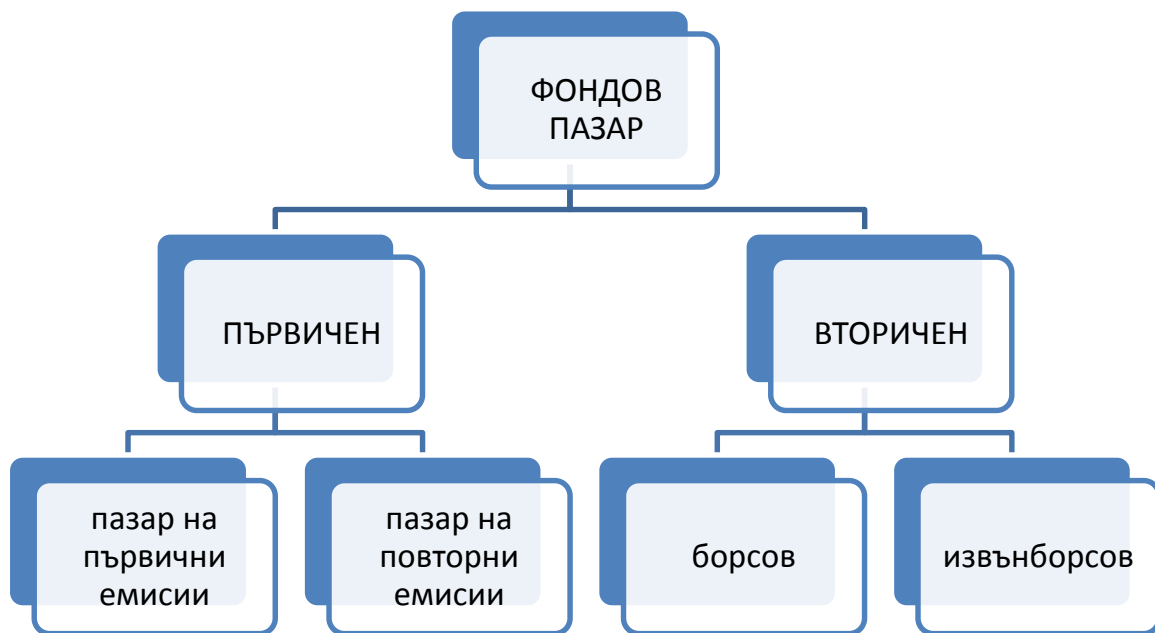


Рис. 1. Структура на фондовия пазар

Парите и ценните книжа се явяват финансови инструменти на съответните пазари, които инвеститорът (трейдърът, спекулантът) може да използва по един или друг начин и в резултат на това да получи печалба или загуба. Макар на фондовия пазар да става обръщение на ценни книжа, то тяхната покупка/продажба се осъществява с налични пари. Поради това, приведената структура на финансовия пазар има

условен характер, тъй като едновременно с ценните книжа, на този пазар се употребяват и пари.

Ако в качеството на критерий за класификация на финансовия пазар се избере фактора време на доставка на търгуваните финансови инструменти, то възможни са два варианта: **спотов пазар** (или пазар на касови операции) и пазар на срочни контракти, който се нарича още и **пазар на производни финансови инструменти**. В съответствие с тази класификация паричният пазар може да бъде и спотов (ако се предлага незабавна доставка на съответния финансов инструмент) и срочен (ако доставката е в рамките на няколко седмици или месеци). Същото важи и за фондовия пазар.

Срочният пазар може да бъде класифициран от гледна точка на организационната форма на сключваните контракти на фючърсен, форуърден и опционен.

Фючърсният контракт е деривативен инструмент, представляващ споразумение между две страни за покупка или продажба на даден актив на предварително определена цена с доставка на бъдеща дата.

Форуърдният договор (контракт) е договор да се закупи или продаде актив в определен бъдещ момент на определена (договорена между страните) цена (доставна цена, форуърд цена). Форуърдният договор за разлика от фючърсен договор не е стандартизиран договор. Той се сключва извънборсово и негов предмет може да са всякакъв тип активи, с взаимнодоговорени параметри по отношение на количество, цена и срок.

Опцията е ценна книга, която дава на купувача правото, но не и задължението, да купи или продаде определен базов актив или инструмент на предварително определена цена на или преди определена дата. Продавачът има съответното задължение да изпълни сделката – което е да продаде или купи – ако купувачът упражни опцията. Купувачът плаща премия на продавача за това си право. Опция, която дава право да се купи нещо на определена цена се нарича кол опция (call). А опция, която дава право да се продаде нещо на определена цена се нарича пут опция (put). И двата типа опции са често търгувани, но кол опциите се обсъждат по-често.

Спотовите и срочни пазари могат да се класифицират и по критерий за обезателност или необезателност на реалната доставка на търгуваните финансови активи. Така, например, на спотовия международен валутен пазар FOREX, на който се осъществяват валутнообменни (конверсионни) операции, може да се осъществява както търговия, предполагаща реалната доставка на валута, така и търговия, не предполагаща такава (маржинална търговия).

От гледна точка на организацията на търговията, финансовите пазари се делят на борсови и извънборсови. При борсовата търговия обращението на финансовите активи става по строго регламентирани правила, при това самата борса встъпва в ролята на гарант за изпълнението на сключените в нея сделки.

В исторически план са се сформирали два основни модела на финансови пазари: финансова система, ориентирана към банковото финансиране – bank based financial system (така наречения континентален модел) и финансова система, ориентирана към пазара на ценни книжа и система от институционални инвеститори (застрахователни компании, пенсионноосигурителни компании и др.) – market based financial system (или англо-американски модел). За англо-американския модел е характерна ориентацията към публично разпределение на ценните книжа и високо ниво на развитие на вторичния пазар, който по обем е значително по-голям от вторичния пазар на страните от континентална Европа. За континенталния модел е характерна висока степен на концентрация на акционерния капитал в немого на брой акционери и непублично разпределение на ценните книжа, а вторичният пазар не е особено развит. В последно време в много европейски страни финансовите пазари започват да добиват чертите на англо-американския модел, което води до сближаването на тези два модела.

2. Основни участници на финансовите пазари

Накратко ще разгледаме въпроса за различните участници на финансовите пазари.

Участници на международния финансов пазар се явяват: банки, валутни и фондови борси, брокерски къщи, застрахователни и инвестиционни компании и фондове, външнотърговски и производствени компании, международни валутно-кредитни и финансови организации.

По критерия за степен на риск при изпълняваните на финансовите пазари операции (в нарастващ порядък), участниците на пазара могат да се разделят условно на следващите групи: арбитражери, хеджери, предприемачи и инвеститори, спекуланти и играчи.

Риск на финансовата операция се нарича възможността за недостигане на набеяланата от участника цел поради неопределеността в развитието на пазарната ситуация.

Арбитражер е физическо или юридическо лице, извличащо печалба за сметка на едновременната покупка/продажба на един и същ финансов инструмент (актив) на различни пазари, ако на различните пазари възникнат различни цени на един и същ актив (пространствен арбитраж). Арбитражните операции позволяват да се

изравнят цените на различните пазари, а също така да се възстановят паритетните съотношения между различните активи. Арбитражните операции позволяват да се получават печалби без какъвто и да било риск.

Хеджърът е лице, което застрахова печалбата си чрез сключване на сделка на срочния пазар. Пример за хеджиране е сключването на фючърсен договор за доставка след известно време на базовия актив на предварително уговорена цена. При сключването на съответния договор, хеджърът ще бъде защитен от възможни превратности на развитието на пазарната ситуация, обаче отплатата за тази увереност ще бъде малката печалба, с която трябва да се задоволи.

Предприемачи и инвеститори – това са физически или юридически лица, които влагат свой или привлечен капитал с цел извличане на печалба. Действията на предприемачите и инвеститорите се отличават с определен консерватизъм, проявяващ се при минимализирането на риска на извършваните операции.

Спекулантът е лице, стремящо се да получи максималната възможна за дадения финансов пазар печалба за сметка на разликата в курсовете при покупка и продажба на финансовите инструменти, която може да възникне във времето. Успехът на дейността на спекуланта зависи от много условия, главното от които е умението му да прогнозира развитието на пазарната ситуация и да взема решения, позволяващи му да максимализира прираста на стойността на първично вложените от него средства.

Спекулативната дейност на финансовите пазари, при разглеждането ѝ на математическо ниво, се явява изключително наукоемка и може да бъде изразена посредством алгоритми за извличане на печалба. Поради това, всички участници на финансовия пазар могат да се занимават със спекулация, обаче, на успех могат да разчитат само най-високообразованите и талантиви професионалисти.

Спекулантът, в стремежа си към печалба, поема върху себе си целия риск при изменението на цените, който прехвърлят върху него хеджърите. Поради това, спекулантът е абсолютно необходимо звено на пазара. Спекулативната дейност на финансовите пазари позволява да се достигне до максимално възможната за пазара печалба, което се явява отплата за риска, който спекулантите поемат. Като отчетем този риск, спекулантите могат не само да забогатееят бързо, но и да се разорят, ако лошо са отчели съотношението печалба – риск при извършваните от тях операции.

Играчите са, като правило, непрофесионални участници на финансовите пазари, които в стремежа си към печалба за готови да поемат какъв да е риск, и в крайна сметка завършват на загуба. Играчите изпълняват на пазара една доста полезна

роля, защото загубените от тях пари се преразпределят в полза на по-професионални участници на пазара.

Какви изисквания трябва да удовлетворяват финансовите пазари, за да може спрямо тях да се прилагат математически интерпретации, водещи до съставянето на математически модели, позволяващи значителното подобряване дейността на участниците в тях (инвеститори, предприемачи и спекуланти). Преди всичко, това са:

- Ликвидност на търгуваните финансови инструменти;
- Регулярност на търговията с финансови активи;
- Наличие на информационна инфраструктура, обезпечаваща достъпност до котировките на финансовите инструменти от страна на заинтересованите лица.

Указаните по горе изисквания са налице както на борсовите пазари на акции и облигации, така и на извънборсовите и в частност международния валутен пазар FOREX.

3. Фундаментален анализ на пазарите на ценни книжа

Три са основните направления в търсенето на инструменти за анализ и прогнозиране на финансовите активи: фундаментален, технически (традиционен и съвременен) и количествен стохастичен анализ.

Фундаменталният анализ се основава на изучаването на общите икономически условия, състоянието на отраслите на икономиката, положението на отделните компании, чиито акции се търгуват на фондовата борса. Отличителната черта на фундаменталния анализ е изучаването на същността на процесите на пазара, ориентираността му към установяване на дълбоките причини за изменението на икономическата ситуация чрез откриване на сложните взаимовръзки между различните явления.

При прилагането на фундаменталния анализ могат да се отделят следните нива:

Първо ниво – анализ на състоянието на икономиката като цяло. Тази информация помага да се изясни, доколко общата ситуация е благоприятна за инвестиране. Макроикономическата ситуация има огромно значение, и неустойчивост на това ниво може да повлияе на очаквания доход даже и при перспективни активи. Към факторите, влияещи на макроикономическата обстановка се отнасят не само икономически, но и политически и социални фактори. От гледна точка на икономиката, изследователите отделят определени макроикономически индикатори,

чието въздействие върху финансовите пазари е значително. Така например, за пазара на САЩ могат да се определят следните закономерности във въздействието

Въздействие на нарастването на макроикономическите индикатори върху пазарите на валута и ценни книжа

индикатор	Влияние на нарастването на индикатора		
	долар	Акции (цена)	Облигации (доходност)
Водещи индикатори			
БВП	нарастване	нарастване	нарастване
Дефицит на платежния баланс	понижаване	с.в.	с.в.
Дефицит по търговския баланс	понижаване	с.в.	с.в.
Дефицит на федералния бюджет	понижаване	с.в.	с.в.
Пазар на труда			
Ниво на безработицата	понижаване	понижаване	понижаване
Заетост в неселскостопанския сектор	нарастване	нарастване	нарастване
Лични доходи/разходи	нарастване	нарастване	нарастване
Производителност на труда	нарастване	нарастване	нарастване
Инфлация			
Индекс на потребителските цени	понижаване	понижаване	нарастване
Индекс на промишлените цени	понижаване	понижаване	нарастване
Дефлатор на БВП	понижаване	понижаване	нарастване
Пазар на недвижими имоти			
Разрешения за строителство	нарастване	нарастване	нарастване
Продажби на нови жилища	нарастване	нарастване	нарастване
Продажба на жилища на вторичния пазар	нарастване	нарастване	нарастване
Разходи за строителство	с.в.	нарастване	нарастване
Търговия			
Продажби на дребно	нарастване	нарастване	нарастване
Поръчки на стоки за дълготрайна употреба	нарастване	нарастване	нарастване
Промисленост			
Индекс на промишленото производство	нарастване	нарастване	нарастване
Натовареност на производствените мощности	нарастване	нарастване	нарастване
Бизнес климат			
Индекс на деловата активност	нарастване	нарастване	нарастване
Индекс на доверието на потребителите	нарастване	нарастване	нарастване
Индекс на настроението на потребителите	нарастване	нарастване	нарастване

Забележка. с.в. – слабо влияние

Трябва да се отбележи, че за правилното разбиране на въздействието, което имат макроикономическите индикатори е необходимо да се отчита цикличния характер на икономиката. Едно и също значение на икономически индикатор може да има различен икономически смисъл в зависимост от това, в какъв стадий на икономическия цикъл (рецесия, възстановяване или подем) се наблюдава.

Второ ниво – отраслов анализ. В резултат на провеждането на това ниво на фундаменталния анализ инвеститорът избира отрасъл, представляващ интерес за него. И наистина, даже в условия на икономически подем, инвестирането не във всеки отрасъл може да гарантира печалба и да позволи да се избегне загубата. В рамките на фундаменталния анализ всички отрасли са делят на следните групи:

1. **Зараждащи се отрасли.** Като правило, предприятията от тези отрасли все още не са успели да пуснат свои акции на пазара и затова не винаги са достъпни за инвеститорите.
2. **Растящи отрасли.** Към тях се отнасят както отраслите, намиращи се в начален етап на своето установяване, така и стари отрасли, преживяващи бум в резултат от внедряване на нови технологии.
3. **Стабилни отрасли.** В такива отрасли обемите на продажби и печалби са относително стабилни даже и в периоди, недобри за националната икономика като цяло. Вложението в акции на компании от тези отрасли могат да се охарактеризират с висока надеждност, и като следствие, с ниска доходност.

Трето (най-важно) ниво – анализ на компанията. В хода на това ниво на фундаменталния анализ се изучава финансово-стопанското положение на компанията за последните няколко години, ефективността на управлението, прогнозира се перспективите за развитие. Изследователите се опитват да определят така наречената **справедлива цена на активите**. Сравнявайки тази справедлива цена с текущата оценка на пазара (пазарната цена) се правят изводи за подцененост или надцененост на акциите. Основоположници на това направление са Бенджамин Греъм и Дейвид Дод.

Може да се обособят следните етапи в оценката на стойността на компаниите и техните акции:

1. Събиране на пакет от финансова информация.
2. Анализ на данните за паричните потоци.
3. Анализ на баланса на компанията.
4. Анализ на отчетите за печалбата за последните тримесечия.
5. Анализ на доходите на висшите длъжностни лица, включително данни за работни заплати, бонуси и акции от собствеността на компанията.

6. Оценка на текущата стойност на акцията. За това се използват такива коефициенти като: пазарна капитализация, Profit Margin (марж на печалбата), Gross Profit Margin (брутен марж на печалбата), EPS (печалба на една акция), ROE (рентабилност на собствения капитал) и др.
7. Прогноза за стойността на акцията. Въз основа на анализа на информацията, получена при това ниво на фундаменталния анализ, изследователят създава модел на печалбата на интересуващата го компания и модел на текущата стойност на база прогнозата за бъдещите парични потоци.

Именно оценката на една компания чрез методите на фундаменталния анализ е основа за определянето на нейния **рейтинг**. Рейтинга представлява мнение относно възможността и юридическата обвързаност на емитента да извърши плащания на дивиденди по акциите или процент по облигациите. Съществуват две групи обекти на рейтинговите оценки на финансовите пазари: рейтинг на ценните книжа и рейтинг на финансовите позиции на участниците на пазара.

Рейтингите на ценните книжа се наричат още и кредитни рейтинги. Скалата на рейтинга се разделя между крайните точки: ценни книжа от инвестиционен клас и спекулативни ценни книжа. В съответствие с това, агенции като Standard&Poors, Moody's Investors Service, Fitch присвояват на ценните книжа комбинации от букви, означаващи тяхното качество.

Рейтингите, оценяващи финансовите позиции на компаниите се строят въз основа на набор от показатели.

Част от инвеститорите вземат решение за покупка на акции на дадена компания, ориентирайки се по нейния рейтинг. Освен това, крупните портфейлни инвеститори като пенсионните фондове не могат да извършват сделки с акции (и/или компании) с нисък рейтинг. Поради това, повишаването на рейтинга на дадена компания неизбежно води до поокачване на цената на акциите ѝ и до прилив на свеж финансов ресурс към нея.

Въпреки, че фундаменталният анализ се стреми да отрази обективно икономическите условия за функционирането на дадена компания, трябва да се отбележи, че самата фундаментална информация е „размита“, и като цяло, интерпретацията ѝ има субективен характер. Освен това, тези които ползват такава информация, основават решенията си на информация, достъпна и на другите инвеститори, и поради тази причина (вероятно) вече калкулирана в цените на акциите.

Въпреки това, може да се забележи, че компании, имащи фундаментални предимства, в дългосрочен план имат нарастване на котировките на акциите си, по-големи от средните за пазара. Ако пазарът се е сринал, то акциите на такива компании поевтиняват по-бавно от средното, а при възобновяване на растежа, тяхното

възстановяване е по-бързо. Тези причини показват ползата от прилагането на фундаменталния анализ при оценка на финансовите инструменти и дългосрочната работа на един стратегически инвеститор.

4. Традиционен технически анализ – общи положения

Първите прояви на методите на техническия анализ са в редакционните коментари на Чарлз Доу в „Уолт Стрийт Джърнъл“ през деветдесетте години на XIX век. Идеологическа основа за такъв подход става известното предположение на Чарлз Дау (главния автор на известния индекс). Още в края на XIX в. Доу е твърдял, че естествено състояние на цената е тренда (направление на движението нагоре или надолу), който е резултат от съвместното действие на тълпата и отразява действащата на пазара социална тенденция. Затова, трендът ще продължава до тогава, докато тази тенденция не се смени.

Понастоящем принципите на техническия анализ могат да се изразят чрез следните три постулата.

1. Пазарната цена отчита всичко. Същността на този постулат е в убеждението, че всички фактори (икономически, политически, психологически и др.) вече са отчетени от пазара и са включени в цената. От първият постулат следва, че единственото нещо, което е необходимо за прогнозирането, това е графиката на цените на финансовите активи. Контрааргумент на това е, че съществува и обратна връзка между пазара и хората, търгуващи на него. Изменението на цените оказва права връзка на поведението на трейдърите, но има примери за това, как отделни маркетмейкъри успяват да манипулират пазара. Поради това, този постулат е само някакво вероятно допускане, че голямата част от информацията вече е калкулирана от пазара.

2. Пазарът се подчинява на тенденции. В общият случай под тенденция се разбира зависимостта на цената на финансовия актив от времето. Голяма част от методите на техническия анализ се състоят в опитите за откриване на такива тенденции. Вторият постулат отразява тенденциозността, характерна за човешкото мислене и предполага, че сегашната тенденция е по-вероятно да се развива и занаяпред, отколкото да се промени, и че тя ще действа, докато не отслабне. Разграничават се три вида тенденции (трендове): възходящ тренд, низходящ тренд и флет. За съжаление, последният вид на движение на цените освен, че е преобладаващ, е и най-сложния период за търговия и често води до разоряване на неопитните трейдъри.

3. Пазарът е закономерен. Именно това убеждение декларира способността да се разпознават моделите на графиките на цените на финансовите инструменти и се

явява основа както за техническия, така и за статистическия анализ. Всъщност на този постулат се основават всички екстраполационни методики за прогнозиране на бъдещото развитие на процесите на пазара. Закономерността на пазара внася шаблонност в действията на хората и повторемост на техните реакции. По този начин, техническият анализ е динамична оценка на масовата човешка психология. Справедливата критика на този постулат е, че масовото поведение на пазара се основава не само на масовата психология, но и на методите, които използва обществото на трейдърите, които на свой ред се променят и модифицират доста бързо.

5. Традиционен технически анализ – кратък обзор на методите

Понастоящем могат да се обособят следните методи на традиционния технически анализ:

- **Анализ на графиките:** пунктово-цифров анализ, трендови модели (линии на съпротивление и поддръжка, пълзящи канали, класически фигури, метод на Ган), анализ на японски свещи, анализ с числата на Фибоначи;
- **Анализ на индикаторите:** анализ на направлението, анализ на наклона;
- **Анализ на осцилаторите:** сигнали на дивергенцията, анализ на свръхкупените и свръхпродадените акции;
- **Анализ на циклите:** теория на Доу, дългосрочни цикли, сезонни цикли, месечни, седмични и дневни цикли
- **Анализ на вълните на Елиот:** анализ на конфигурацията на вълните, анализ на съотношенията;
- **Анализ на обема и открития интерес:** оценка на интензивността, оценка на силата на тенденцията.

В миналото техническите аналитици са били наричани чартисти (от chart – графика). В края на XIX и началото на XX век графиките са се рисували ръчно, и средствата за анализа им са били сравнително прости. От това, доколко нагледна е била графиката на движението на цените, зависели резултатите от обработката на тези материали. Разпространени са следните основни видове графики: линейна графика (line charts), стълбова графика (bar charts), японски свещи (candlestick), графика на кръстчета и нули (point&figure), профил на пазара (market profile).

Разгледаните графични и „математически“ средства на техническия анализ ще бъдат непълни, ако не покажем стандартния работен прозорец на техническия аналитик. На рис. 2 е показана стълбова графика на акциите на компанията General Motors (създадена с помощта на програмата Metastock Professional 6.0), демонстрираща основните инструменти на традиционния технически анализ.

Основната задача на техническия аналитик е задачата за определянето на тренда. Анализаторът измерва и определя тренда, за да може на базата на този тренд да провежда операциите си. Тенденцията се характеризира с направление (възходящо, низходящо или флетово), продължителност (колкото по-дълъг е тренда, толкова по-голямо е доверието в него) и сила (тангенса на ъгъла на наклона на тренда към абсцисната ос).

На рис. 2 възходящия тренд се определя от това, че всеки следващ локален минимум на ценовата тенденция се оказва по-високо разположен от предишния. При низходяща тенденция всеки следващ локален максимум е по-ниско разположен от предишния.

Нанасяйки линията на последователните максимуми, трейдърът може да получи така наречената **линия на съпротивление** (линиите 1 и 3 на графиката), съответно, съединявайки последователните минимума, ние можем да видим **линията на поддръжка** (линиите 2 и 4 на графиката). Тези линии са ограничители на тренда – между тях са разположени различните цени на акциите в трендовия период на време. Във всеки един момент пред анализатора възниква въпроса: да се придържа ли към тренда или да очаква обръщането му. В това отношение може да помогнат показателите на обема на търговията (индикаторът на обема на търговията на графиката е означен с цифрата 9). В случай на нарастване на обема на търговията, обикновено цената се движи в рамките на трендовия коридор (виж на рис. 2 периода до 20 май) и след това, при достигане на локален максимум на обема на търговията, цената сменя направлението на движението си. В някои случаи обаче такива разсъждения могат да бъдат подвеждащи. Да отбележим, че промяната на линията на тренда на 20 май е с ценови разрив или геп (gap) (обозначен на графиката на рис.2 с цифрата 7).

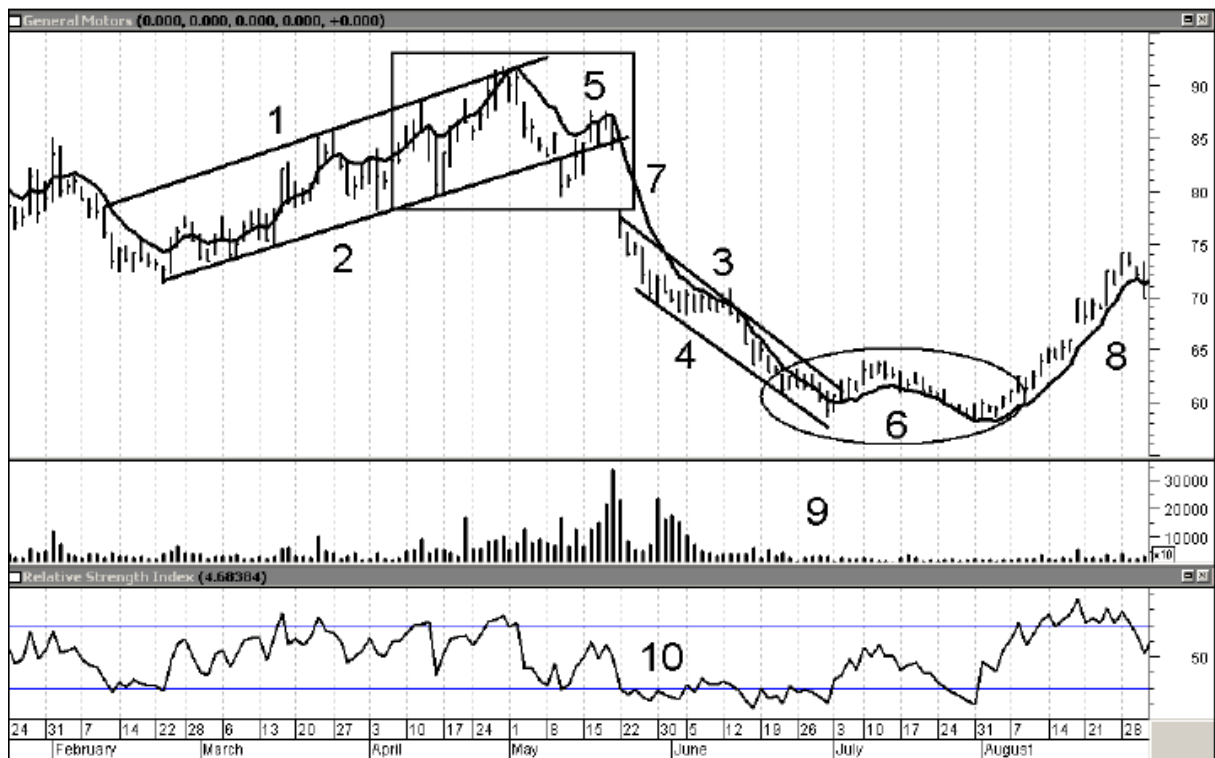


Рис. 2. Пример на графика на цените на акциите на General Motors (за периода януари – август 2000 г), нанесена със средствата на традиционния трхническия анализ. На графиката с цифрите 1 и 3 са означени линиите на съпротивление, с цифрите 2 и 4 – линиите на поддръжка, 5 – развърнатата фигура „глава и плещи“, 6 – развърнатата фигура „двойно дъно“, 7 – пример за геп, 8 – индикатор на пълзящата средна (Moving Average), 9 – индикатор за обема на търговията и 10 – осцилатор на относителната сила (Relative Strong Index)

Гепът е такова състояние на пазара, когато цената на отваряне на следващия времеви интервал се различава съществено от цената на затваряне на предишния. Геповете с направление, същото като направлението на тренда могат да се интерпретират като индикатори за силата на тренда, а геповете с направление, противоположно на това на тренда – като индикатори за силата на разрива.

След нанасянето на ценовите нива и линиите на поддръжка/съпротивление, пред анализатора възниква следния въпрос: видни ли са на графиката основните модели на разпространение на тенденциите? Видни ли са на графиките моделите на продължаване на тенденциите? Какви ценови ориентери могат да се установят от тези модели?

Фигурите (или ценовите модели) в традиционния технически анализ се наричат устойчивите комбинации от пикове и падини, появяването на които позволява, с определена вероятност, да се направи предположение за последващото движение на цените. На рис. 2 са показани фигури, съответстващи на продължението на тенденциите и фигури на преобръщане на тенденциите. Да обърнем внимание, че ако анализаторът навреме разпознае модела „глава и плещи“, своевременно може да

закрие дългите си позиции и при пробив на линията на поддръжка 2 да извърши продажба. Аналогично, фигурата „двойно дъно“ на рис. 2 означава промяна на тренда от низходящ на възходящ.

През 50-те години на XX век всички класически фигури на техническия анализ («триъгълник», «трапец», «глава и плещи» «двойно дъно» и др.) вече са били известни. Обаче чак през 80-те години в известните монографии на Джон Мърфи и Робърт Прехтер е направена тяхната систематизация.

Разбира се, само със средствата на графичния анализ трудно може да се установи тренда. Графичният анализ, като правило, се използва само за бегло маркиране на картината. Разпознаването на различните фигури на традиционния технически анализ има доста субективен характер. Докато анализаторът съумее да начертае линиите на поддръжка и съпротивление, голяма част от съответния тренд вече може да е минала. Затова, за по-оперативна и надеждна оценка, трейдърите на традиционния технически анализ използват апарата на индикаторите на техническия анализ.

Понастоящем има разработени и обезпечени със съответните компютърни алгоритми няколко хиляди трендови индикатори. По стойностите на трендовите индикатори и наклона на кривите към времевата ос може да се съди за силата и продължителността на тренда. На рис. 2 с цифрата 8 е означен най-популярния и стар индикатор на пълзящата средна (Moving Average – MA). Линията на пълзящата средна може да се разглежда в качеството на сигнална линия. Например, ако цената, намираща се в положение под тази линия расте, то точката на пресичане на линията на цената с линията на пълзящата средна може да се възприеме като сигнал за покупка. В противен случай – за продажба. Както се вижда на рис. 2, пълзящата средна работи добре в рамките на устойчив тренд и практически е неинформативна по време на флет.

6. Времеви финансови редове и трендови индикатори

При традиционния технически анализ (а и не само при него) основната задача на трейдъра е да анализира и прогнозира цените на финансовите активи, с цел успешно опериране (покупка или продажба) с тези активи. Да се опитаме да формализираме тази негова задача. Предполага се, че цената на даден финансов инструмент A е процес, т.е. функция от времето:

$$A = A(t)$$

От своя страна времето е представено по дискретен начин: известни са стойностите на $A(t)$ в някакви моменти от времето $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Тези стойности (цени на финансовия актив) образуват така наречения времеви финансов ред

$$A(t) = \{A_{t_1}, A_{t_2}, \dots, A_{t_n}\}$$

Основното предположение, на което се основава техническия анализ е, че в един следващ, но близък момент от времето $t_N > t_n$ цената на финансовия инструмент A_{t_N} не е случайна, а зависи по някакъв начин от цените в предишните моменти, т.е. налице е функционалната зависимост

$$A_{t_N} = f(A_{t_1}, A_{t_2}, \dots, A_{t_n})$$

Тук трябва да отбележим, че анализа на времевите редове е разпространен не само във финансите, но и в различни сфери на физиката, икономиката, демографията и др.

Но да се върнем към финансовите пазари – там на първо място възниква въпросът за моделирането на възходящите и низходящи трендове. За тази цел се използват така наречените трендови индикатори. Най-разпространените измежду тях са следните:

1. Проста пълзяща средна (Simple Moving Average – SMA). Определя се като средна аритметична величина

$$SMA_{t_n} = \frac{1}{k} (A_{t_{n-k+1}} + \dots + A_{t_n}) = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} A_{t_{n-i}},$$

където A_{t_n} е последната цена, а k е броят на участващите в разчета моменти от времето.

2. Претеглена пълзяща средна (Weighted Moving Average – WMA). Пресмята се по формулата

$$WMA_{t_n} = \alpha_1 A_{t_{n-k+1}} + \dots + \alpha_k A_{t_n},$$

Където $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ са теглата, които „претеглят“ съответните цени. За да е коректна горната формула е необходимо да бъдат изпълнени следните две условия: (1) $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$ (стандартно изискване за тегловете коефициенти) и (2) $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_k$ – по този начин последните данни се отчитат в много по-голяма степен отколкото данните, които са по-отдалечени назад във времето.

3. Експоненциална пълзяща средна (Exponential Moving Average – EMA). Формулата е следната

$$EMA_{t_n} = EMA_{t_{n-1}} + \frac{2}{k+1}(A_{t_n} - EMA_{t_{n-1}})$$

4. Ленти на Болинджър (Bollinger bands). Този инструмент е разработен от Дж. Болинджър в съответствие с концепцията на пълзящите средни. Същността на този индикатор се състои в следното: ако към текущата пазарна цена на интересувания ни финансов инструмент прибавим и извадим волатилността (изменчивостта) на пазара в размер на стандартното отклонение

$$S_{t_n} = \sqrt{\frac{1}{k} \left((A_{t_n} - SMA_{t_n})^2 + \dots + (A_{t_{n-k+1}} - SMA_{t_{n-k+1}})^2 \right)}$$

то ще получим ценови коридор (с горна граница $SMA_{t_n} + S_{t_n}$ и долна граница $SMA_{t_n} - S_{t_n}$), вътре в който цената ще се намира през 95% от времето. Възможно е обаче, цената да излезе от тези ленти на Болинджър. Когато цената излезе (отгоре или отдолу) от тези ленти и след това се върне в тях, това сигнализира за предстоящо изменение на ценовата тенденция. Освен това, колкото по-тесен е този ценови коридор (при по-малки стойности на S_{t_n}), толкова по-силно (вероятно) ще бъде това изменение.

7. Анализ на трендов модел с използването на пълзящи средни

Нека за дадени n на брой времеви момента $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ да са известни стойностите на подлежащата на моделиране величина A_1, A_2, \dots, A_n . Предположението на модела е, че действителната стойност е равна на трендовата стойност плюс някаква грешка, т.е.

$$A_i = T_i + \varepsilon_i \quad \text{за } i = 1, \dots, n$$

Ще търсим линията на тренда във вид на права линия

$$T(t) = a + bt,$$

тогава $T_i = T(t_i) = a + bt_i$. Така математическата задача се свежда до намирането на трендовите коефициенти a и b като се използват известните данни.

За целта ще използваме така наречените центрирани пълзящи средни. Те се пресмятат на базата на нечетен брой действителни стойности на величината, т.е. 3, 5 или 7. При $k = 3$ съответните центрирани пълзящи средни ще се пресмятат по формулата

$$\bar{A}_i = \frac{1}{3}(A_{i-1} + A_i + A_{i+1}),$$

а при $k = 3$ – по формулата

$$\bar{A}_i = \frac{1}{5}(A_{i-2} + A_{i-1} + A_i + A_{i+1} + A_{i+2})$$

Ще покажем алгоритъма за определянето на тренда на базата на конкретни числови данни

t_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A_i	10	12	11	14	14	15	17	18	17	17	21	23

1. Пресмятане на центрираните пълзящи средни

Имаме $\bar{A}_2 = \frac{1}{3}(10 + 12 + 11) = 11$; $\bar{A}_3 = \frac{1}{3}(12 + 11 + 14) = 12,33$; $\bar{A}_4 = 13$; $\bar{A}_5 = 14,33$; $\bar{A}_6 = 15,33$; $\bar{A}_7 = 16,67$; $\bar{A}_8 = 17,33$; $\bar{A}_9 = 17,33$; $\bar{A}_{10} = 18,33$; $\bar{A}_{11} = 20,33$.

Полагаме $y_i = \bar{A}_i$ за $i = 2, \dots, n - 1$. Ще търсим права линия $T(t) = a + bt$, която е най-близко разположена до точките с координати (t_i, y_i) . С други думи, ще трябва да минимализираме функцията на двете променливи a и b

$$\Phi(a, b) = \sum_{i=2}^{n-1} (y_i - a - bt_i)^2 \rightarrow \min$$

Необходимо условие за това е нулирането на първите частни производни на тази функция по отношение на двете ѝ променливи, т.е.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = -2 \sum (y_i - a - bt_i) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b} = -2 \sum t_i (y_i - a - bt_i) = 0$$

От първото уравнение получаваме

$$\sum y_i - (n - 2)a - \left(\sum t_i\right)b = 0,$$

а от второто

$$\sum t_i y_i - \left(\sum t_i\right)a - \left(\sum t_i^2\right)b = 0$$

Решаваме горната линейна система от две уравнения за две неизвестни, като първо изключваме неизвестното a от първото уравнение. Ще имаме

$$a = \frac{1}{n - 2} \left(\sum y_i - b \sum t_i \right)$$

Като заместим този израз за a и след известни преобразувания получаваме

$$b = \frac{(n-2) \sum t_i y_i - \sum t_i \sum y_i}{(n-2) \sum t_i^2 - (\sum t_i)^2}$$

Следователно, първо ще пресмятаме коефициента b и след това, като го заместим в израза за a ще получим стойността на a .

Връщаме се към алгоритъма с конкретните числови данни.

2. В таблица нанасяме дадените t_i , получените y_i и пресмятаме t_i^2 и $t_i y_i$:

t_i	y_i	t_i^2	$t_i y_i$
2	11	4	22
3	12,33	9	37
4	13	16	52
5	14,33	25	71,65
6	15,33	36	92
7	16,67	49	116,67
8	17,33	64	138,67
9	17,33	81	156
10	18,33	100	183,3
11	20,33	121	223,67

3. Пресмятаме сумите на елементите за всеки от стълбовете на горната таблица и получаваме

$$\sum t_i = 65; \quad \sum y_i = 156; \quad \sum t_i^2 = 505; \quad \sum t_i y_i = 1093$$

4. Сега можем да пресметнем трендовите коефициенти

$$b = \frac{(n-2) \sum t_i y_i - \sum t_i \sum y_i}{(n-2) \sum t_i^2 - (\sum t_i)^2} = \frac{10 \cdot 1093 - 65 \cdot 156}{10 \cdot 505 - (65)^2} = \frac{790}{825} = 0,958$$

$$a = \frac{1}{n-2} \left(\sum y_i - b \sum t_i \right) = \frac{1}{10} (156 - 0,958 \cdot 65) = 9,373$$

Така окончателно получихме уравнението на тренда

$$T(t) = 9,373 + 0,958t$$

5. Оценка на грешката на трендовия модел. Нанасяме в таблица: в първия стълб – моментите от времето t_i , във втория – действителните стойности на величината A_i , в третия – трендовите стойности на величината $T_i = T(t_i)$ получени от уравнението на тренда чрез заместване на t с всички t_i , в четвъртия – абсолютните стойности на грешките $|\varepsilon_i| = |A_i - T_i|$ и в петия – квадратите на грешките.

t_i	A_i	T_i	$ \varepsilon_i $	ε_i^2
1	10	10,331	0,331	0,110
2	12	11,289	0,711	0,506
3	11	12,247	1,247	1,555
4	14	13,205	0,795	0,632
5	14	14,163	0,163	0,027
6	15	15,121	0,121	0,015
7	17	16,079	0,921	0,848
8	18	17,037	0,963	0,927
9	17	17,995	0,995	0,990
10	17	18,953	1,953	3,814
11	21	19,911	1,089	1,186
12	23	20,869	2,131	4,541

Като сумираме елементите в последните два стълба ще получим грешките в (отклоненията на) модела: средното абсолютно отклонение (Mean Absolute Deviation – MAD)

$$MAD = \frac{1}{n} \sum |\varepsilon_i| = \frac{1}{12} 11,420 = 0,952 ,$$

среднокватратичната грешка (Mean Square Error – MSE)

$$MSE = \frac{1}{n} \sum \varepsilon_i^2 = \frac{1}{12} 15,151 = 1,263$$

и среднокватратичното отклонение (Mean Square Deviation – MSD)

$$MSD = \sqrt{MSE} = \sqrt{1,263} = 1,124$$

За да преценим грешката на модела, трябва да сравним тези грешки (отклонения) със средната стойност на дадените значения на моделираната величина, т.е. средноаритметичното на всички A_i , което е 15,75. Така например относителното средно абсолютно отклонение е $0,952/15,75 = 0,060$ или 6%, което оказва влияние върху качеството на прогнозата.

6. Прогнозиране на бъдещи значения на анализираната величина. Това става по формулата

$$T(t) = 9,373 + 0,958t$$

Така например за $t = 13$ получаваме $T_{13} = T(13) = 9,373 + 0,958 \cdot 13 = 21,827$, а за $t = 14$ - $T_{14} = T(14) = 9,373 + 0,958 \cdot 14 = 22,785$.

Задача. Имаме следните данни за седмичното изменение на курса евро/долар

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1,19	1,21	1,21	1,20	1,21	1,23	1,21	1,24	1,25	1,23	1,24
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	
1,26	1,24	1,24	1,25	1,23	1,24	1,25	1,25	1,26	1,25	

а) Да се направи трендов анализ за периода от $t = 1$ до $t = 10$ като се използват центрирани пълзящи средни при $k = 3$.

б) Да се направи трендов анализ за същия период на базата на експоненциални пълзящи средни при $k = 3$.

Решение:

а) За по-лесни пресмятания ще преобразуваме дадените стойности по следния начин: вместо 1,19 – 19, вместо 1,21 – 21 и т.н. Така ще имаме

t_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A_i	19	21	21	20	21	23	21	24	25	23

Пресмятане на центрираните пълзящи средни $y_i, i = 2, \dots, 9$.

Имаме

$$y_2 = \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + A_3) = \frac{1}{3}(19 + 21 + 21) = 20,33$$

$$y_3 = \frac{1}{3}(A_2 + A_3 + A_4) = \frac{1}{3}(21 + 21 + 20) = 20,67$$

$$y_4 = \frac{1}{3}(A_3 + A_4 + A_5) = \frac{1}{3}(21 + 20 + 21) = 20,67$$

$$y_5 = \frac{1}{3}(A_4 + A_5 + A_6) = \frac{1}{3}(20 + 21 + 23) = 21,33$$

$$y_6 = \frac{1}{3}(A_5 + A_6 + A_7) = \frac{1}{3}(21 + 23 + 21) = 21,67$$

$$y_7 = \frac{1}{3}(A_6 + A_7 + A_8) = \frac{1}{3}(23 + 21 + 24) = 22,67$$

$$y_8 = \frac{1}{3}(A_7 + A_8 + A_9) = \frac{1}{3}(21 + 24 + 25) = 23,33$$

$$y_9 = \frac{1}{3}(A_8 + A_9 + A_{10}) = \frac{1}{3}(24 + 25 + 23) = 24,00$$

В таблица нанасяме дадените t_i , получените y_i и пресмятаме t_i^2 и $t_i y_i$:

t_i	y_i	t_i^2	$t_i y_i$
2	20,33	4	40,67
3	20,67	9	62
4	20,67	16	82,68
5	21,33	25	106,65
6	21,67	36	130
7	22,67	49	158,69
8	23,33	64	186,64
9	24,00	81	216

Пресмятаме сумите на елементите за всеки от стълбовете на горната таблица и получаваме

$$\sum t_i = 44; \quad \sum y_i = 174,67; \quad \sum t_i^2 = 284; \quad \sum t_i y_i = 983,33$$

Сега можем да пресметнем трендовите коефициенти

$$b = \frac{(n-2) \sum t_i y_i - \sum t_i \sum y_i}{(n-2) \sum t_i^2 - (\sum t_i)^2} = \frac{8 \cdot 983,33 - 44 \cdot 174,67}{8 \cdot 284 - (44)^2} = \frac{181,16}{336} = 0,539$$

$$a = \frac{1}{n-2} \left(\sum y_i - b \sum t_i \right) = \frac{1}{8} (174,67 - 0,539 \cdot 44) = 18,869.$$

Така окончателно получихме уравнението на тренда

$$T(t) = 18,869 + 0,539t.$$

Сега да направим оценка на грешката на трендовия модел. Нанасяме в таблица: в първия стълб – моментите от времето t_i , във втория – действителните стойности на величината A_i , в третия – трендовите стойности на величината $T_i = T(t_i)$ получени от уравнението на тренда чрез заместване на t с всички t_i , в четвъртия – абсолютните стойности на грешките $|\varepsilon_i| = |A_i - T_i|$ и в петия – квадратите на грешките.

t_i	A_i	T_i	$ \varepsilon_i $	ε_i^2
1	19	19,41	0,41	0,1681
2	21	19,95	1,05	1,1025
3	21	20,49	0,51	0,2601
4	20	21,03	1,03	1,0609
5	21	21,56	0,56	0,3136
6	23	22,10	0,90	0,8100
7	21	22,64	1,64	2,6896
8	24	23,18	0,82	0,6724
9	25	23,72	1,28	1,6384
10	23	24,26	1,26	1,5876

Като сумираме елементите в последните два стълба ще получим грешките в (отклоненията на) модела: средното абсолютно отклонение (Mean Absolute Deviation – MAD)

$$MAD = \frac{1}{n} \sum |\varepsilon_i| = \frac{1}{10} 0,0946 = 0,00946 ,$$

среднокватратичната грешка (Mean Square Error – MSE)

$$MSE = \frac{1}{n} \sum \varepsilon_i^2 = \frac{1}{10} 0,00103 = 0,000103.$$

Забележка. Тъй като стойностите са преобразувани, то в предпоследния стълб получената сума трябва да разделим на 100, а в последния – на 10000. Сега да пресметнем и средноквадратичното отклонение (Mean Square Deviation – MSD)

$$MSD = \sqrt{MSE} = \sqrt{0,000103} = 0,01015.$$

Средно аритметичното на всички A_i , участващи в таблицата е 1,218, така че относителното средното абсолютно отклонение ще бъде

$$\frac{MAD}{\text{средната стойност на } A_i} = \frac{0,00946}{1,218} = 0,78\%.$$

Сега можем да прогнозираме бъдещи значения на анализираната величина. Това става по формулата

$$T(t) = 18,869 + 0,539t$$

Така например за $t = 11$ получаваме $T_{11} = T(11) = 18,869 + 0,539 \cdot 11 = 24,80$, а за $t = 12$ - $T_{12} = T(12) = 18,869 + 0,539 \cdot 12 = 25,34$.

б) Полагаме $y_i = EMA_{t_i}$. Тогава за $k = 3$ ще имаме

$$y_i = y_{i-1} + \frac{1}{2}(A_i - y_{i-1}) = \frac{1}{2}(A_i + y_{i-1}).$$

Полагаме $y_1 = A_1 = 19$ и получаваме $y_2 = 0,5(A_2 + y_1) = 0,5(21 + 19) = 20$, $y_3 = 0,5(A_3 + y_2) = 0,5(21 + 20) = 20,5$, $y_4 = 0,5(A_4 + y_3) = 0,5(20 + 20,5) = 20,25$, $y_5 = 0,5(A_5 + y_4) = 0,5(21 + 20,25) = 20,63$, $y_6 = 0,5(A_6 + y_5) = 0,5(23 + 20,63) = 21,81$, $y_7 = 0,5(A_7 + y_6) = 0,5(21 + 21,81) = 21,41$, $y_8 = 0,5(A_8 + y_7) = 0,5(24 + 21,41) = 22,7$, $y_9 = 0,5(A_9 + y_8) = 0,5(25 + 22,7) = 23,85$, $y_{10} = 0,5(A_{10} + y_9) = 0,5(23 + 23,85) = 23,43$.

В таблица нанасяме дадените t_i , получените y_i и пресмятаме t_i^2 и $t_i y_i$:

t_i	y_i	t_i^2	$t_i y_i$
1	19,00	1	19
2	20,00	4	40
3	20,50	9	61,5
4	20,25	16	81
5	20,63	25	103,15
6	21,81	36	130,86
7	21,41	49	149,87
8	23,70	64	181,6
9	23,85	81	214,65
10	23,43	100	234,3

Пресмятаме сумите на елементите за всеки от стълбовете на горната таблица и получаваме

$$\sum t_i = 55; \quad \sum y_i = 213,58; \quad \sum t_i^2 = 385; \quad \sum t_i y_i = 1215,93$$

Сега можем да пресметнем трендовите коефициенти

$$b = \frac{(n-2) \sum t_i y_i - \sum t_i \sum y_i}{(n-2) \sum t_i^2 - (\sum t_i)^2} = \frac{10 \cdot 1215,93 - 55 \cdot 213,58}{10 \cdot 385 - (55)^2} = \frac{412,4}{825} = 0,5$$

$$a = \frac{1}{n-2} \left(\sum y_i - b \sum t_i \right) = \frac{1}{10} (213,58 - 0,5 \cdot 55) = 18,61.$$

Така окончателно получихме уравнението на тренда

$$T(t) = 18,61 + 0,5t.$$

Сега ще направим оценка на грешката на трендовия модел. Нанасяме в таблица: в първия стълб – моментите от времето t_i , във втория – действителните стойности на величината A_i , в третия – трендовите стойности на величината $T_i = T(t_i)$ получени от уравнението на тренда чрез заместване на t с всички t_i , в четвъртия – абсолютните стойности на грешките $|\varepsilon_i| = |A_i - T_i|$ и в петия – квадратите на грешките.

t_i	A_i	T_i	$ \varepsilon_i $	ε_i^2
1	19	19,11	0,11	0,0121
2	21	19,61	1,39	1,9321
3	21	20,11	0,89	0,7921
4	20	20,61	0,61	0,3721
5	21	21,11	0,11	0,0121
6	23	21,61	1,39	1,9321
7	21	22,11	1,11	1,2321
8	24	22,61	1,39	1,9321
9	25	23,11	1,89	3,5721
10	23	23,61	0,61	0,3721

Като сумираме елементите в последните два стълба ще получим грешките в (отклоненията на) модела: средното абсолютно отклонение (Mean Absolute Deviation – MAD)

$$MAD = \frac{1}{n} \sum |\varepsilon_i| = \frac{1}{10} 0,095 = 0,0095,$$

среднокватратичната грешка (Mean Square Error – MSE)

$$MSE = \frac{1}{n} \sum \varepsilon_i^2 = \frac{1}{10} 0,00122 = 0,000122.$$

Забележка. Тъй като стойностите са преобразувани, то в предпоследния стълб получената сума трябва да разделим на 100, а в последния – на 10000. Сега да пресметнем и средноквадратичното отклонение (Mean Square Deviation – MSD)

$$MSD = \sqrt{MSE} = \sqrt{0,000122} = 0,01105.$$

Средно аритметичното на всички A_i , участващи в таблицата е 1,218, така че относителното средното абсолютно отклонение ще бъде

$$\frac{MAD}{\text{средната стойност на } A_i} = \frac{0,0095}{1,218} = 0,78\%.$$

Сега можем да прогнозираме бъдещи значения на анализираната величина. Това става по формулата

$$T(t) = 18,61 + 0,5t$$

Така например за $t = 11$ получаваме $T_{11} = T(11) = 18,61 + 0,5 \cdot 11 = 24,11$, а за $t = 12$ - $T_{12} = T(12) = 18,61 + 0,5 \cdot 12 = 24,61$.

8. Осцилатори на времеви редове

Както беше демонстрирано по-горе, всички индикатори на трендовия анализ работят добре в рамките на устойчив тренд, но при флета са практически безполезни. Но както беше отбелязано, в около 30% от времето се забелязват устойчиви тенденции, а през останалото време – странично движение, при което цените се движат в границите на тесен ценови коридор.

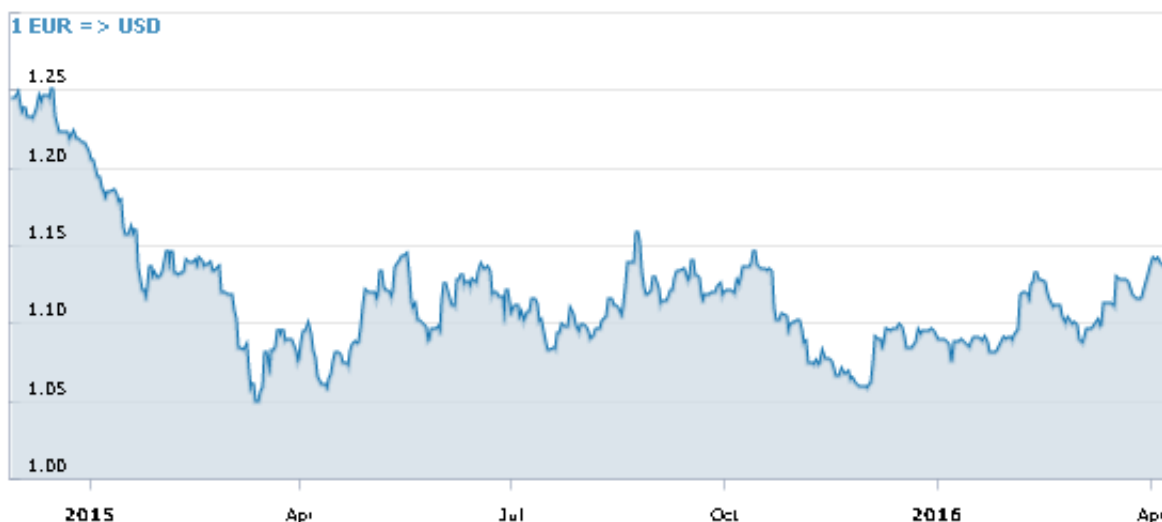


Рис. 3. Курс евро - долар за периода ноември 2014 г. - април 2016 г.

За да се обхванат флетовите състояния на пазара, в рамките на традиционния технически анализ за разработени особен вид индикатори – **осцилатори**. Те работят сравнително добре по време на флетове и лошо – при трендове (подават грешни сигнали).

Един от най-популярните осцилатори е разработеният от Дж. Лейн през 80-те години на XX век **стохастик** (stoc). Стохастикът анализира цените на затваряне относно избран времеви интервал.

$$STOC_t = \frac{C_t - L_n}{U_n - L_n} \cdot 100,$$

където C_t е текущата цена, L_n е най-ниската цена за последните n времеви момента, а U_n – най-високата.

Идеята, лежача в основата на разчетите чрез този индикатор се заключава в това, че ежедневните цени на затваряне при наличие на тенденция към повишаване са близки по стойност до максимума за периода (и $STOC_t$ има стойности, близки до 100), а при тенденция към повишаване за близки по стойност до минимума за периода (и $STOC_t$ има стойности, близки до 0). По този начин може да се прогнозира, че и в двата случая флетовата тенденция приключва и се очаква навлизане в тренд. При колебание на $STOC_t$ около центъра, очевидно флетовата тенденция продължава.

Друг важен осцилатор е **индекса на относителна сила** (Relative Strength Index – RSI), разработен от У. Уолдър. На рис. 2 линията на стойностите на RSI е означена с 10. Формулата за пресмятане на RSI е

$$RSI = \left(1 - \frac{1}{1 + AU/AD}\right) \cdot 100,$$

Където AU е сумата на нарастванията на цената за n дена, а AD – сумата на спадовете.

Този индикатор може да подава сигнали както при ситуации на обрат на цените, така и при ситуации на запазване. Стойностите на RSI се изменят от 0 до 100. Ако стойността на RSI пробие сигналната зона $RSI = 70$ и започне да пада, а в същото време цената на финансовия инструмент все още се увеличава, то това се интерпретира като сигнал за продажба. Падането на значението на RSI под другата сигнална линия $RSI = 30$ в съчетание с непрекъснатото падащи цени на активите, може да се разглежда като сигнал за подем.

Като цяло, трендовите индикатори и осцилаторите се явяват цифрови филтри, защото всеки един от тях измерва някакъв параметър на честотния спектър на сигнала. Техническият анализатор – традиционалист се сблъсква със сериозни проблеми, породени от нестационарността на времевите финансови редове, и като следствие, може да се окаже, че оптимизирани в миналото методи не работят толкова добре на настоящ етап.

Задача. Като се използват същите данни, като в задачата от предишния параграф:

- а) Да се пресметне стохастика за периода от $t = 12$ до $t = 21$ при $n = 6$.
- б) Да се пресметне индекса за относителна сила за същия период (като в в)) при $n = 8$.

Решение:

- а) За пресмятане на стохастика ще използваме формулата

$$STOC_t = \frac{A_t - L_n}{U_n - L_n} \cdot 100,$$

където A_t е текущата цена, L_n е най-ниската цена за последните n времеви момента, а U_n – най-високата. Нека да пресметнем A_{12} . Ще имаме $A_{12} = 26$, $L_{12} = \min(A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}) = A_7 = 21$, $U_{12} = \max(A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}) = A_{12} = 26$, следователно

$$STOC_{12} = \frac{A_{12} - L_{12}}{U_{12} - L_{12}} \cdot 100 = \frac{26 - 21}{26 - 21} \cdot 100 = 100.$$

Аналогично, за стохастика при другите стойности на t получаваме

$$STOC_{13} = \frac{A_{13} - L_{13}}{U_{13} - L_{13}} \cdot 100 = \frac{24 - 23}{26 - 23} \cdot 100 = 33,33$$

$$STOC_{14} = \frac{A_{14} - L_{14}}{U_{14} - L_{14}} \cdot 100 = \frac{24 - 23}{26 - 23} \cdot 100 = 33,33$$

$$STOC_{15} = \frac{A_{15} - L_{15}}{U_{15} - L_{15}} \cdot 100 = \frac{25 - 23}{26 - 23} \cdot 100 = 66,66$$

$$STOC_{16} = \frac{A_{16} - L_{16}}{U_{16} - L_{16}} \cdot 100 = \frac{23 - 23}{26 - 23} \cdot 100 = 0$$

$$STOC_{17} = \frac{A_{17} - L_{17}}{U_{17} - L_{17}} \cdot 100 = \frac{24 - 23}{26 - 23} \cdot 100 = 33,33$$

$$STOC_{18} = \frac{A_{18} - L_{18}}{U_{18} - L_{18}} \cdot 100 = \frac{25 - 23}{25 - 23} \cdot 100 = 100$$

$$STOC_{19} = \frac{A_{19} - L_{19}}{U_{19} - L_{19}} \cdot 100 = \frac{25 - 23}{25 - 23} \cdot 100 = 100$$

$$STOC_{20} = \frac{A_{20} - L_{20}}{U_{20} - L_{20}} \cdot 100 = \frac{26 - 23}{26 - 23} \cdot 100 = 100$$

$$STOC_{21} = \frac{A_{21} - L_{21}}{U_{21} - L_{21}} \cdot 100 = \frac{25 - 23}{26 - 23} \cdot 100 = 66,66.$$

б) За индекса на относителна сила ще използваме формулата

$$RSI_t = \left(1 - \frac{1}{1 + AU_t/AD_t} \right) \cdot 100,$$

където AU_t е сумата на нарастванията на цената за n дена, а AD_t – сумата на спадовете. За RSI_{12} ще имаме

$$\begin{aligned} AU_{12} &= (A_6 - A_5) + (A_8 - A_7) + (A_9 - A_8) + (A_{11} - A_{10}) + (A_{12} - A_{11}) \\ &= (23 - 21) + (24 - 21) + (25 - 24) + (24 - 23) + (26 - 24) \\ &= 2 + 3 + 1 + 1 + 2 = 9 \end{aligned}$$

$$AD_{12} = (A_6 - A_7) + (A_9 - A_{10}) = (23 - 21) + (25 - 23) = 2 + 2 = 4$$

$$RSI_{12} = \left(1 - \frac{1}{1 + AU_{12}/AD_{12}}\right) \cdot 100 = \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{9}{4}}\right) \cdot 100 = 69,23.$$

Аналогично, за индекса на относителната сила при другите стойности на t получаваме

$$RSI_{13} = \left(1 - \frac{1}{1 + AU_{13}/AD_{13}}\right) \cdot 100 = \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{7}{6}}\right) \cdot 100 = 53,85$$

$$RSI_{14} = \left(1 - \frac{1}{1 + AU_{14}/AD_{14}}\right) \cdot 100 = \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{7}{4}}\right) \cdot 100 = 63,64$$

$$RSI_{15} = \left(1 - \frac{1}{1 + AU_{15}/AD_{15}}\right) \cdot 100 = \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{5}{4}}\right) \cdot 100 = 55,56$$

$$RSI_{16} = \left(1 - \frac{1}{1 + AU_{16}/AD_{16}}\right) \cdot 100 = \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{4}{6}}\right) \cdot 100 = 40$$

$$RSI_{17} = \left(1 - \frac{1}{1 + AU_{17}/AD_{17}}\right) \cdot 100 = \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{5}{4}}\right) \cdot 100 = 55,56$$

$$RSI_{18} = \left(1 - \frac{1}{1 + AU_{18}/AD_{18}}\right) \cdot 100 = \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{5}{4}}\right) \cdot 100 = 55,56$$

$$RSI_{19} = \left(1 - \frac{1}{1 + AU_{19}/AD_{19}}\right) \cdot 100 = \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{3}{4}}\right) \cdot 100 = 42,86$$

$$RSI_{20} = \left(1 - \frac{1}{1 + AU_{20}/AD_{20}}\right) \cdot 100 = \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{4}{2}}\right) \cdot 100 = 66,67$$

$$RSI_{21} = \left(1 - \frac{1}{1 + AU_{21}/AD_{21}}\right) \cdot 100 = \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{4}{3}}\right) \cdot 100 = 57,14.$$

9. Съвременен технически анализ

Цел на техническия анализ е да се разкрие вътрешната закономерност на времевия финансов ред, на базата на която да може да се направи прогноза за прехода от тренд към флат (относително стабилно състояние на пазара) и обратно. В традиционния технически анализ не се използва сериозен математически апарат. През 50-те и 60-те години на XX техническият анализ получава неочаквана поддръжка от сериозна математическа дисциплина – теорията на динамичния хаос. По този начин се заражда съвременния технически анализ. От общата теория следва, че времевия финансов ред, който външно изглежда като реализация на случаен процес, напълно успешно може да се разглежда като породен от нелинейна динамична система с малка размерност. Това означава, че той може да се представи във вид на едномерна проекция на траекторията на такава система в разширеното фазово пространство, която се описва с помощта на неголям брой обикновени диференциални уравнения. Съгласно класическата концепция на Дау цените на акциите се определят от стадни инстинкти, които (както убедително свидетелства социалната психология) се подчиняват на крайно примитивен механизъм. Затова хипотезата, че такъв механизъм може да се представи чрез динамична система изглежда напълно правдоподобна. В този случай, използвайки теоремата на Такенс, можем да възстановим текущата стойност на динамичния ред, изхождайки от достатъчно много исторически данни, като за такова възстановяване не е необходимо да знаем конкретния вид и броя на уравненията в системата. По същество, тази процедура свежда задачата за екстраполация на едномерния ред към задачата за интерполация на някоя многомерна функция. Последната се явява типова задача за невронни мрежи. Затова теорията на динамичния хаос може да се счита за идеологическа основа едно мощно внедряване на невротехнологиите в бизнеса, което се наблюдава повсеместно през 90-те години на миналия век.

При сравнението на резултатите и ползите от фундаменталният и технически анализ, трябва да се отбележи, че те се различават в два ключови момента: по целите на анализа и по неговия хоризонт. Във фундаменталния анализ целта е определянето на истинската, справедлива цена на изследвания финансов актив. Сравнявайки тази справедлива стойност с текущата оценка на пазара (пазарната цена), изследователят прави извод за преоценеността или недооценеността на актива. При техническия анализ главната цел на изследването е анализ на текущото състояние на пазара, определяне на господстващите тенденции и ключови ценови нива. При сравнението на целите на техническия и фундаментален анализ се вижда, че те отчитат съвсем различни времеви хоризонти. Първият дава възможност да се прогнозира близкото бъдеще, а вторият – да се погледне по-надалече.

И само в съчетанието на тези два възгледа, анализаторът може да получи сравнително реална картина за бъдещето. От разликата в хоризонтите се вижда, че фундаменталния анализ би следвало да се използва от инвеститорите, разчитащи на реализация на дългосрочна стратегия, а техническия – от спекулантите, с цел краткосрочна или средносрочна спекулация.

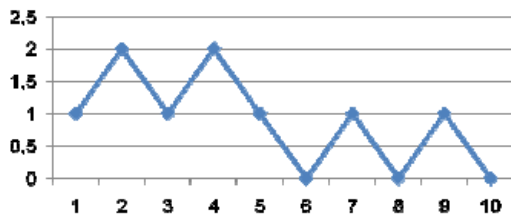
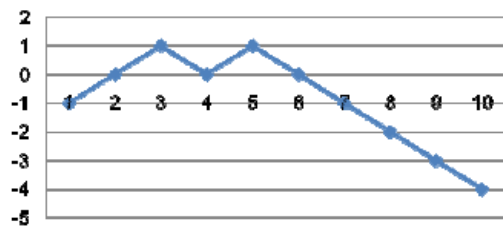
10. Стохастичен количествен анализ

Това направление започва с работата на Луис Бешалие *Theory of Speculation* (1900 г.), където авторът, пет години преди Айнщайн, предлага първия модел на брауново движение (модел на случайно блуждане) и го прилага за описване на колебанията на цените на фондовата борса. Строго математически, този модел е обоснован през 20-те години на миналия век от Норберт Винер, затова носи името винеров случаен процес.

За да разберем принципът, на който почива тази концепция, ще разгледаме най-простия пример за стохастичен процес – стохастичния процес “random walk” (случайна разходка). Турист иска да стигне до най-близкия хотел в непознат град, но не знае в коя посока да тръгне. Хвърля монета и: ако се падне „ези“ прави крачка в ляво, ако се падне „тура“ – крачка в дясно. Траекторията му е стохастичен процес “random walk”:

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t, \text{ като } \varepsilon_t = \begin{cases} +1 \text{ с вероятност } p = \frac{1}{2} \\ -1 \text{ с вероятност } p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

t=10



t=100

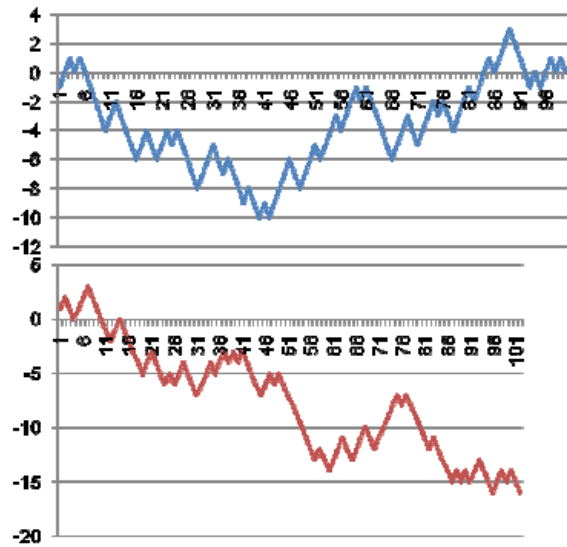


Рис. 4. Четири реализации на стохастичния процес "random walk"

На рис. 4 са показани четири различни реализации на стохастичния процес "random walk".

За запознатите с теория на вероятностите може да се отбележи, че математическото очакване на случайната величина ε_t е

$$E(\varepsilon_t) = \frac{1}{2} \cdot (+1) + \frac{1}{2} \cdot (-1) = 0$$

а дисперсията

$$D(\varepsilon_t) = \frac{1}{2} \cdot (0 - 1)^2 + \frac{1}{2} \cdot (0 + 1)^2 = 1$$

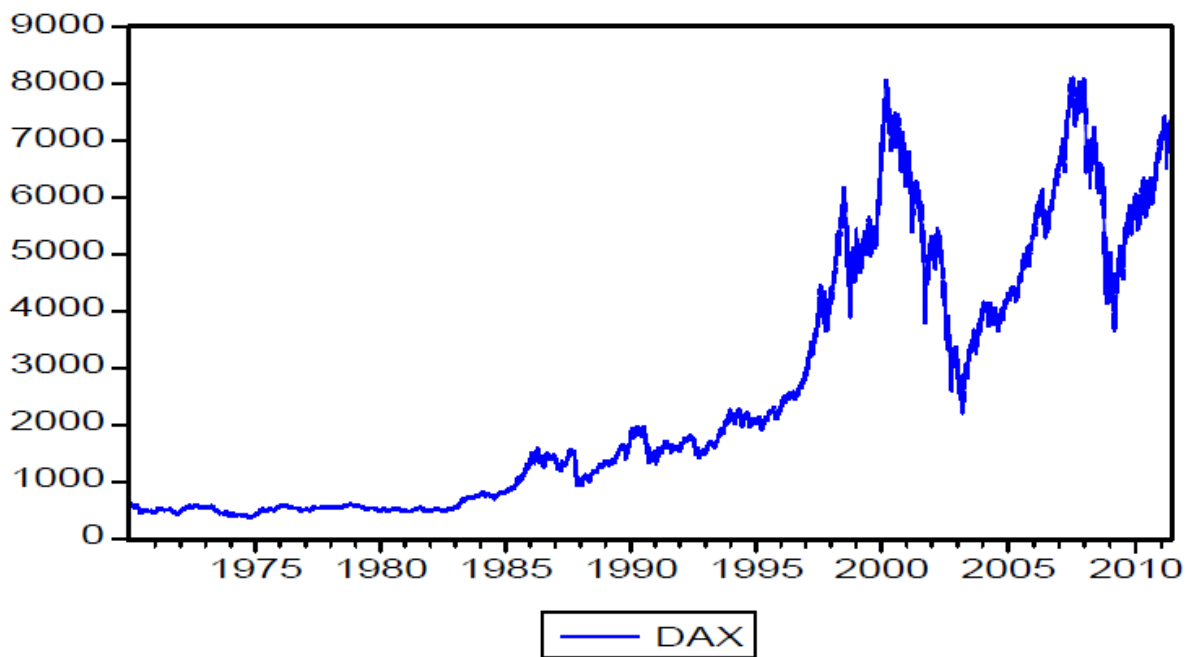


Рис. 5. Борсов индекс DAX за периода 1970 – 2011 г.

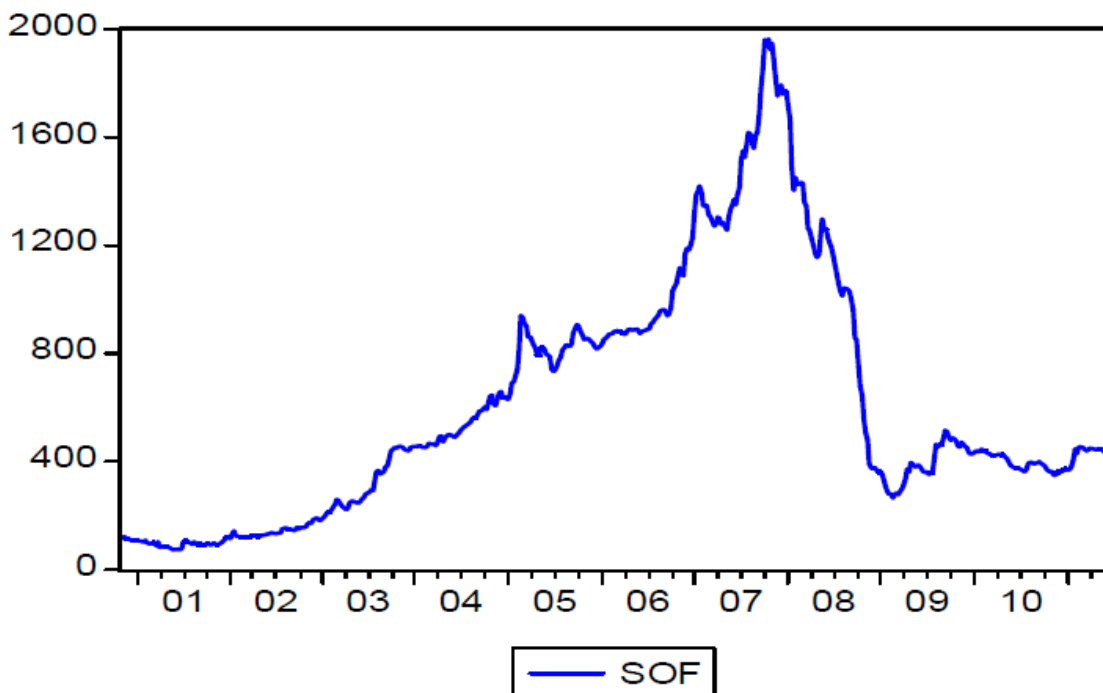


Рис. 6. Борсов индекс SOF за периода 2000 - 2011 г.

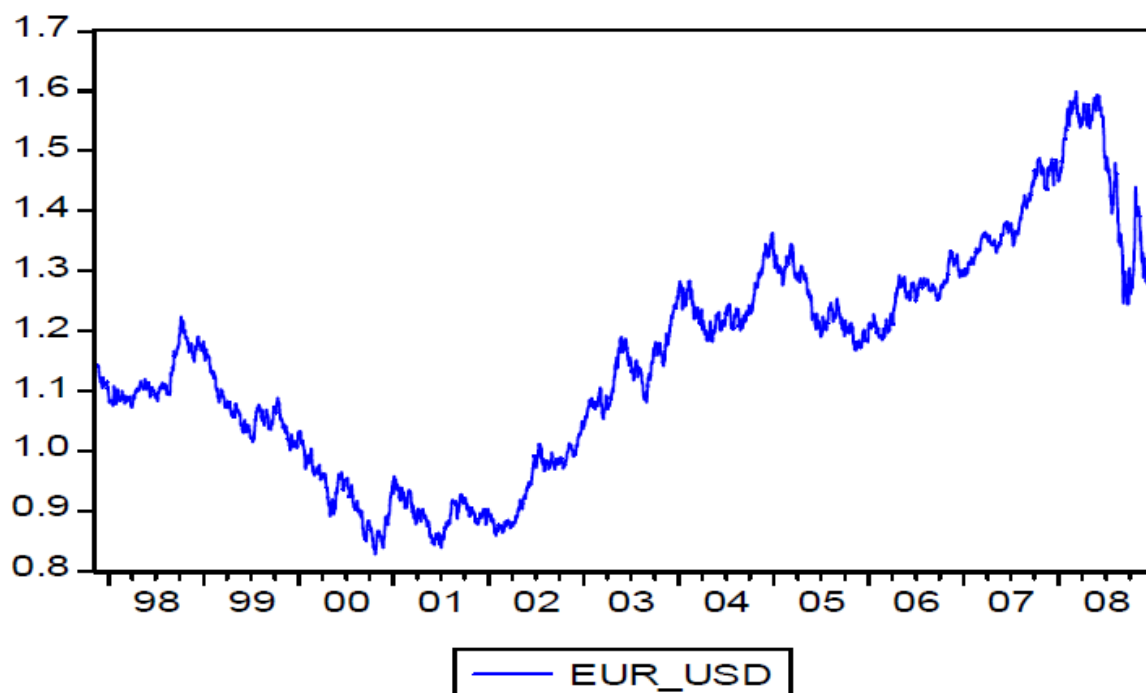


Рис. 7. Валутен курс евро/долар за периода 1998 - 2008 г.

На рис. 5 е дадена графика на борсовия индекс DAX за периода от 1970 до 2011 г., на рис 6 – графика на борсовия индекс SOF за периода от 2000 до 2011 г., а на рис. 7 – графика на валутното съотношение между еврото и долара за периода от 1998 до 2008 г.

Сега можем да формулираме и така наречената “random walk” хипотеза: цените на финансовите инструменти са генерирани от “random walk” стохастичен процес и очакваната цена в следващ момент на времето е равна на цената в предишния момент плюс случайна величина с очаквана средна стойност нула. Това означава, че измененията на цените се подчиняват на нормалното (гаусово) разпределение. Освен това, при такова „брауново блуждаене“ на времевия финансов ред, нарастванията върху взаимно непресичащи се интервали са статистически независими.

Дълго време този модел на финансовите пазари се е развивал изключително в академичните среди. Последното е свързано с това, че в съответствие с горните предположения принципно е невъзможно да се получи печалба, по-голяма от средната за пазара. Обаче това противоречало на опита на реалното търгуване. Затова в средите на инвеститорите този модел започнал да се приема по-сериозно през 60-те години, когато окончателно се оформила концепцията на «ефективния пазар» (пазар, при който цените в пълна степен отразяват цялата достъпна информация). Съгласно Фаме за съществуването на такъв пазар е достатъчно да се предположи, че на него действат голям брой напълно информирани агенти, които мигновено реагират на външните събития, действайки при това рационално и независимо.

Необходимостта от подобна концепция се диктувала от това, че в нейните рамки добила смисъл теорията за формиране на оптималния портфейл на Уилям Шарп и Хари Малковиц (Нобелова награда за икономика през 1990 г.), която е имала голямо практическо приложение. Основен модел за поведението на цените на такъв пазар станал модела на брауновото движение. Най-голямото постижение на подхода, основаващ се на този модел станали работите на Блек, Шоулз и Мертън (Нобелова награда за икономика през 1997 г.), които позволявали точно да се пресмятат «справедливите» цени на опционите.

Обаче при наблюдението на финансовите динамични редове се проявили много особености, които не се съгласуват с хипотезата за брауново движение. Най-важната от тях е, че силните изменения във времевите редове се наблюдават по-често, отколкото би следвало да се очаква от гаусовото разпределение, като такива колебания обикновено са разделени от колебания с относително малка интензивност. По тази причина, наред с модела на брауново движение се развиват и всевъзможни негови модификации, които са свързани с отказа или от условието за нормалност на разпределението (първия постулат) или от условието за независимост на измененията (втория постулат). В първия случай се говори за движение на Леви (Levi Motion) и в частност за устойчиво разпределение на Парето. Във втория – за процес с памет и обобщено брауново движение (Fractional Brownian Motion). Накрая, ако сме готови да се откажем и от двата постулата на брауновото движение, стигаме до идеята за авторегресивен хетероскедастичитет (зависимост на значението на динамичния ред от предишните му значения при изменение на дисперсията във времето), или ARCH – модела на Енгл (Нобелова награда за икономика през 2003 г.) и различни негови обобщения.

За да се разреши противоречието между динамичния и стохастичния подход трябва да се вземат под внимание резултатите от експерименталните изследвания на пазара. Както показват подобни изследвания на реалния пазар цялата съвкупност от агенти се разпада на клъстери (референтни групи), във всеки от които агентите подражават един на друг. Клъстерите могат да образуват сложни йерархични групи, могат да се сливат в по-крупни или да се разпаднат до по-малки. При това е ясно, че концепцията за ефективния пазар и концепцията на Доу са два гранични случая. В първия случай на пазара присъстват голям брой примерно еднакви клъстери. Пазарът се намира в най-стабилно състояние и неговата еволюция зависи основно от външната информация, която има случаен характер. Във втория случай на пазара присъства един голям клъстер, значително превъзхождащ останалите. Пазарът е най-близък до колапса и динамиката му се подчинява само на вътрешни фактори. Във връзка с казаното по-горе, възникват естествените въпроси «По какъв закон еволюира клъстерната структура и каква е причината за

образуването на големи кълстери». Да се отговори на тези въпроси, означава да се направи синтез на двете гореизложени концепции.

11. Няколко думи за иконофизиката

Най-големи успехи в опитите за «помиряване» и синтез на двете противоположни школи динамичната (от съвременния технически анализ) и стохастичната се отбелязват в полето на една съвсем нова научна дисциплина – иконофизиката.

Иконофизиката – на границата между икономиката физиката и математиката, започва да се формира като отделно направление през средата на 90-те години на миналия век. При това терминът «иконафизика», предложен от американския физик Хари Стенли (Harry Stanley) влиза в обща употреба, когато през 1997 г. Имре Кондор и Янош Кертис организират в Будапеща «симпозиум по иконафизика» (Workshop on Econophysics). Формирането на новата дисциплина се дължи в голяма степен на навлизането в икономиката на водещи физици, такива като Филип Андерсън (Нобелова награда за физика през 1977 г.), Пер Бак, Юджин Стенли и редица други. По това време в икономиката, и най-вече във финансите са се натрупали много задачи, които не могат да се решат с методите на тази наука. За решаването на такива задачи се предполага използването на апарат и методология на теоретичната физика. Да отбележим, че такива опити за сближаването на икономиката и физиката са правени и по рано. Обаче никога преди това този проект не е предизвиквал такъв обществен резонанс. Продължава неотклонно да расте броят на научните статии, монографии и конференции по иконафизика. Престижните университети започват да включват такива курсове в учебните си програми. Все по-голям интерес към тази наука проявяват и финансовите структури (Съгласно журнала на Института по физика на Великобритания «финансовият сектор на икономиката е станал един от най-големите работодатели на млади физици теоретици»). Освен това, иконафизиката вече започва да се разглежда като единна теория, описваща както функционирането на глобалната система на световния капитал, така и поведението на пазара на отделните икономически субекти. Следва да се отбележи, че в концептуален план иконафизиката се базира на позиция, която не е традиционна за теоретичната физика. Тази позиция е представена от Филип Андерсън още през 1972 г. Той твърди, че «физиката на елементарните частици и, в частност редукционистките подходи имат само ограничена възможност да обяснят устройството на мирозданието. Реалността има йерархична структура, всяко ниво на която в определена степен е независимо от нивата, намиращи се над и под него. На всеки стадий са необходими съвършено нови закони, концепции и обобщения, изискващи не по-малко вдъхновение и творчество, отколкото предишните». «Психологията не е приложна биология, както биологията не е приложна

химия» – отбелязва Андерсън. По такъв начин, ако преди «първите принципи, които не могат да се обяснят в термините на по-дълбоки принципи» по определение съдържала само физиката на елементарните частици, то оказва се, че такива принципи може да съдържа всяка научна дисциплина.

Концепцията на Андерсън става обединяващ лозунг за обширни мултидисциплинарни изследвания, за провеждането на които в средата на 80-те години в Ню-Мексико (САЩ) се създава Институт Санта-Фе. Тогава се е предполагало, че тези изследвания ще внесат «сериозен принос в решаването на такива остри дългосрочни проблеми като дефицита в платежния баланс, СПИН, генетичните дефекти, умственото здраве, компютърните вируси». Именно в този институт за пръв път се появяват работи по икономика с използването на най-съвременен апарат на теоретичната физика. В сегашно време Институт Санта-Фе е един от главните центрове на иконофизиката, където науката се развива в рамките на общата теория на адаптивните системи.

Като примери за такива системи могат да се посочат централните нервни системи и невромрежи, екосистемите и колониите от мравки, социалните структури и политическите системи и, разбира се, различните структури, възникващи в икономиката. Всички тези системи се състоят от елементи, които са способни да натрупват опит в процеса на взаимодействие с други елементи, а след това да се променят по такъв начин, че да се приспособят към околната среда. Характерен етап от еволюцията на всички адаптивни системи се явява процеса на самоорганизация, при който в резултат на самоусилване на отделните взаимодействия в системата спонтанно възниква някакъв ред. При това, системата като цяло придобива ново качество, което може напълно да отсъства в нейните елементи.

Базов пример за самоорганизация в икономиката е процесът, управляван от «невидимата ръка» на Адам Смит, при който множеството индивиди, стремящи се да удовлетворят изключително личните си материални потребности, пораждаат поведенческо цяло с принципно различно качество. Както показват изследванията, проведени от голяма група икономисти «в много експерименти по моделиране на пазарни системи лошо информирани, склонни към грешки и неразбиращи субекти, контактуват помежду си на основата на установени правила и създават социални алгоритми за максимализиране на общите материални ценности, явно приближаващи се към оптимален резултат, който, както традиционно се смята, може да се получи само въз основа на пълна информация и от когнитивно-рационални личности». Освен това, тези работи показват също, че с течение на времето пазарът може да се приближава до състояние на ефективност. Това означава, че той е способен да агрегира в себе си с помощта на цените цялата значима информация. При това, в промеждутъци от времето, поради постоянно извършваните от субектите грешки (от незнание или под въздействие на емоциите), както и поради

липса на информация, те подражавайки един на друг създават «миражи», които бързо се разпадат. По такъв начин може да се каже, че «хората еволюират към рационалност, учейки се от грешките си».

12. Игри на малцинства

Тези експериментални изследвания станали мотив за появата на цял раздел от икономиката, посветен на «игри на малцинства» (Minority Game). Целта на тези «игри» е да покажат върху опростен модел по какъв начин икономически агенти с ограничена рационалност при непълна информация могат да създадат ефективен пазар. Съществуват много варианти на тази игра. Те по различен начин формализират една важна особенност на системата, в която агентите, конкуриращи се за ограничени ресурси, използват определени стратегии. Смисълът на тази особеност е в това, че ако някоя удачна в миналото стратегия започне да се използва от мнозинството, тя автоматично става губеща. Затова участниците в играта трябва от време на време да променят стратегиите си, ако оскат да спечелят.

Играта на малцинства обикновено се провежда в дискретно време и предполага наличието на N агенти, всеки от които може да избира едно от двете състояния: buy (+1) или sell (-1). Това състояние се описва от функцията $a_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, N; t = 0, 1, \dots, \infty$). В началото на играта всеки от агентите получава определен капитал. На всяка стъпка печелят тези, които се оказват в малцинство, при това печалбата $A(t)$ се определя по формулата:

$$A(t) = \sum_{i=1}^N a_i(t) \quad (1)$$

След това от капитала на всеки губещ се изважда сумата

$$u_i(t) = \frac{2|A(t)|}{N+|A(t)|} \quad (2)$$

и, съответно към капитала на всеки печеливш се прибавя сумата

$$u_i(t) = \frac{2|A(t)|}{N-|A(t)|} \quad (3)$$

След това играта се повтаря отново.

Формулите (2) и (3) по които става разпределението на печалбите (загубите) се доказват лесно. Нека, б. о. о., първите k ($k < N/2$) на брой играчи в произволен момент от времето t да са заложили на sell (-1). Тогава другите $N - k$ на брой играчи в същия момент залагат на buy (+1). При това положение общата печалба (загуба) ще възлиза на

$$\begin{aligned}
A(t) &= a_1(t) + \dots + a_k(t) + a_{k+1}(t) + \dots + a_N(t) \\
&= (-1) + \dots + (-1) + (+1) + \dots + (+1) \\
&= (-1) \cdot k + (+1) \cdot (N - k) = N - 2k > 0 \Rightarrow |A(t)| = N - 2k
\end{aligned}$$

Тогава, тъй като първата група от k на брой играчи са малцинство, те печелят и си разпределят общата печалба. Следователно, всеки от тях получава печалба, възлизаща на $(N - 2k)/k$. Същият резултат получаваме, ако във формулата (3) за $u_i(t)$ при $i = 1, \dots, k$ заместим $|A(t)|$ с $N - 2k$. По аналогичен начин се доказва формула (2).

Пример. Нека в играта да участват пет на брой играчи - A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 . A_1 играе винаги sell (-1), A_2 – винаги buy (+1), A_3 – редува, започвайки с sell (-1), A_4 започва с sell (-1), при печалба повтаря предишния си избор, а при загуба – играе обратното, A_5 играе съвършено случайно (например хвърля монета и при «ези» играе buy (+1), а при «тура» - sell (-1)), като за първите четири игри (при $t = 0, 1, 2, 3$) е играл последователно (-1), (+1), (+1), (-1). Да нанесем данните за първите четири игри в таблица

играчи	игри			
	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
A_1	(-1)	(-1)	(-1)	(-1)
A_2	(+1)	(+1)	(+1)	(+1)
A_3	(-1)	(+1)	(-1)	(+1)
A_4	(-1)			
A_5	(-1)	(+1)	(+1)	(-1)

Да видим как ще играе A_4 . Тъй като при $t = 0$ той е от страната на губещите (оказва се в мнозинство), при $t = 1$ сменя стратегията си и играе (+1). Тъй като пак е губещ, сменя и при $t = 2$ играе (-1), аналогично – при $t = 3$ играе (+1). Попълваме горната таблица с игрите и на A_4 и получаваме окончателния вариант (до $t = 3$ включително)

играчи	игри			
	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
A_1	(-1)	(-1)	(-1)	(-1)
A_2	(+1)	(+1)	(+1)	(+1)
A_3	(-1)	(+1)	(-1)	(+1)
A_4	(-1)	(+1)	(-1)	(+1)
A_5	(-1)	(+1)	(+1)	(-1)

Вижда се, че четвъртият играч несъзнателно (макар и да следва друга стратегия) играе като третия и по такъв начин загубва шанса си да се озове в малцинство (и да печели) когато и да било.

Нека сега да си представим, че петият играч (като най-интелигентен) разбира поведението на останалите „борсови спекуланти“ и на базата на това започва да играе по най-добрия за него начин от $t = 4$ нататък. При $t = 4$ той знае, че A_1 ще играе (-1) , A_2 - $(+1)$, A_3 - (-1) и A_4 - (-1) . Тогава той за да спечели трябва да играе $(+1)$. Така до $t = 6$ включително таблицата на играта ще изглежда така

играчи	игри						
	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	$t = 6$
A_1	(-1)	(-1)	(-1)	(-1)	(-1)	(-1)	(-1)
A_2	$(+1)$	$(+1)$	$(+1)$	$(+1)$	$(+1)$	$(+1)$	$(+1)$
A_3	(-1)	$(+1)$	(-1)	$(+1)$	(-1)	$(+1)$	(-1)
A_4	(-1)	$(+1)$	(-1)	$(+1)$	(-1)	$(+1)$	(-1)
A_5	(-1)	$(+1)$	$(+1)$	(-1)	$(+1)$	(-1)	$(+1)$

Така на практика, петият играч редува подобно на третия и четвъртият, но обратно на тях, затова той винаги печели, а те – губят.

Ако си представим, че всички те са снабдени първоначално с по 50 лв и всяко залагане им струва 12 лв, то техният капитал в течение на времето ще се разпределя така

играчи	игри						
	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	$t = 6$
A_1	41	77	73	79	75	81	77
A_2	86	77	83	79	85	81	87
A_3	41	32	28	24	20	16	12
A_4	41	32	28	24	20	16	12
A_5	41	32	38	44	50	56	62

Какво би станало нататък, ако играта продължи? При $t = 9$ A_3 и A_4 загубват капитала си и излизат от играта. Тожа е лова новина за A_5 – оказва се, че той е печелил на базата на тях. От тук нататък той (макар и най-интелигентен) се озовава в капан – както и да играе, все ще бъде на загуба. И така, докато и той излезе от играта – окончателно всичкия капитал се концентрира в A_1 и A_2 . Ако трябва да резюмираме: твърдата стратегия (характерна за A_1, A_2 и A_3) случайно може да се окаже и печеливша (при A_1 и A_2). Глупаво гъвкавата стратегия на A_4 при всяко положение води до загуба. Интелигентно гъвкавата стратегия на A_5 може да се окаже печеливша – ако той напусне играта, веднага след като е разбрал, че е влязъл в капан (от $t = 9$ нататък).

В по-интересните варианти на играта всеки от агентите получава капитал в две форми: наличности (cash) и определено количество акции, които в началото на играта имат фиксирана стойност. Във всеки момент от време всеки от агентите извършва покупка или продажба на една акция (в по-общия случай – няколко акции). Нека отново N да е броя на участниците в играта, а $a(t)$ – разликата между количеството ордери за покупка и продажба на акциите. Тогава

$$\frac{N}{2} + \frac{a(t)}{2} \text{ е броя на купувачите, а } \frac{N}{2} - \frac{a(t)}{2} \text{ – броя на продавачите.}$$

Нека $p(t-1)$ да е цената на акциите в предишния момент на играта, а $p(t)$ – в настоящия. Тогава, тъй като тези които са купувачи се ориентират по цената $p(t-1)$, докато продавачите – по $p(t)$, то равновесието на пазара в момент от времето t ще се определи от равенството

$$p(t-1) \cdot \left(\frac{N}{2} + \frac{a(t)}{2} \right) = p(t) \cdot \left(\frac{N}{2} - \frac{a(t)}{2} \right)$$

Последното равенство отразява баланса между търсене и предлагане в момент от времето t . От него се получава рекурентна формула за цената $p(t)$:

$$p(t) = \frac{N + a(t)}{N - a(t)} p(t-1)$$

От тук се вижда, че тези, които се оказват в малцинство увеличават своя капитал, тъй като, например, ако купувачите са повече от продавачите, то сделката се извършва по цена $p(t) > p(t-1)$, следователно печеливши са продавачите. Нека, например цената на акцията в предишния момент да е $p(t-1) = 1$, броя на продавачите да е 500, а броя на купувачите – 600. Това съотношение между купувачи и продавачи би определило цена $p(t) = 1,2$. Как биха разсъждавали различните потенциални участници за следващия момент от времето $t+1$? Тези, които са собственици на акции (потенциални продавачи) избират от две възможности: да продават, тъй като смятат, че акциите са надценени и в следващ момент цената им ще падне или да не продават, очаквайки бъдещо поскъпване на акциите. От друга страна, потенциалните купувачи или ще направят заявка за покупка, смятайки че акциите са все още евтини или ще се въздържат, прати преценката си за надцененост на акциите. С други думи, психологията на участниците в играта определя в много голяма степен бъдещото движение на цените – нагоре или надолу.

В още по-усъвършенстван вариант на играта, всеки агент може да получава освен капитал и определено количество стратегии, даващи указания относно покупката или продажбата на акции в следващия момент. Броя на спечелилите в близкото минало ще наричаме история на играта. Всяка такава стратегия има вътрешна

стойност, зависеща от историята на играта. Такива истории могат да имат различна дълбочина, определяща степента на информираност на агента. В игрите с **индуктивна динамика** агентът избира стратегиите с най-голяма вътрешна стойност (в по-общия случай този избор е случаен, което е естествено да интерпретираме като ограничена рационалност на агента). След загубата на капитала си агентът излиза от пазара.

Без да обръщаме внимание на това, че така формулираната игра не отчита външните фактори, тя демонстрира богата и доста реалистична динамика. В частност, тя показва по какъв начин информираността на агентите е свързана с ефективността на пазара. Оказва се, че ако въведем управляващ параметър $\alpha = I/N$, където I – брой на различните състояния на фундаментална информация, то някаква стойност α_c е фазов преход. Фазов преход се нарича прехода на веществата от едно термодинамично състояние в друго. Характерен пример за фазов преход е замръзването на водата при спад на температурата под нула градуса по Целзий (при нормално атмосферно налягане). Кристалите на леда се образуват повсеместно след преодоляването на критичната точка. Тогава, ако $\alpha < \alpha_c$, то ние се намираме в симетрична фаза, където не съществува достатъчно количество информация, която да може да се използва за по-точно предсказване, и пазарът се оказва ефективен. Напротив, ако $\alpha > \alpha_c$, то ние се намираме в асиметрична фаза, където най-информираният агент има действително преимущество пред останалите и пазарът не е ефективен. Освен това, моделът позволява детайлно да се проследи как на пазара се получава равновесие и как то се нарушава по следната причина – агентите, чието поведение на пазара е независимо започват да се държат по еднакъв начин. Върху този модел може отчасти да се ориентираме и при решаването на по-важни проблеми.

Задачи:

1. В една игра на малцинствата участват пет играча A_1, A_2, A_3, A_4 и A_5 . Те трябва на всеки кръг от играта да играят или sell (-1) или buy (+1). Изиграни са 7 кръга от играта по начин, даден в долната таблица

играчи	игри						
	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	$t = 6$
A_1	(-1)	(+1)	(-1)	(-1)	(-1)	(+1)	(+1)
A_2	(+1)	(+1)	(-1)	(-1)	(-1)	(-1)	(+1)
A_3	(+1)	(-1)	(+1)	(+1)	(+1)	(-1)	(+1)
A_4	(+1)	(+1)	(+1)	(-1)	(+1)	(-1)	(-1)
A_5	(+1)	(+1)	(-1)	(+1)	(+1)	(-1)	(-1)

Всеки от играчите е разполагал първоначално с капитал от 100 \$, като при $t = 0, 2, 4, 6$ залозите са от по 24 \$, а в другите кръгове – от по 12 \$. Да се намери движението на капитала по кръгове за всеки от играчите.

2. Нека цената на една акция при затваряне на борсата понеделник да е 1 лв. Известно е, че вторник продават 500 души, а купуват 600, сряда – 600 продават, купуват – 700, четвъртък – 700 продават, купуват 900, петък – продават 900, купуват 750. Каква ще е цената на тази акция при затваряне на борсата петък.

13. Модел на катастрофите на фондовите борси

Един такъв проблем, срещащ се при изучаването на адаптивните системи е свързан с много бързото и рязко изменение на състоянието на тези системи. В резултат на такова изменение, наричащо се *катастрофа*, системата преминава към състояние на съответствие с околната среда. На практика обаче, катастрофите носят огромни разрушения и неизчислими бедствия. Затова е много важно да се разберат техните причини и да се научим своевременно да ги предсказваме. Пер Бак е разработил цялостна теория на такива явления и я е нарекъл **теория на «самоорганизираната критичност»** (Self-Organized Criticality). Той предполага, че катастрофите в сложните системи се обуславят не толкова от външни причини, колкото от това, че малки събития вътре в системата се обединяват в нещо като верижна реакция. За илюстрация на подобно явление Бак обикновено използва метафората на купчина пясък, която се образува чрез бавно насипване на пясъка отгоре. Очевидно е, че от време на време възникват ситуации, при които насипването дори само на една песъчинка може да предизвика лавина. След това купчината уляга и процесът продължава отново. Метафората на купчината пясък ни позволява да разберем много природни и социални системи, при които виждаме една и съща динамика: тези системи еволюират до един критичен предел, след това стремително се разрушават, за да се самоорганизируют отново. В работата (Per Bak, M. Paczuski, M. Shubik, *Price Variations in a Stock Market with Many Agents*, 1996), която е една от базовата за иконофизиката, авторите са приложили теорията на самоорганизираната критичност върху фондовата борса. Те са построили модел, в който всички действащи на борсата агенти са разделени на рационални инвеститори (агенти, които купуват и продават акции изхождайки от разликата между котировката на акциите и «справедливата» цена) и шумови трейдъри (агенти, които следят тренда, за да извлекат печалба благодарение на краткосрочните изменения на пазара). В по-голямата част от времето броят на първите и вторите е балансиран. Обаче, когато цената на акциите започва да расте, се увеличава броят на рационалните инвеститори, желаещи да продадат акциите си и да излязат от пазара. На тяхно място се появяват все повече шумови трейдъри,

привлечени от растящите цени. По такъв начин възниква фазов преход, в резултат на който рязко нараства броя на шумовите трейдъри. Това води до рязко покачване на цените, образуването на «мехурчета» и последващ срив. Следва да се отбележи, че теорията на самоорганизираната критичност дава възможност само за разбирането на качествените аспекти от възникването на катастрофите. Тя обаче не позволява да се проследи възникването и развитието на всяка отделна катастрофа.

Този проблем, в случая за фондовия пазар е решен отчасти от **Дидие Сорнет**. Той е показал, че нелинейното взаимодействие между рационалните инвеститори и шумовите трейдъри може да доведе до появата на критична точка t_c върху времевата ос, в която вероятността от рязък срив да е максимална. В околност на тази точка ценовият ред $p(t)$ има вида:

$$p(t) = p_0 + a(t - t_c)^\gamma [1 + b \cos(\omega \ln(t - t_c) + c)],$$

където $p_0, a, b, c, \gamma, \omega$ – константи.

От горната формула може да се види (след известни преобразования), че при приближаване към момента t_c функцията $p(t)$ извършва все по-бързи колебания, периодите на които клонят към нула. С други думи, ако t_0, t_1, t_2, \dots са моментите от времето, при които функцията $p(t)$ достига локалните си максимуми, то

$$t_1 - t_0 > t_2 - t_1 > \dots \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_c$$

По такъв начин, появата на такива осцилации на функцията $p(t)$ може да се разглежда като предвестник за катастрофа. Можем да се убедим, че отношението между два последователни периода на тази осцилация е постоянно:

$$\frac{t_2 - t_1}{t_1 - t_0} = \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1} = \dots = \frac{t_{n+2} - t_{n+1}}{t_{n+1} - t_n} = \dots = \text{const}$$

Тогава, изхождайки от положението на три последователни локални максимума t_n, t_{n+1}, t_{n+2} можем да оценим значението на t_c . И наистина, съгласно казаното по горе, интервалите $t_1 - t_0, t_2 - t_1, t_3 - t_2, \dots, t_{n+1} - t_n, t_{n+2} - t_{n+1}, \dots$ образуват намаляваща (и сходяща) геометрична прогресия. Ако приемем, че нейният първи член е $t_{n+1} - t_n$, то сумата на тази прогресия ще бъде

$$S = \frac{t_{n+1} - t_n}{1 - q}, \quad \text{където} \quad q = \frac{t_{n+2} - t_{n+1}}{t_{n+1} - t_n}$$

Така получаваме

$$S = \frac{t_{n+1} - t_n}{1 - \frac{t_{n+2} - t_{n+1}}{t_{n+1} - t_n}} = \frac{(t_{n+1} - t_n)^2}{2t_{n+1} - t_n - t_{n+2}}$$

Тогава, тъй като

$$\begin{aligned} t_c &= \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [t_n + (t_{n+1} - t_n) + (t_{n+2} - t_{n+1}) + \dots] = t_n + S \\ &= t_n + \frac{(t_{n+1} - t_n)^2}{2t_{n+1} - t_n - t_{n+2}} = \frac{t_{n+1}^2 - t_n t_{n+2}}{2t_{n+1} - t_n - t_{n+2}} \end{aligned}$$

Пример. Известно е, че на датите 15.01., 02.02. и 14.02. са получени последователни локални максимуми на цените на акциите. Да се прогнозира датата, при която се очаква пазарен срив на фондовата борса.

Решение. Спокойно можем да приемем, че t_n (съответстващо на първата дата на локален максимум) е равно на нула. Тогава получаваме $t_{n+1} = 18$ и $t_{n+2} = 30$. Като заместим в горната формула получаваме

$$t_c = \frac{18^2}{2 \cdot 18 - 30} = \frac{324}{6} = 54,$$

съгласно което, пазарния срив (катастрофата) на фондовата борса се очаква на 10.03. (ако годината не е високосна).

Използвайки тази методика, Сорнет е изследвал всички основни крахове, известни от историята на финансовите пазари. В резултат се изяснило, че поведението на цените преди краха във всички случаи достатъчно добре може да се приближи чрез формулата. Обаче, при опита тя да се използва за предсказване на сринове в режим на реално време се изяснило, че формулата работи в повечето, но не и във всички случаи. Както се оказва, окончателното решение на проблема за предсказване на катастрофите е много сложна задача, която вероятно никога няма да бъде напълно разрешена.

Задача. Известно е, че пазарният индекс на фондовата борса е достигнал последователни локални максимуми на датите 20.01., 04.02. и 16.02. Като използвате методиката на Сорнет, прогнозирайте датата, на която се очаква пазарен срив на фондовата борса. (Предполага се, че всички дни са работни)

Любопитни факти

През 2006 г в авторитетното физическо списание *Physical Review Letters* се появява статия на японски учени-иконофизизи, които сравняват динамиката на фондовите борси с фазовия преход в кондензирана система. Авторите на статията показват, че „лавините“ на фондовите пазари се подчиняват на същите закони – до определен момент ситуацията е спокойна, но след като индексите достигнат някаква критична стойност, те започват да се сриват (ситуация на геп).

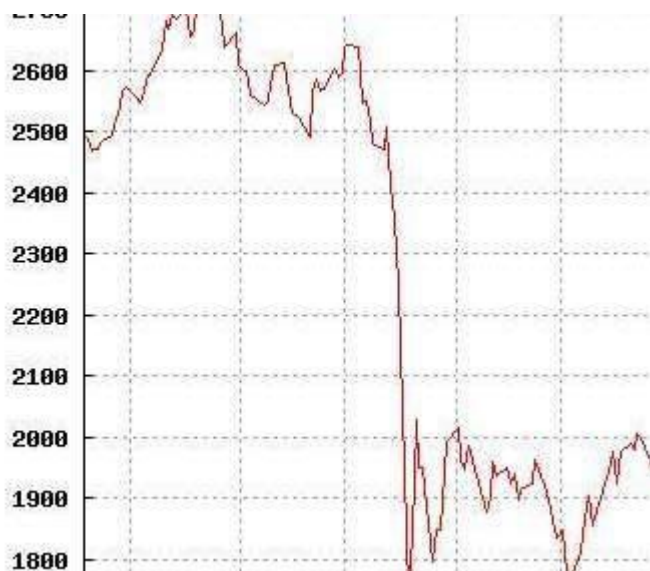


Рис. 8. Динамика на фондовите борси

При това, отбелязва се в същата статия, поведението на борсовите индекси близо до критичната точка много напомня за кардиограма или за сеизмографска линия. Авторите считат, че за кратко време пазарът изпитва колебания, които се подчиняват на статистическия закон на брауновото блуждаене: вероятността за дадено отклонение е толкова по-малка, колкото по-голямо е самото отклонение. Такава ситуация съответства на закона за нормалното (гаусово)

разпределение, получаващо се при сумирането на достатъчно много независими случайни величини от една и съща природа. Да припомним, че неравността на графиката или усреднената амплитуда на колебанията се нарича волатилност – величина, свидетелстваща за стабилността на един или друг процес. Обаче, както са изяснили математиците, в близост до критичната точка, гаусовия закон не се изпълнява: колебанията с различна големина стават равновероятни и волатилността престава да бъде съдържателна характеристика. Аналогично е положението при фазовия преход в магнитните материали, когато при определена температура магнитните моменти на отделните атоми започват да променят ориентацията си спонтанно.

Оперирайки със същия апарат, както и японските учени, руският математик Виктор Маслов предсказва икономическата криза от 2008-2009 г шест месеца преди тя да започне. По неговите думи, той разбрал, че американската икономика е достигнала такова равнище, след което неминуемо следва криза. Това състояние той описва нагледно чрез романите на Михаил Булгаков. Литературен герой от „Майсторът и Маргарита“ разпръсква във вриетето парични купюри, например един милион. С помощта на уравненията на математическата физика, може да се пресметне колко трябва да бъдат зрителите във вриетето, така че никой от тях да не остане без купюр – окло хиляда човека, т.е. корен квадратен от милион. Ако в залата присъстват десет хиляди души, то девет хиляди от тях ще останат без купюри. По-рано, също с помощта на математически методи, Маслов успява да предскаже разпада на Съветския Съюз и дефолта (изпадане в състояние на неплатежоспособност) през 1998 г.

Група иконофизичи от Швейцария и Китай през 2009 г са предсказали срива на китайския фондов индекс Shanghai Composite. Изследователите сравняват падането на борсовия индекс с аплодисментите след концерт. Отначало ръкоплясканията са инцидентни, но в даден момент, без видима причина хората започват да аплодират в синхронизиран ритъм. По мнението на авторите, индексите също започват да падат безпорядъчно, но в определен момент се получава срив. В основата на това развитие на индексите стои сложна система от обратни връзки. В своята статия авторите са извели формулата за динамиката на Shanghai Composite. Съгласно наблюденията, тя се подчинява на функция, растяща по-бързо от експонентата. Това е сигурен признак за „балон“, който трябва да се „пукне“, като за това не е задължително да има външна причина (аналогията с аплодисментите). Авторите предсказват, че това ще се случи през периода от 17 до 27 юли.

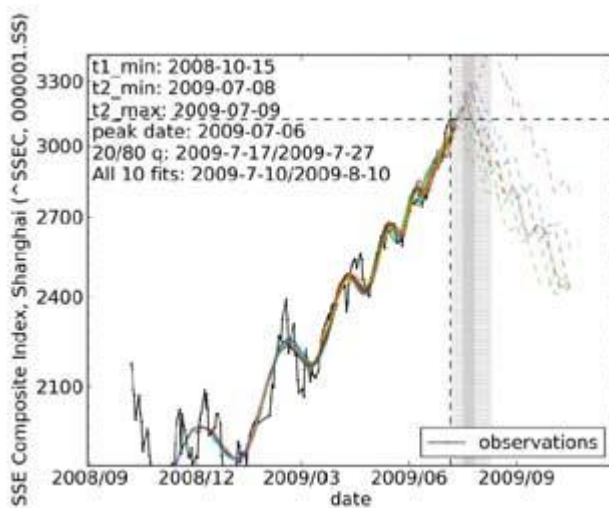


Рис. 9. Слив на китайския фондов индекс Shanghai Composite

На практика Shanghai Composite се сривнал на 4 август. Все още не може да се определи, дали с това се е изпълнило предсказанието на иконофизичите или сривът е бил случаен. Освен това, не е изключено сривът да е бил провокиран от работата на учените – фондовите пазари са много чувствителни към прогнози, както позитивни, така и негативни (в скоро време може да се очаква, че тази тяхна особеност също ще бъде формализирана).

Математикът от Ню-Йорк Реджиналд Смит (Redginald Smith) счита, че развитието на последната световна круза много наподобява развитието на епидемия на инфекциозно заболяване. В своя статия, публикувана в списанието *Physical Society of Korea*, ученият посочва огнището на заболяването и проследява динамиката на разпространението му в целия свят.

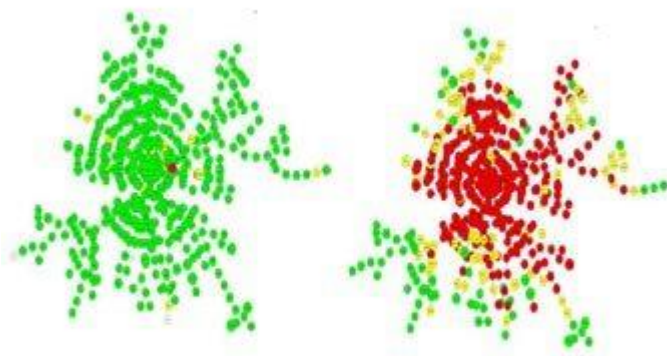


Рис. 10. Огнища на кризи

на кризата, тя дава добър модел на нейното разпространение, още повече, че математическите модели на епидемиите са сравнително добре разработени. Ученият прави уговорката, че термина „епидемия“ не трябва да се възприема буквално: липсва „вирус на кризата“. Последователните сривове на пазарите, по мнението на Смит, може да е провокирано от разпространението на новините за това. Освен това, пазари със сходна структура на капиталите имат еднаква уязвимост към кризата. Забелязано е и, че спадът на един от пазарите е много по-голям тригер за другите пазари, отколкото ръстът.

Съгласно изводите на учения, кризата започва на пазара на недвижимите имоти в Калифорния и Флорида през началото на 2007 г. След това започва пропадането на акции на американски компании на фондовата борса. Слрдващите пострадали са американските банки. Впоследствие кризата излиза вън от границите на Съединените Щати.

Макар и съставената от Смит схема да не обяснява причините

II. ФРАКТАЛНИ СТРУКТУРИ



14. Какво представляват фракталите

Макар че понятието „фрактал“ да се появява сравнително отскоро, първите идеи на фракталната геометрия, са възникнали още през 19 век.

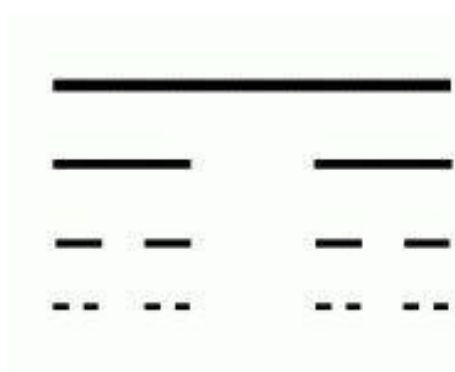


Рис. 11. Прах на Кантор

на 0.

През 1883г. **Георг Кантор**, един от основателите на теорията на множествата, описва как с помощта на проста, повтаряща се процедура, превръща линия в несвързани точки - фрактал, наречен **прах на Кантор** или **гребен на Кантор**. Образува се като последователно се премахва средната третина на една отсечка. Повторението на тази операция до безкрайност води до образуването на т.н. канторови пращинки, сумата от дължините на които е равна

Може да се каже, че първия фрактал е описан в „Мозайки, формирани от петоъгълници“ от „Ръководство на живописеца“ (1525г) от Албрехт Дюрер. Това е т.н. петоъгълник на **Албрехт Дюрер** – пет петоъгълници се подреждат около идентичен петоъгълник. Тази група от шест петоъгълника има формата на петоъгълник, на който са отстранени пет триъгълни клинове. Така, с последователно изрязване на клинове се образува всяка следваща итерация.

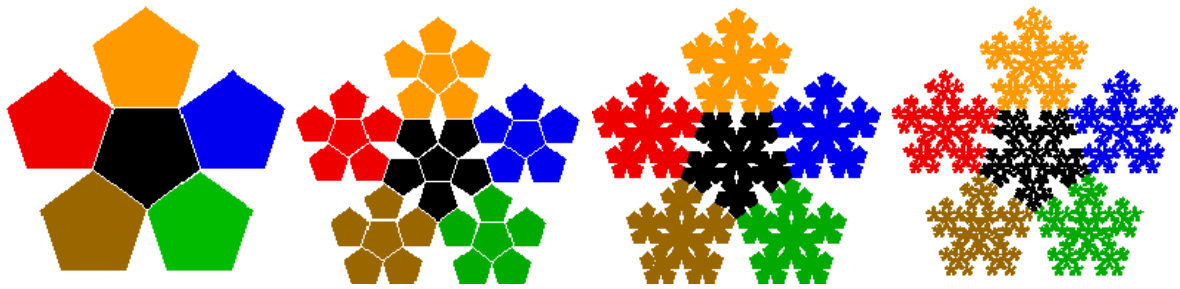


Рис. 12. Петогълници на Дюрер – стъпки 0, 1, 2 и 3

Изучаването на фракталите в края на XIX и XX век е било по-скоро епизодично, а не систематично занимание, защото тогавашните математици са предпочитали обекти, които се описват с класическите методи и теории. Но дори и да се захванат с тази тема, те не са могли да съставят изображения на този математически модел, защото са били необходими огромно количество изчисления, които не било възможно да се извършат ръчно.

С възхода на компютърната техника става възможно да се видят фракталите в целият им блясък и многообразие. Първият, който използва компютър за тази цел е математикът от компанията на IBM **Беноа Б. Манделброт** (Benoit B. Mandelbrot).



Манделброт е роден във Варшава през 1924 г., но семейството му емигрира в Париж, където 12-годишният Манделброт попада под влиянието на чичо си Шолем Манделбройт, известен парижки математик. Малкият Беноа нямал особен интерес към училище, но у него се разкрил необичаен математически талант, който му дава възможност веднага след края на войната, за да стане студент в Ecole Polytechnique в Париж. Беноа притежавал отлично пространствено въображение. Дори алгебрични проблеми той решавал геометрично. След дипломирането си в парижкия университет, Манделброт отива в САЩ, където завършва и Калифорнийския технологичен институт.

Връща се във Франция, където получава докторска степен в Университета на Париж през 1952. През 1955 г. се премества в Женева.

През 1958 г. Манделброт се установява в САЩ, където започва да работи в изследователския център на IBM в Йорктаун, защото в IBM по това време са се занимавали с интересни за Беноа Манделброт области на математиката.

Изследвайки на пръв поглед случайни колебания в цените, Манделброт открил, че те следват скрит математически ред във времето, който не се описва със стандартни криви.

Беноа Манделброт проучвал цените на памука в продължение на дълъг период от време (повече от сто години). Колебанията на цените изглеждали произволни, но Манделброт открил симетрия между дългосрочните и краткосрочните колебания в цените. Така Беноа Манделброт полага основите на своя рекурсивен (фрактален) метод.

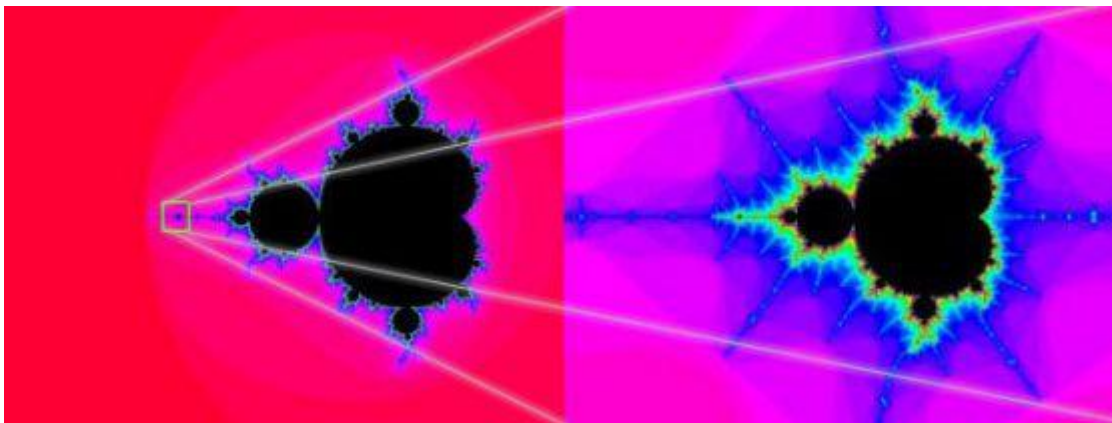
През 1975 г. Манделброт въвежда термина „фрактал“ (от лат. Fractus, което означава "счупено") за описване на структури и публикува за първи път идеите си изследването, „Фракталите: Форма, вероятност и размерност“ (Fractals: Form, Chance and Dimension). Математикът Стивън Волфрам по-късно го нарича „бащата на фракталите“.

През 1977г. Беноа Манделброт публикува “Фракталната геометрия на природата” („The Fractal Geometry of Nature“).

Манделброт използва научните резултати на други учени, работещи в периода 1875-1925 г. в тази област (Поанкаре, Фату, Жюлиа, Кантор, Хаусдорф, Пеано).

Манделброт обединява техните работи в единна система. По неговите думи: „... между неконтролируемия хаос и строгия ред на Евклид вече има нова зона – тази на фракталите”.

Едно от определенията за фрактал е геометрична фигура, състояща се от части и всяка от които представлява по-малко, поне приблизително копие на цялото. Фракталът е такъв обект, за който няма значение под какъв мащаб го разгледаме - структурата му остава същата.



В основата на това явление е много проста идея: безкрайната красота и разнообразие на множество форми може да бъдат получени от сравнително прост модел само с две операции - **копиране** и **мащабиране**.

Тъй като няма строга математическа дефиниция за фрактали, обикновено под „фрактал“ се разбира геометричен модел, който има едно или повече от едно от следните свойства:

- има сложна структура при каквото и да е увеличение;
- е точно или приблизително самоподобен;
- има дробна (фрактална) размерност, която е по-голяма от топологичната;
- може да се построи от **прост итерационен и рекурсивен цикъл**. Този начин на създаване определя свойствата на фракталите **самоподобие** и **дробна размерност**.

15. Видове фрактали

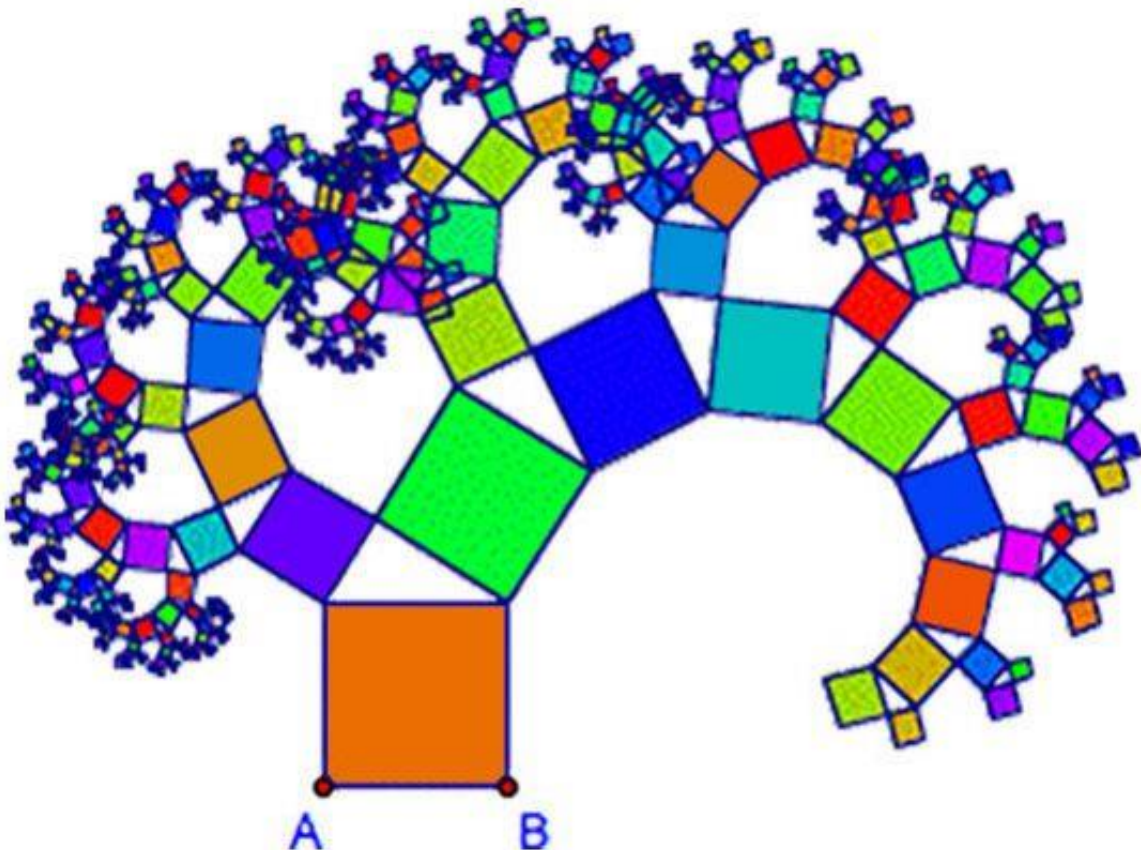


Рис. 13. Фракталът "Дървото на Питагор"

Геометрични фрактали. Наричат ги още линейни или класически фрактали, защото математиците са стигнали първо до тях. Тези фрактали са лесни за построяване и буквално всеки може да начертае такъв фрактал върху кариран лист. Тези фрактали се образуват с **итерации**. *Итерация в програмирането е такава организация на обработката на данни, при която действието се повтаря няколко пъти, без това да доведе до положение, при което функцията да извика сама себе си (това вече е рекурсия).*

В двумерния случай геометричните фрактали се получават с помощта на някаква начупена линия или плоска геометрична фигура (повърхност в тримерния случай), наречена **основа (генератор)**. За всяка стъпка от алгоритъма (т.е. за всяка итерация) всяка от отсечките, съставлящи начупената линия, се заменя с генератора, в съответния мащаб. В резултат на безкрайни повторения (итерации) на тази процедура, се получава геометричният фрактал.

Като пример можем да разгледаме фрактала „снежинката на Кох“.

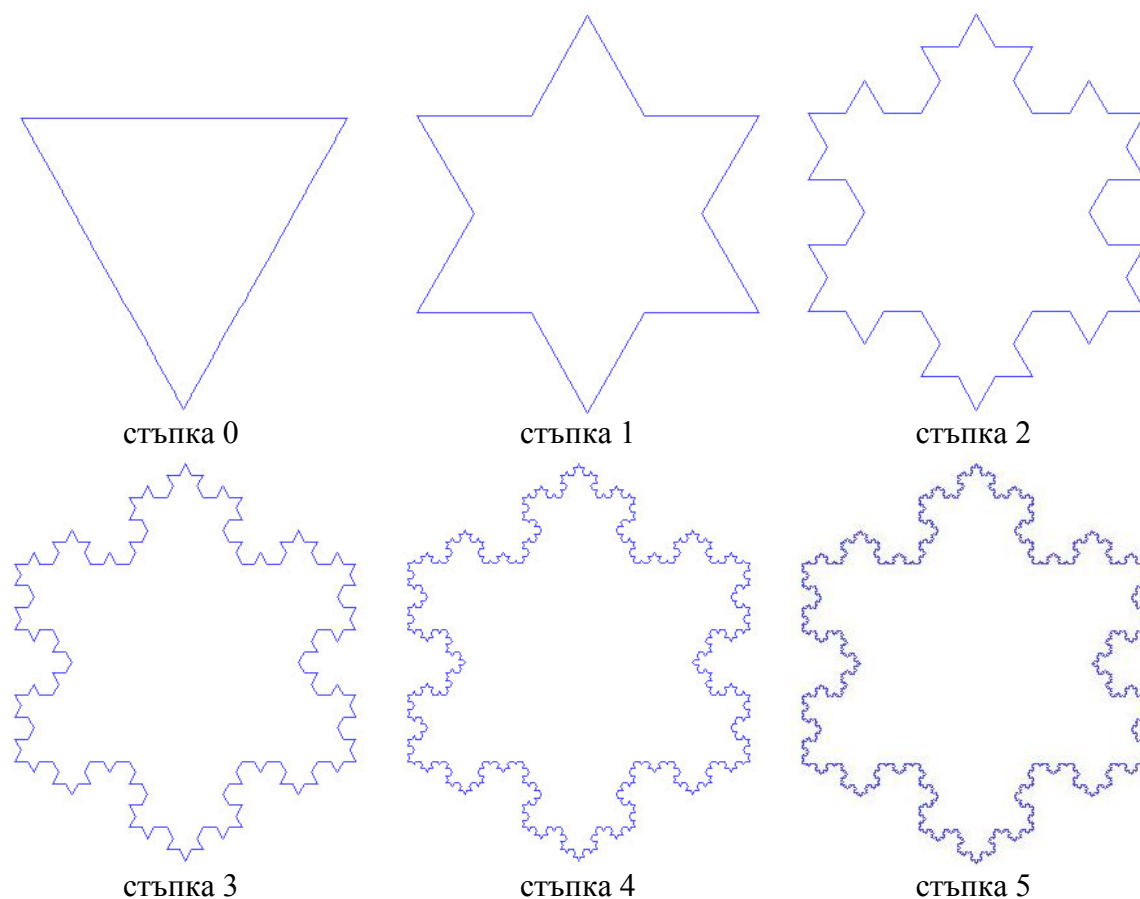


Рис. 14. Итеративно построяване на фрактала „снежинка на Кох“

При стъпка 0 (рис. 14) е даден обърнат правилен триъгълник. При стъпка 1 всяка от страните му се разделя на три равни части, като средната се премахва. Премахнатата отсечка се взема за основа на правилен триъгълник, чиито две други страни се добавят. Итеративният процес продължава по същия начин със все повече на брой и все по-малки по мащаб правилни триъгълници.

Друг начин за получаване на геометрични фрактали е **рекурсията** (заместването). При нея на всяка следваща стъпка частите на фигурата се заместват (по един и същ начин) с други фигури с все по-малки мащаби. Един прекрасен пример за такъв геометричен фрактал е **драконът от книгата „Юрски парк“ на Майкъл Крайтън, (Хартер-Хейтуей)**. Представяме си равнобедрен правоъгълен триъгълник. При стъпка 0 вземаме хипотенузата му, която при стъпка 1 замества (тя отпада) с двата катета. На всяка следваща стъпка всяка от отсечките се замества по същия начин.

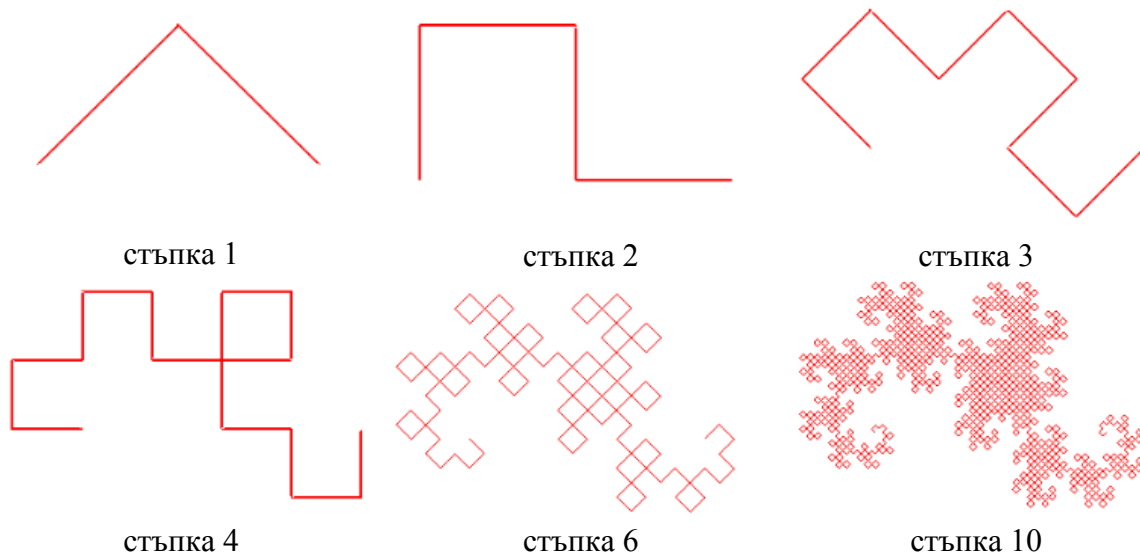


Рис. 15. Фракталът Хартер-Хейтуей

Забележително е, че при итерации (рекурсии) от различен вид при неограниченото им прилагане може да се достигне до един и същ резултат. Триъгълникът на Серпински се получава по итеративен път – при стъпка 0 се взема равностранен триъгълник, при стъпка 1 от него се премахва два пъти по-малък равностранен триъгълник с върхове – средите на страните на първия тригълник. При всяка следваща итеация от всеки равностранен триъгълник от предишната стъпка се премахва съответния два пъти по-макък равностранен триъгълник.

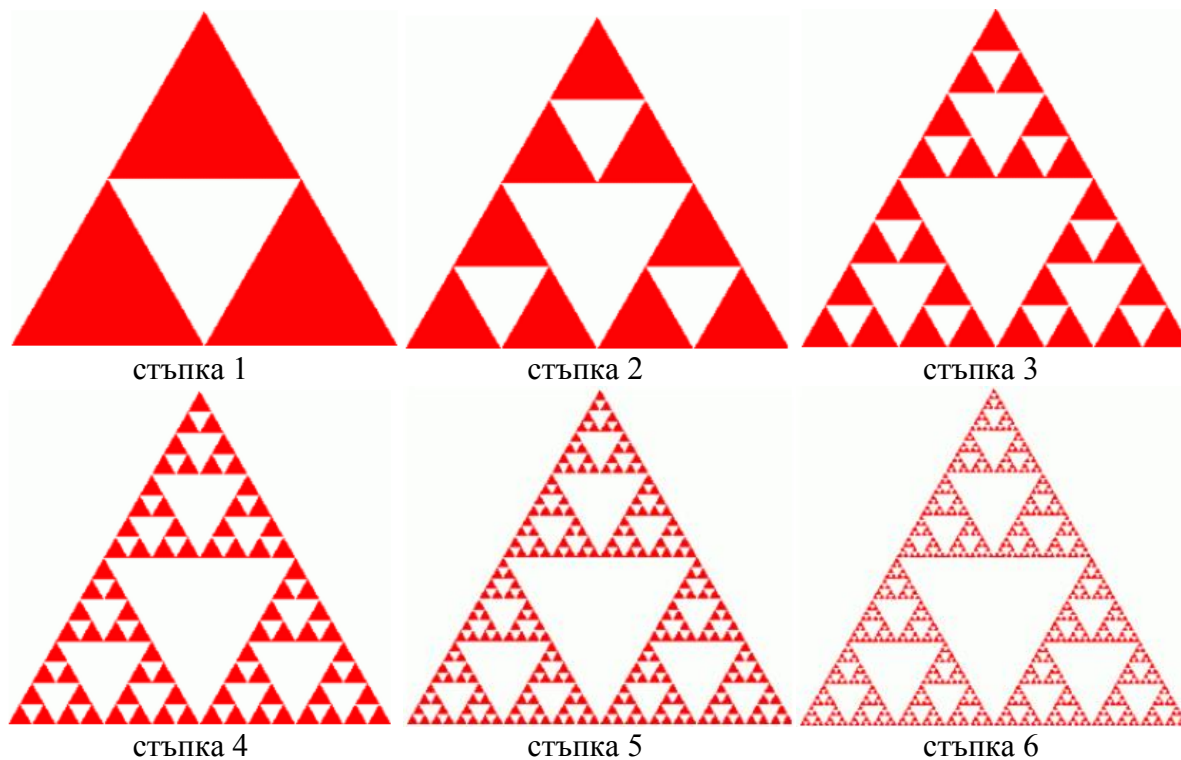


Рис. 16. Фрактал „триъгълник на Серпински“

Кривата на триъгълника на Серпински (**arrowhead curves**) се получава по рекурсивен път. Представяме си равнобедрен трапец с голяма основа с два пъти по-голяма дължина от малката основа, която е равна на бедрата. При стъпка 0 вземаме голямата основа, която при стъпка 1 замества с останалите три страни на трапеца. Тази рекурсия се повтаря неограничено. На рис. 17 са показани някои от стъпките за получаване на този фрактал. За отбелязване е, че резултатът от стъпка 8 съвпада резултата от стъпка 6 за триъгълника на Серпински.

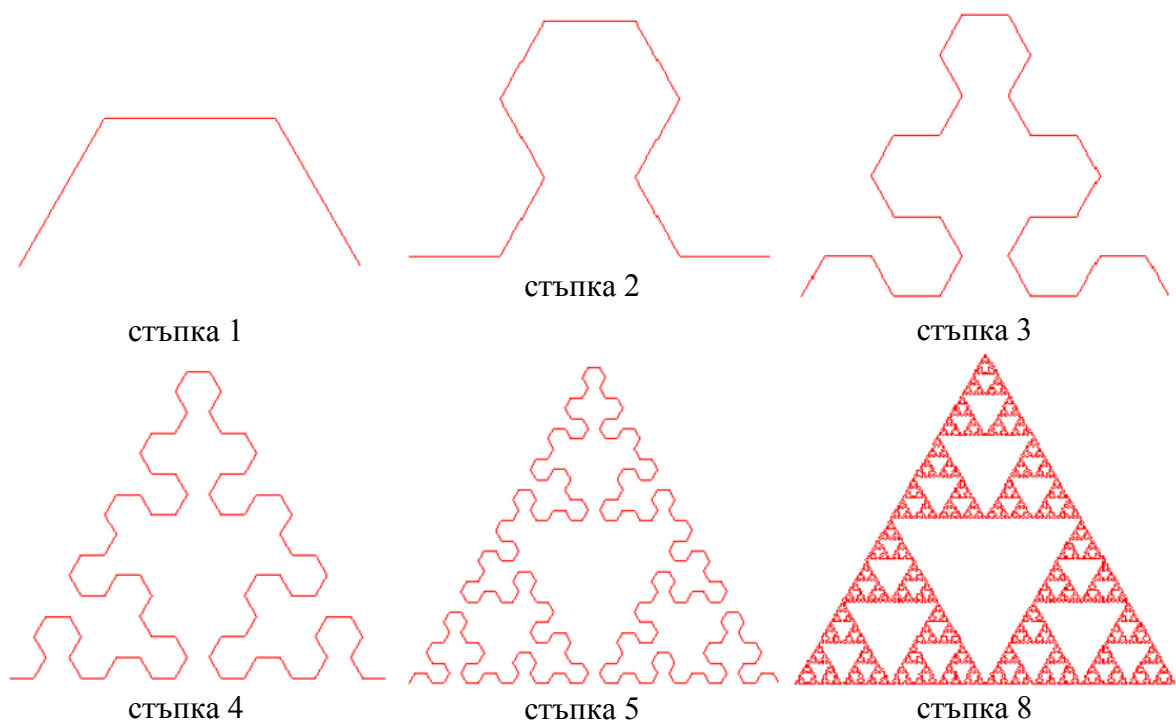


Рис. 17. Фрактал крива на триъгълника на Серпински

За отбелязване е, че всички описани по-горе фрактали се получават на базата на линия или на равнинна фигура. Това са така наречените **плоски фрактали**. Наред с това, съществуват и **пространствени фрактали**. Пример за такива е тетраедъра на Серпински. На стъпка 0 се взема правилен тетраедър. При стъпка 1 от него се премахва всичко, освен четири тетраедъра, всеки от които има линейни размери равни на половината от линейния размер на първоначалния тетраедър. След това процесът продължава итеративно (рис. 18).

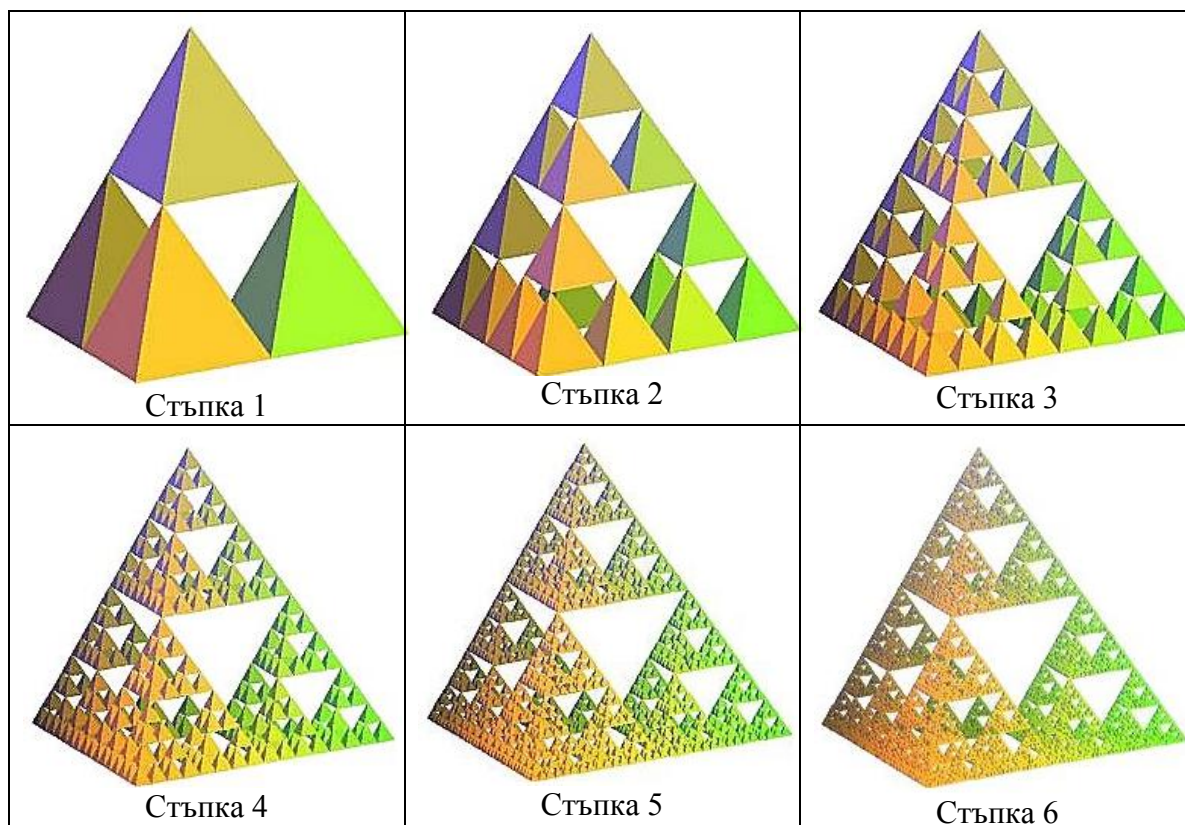


Рис. 18. Тетраедър на Серпински

Алгебрични фрактали. Това е другата основна група фрактали. Наричат се алгебрични, защото те са изградени на базата на алгебрични формули. За геометричните фрактали не са нужни формули или уравнения, затова всеки може да начертае триъгълника на Серпински до 3 или 4 итерация без никакви затруднения, но да се направи това, например, с множеството на Жулиа е толкова невъзможно колкото да се измери дължината на бреговата линия на Англия.

Алгебричните фрактали изглеждат безкрайно сложни в сравнение с геометричните, но могат да бъдат генерирани с много проста формула. Има няколко начина за получаване на алгебрични фрактали.

Първият метод е на базата на многократно итерационно пресмятане на функцията $z_{n+1} = f(z_n)$ където z_n и z_{n+1} са **комплексни числа**, а f е някаква функция. Изчисляването на тази функция продължава докато не бъдат изпълнени определени условия и когато това условие се изпълни, на екрана се появява точка. Функцията може да има различно поведение: за различни точки в комплексната равнина.

Основни примери за алгебрични фрактали, получени чрез комплекснозначни функции са **множествата на Жюлиа и множеството на Манделброт**. На рис. 9 е дадена компютърна графична интерпретация на множество на Жюлиа.

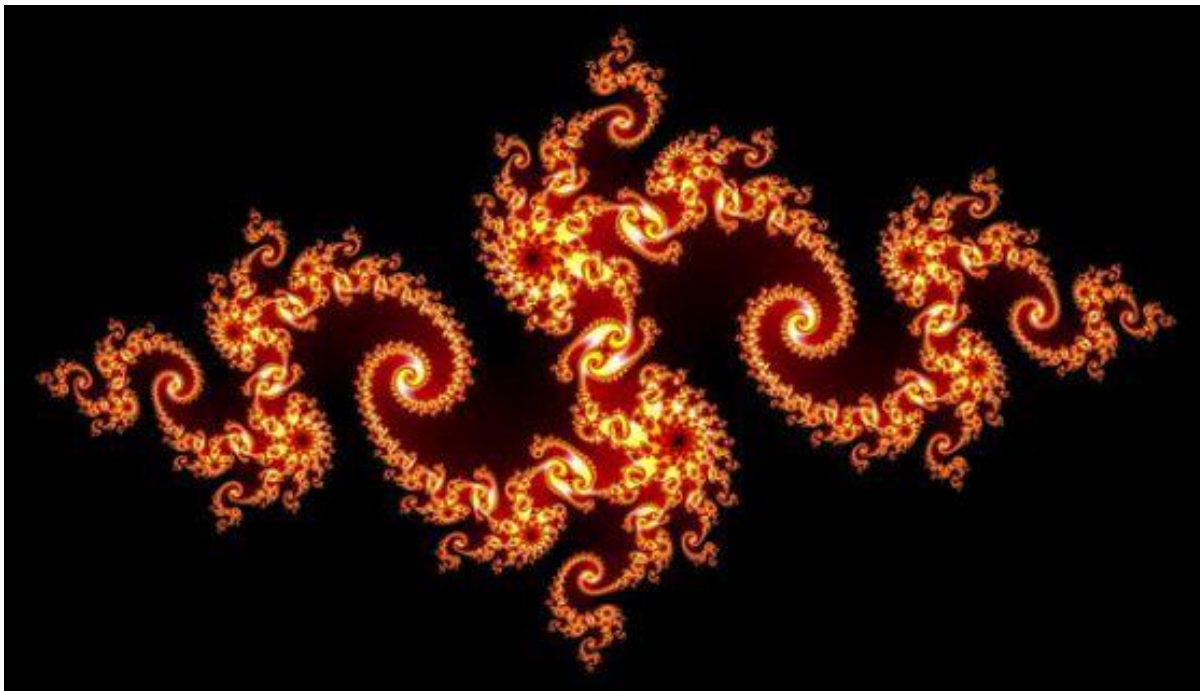


Рис. 19. Фрактално множество на Жюлиа - компютърна графична интерпретация

Геометричните и алгебричните фрактали са двата класа на **детерминирани** (определени) **фрактали**.

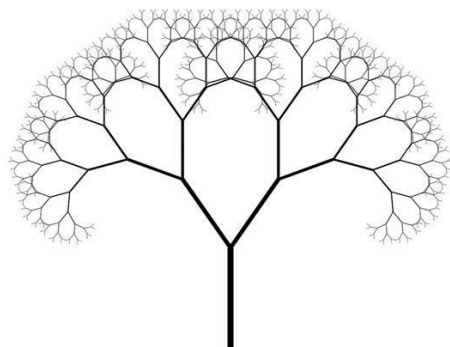
Стохастични (случайни) фрактали. Природните явления не протичат в стерилна, изолирана среда, а в комплексни условия, съчетание от множество преплетени случайни влияния от външни фактори, затова в природата фракталите не изглеждат така изчистени както илюстрациите досега. За моделирането им се използват стохастични (случайни) фрактали.

Стохастичен фрактал е траекторията на Брауново движение. Такива фрактали са рандомизирани, т.е. при построяването им, за всяка рекурсивна стъпка да се въвеждат случайни величини.

При детерминирани фрактали – алгебрични и геометрични е спазет принципа на точното самоподобие, а при стохастичните се говори за приблизително самоподобие.

Фракталните структури са най-видими при растенията. По същество, самият им растеж е подчинен на итерации. Примерите за фрактали в растителния свят са многобройни, някои очевидни, други не толкова. Самата цикличност на растежа им обуславя самоподобие и оттам фракталната структура. Друг фактор е стремежът на по същество линейни сегменти като клоните да запълват площ или обем заради цели като повече светлина, въздух, вода, хранителни вещества (при коре-

ните), жизнено пространство. Тази тенденция на запълване на по-висши измерения е подобна на дробната размерност на фракталите и оформя подобни структури.



Повечето растения имат някаква форма на разклонение - основното стъбло се разделя на няколко клона, всеки от тях се разделя на по-малки клонки и това продължава до най-малките клончета.

Вероятно сте обърнали внимание, че клонче от дървото изглежда подобно на цялото дърво и листче от папрат изглежда почти идентично на цялото растение.

Едни от най-популярните фрактали са **папратите**, получени от британския математик **Майкъл Барнсли** (Michael Barnsley) през 1988г. Те се генерират в темата Системи Итеративни Функции (Iterated Functions System - IFS). Могат да се разглеждат като вариант на дървовидните фрактали.



Рис. 20. Естествена папрат и папрат на Барнсли, получена чрез Системи Итеративни Функции (IFS).

16. Фрактална размерност

Съгласно едно от определенията, дадено от Бенуа Манделброт «фрактал се нарича множество, чиято хаусдорфова размерност е строго по-голяма от топологичната му размерност». За да разберем това определение, ще напомним за двата принципно различни подхода към понятието размерност. От гледна точка на второто, размерността на геометричните фигури е минималния брой координати, необходим за нейното описание като множество от точки със съхраняване на структурата на естествена близост: например за описването на линията е достатъчна една координата, за описване на повърхнина – две, а за описване на тяло – три координати. Тъй като тази размерност е топологичен инвариант (т.е. тя се съхранява при взаимно еднозначно и непрекъснато пвеобразуване на пространството), то тя е логично да се нарече *топологична* размерност, означаваме я с D_T . Този подход е отразен в работите на Пуанкаре, Брауер, Менгер, Урисон, Лебег и др. За негов

върх се смята хомологичната теория на размерността на Александров. От гледна точка на първия подход, размерността е число D , изразяващо връзката между естествената мярка на геометричната фигура (например, дължина, лице, обем) с величината (в дадения случай дължина), положена в основата на изходната метрична система. Ако метричният еталон е такава величина, то ако я увеличим (намалим) b пъти, то указаната мярка се намаля (увеличава) b^D пъти. Тази размерност се нарича **метрична**. Източник на това определение е следния израз за обичайната мярка M (дължина, лице или обем) на произволна геометрична линия, повърхнина или тяло:

$$M = \lim_{\delta \rightarrow 0} [N(\delta)\delta^D], \quad D=1, 2, 3, \quad (20)$$

където $N(\delta)$ е броя на симплексите (отсечки, клетки или кубове) с геометричен фактор (линеен размер) δ , определящи апроксимацията на изходното множество (по този начин в училищната геометрия се намира дължината на окръжност чрез апроксимацията и с вписани и описани правилни многоъгълници). Въз основа на горния израз, Хаусдорф е предложил през 1919 г. своето знаменито определение за размерност в случай на компактно множество в произволно метрично пространство [61]:

$$D = \lim_{\delta \rightarrow 0} [\ln N(\delta) / \ln(1/\delta)], \quad (21)$$

където $N(\delta)$ е минималния брой сфери с радиус δ , покриващи това множество. Да отбележим, че за регулярните геометрични фигури имаме $D = D_T$. За по-екзотичните множества (а именно фракталите) $D > D_T$. Следва да се отбележи, че ако изходното множество е вградено в евклидовото пространство, то в определението (21) вместо покритие от сфери може да се вземе каква да е друга негова апроксимация с прости фигури (например, клетки, кубове) с геометричен фактор δ . Тогава, заедно със сферичната размерност D се появяват нови фрактални размерности (клетъчна, вътрешна и др.), които също са гранични стойности при $\delta \rightarrow 0$. Обикновено тези фрактални размерности съвпадат помежду си, обаче скоростта на сходимост към границата може да бъде различна в различните случаи. Тъй като, на практика размерността се пресмята въз основа на краен брой покрития или други апроксимации, то правилния избор на последните има принципно значение.

Първоначалното определение (21) се е разглеждало като удобно средство за систематизация на различни «паталогични» множества от типа на функциите на Вайерщрас, кривите на Пеано и техните многобройни разновидности, които възникват по естествен начин при обсъждане основите на математическия анализ.

Тъй като такива множества, въпреки изключителната си нерегулярност, обикновено са инвариантни относно преобразования на мащаба, те притежават хаусдорфова размерност. При това, като правило тази размерност е дробна. По-нататък ще разгледаме прости примери за такива множества, за да можем на базата на тях да поясним идеята, въз основа на която ще се построи фракталния анализ на динамичните финансови редове.

Първият пример – това е кривата на Кох. Тя се построява с помощта на итеративна (повтаряща се) процедура. При нулевата стъпка се взема единичната отсечка (рис. 13). При първата стъпка тази отсечка се разделя на три равни части. След това се построява равноностранен триъгълник с основа средната третинка и тя се премахва. След това на всяка следваща стъпка тази процедура се повтаря с всички налични отсечки. Множеството, което се получава при тази итеративна процедура се нарича *крива на Кох*. Трябва да се каже, че всички моделни фрактали се построяват като граница на редица от някакви базови комплекси. Такива базови комплекси Манделброт нарича *предфрактали*. За пресмятането на хаусдорфова размерност на кривата на Кох в качество на апроксимираща редица е удобно да вземем нейното представяне на n -тата стъпка на итерацията (предфрактал от n -то поколение). В този случай множеството може да се апроксимира от 4^n отсечки, намалени, спрямо първата 3^n пъти. Макар такава апроксимация да не се явява покритие, за дадения обект тя е най-естествената. Ако сега вземем $\delta = (1/3)^n$, то $N(\delta) = 4^n$. Преминвайки към граничен преход при $n \rightarrow \infty$ по формулата (21), получаваме $D = \ln 4 / \ln 3$ ($\approx 1,26$). Такава размерност се нарича *вътрешна*. Не е трудно да се покаже, че в дадения случай тя съвпада с хаусдорфова размерност. Да отбележим, че ако в качеството на нулево приближение вземем не единичната отсечка а равноностранен триъгълник със страна единица, и приложим спрямо всяка от страните на триъгълника гореописаната процедура, то в резултат ще получим така наречената снежинка на Кох (рис. 14).

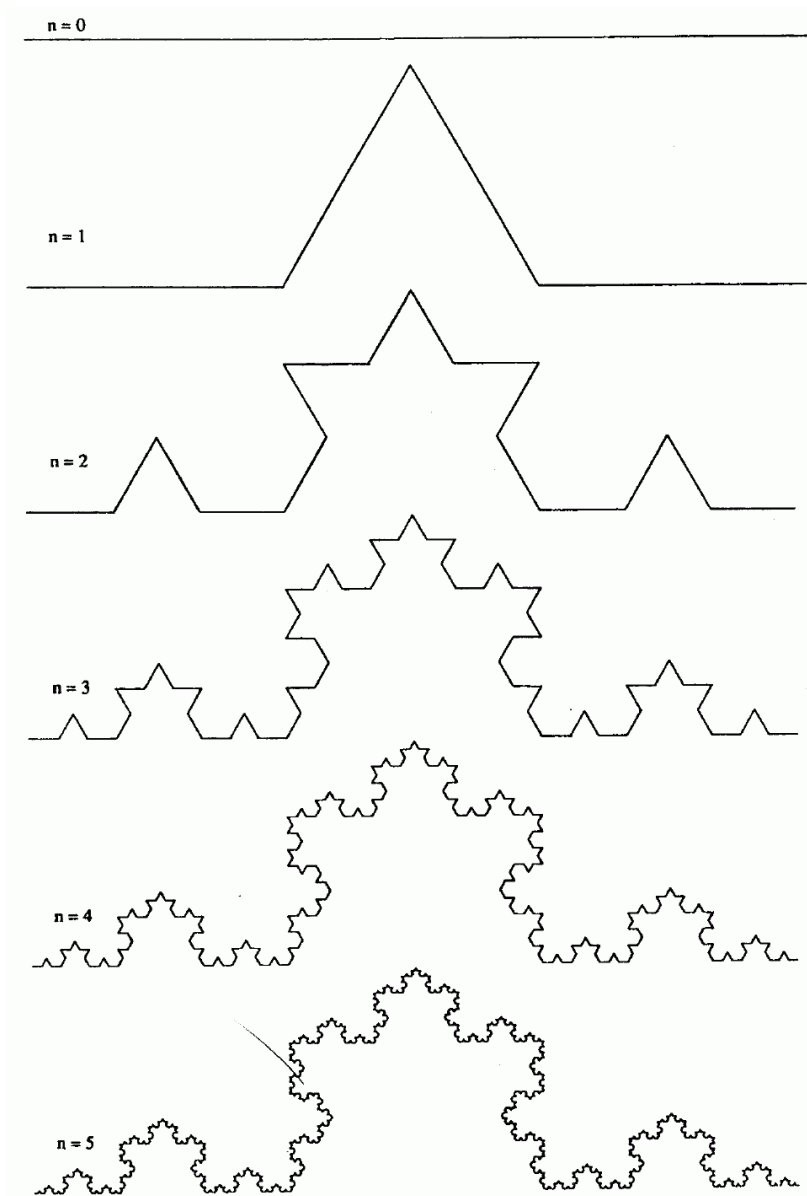


Рис. 21. Кривата на Кох – първите пет стъпки на итерацията

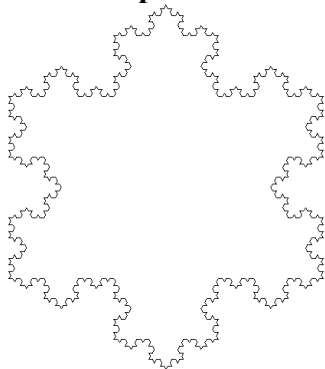


Рис. 22. Снежинката на Кох на петата стъпка на итерацията

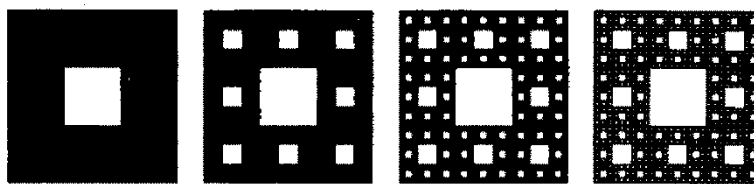


Рис. 23. Килим на Серпински – първите четири стъпки от итерацията

Втория пример – това е килима на Серпински, който се построява по следния начин. На нулевата стъпка се взема единичен квадрат. На първа – този квадрат се разделя на девет равни квадрата и се премахва средния (рис. 15). По-нататък, при всяка следваща стъпка тази процедура се повтаря за всички останали квадрати. Множеството, което се получава в качеството на граничен преход на тези процедури се нарича *килим на Серпински*. За пресмятане на фракталната размерност, в качество на n -та апроксимация пак ще вземем предфрактала от n -то поколение. В този случай, той ще бъде покрит от 8^n квадрати, при намаляване на мащаба 3^n пъти. Това означава, че при $\delta = (1/3)^n$, $N(\delta) = 8^n$. Преминавайки към граничен преход при $n \rightarrow \infty$, получаваме $D = \ln 8 / \ln 3 (\approx 1,89)$.

Да отбележим, че апроксимациите, които използвахме в тези случаи дават оптимални приближения (в някакъв смисъл) на всяка стъпка на итерацията. Именно този факт ни позволи да получим значението за D още на първата стъпка, което е невъзможно, ако използваме други апроксимации. За да поясним това по-подробно, нека за кой да е от тези два примера да построим графика, като по хоризонталната ос са разположени значенията на $\ln(1/\delta)$, а по вертикалната – значенията на $\ln N(\delta)$ (рис. 6). Тъй като в логаритмичен мащаб всички степенни функции се превръщат в линейни, то степента D се определя като тангенса на ъгъла на наклон на съответната права. Очевидно е, че при $\delta = (1/3)^n$ всички данни за указаните примери са разположени на една права. Ако за пресмятането на D в този пример се използват други апроксимации, то се получава графика, която се приближава към тази права асимптотично. При това, ако апроксимацията е избрана неудачно, то това приближаване ще много бавно. По-нататък, при фракталния анализ на динамичните финансови редове, това съображение (за необходимостта от избор на оптимална апроксимация) ще играе основна роля.

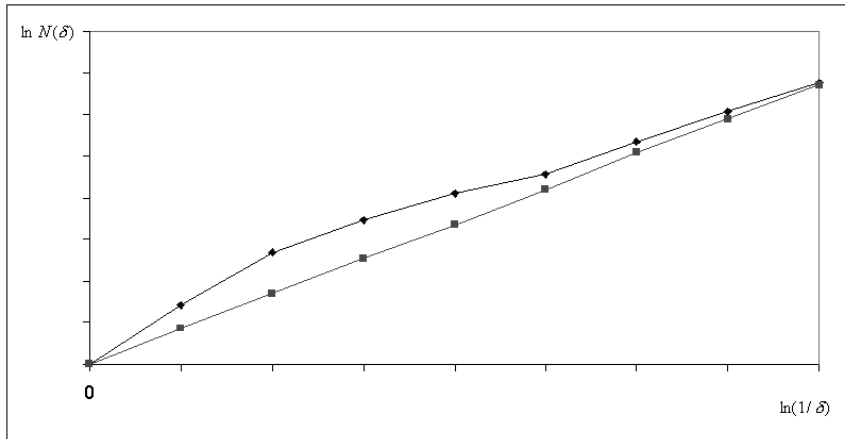


Рис. 23. Зависимост в двоен логаритмичен мащаб на броя симплекси $N(\delta)$, съставляващи апроксимацията от характерния размер на симплексите δ . Ако такива апроксимации са предфрактални, то тази зависимост е линейна. В противен случай, тази зависимост само се приближава асимптотично към линейната при $\delta \rightarrow 0$

Когато са се разглеждали такива примери, никой не се е надявал, че множества с нетривиална (дробна) хаусдорфова размерност биха имали каквото и да било отношение към природата. Сега, до голяма степен благодарение на усилията на Манделброт, ние знаем, че фракталите ни заобикалят навсякъде. Някои от фракталите се променят постоянно като движещите се облаци и разгарящия се пламък на огъня, а други, подобно на дърветата или нашата съдова система, съхраняват структурата си, придобита по пътя на еволюцията. При това, реалният диапазон на мащабите, където могат да се наблюдават фрактални структури се простира от разстоянието между молекулите в полимерите до разстоянието между струпвания от галактики във вселената. Може да се каже, че всички силни нерегулярности във вселената се стремят да добият самоподобна (фрактална) структура, която за тях е най-благоприятна от енергийна гледна точка.



Ще се опитаме да поясним общата специфика на природните фрактали върху примера на бреговата линия, толкова повече, че този пример представлява исторически интерес. Именно тук за първи път е открита интересна закономерност, която впоследствие е осмислена като фракталност. В работата на изтъкнатия английски метеоролог и картограф Ричардсън (публикувана след смъртта му през 1961 г.) [62] с помощта на редица от все по-точни карти се прави опит да бъде измерен периметърът на бреговата линия на Великобритания. Данните се нанасят на графика, където по хоризонталната и вертикална ос се нанасят съответно логаритмите на мащабния фактор на картата m и периметра $P(m)$. Резултатите са се оказали поразителни. Данните почти точно се разположили върху права линия (рис. 7). Това означава, че благодарение на «изкривяванията», които се появяват при намаляване на мащабния фактор на картата периметърът е «разходящ» (т.е. $P(m) \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow 0$), и при това по степенен закон. От тук следва, че бреговата линия притежава фрактална размерност. И наистина, тъй като мащабния фактор на картата m е право пропорционален на минималното различимо по размер δ («разрешено» за картата), то измерването на периметърът с помощта на редица от все по-точни карти може да се представи като измерване с помощта на редица от все по-точни апроксимации на бреговата линия с начупени линии с размер на звеното δ . Тогава наличието на степенен закон при прехода към по-точни карти означава, че:

$$P(\delta) \sim \delta^{-\alpha}, \quad (22)$$

където $P(\delta)$ е периметъра, съответствующ на разрешеното δ ; α – константа¹. Ако сега отчетем, че $P(\delta) = N(\delta)\delta$, където $N(\delta)$ – брой на звената в начупената линия, апроксимираща периметъра, то $N(\delta)$ получаваме израза:

$$N(\delta) \sim \delta^{-(\alpha+1)}, \quad (23)$$

откъдето веднага следва, че бреговата линия на Великобритания е фрактал с фрактална размерност $D = \alpha + 1$ (виж. формулата (21)).

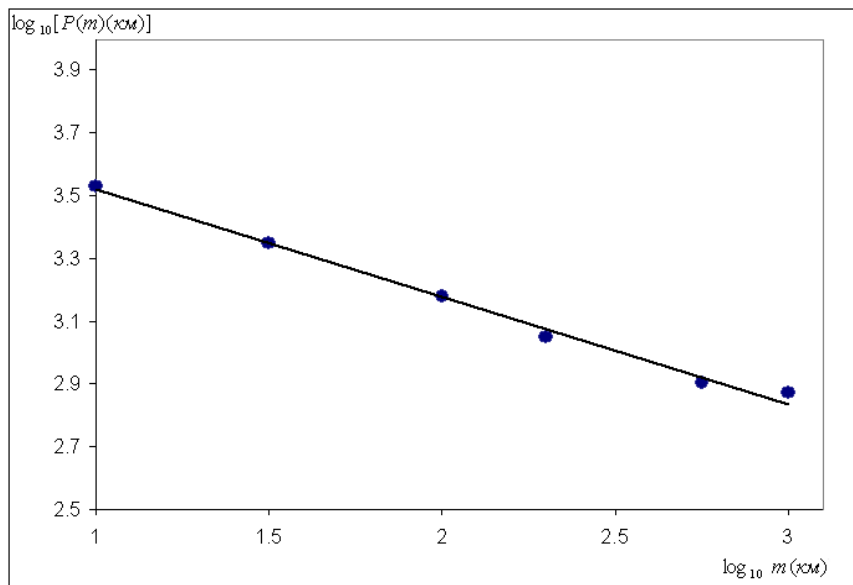


Рис. 15. Зависимост на дължината на бреговата линия на Великобритания $P(m)$ от мащабния фактор на картата m при двоен логаритмичен мащаб

Въз основа на този пример могат да се забележат основните особености на природните фрактали, които ги правят съществено различни от моделните:

- първо, при тях свойството на самоподобие, характерно за моделните фрактали не е налице (по-точно – наблюдава се частично самоподобие);
- второ, при пресмятане на фракталната им размерност степенният закон се проявява като «промеждутъчна асимптотика» (т.е. при $\delta \rightarrow 0$ се взема мащаб, който е малък в сравнение с някои характерни мащаби, но е много по-голям от минималния).

¹ Тук и по-нататък в изложението символът \sim означава, че при $\delta \rightarrow 0$ изразите отляво и отляво (които обикновено се стремят към нула или безкрайност) се различават най-много с константа.

Последното означава, че за построяването на съответната зависимост в двоен логаритмичен мащаб следва да се изключат мащаби по-малки от определен минимален мащаб (наложен от спецификата на природния фрактал и практичната потребност, налагаща изучаването му), като особена роля тук играе «изкуството» на правилния избор на системата за апроксимация.

В следващия раздел ще разгледаме фрактални динамични редове, явяващи се един от най-важните класове природни фрактали.

!7. Определяне на фракталната размерност на някои фрактални структури

Задача 1. Намерете фракталната размерност за всяка от числовите редици:

$$\text{а) } 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{N}, \dots;$$

$$\text{б) } 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{N^2}, \dots$$

$$\text{в) } 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{N}}, \dots$$

Решение:

а) От условието виждаме, че това е безкрайна числова редица с n -ти член $a_n = \frac{1}{N}$. В случая, n -тия геометричен фактор δ е равен на разликата от два съседни члена на редицата, където:

$$\delta_n = \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} = \frac{N+1-N}{N(N+1)} = \frac{1}{N(N+1)}$$

От това, че N е пропорционално равно на безкрайност, можем да твърдим, че $N+1$ също е толкова.

$$N \sim \infty, \quad N+1 \sim N$$

$$\frac{1}{N(N+1)} = \frac{1}{N^2}$$

За n -тия геометричен фактор δ получаваме следното: $\delta \sim \frac{1}{N^2}$

Чрез преобразуване намираме и N :

$$N \sim \frac{1}{\delta^{1/2}} \rightarrow N \sim \delta^{-1/2}$$

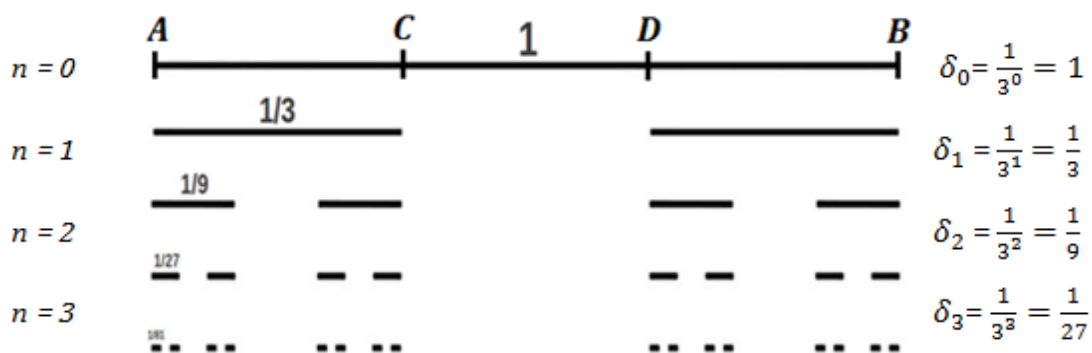
От тук виждаме, че фракталната размерност е $D = \frac{1}{2}$ (по сила на връзката $N \sim \delta^{-D}$).

По аналогичен начин намираме фракталните размерности и на следващите безкрайни редици.

Задача 2. Дадена е отсечката AB , чиято дължина е единица. Избираме вътрешни точки C и D , така че AB да се раздели на три равни части, от които средната да се премахне. Продължавайки итеративно, получаваме фрактал, чиято размерност трябва да се определи.

Решение:

При нулевата стъпка започваме с отсечка с единична дължина. За да преминем от стъпка 0 към стъпка 1, е необходимо да разделим дадената отсечка на три равни части, всяка от които е равна на $1/3$ и да премахнем средната третина. Така при стъпка 1 имаме два интервала с дължина $1/3$. За да продължим ната-тък, повтаряме по същия начин. От стъпка 1 към стъпка 2, са налице две отсечки ($N = 2$) с дължина $1/3$, всяка от които разделяме на три равни части, с дължина равна на $1/9$. Премахваме средните и получаваме четири отсечки ($N = 4$).



n	δ	N
$n = 0$	$\delta_0 = \frac{1}{3^0} = 1$	$N = 2^n = 2^0 = 1$
$n = 1$	$\delta_1 = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$	$N = 2^n = 2^1 = 2$
$n = 2$	$\delta_2 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$	$N = 2^n = 2^2 = 4$
$n = 3$	$\delta_3 = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$	$N = 2^n = 2^3 = 8$

Ясно е, че имаме

$$N = 2^n \quad \text{и} \quad \delta_n = \frac{1}{3^n} \rightarrow \frac{1}{\delta_n} = 3^n$$

От формулата за фрактална размерност намираме фракталната размерност на получения фрактал:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N(\delta_n)}{\ln \frac{1}{\delta_n}} = \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{n \cdot \ln 2}{n \cdot \ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = \frac{0,693}{1,099} = 0,631$$

Задача 3. Даден е правилен петоъгълник $ABCDF$, като на всяка от страните му са избрани по две вътрешни точки, така че да разделят страната в съотношение 2:1:2. Използваме по-малката част за основа на равнобедрен триъгълник, чиито катет е равен на по-голямата част от страната на петоъгълника. Повтаряме операция-та за всяка една от страните му докато не получим пет триъгълника. След което свързваме върховете им и премахваме основите им. След това итерациите се повтарят. Да се пресметне дробната фрактална размерност на така получения фрактал.

Решение:

Имаме правилен петоъгълник, който се разделя на шест по-малки петоъгълника и пет равнобедрени триъгълника. Триъгълниците се отстраняват.



$$n = 0 \qquad n = 1 \qquad n = 2$$

$$\delta_0 = \left(\frac{2}{5}\right)^0 = 1 \qquad \delta_1 = \left(\frac{2}{5}\right)^1 = \frac{2}{5} \qquad \delta_2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$$

n	δ	N
$n = 0$	$\delta_0 = \left(\frac{2}{5}\right)^0 = 1$	$N = 6^n = 6^0 = 1$
$n = 1$	$\delta_1 = \left(\frac{2}{5}\right)^1 = \frac{2}{5}$	$N = 6^n = 6^1 = 6$
$n = 2$	$\delta_2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$	$N = 6^n = 6^2 = 36$

Получаваме

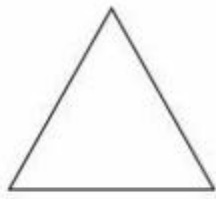
$$N = 6^n \quad \text{и} \quad \delta_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n \rightarrow \frac{1}{\delta_n} = \left(\frac{5}{2}\right)^n = 2,5^n$$

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N(\delta_n)}{\ln \frac{1}{\delta_n}} = \frac{\ln 6^n}{\ln 2,5^n} = \frac{n \cdot \ln 6}{n \cdot \ln 2,5} = \frac{1,7918}{0,1963} = 1,955.$$

Задача 4. Имаме три единични отсечки, чиито върхове се допират, като по този начин образуват равностранен триъгълник. Всяка отсечка се разделя на три равни части. Всяка средна третина се явява страна на равностранен триъгълник насочен навън, като след построяването му се тя се премахва. Този итераци-онен процес се повтаря при всяка новополучена отсечка. Да се намери фракталната размерност на получения фрактал.

Решение:

При стъпка 0 чрез допиране на трите отсечки получаваме равностранен триъгълник. За прехода от стъпка 0 към стъпка 1 средната третина на всяка от страните му се използва като страна на равностранен триъгълник, която след построяването му се отстранява. На този етап получаваме шестолъчна звезда, позната още като звездата на Давид. За прехода от стъпка 1 към стъпка 2, всяка от страните на получената звезда отново разделяме на три равни части, като средната третина се явява страна на нов по-малък равностранен триъгълник и така чрез итерация продължаваме.



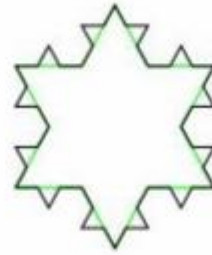
$$n = 0$$

$$\delta_0 = \frac{1}{3^0} = 1$$



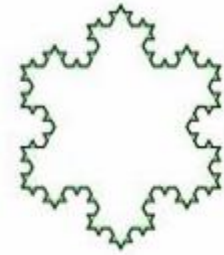
$$n = 1$$

$$\delta_1 = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$$



$$n = 2$$

$$\delta_2 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$



$$n = 3$$

$$\delta_3 = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

n	δ	N
$n = 0$	$\delta_0 = \frac{1}{3^0} = 1$	$N = 3$
$n = 1$	$\delta_1 = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$	$N = 4 \cdot 3 = 12$
$n = 2$	$\delta_2 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$	$N = 4 \cdot 12 = 48$
$n = 3$	$\delta_3 = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$	$N = 4 \cdot 48 = 192$

Ще имаме

$$N = 3 \cdot 4^n$$

$$\delta_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \rightarrow \frac{1}{\delta_n} = (3)^n = 3^n$$

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N(\delta_n)}{\ln \frac{1}{\delta_n}} = \frac{\ln(3 \cdot 4^n)}{\ln 3^n} = \frac{\ln 3 + n \cdot \ln 4}{n \cdot \ln 3} = \frac{\ln 3}{n \cdot \ln 3} + \frac{n \cdot \ln 4}{n \cdot \ln 3} =$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{\ln 4}{\ln 3} = 0 + 1,262 \approx 1,262$$

$$D \approx 1,262$$

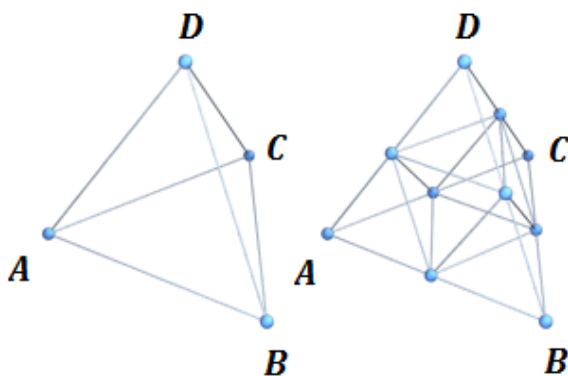
Задача 5. Дадена е хоризонтална отсечка AB с дължина единица. Използваме AB като основа на правоъгълен триъгълник, като след построяването му я отстраняваме. При новополучените отсечки отново повтаряме процедурата – всяка отсечка се явява основа на правоъгълен триъгълник, след което се премахва. Този рекурсивен процес се прилага на всяка новополучена права като се спазва последователна насоченост. Да се намери фракталната размерност на получения фрактал.

Задача 6. Даден е равностранен триъгълник ABC . Свързваме средите на страните му и получаваме средните отсечки на триъгълника. Получават се четири нови триъгълника, от които средният се премахва. Повторете процеса с останалите триъгълници и намерете фракталната размерност на получения фрактал.

Задача 7. Дадена е права, която използваме като основа за построяването на равнобедрен трапец, след което тя се отстранява. След това по същия начин повтаряме процеса с всяка новополучена права. Да се намери фракталната размерност на получения фрактал.

Задача 8. Дадена е правилна триъгълна пирамида $ABCD$. Свързваме средите на страните и по този начин получаваме четири по-малки правилни триъгълни пирамиди, като останалата част от по-голямата пирамида се отстранява. Повторете процеса със страните на новополучените пирамиди и намерете фракталната размерност на получения фрактал.

Решение:



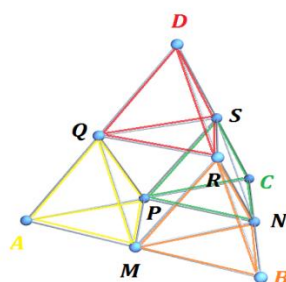
Фракталът се формира от първоначален правилен тетраедър $ABCD$.

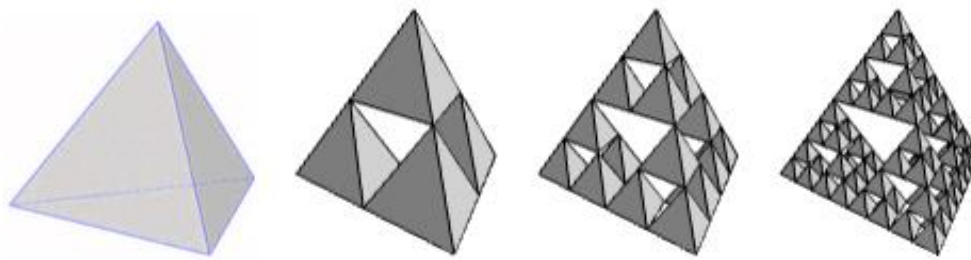
При следваща стъпка бележим средите на всяка една от страните и ги свързваме.

Получават се четири по-малки тетраедъра: $AMPQ$, $BMNR$,

$CNPS$ и $DQRS$.

Виждаме, как първоначалния тетраедър се заменя с четири негови умалени копия. Следващите стъпки се наблюдават чрез многократно прилагане на тази процедура.





$$n = 0$$

$$n = 1$$

$$n = 2$$

$$n = 3$$

$$\delta_0 = \frac{1}{2^0} = 1$$

$$\delta_1 = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$$

$$\delta_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$\delta_3 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

n	δ	N
$n = 0$	$\delta_0 = \frac{1}{2^0} = 1$	$N = 4^n = 4^0 = 1$
$n = 1$	$\delta_1 = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$	$N = 4^n = 4^1 = 4$
$n = 2$	$\delta_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$	$N = 4^n = 4^2 = 16$
$n = 3$	$\delta_3 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$	$N = 4^n = 4^3 = 64$

Получаваме

$$N = 4^n$$

$$\delta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow \frac{1}{\delta_n} = (2)^n = 2^n$$

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N(\delta_n)}{\ln \frac{1}{\delta_n}} = \frac{\ln 4^n}{\ln 2^n} = \frac{n \cdot \ln 4}{n \cdot \ln 2} = 2$$

Задача 9. Дадена е единична вертикална отсечка AB . От точка B , излизат две отсечки, които сключват помежду си ъгъл 60° . Тези две отсечки са с дължина α , за която знаем, че $\alpha < 1$. Повтаряме процеса — от всяка новополучена права да излизат по две отсечки, сключващи 60° -градусов ъгъл помежду си.

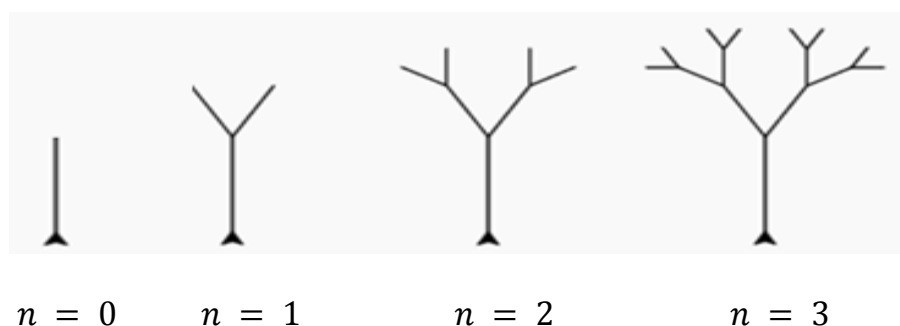
а) Да се намери фракталната размерност спрямо α ($D = D(\alpha)$);

б) Да се намерят допустимите стойности на α ;

в) Да се намери фракталната размерност при $\alpha = \frac{1}{\phi}$, като използваме златното сечение ϕ , за което знаем, че $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Решение:

Първоначално, при стъпка 0, започваме с единична вертикална отсечка. За да преминем от стъпка 0 към стъпка 1, към горния край на отсечката добавяме две отсечки, които са с еднаква дължина и сключват помежду си ъгъл, равен на 60° . Полученият фрактал наподобява на дърво. Продължаваме по същия с всяка новополучена права, за да преминем към следващите стъпки.



а) Ще имаме (за $\alpha < 1$, $\frac{1}{\alpha} > 1$) $N = 2^n$ и $\delta = \alpha^n \rightarrow \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\alpha^n}$. Тогава за фракталната размерност D получаваме

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N(\delta_n)}{\ln \frac{1}{\delta_n}} = \frac{\ln 2^n}{\ln \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n} = \frac{n \cdot \ln 2}{n \cdot \ln \left(\frac{1}{\alpha}\right)} = \frac{\ln 2}{\ln \left(\frac{1}{\alpha}\right)}$$

б) За да определим допустимите стойности на параметъра трябва да вземем предвид, че фракталната размерност трябва да е < 2 .

$$\frac{\ln 2}{\ln \left(\frac{1}{\alpha}\right)} < 2 \Rightarrow \frac{\ln 2}{\ln \left(\frac{1}{\alpha}\right)} < 2 \Rightarrow \ln 2 < 2 \ln \left(\frac{1}{\alpha}\right) \Rightarrow \ln 2 < \ln \frac{1}{\alpha^2} \Rightarrow 2 < \frac{1}{\alpha^2} \Rightarrow \alpha^2 < \frac{1}{2}$$

Окончателно получаваме $\alpha < \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$

в) При $\alpha = \frac{1}{\phi}$, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618$ ще имаме $\alpha = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2}{3,236} = 0,618$ и

$$D = \frac{\ln 2}{\ln \phi} = \frac{0,693}{0,481} = 1,44$$

Задача 10. Мултифрактал на Кох-Гивън. Даден е мултифрактал, при който първата стъпка се получава по следния начин: отсечка с единична дължина (стъпка 0) се разделя на 6 равни части, втората част се използва за основа на правилен триъгълник, а петата – на квадрат, след това втората и петата част се премахват. Всяка следваща стъпка се получава, като към отсечките с равна дължина от предишната стъпка се прилага същата процедура. Да се определи фракталната размерност на този мултифрактал.

Решение:

Ще имаме

$$\delta = \frac{1}{6^n}, \frac{1}{\delta} = 6^n \text{ и } N(\delta) = 9^n.$$

Тогава за фракталната размерност на мултифрактала получаваме

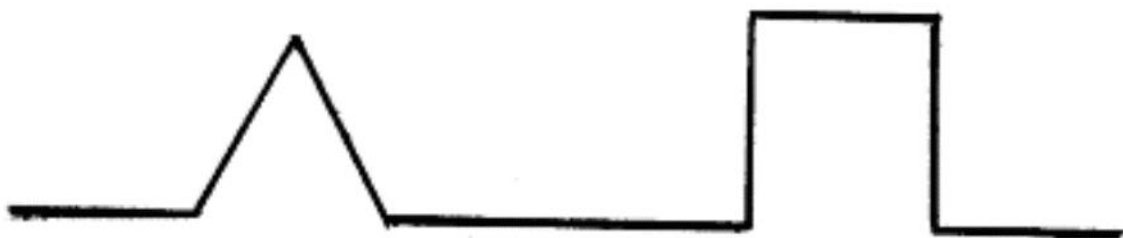
$$D = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln \frac{1}{\delta}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 9^n}{\ln 6^n} = \frac{\ln 9}{\ln 6} = \frac{2,197}{1,792} = 1,226.$$

Ако с D_1 означим фракталната размерност на първата част от мултифрактала, състоящ се от първите 3 части (фрактална линия на Кох), а с D_2 – на останалата част (фрактална линия на Гивън), то ще имаме

$$D_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 4}{\ln 3} = \frac{1,386}{1,099} = 1,261,$$

$$D_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 5^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 5}{\ln 3} = \frac{1,609}{1,099} = 1,465.$$

На чертежа по-долу е изобразен мултифрактала на Кох-Гивън.



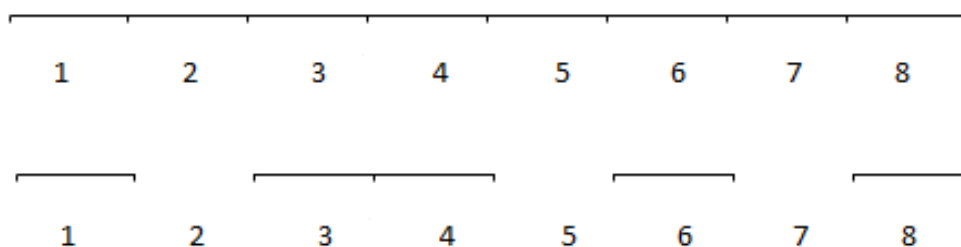
$$1.261 + 1.465 = 1.226$$

Задача 11. Един мултифрактал се получава по следния начин: отсечка с единична дължина (стъпка 0) се разделя на 8 равни части, като втората, петата

и седмата част се премахват. Всяка следваща стъпка се получава, като към отсечките с равна дължина от предишната стъпка се прилага същата процедура. Да се пресметне фракталната размерност на мултифрактала, както и фракталните размерности на фракталите, които го съставляват.

Решение:

Започваме с чертане на отсечка, която разделяме на 8 равни части, след което премахваме втората, петата и седмата част.



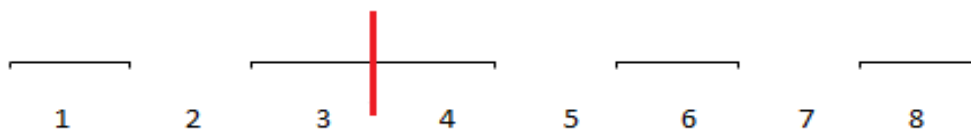
След като вече сме получили мултифрактала търсим неговата фрактална размерност:

$$\delta = \frac{1}{8^n} \Rightarrow \frac{1}{\delta} = 8^n \text{ и } N(\delta) = 5^n$$

Тогав за фракталната размерност D ще имаме

$$D = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln \frac{1}{\delta}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 5^n}{\ln 8^n} = \frac{\ln 5}{\ln 8} = 0,774.$$

Сега да разделим този мултифрактал на две части:



Ако с D_1 означим фракталната размерност на първата част от мултифрактала, състоящ се от първите 3 части, а с D_2 – на останалата част, то имаме:

$$D_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0,631$$

$$D_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 3^n}{\ln 5^n} = \frac{\ln 3}{\ln 5} = 0,683$$

$$0,631 + 0,683 = 0,774.$$

Задача 12. През 2018 г. в САЩ е имало 4 млн. души с богатство, надхвърлящо 1 млн. \$ и само един с богатство от 100 млрд. \$. Ако допуснем, че богатството в САЩ за 2018 г. е фрактално разпределено, то да се пресметне броя на хората с лично богатство над 10 млн. \$/100 млн. \$/1 млрд. \$/ 10 млрд. \$.

Решение:

	δ	Богатство, \$	Хора, брой N
100 млрд. \$ = 100 000 000 000	1	10^{11}	1
1 млн. \$ = 1 000 000	$\frac{1}{10^5}$	10^6	$4 \cdot 10^6$

Приемаме за единица най-голямата стойност на богатството – 100 млрд. \$., тогава следващото богатство от 1 млн. \$ е $\delta = \frac{1}{10^5}$ от единицата, т.е. $\delta = \frac{1}{10^5}$ и $\frac{1}{\delta} = 10^5$. За тази стойност на δ ще имаме $N(\delta) = 4 \cdot 10^6$. Това ни позволява по тези данни (и на база допускането, че богатството е фрактално разпределено) да пресметнем фракталната размерност D :

$$D = \frac{\ln(N)}{\ln\left(\frac{1}{\delta}\right)} = \frac{\ln 4 \cdot 10^6}{\ln 10^5} = \frac{\ln 4 + 6 \cdot \ln 10}{5 \cdot \ln 10} = \frac{\ln 4 + 6}{5} = \frac{6,602}{5} = 1,3204$$

$$N = \left(\frac{1}{\delta}\right)^D \Rightarrow N = \left(\frac{1}{\delta}\right)^{1,3204}$$

Сега можем да отговорим на въпроса: колко души притежават лично богатство над определена сума. Това става по следния алгоритъм: за стойността на богатството пресмятаме δ и $\frac{1}{\delta}$ и заместваме в горе получената стойност на N .

При богатство от 10 млн. \$ ($10 \text{ млн.} = 10\,000\,000 = 10^7$) ще имаме $\delta = \frac{10^7}{10^{11}} = \frac{1}{10^4}$, $\frac{1}{\delta} = 10^4$

$$N = \left(\frac{1}{\delta}\right)^{1,3204} \Rightarrow N = 10^{4 \cdot 1,3204} = 191\,249$$

$$N = 191\,249$$

При богатство от 100 млн. \$ ($100 \text{ млн.} = 100\,000\,000 = 10^8$) - $\delta = \frac{10^8}{10^{11}} = \frac{1}{10^3}$,
 $\frac{1}{\delta} = 10^3$

$$N = \left(\frac{1}{\delta}\right)^{1,3204} \Rightarrow N = 10^{3 \cdot 1,3204} = 9145$$

$$N = 9145$$

При богатство от 1 млрд. \$ ($1 \text{ млрд.} = 1\,000\,000\,000 = 10^9$) - $\delta = \frac{10^9}{10^{11}} = \frac{1}{10^2}$,
 $\frac{1}{\delta} = 10^2$

$$N = \left(\frac{1}{\delta}\right)^{1,3204} \Rightarrow N = 10^{2 \cdot 1,3204} = 437$$

$$N = 437$$

При богатство от 10 млрд. \$ ($10 \text{ млрд.} = 10\,000\,000\,000 = 10^{10}$) - $\delta = \frac{10^{10}}{10^{11}} = \frac{1}{10^1}$,
 $\frac{1}{10^1}, \frac{1}{\delta} = 10^1 = 10$

$$N = \left(\frac{1}{\delta}\right)^{1,3204} \Rightarrow N = 10^{1 \cdot 1,3204} = 21$$

$$N = 21$$

Нанасяме резултатите, както за дадените, така и за търсените стойности на богатството в следната таблица:

Богатство	δ	$\frac{1}{\delta}$	Хора, брой $N = \left(\frac{1}{\delta}\right)^{1,3204}$
100 млрд. \$	1	1	1
10 млрд. \$	10	$\frac{1}{10}$	21
1 млрд. \$	10^2	$\frac{1}{10^2}$	437
100 млн. \$	10^3	$\frac{1}{10^3}$	9 145
10 млн. \$	10^4	$\frac{1}{10^4}$	191 249
1 млн. \$	$\frac{1}{10^5}$	10^5	$4 \cdot 10^6$

Задача 13. Ако 300 населени места в България имат население над 2000 души, а София е с население от 1500000 души и населението на населените места в България е фрактално разпределено, то колко са градовете в България с население над 100000 и над 10000 души?

Задача 14. Най-високотиражната книга, издадена в България през 2017 г. има тираж от 60000 бр. Да се намери броя на книгите с тираж над 10000/5000/2000 бр., ако тиражите на книгите, издадени в България през 2017 г. са фрактално разпределени с фрактална размерност а) 0,8; б) 1,0; в) 1,2; г) 1,5. Каква е зависимостта между концентрацията на тиражите и фракталната размерност?

Задача 15. През 2018 г. един човек в света притежава богатство от 120 млрд. \$, 10 души – над 30 млрд. \$, 60 души – над 10 млрд. \$. Да се намери броя на хората в света с богатство, надхвърлящо 20 млрд. \$/5 млрд. \$/2 млрд. \$/1 млрд. \$ при положение, че личното богатство в света за 2018 г. е фрактално разпределено?

Решение:

Ще решим задачата по метода на линейната регресия. Предполагаме, че връзката между $\ln N$ и $\ln \frac{1}{\delta}$ е почти линейна. Всъщност, ще търсим правата линия

$$\ln N = a + b \ln \frac{1}{\delta},$$

която е най-близко до данните от условието. Приемаме за единица най-голямата стойност на богатството – 120 млрд. \$, тогава следващото богатство от 30 млрд. \$ е $\frac{1}{4}$ от единицата, т.е. $\delta = \frac{1}{4}$ и $\frac{1}{\delta} = 4$. При богатство от 10 млрд. \$ ще имаме $\delta = \frac{1}{12}$ и $\frac{1}{\delta} = 12$. Пресмятаме натуралните логаритми: за $\delta = 1$ и $N = 1$ имаме $\ln \frac{1}{\delta} = 0$ и $\ln N = 0$ (богатство от 120 млрд. \$); при $\delta = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{\delta} = 4$ и $N = 10$ имаме $\ln \frac{1}{\delta} = \ln 4 = 1,386$ и $\ln N = \ln 10 = 2,303$ (богатство от 30 млрд. \$); при $\delta = \frac{1}{12}$, $\frac{1}{\delta} = 12$ и $N = 60$ имаме $\ln \frac{1}{\delta} = \ln 12 = 2,485$ и $\ln N = \ln 60 = 4,094$ (богатство от 10 млрд. \$). Нанасяме резултатите в таблицата

$\ln \frac{1}{\delta}$	$\ln N$	$\left(\ln \frac{1}{\delta}\right)^2$	$\ln \frac{1}{\delta} \cdot \ln N$
0	0	0	0
1,386	2,303	1,921	3,192
2,485	4,094	8,096	13,366

Сумирайки резултатите по колони, получаваме

$$\sum \ln \frac{1}{\delta} = 3,871; \quad \sum \ln N = 6,397; \quad \sum \left(\ln \frac{1}{\delta}\right)^2 = 8,096; \quad \sum \ln \frac{1}{\delta} \cdot \ln N = 13,366.$$

Това ни дава възможност да намерим коефициентите на линейната регресия:

$$b = \frac{n \sum \ln \frac{1}{\delta} \cdot \ln N - \sum \ln \frac{1}{\delta} \cdot \sum \ln N}{n \sum \left(\ln \frac{1}{\delta}\right)^2 - \left(\sum \ln \frac{1}{\delta}\right)^2} = \frac{3 \cdot 13,366 - 3,871 \cdot 6,397}{3 \cdot 8,096 - (3,871)^2} = \frac{15,335}{9,303} = 1,648$$

$$a = \frac{1}{n} \left(\sum \ln N - b \sum \ln \frac{1}{\delta} \right) = \frac{1}{3} (6,397 - 1,648 \cdot 3,871) = 0,006.$$

Така получаваме линията на линейна регресия

$$\ln N = a + b \ln \frac{1}{\delta} = 0,006 + 1,648 \ln \frac{1}{\delta}.$$

От горното уравнение (при граничен преход $\delta \rightarrow 0$) можем да заключим, че фракталната размерност на този социален фрактал е $D = b = 1,648$. Сега можем да отговорим на въпроса: колко души притежават лично богатство над определена сума. Това става по следния алгоритъм: за стойността на богатството пресмятаме δ и $\frac{1}{\delta}$, след това $\ln \frac{1}{\delta}$ и $\ln N$ (по формулата за линейната регресия), N се получава чрез антилогаритмуване ($N = e^{\ln N}$). Нанасяме резултатите, както за дадените, така и за търсените стойности на богатството в следната таблица

богатство	δ	$\frac{1}{\delta}$	$\ln \frac{1}{\delta}$	$\ln N$	$N = e^{\ln N}$
120 млрд.	1	1	0	0,006	1
30 млрд.	$\frac{1}{4}$	4	1,386	2,290	10
20 млрд.	$\frac{1}{6}$	6	1,792	2,959	19
10 млрд.	$\frac{1}{12}$	12	2,485	4,101	60
5 млрд.	$\frac{1}{24}$	24	3,178	5,243	227
2 млрд.	$\frac{1}{60}$	60	4,094	6,753	857
1 млрд.	$\frac{1}{120}$	120	4,787	7,895	2684

Забележка. Задачи 12-15 касаят така наречените социални фрактали. Ще се опита да дадем по-точно определение на това понятие.

Нека в даден модел да са ясно дефинирани големини и бройки на обекти от едно хомогенно множество. Нека M е големина на най-големия обект, а m конкретна стойност на големина ($m < M$). Тогава, е необходимо, да знаем $N = N(m)$, където обектите N са по-големи или равни на m . Тогава имаме:

$$\delta = \frac{m}{M} \Rightarrow \frac{1}{\delta} = \frac{M}{m}$$

По този начин подозираме фрактално разпределение на тези обекти като съотношение на големина и брой. То е налице, ако е изпълнено:

$$N \sim C \left(\frac{M}{m}\right)^D \Leftrightarrow \ln(N) = \ln(C) + D \cdot \ln\left(\frac{M}{m}\right)$$

И тази зависимост е почти валидна с намаляването на m . Тогава се казва, че в това множество съществува фрактално разпределение. Тогава говорим за социални фрактали. С други думи, **най-важната характеристика на фракталните структури е наличието на степенна зависимост между броя на обектите, превишаващи определена големина и тази големина.**

Прилагаме таблица с предполагаемите степенни показатели за различни явления, които се предполага, че са фрактално разпределени:

Явление	Предполагам степенен показател (прибли- зително)
Честота на употребяваните думи	1,2
Брой кликове върху уеб сайтове	1,4
Брой книги, продадени в САЩ	1,5
Получени телефонни разговори	1,22
Магнитуд на земетресенията	2,8
Диаметър на лунните кратери	2,14
Интензивност на слънчевите изригвания	0,8
Интензивност на войните	0,8
Нетно богатство на гражданите на САЩ	1,1
Брой хора по фамилно име	1
Население на градовете в САЩ	1,3
Движения на пазарите	3 <i>(или по-малко)</i>
Размер на компаниите в САЩ	1,5
Брой убити в терористични актове	2 <i>(или по-малко)</i>

Трябва да отбележим, че тези степенни показатели не могат да се докажат вследствие на някаква теория, а могат само да се извлекат от статистически наблюдения, което понякога прави трудно узнаването на истинските им стойности, ако те изобщо съществуват. Нека първо да обърнем внимание на практическите последици от дадения степенен показател.

Степенен показател	Дял на първия 1%	Дял на първите 20%
1	82	94,5
1,1	66	86
1,2	47	76
1,3	34	69
1,4	27	63
1,5	22	58
2	10	45
2,5	6	38
3	4,6	34

Вижда се илюстрирано влиянието на твърде невероятното и приноса на най-горните 1% и 20% към крайния резултат. Колкото по-нисък е степенният

показател, толкова по-висок е този принос. Да отбележим обаче колко е чувствителен процесът — между 1,1 и 1,3, преминаваме от 66% от общия резултат до 34%. Разлика от само 0,2 в експонентата променя драматично крайния резултат — а подобна разлика може да се получи и при проста изчислителна грешка. Разликата не е незначителна, нито маловажна: можем да си представим, че нямаме точна идея каква е експонентата, защото не можем да я изчислим директно. Всичко, което правим, е да изчисляваме на базата на предишни данни или да разчитаме на теории, които позволяват изграждането на някакъв модел, който може да ни даде някаква идея — тези модели обаче може да имат скрити дефекти, които да предотвратят сляпото им прилагане към действителността от наша страна.

III. ФРАКТАЛЕН АНАЛИЗ НА ВРЕМЕВИТЕ РЕДОВЕ

18. Първи опити за фрактален анализ на финансовите пазари

През 1938 г, когато научният свят е силно впечатлен от току-що появилата се теория на фракталите, известният американски финансист Ралф Нилсън Елиот (*Ralph Nelson Elliott*) в книгата си „Вълнов принцип“ (*The Wave Principle*) предлага своя теория за поведението на цените на акциите, основана на теорията на фракталите. За основа на теорията му служи така наречената вълнова диаграма. Следвайки масовата психология, цялото движение на цените (времевият финансов ред) се разбива на пет вълни по направлението на силен тренд и на три вълни – в обратното направление. Например, в случая на доминиращ тренд, ние виждаме пет вълни при движението на цените нагоре и три – при движението (корекцията) надолу. За означаване на петвълновия тренд се използват цифри, а за тривълновия – букви (рис. 1). Всяко от петвълновите движения се нарича импулсно, а от тривълновите – корективно.

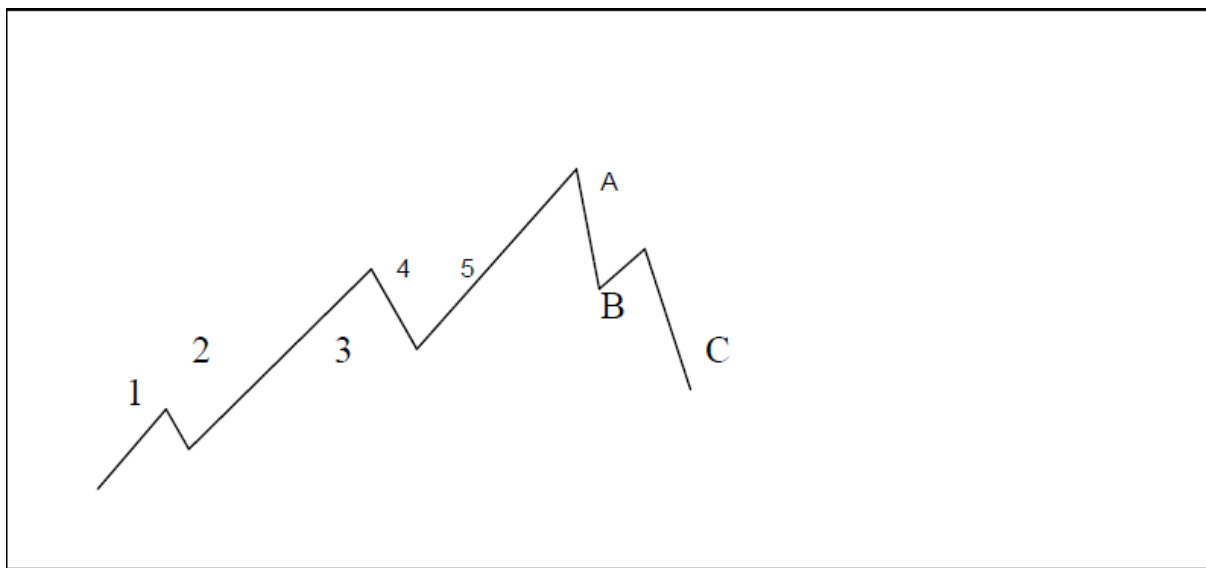


Рис. 16. Вълни на Елиот

Предположението на Елиот е, че всяка от тези импулсни и коректиращи вълни също се представя чрез вълнова диаграма на Елиот, при която се появяват нови (по-малки) вълни. По такъв начин, Елиот прилага теорията на фракталите за разлагане на тренда на по-малки части. Познаването на тези по-малки части, мащабирано в по-малки мащаби от мащаба на цялата вълнова диаграма е от голямо значение за трейдъра. Ако той знае в коя част на диаграмата се намира, ще може уверено да продава ценните книжа, когато започва коректираща вълна и да купува, ако започва импулсна вълна.

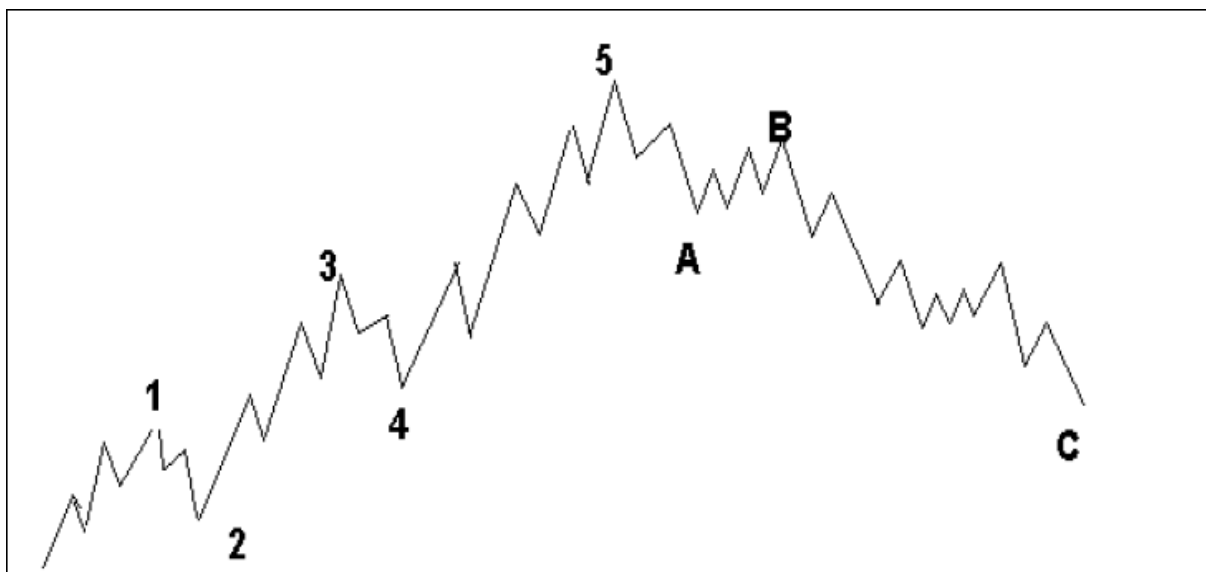
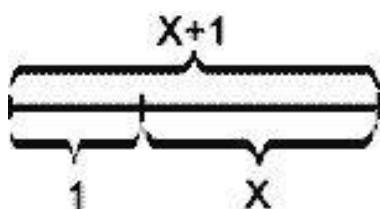


Рис. 17. Фрактална структура на вълновата диаграма на Елиот - първа стъпка

Освен това, Елиот изказва предположението, че съотношението на мащабите при две последователни стъпки е свързано със забележителното **златно сечение**.

Нека да припомним какво е златното сечение.

Определение. Ако една отсечка се раздели на две части – голяма и малка и съотношенията на дължините между голямата и малката част и между цялата отсечка и голямата част са равни, то тази пропорция наричаме златно сечение.



Ако дължината на по-малката отсечка приемем за 1, а дължината на по-голямата за x , тогава ще е изпълнено

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1} \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1,61803398 \dots$$

Това число се означава с главната гръцка буква Φ (фи) - първата буква в името на Фидий.

Любопитно е, че $1/\Phi = 0.61803398\dots$ – числото Φ е единственото положително число, което се превръща в реципрочното си при изваждане на единица. Може да се представи и като сума от безкрайния ред:

$$\Phi = 1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(1 + \dots)))$$

или

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

Φ е границата, към която се стреми отношението на два последователни члена от реда на Фибоначи – 1,1,2,3,5,8,13,21,... , при който всеки член е сума от предходните два члена, т.е.

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1},$$

като първите два члена a_1 и a_2 са единици. И наистина, ако разделим двете страни на горното равенство с a_n получаваме

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

Нека x да е границата на съотношението на два последователни члена на редицата при $n \rightarrow \infty$, т.е.

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Тогава при граничен преход ще получим

$$x = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \Phi$$

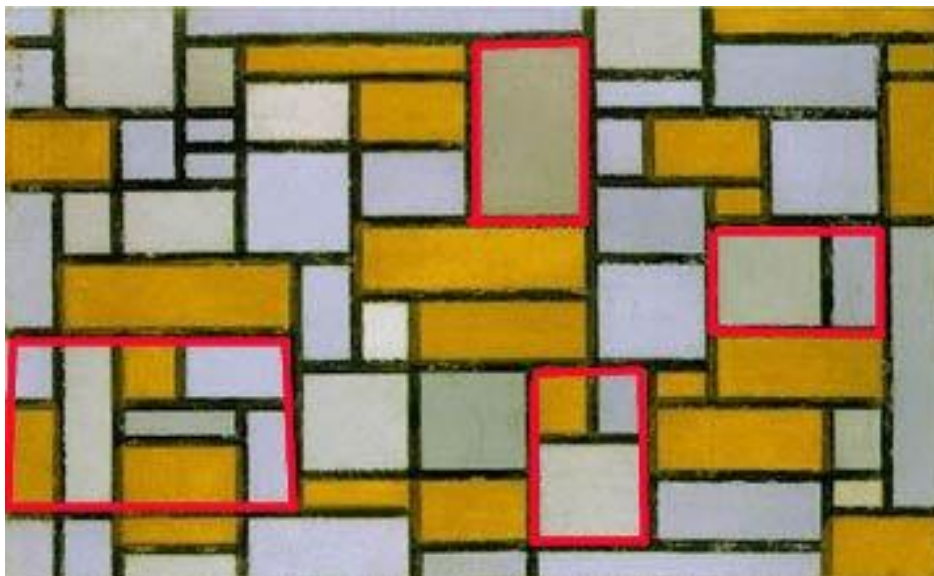


Рис. 18. Златни правоъгълници в картина на Мандриан

Златното сечение, от ренесанса до наши дни, се счита от художници и архитекти за мерило на красота и хармония. Това е така, поради изключително широкото разпространение на това съвършено съотношение в заобикалящата ни природа.

Като пример за това можем да разгледаме така наречената спирала на **Фибоначи**. Тя се получава по следния начин: най-напред вземаме два малки квадрата със страни 1, след това продължаваме да добавяме квадрати около изображението като всеки нов квадрат има страна, която е сума от последните две страни на квадратите. Тази група правоъгълници, чиито страни имат дължини две последователни числа на Фибоначи и която се формира от квадрати със страни, които са числа на Фибоначи, се наричат **правоъгълници на Фибоначи**. (рис. 19)

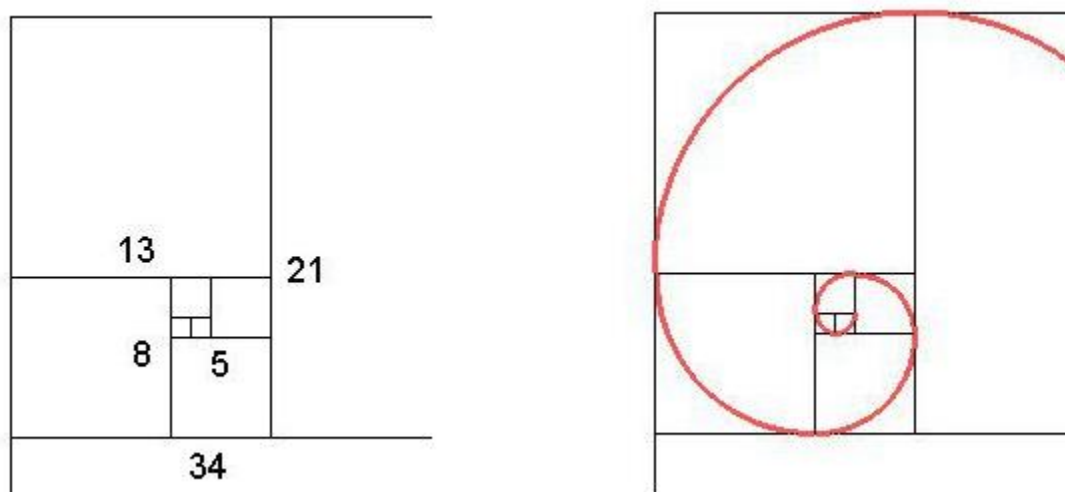


Рис. 19. Получаване на спиралата на Фибоначи от квадратите и правоъгълниците на Фибоначи

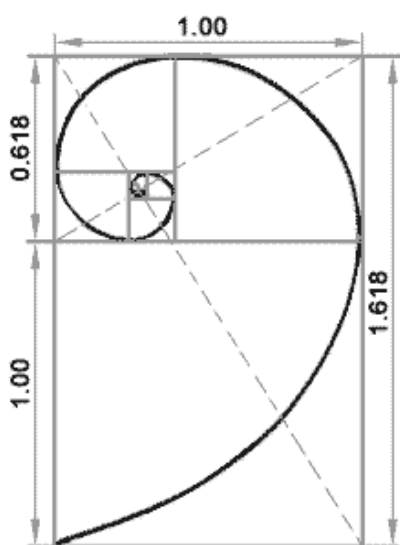


Рис. 20. Получаване на спиралата на Фибоначи от златни правоъгълници

Ако във всеки от горните квадрати впишем по четвърт кръг, ще получим **спиралата на Фибоначи**. Тази спирала не е истинска математическа логаритмична спирала, защото се съставя от фрагменти, но е добро приближение. Наричат я още **спирала на Бернаули**, **логаритмична спирала**, **равногълна спирала**, и др. Същата спирала може да се получи и от златните правоъгълници. Това са правоъгълници, чиито страни са в златно съотношение. Златният правоъгълник има някои интересни свойства. Ако отрежем от златния правоъгълник квадрат, страната на който е равна на по-малката страна на правоъгълника, остатъкът ще бъде отново златен правоъгълник, но с по-малки размери. Ако продължаваме да отрязваме квадрати, ще получаваме все по-малки и по-малки

златни правоъгълници (рис. 20). При това ще са подредени по логаритмична спирала, съвсем същата като тази, която се образува от квадрати със страни, числата на Фибоначи. Полюсът на спиралата лежи на пресечната точка на диагоналите на началния правоъгълник и първия отрязан правоъгълник. При това диагоналите на всички следващи намаляващи златни правоъгълници минават през този полюс.

Такива спирали може да видим във формата на черупките на някои мекотели, а също и в подредбата на семената на цветовете на някои растения, семенниците на шишарките, ананаса, ухото и много други образувания. И коефициента на нарастване е много близък до 1,618.



Тази спирала е единствената, която **запазва формата си** при увеличаване на размерите. Това нейно свойство обяснява широкото и разпространение в природните образувания. Например, когато охлювът **Nautilus** расте като неговата раковина, разделена с вътрешни преградни стенички, увеличава размерите си, като се навива по спирала. При това черупката на охлюва не променя формата си, ако увеличим

мащаба. Подобни форми могат да се наблюдават както при галактиките и атмосферните явления, така и доста често в растителния и животински свят. Това свойство може да се нарече самоподобие и има пряка връзка с фракталите.

Да се върнем отново към финансовите пазари.



Рис. 21. Фрактален анализ на индекса на американския долар (DX) с Hurst (Sentient Trader), използваща принципа на вълните на Елиът и златното сечение (числата на Фибоначи)

На рис. 21 е дадена графична интерпретация на анализ на времеви ред, получен от доларовия индекс, като е използвана вълновата методика на Елиът.

На самия Елиът принадлежи мисълта: „На всяка човешка дейност са присъщи три отличителни особености: форма, време и отношение - и всичките те се подчиняват на реда на Фибоначи“.

След Елиът, Менделброт продължава изследванията на времевите финансови редове с методите на фракталния анализ. На рис. 22 е представен предложението от него фрактален генератор от три части (вълни)(стъпка 0), който може да се итерира многократно (в стъпки 1, 2 и 3). Така се получава модел, силно наподобяващ за пазарните ценови колебания. Показани са само първите итерации, макар процесът да може да се продължи още. Според теорията на фракталите, итерациите са безброй много, но на практика е безсмислено да се правят итерации след достигането на времеви интервали, по-къси от времето необходимо за сключване на реални сделки с финансовия актив. Избраният генератор илюстрира така наречените унифрактални криви, съответстващи на една относително спокойна картина на пазара.

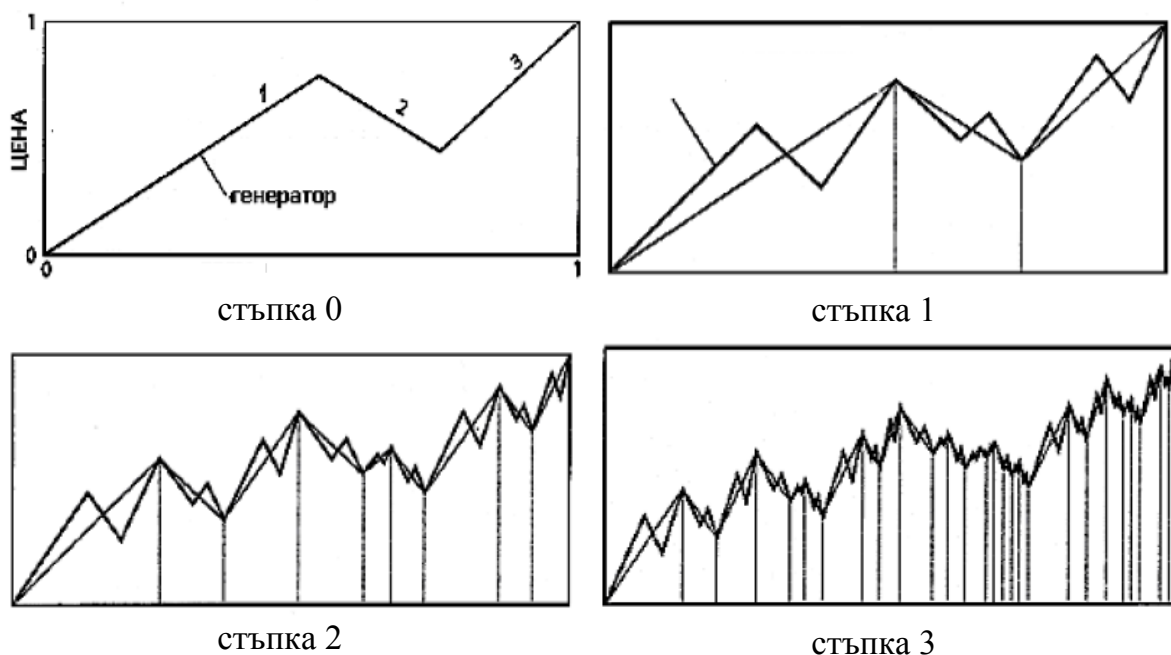


Рис. 22. Фрактален модел на Менделброт за пазарните ценови колебания

Но спокойствието на финансовите пазари е налице само при крайно специфични условия. За да покаже обичайното състояние на пазара, Менделброт от унифрактала (генератора) посредством итеративни стъпки създава така наречения мултифрактал. Този метод не се опитва да прогнозира цената на финансовия инструмент, той само помага да се оцени вероятността за нейното покачване или спад.

19. Хипотеза за фракталност на финансовия пазар

Следващият изследовател с принос във фракталния анализ на финансовите пазари е Е. Петерс. В своята книга „Фрактален анализ на финансовите пазари. Приложение на теорията на хаоса в инвестициите и икономиката“ (2004) той лансира хипотезата за фракталност на финансовите пазари като алтернатива на хипотезата за ефективния пазар. Хипотезата за фракталност на пазарите постулира зависимост на бъдещите цени от техните минали стойности. По този начин, процесът на ценообразуване на пазарите е глобално детерминиран, зависим от „началните условия“, т.е. от предишните значения. От друга страна, този процес е локално случаен, т.е. във всеки конкретен момент цената има два варианта на развитие.

Хипотезата за фракталност на пазара е основата на фракталния анализ. Първо, тя обосновава фракталността чрез поведението на участниците на пазара, и второ – въз основа на теорията на фракталите, дава общи препоръки (постулати) за фракталния анализ.

Фракталният анализ е опит да се обобщи теорията на пазара на капитал и да се обясни разнорорността на инвестициите. Основен недостатък на традиционната

теория (в това число и на концепцията за ефективност на пазара) се състои в опита ù да опрости пазара до някакъв среден инвеститор. Ситуацията на пазара обаче е много разнородна. Всеки от участниците на пазара има своя причина за участие, и поради това – свой времеви хоризонт. Стабилността на пазара е обусловена от разнородността на участниците в него. Ако всички участници имаха един и същ времеви хоризонт, ако еднакво реагираха на една и съща информация, ако влагаха капитал с едни и същи цели, то тогава пазарът би бил нестабилен. Финансовият пазар е стабилен, защото едни участници в него се стремят към краткосрочна печалба, а други – към дългосрочен икономически ръст. По такъв начин всеки участник диверсифицира другия.

Фондовият пазар се състои от инвеститори, започващи от тик-трейдъри и завършващи с дългосрочни инвеститори. Всеки от тях има индивидуален инвестиционен хоризонт. Тези инвеститори с еднакъв времеви хоризонт могат да се обединят в клъстери, които да се подредят във времето. Стабилният пазар – това е пазара, на който всички участници могат да извършват сделки помежду си, като всички са изложени на еднакъв риск, независимо от времевите си хоризонти. Статистическите изследвания показват, че плътността на разпределението на печалбата е еднаква за дейтрейдърите (с времеви хоризонт от един ден), за трейдърите с едномесечен хоризонт и за такива с тримесечен или едногодишен хоризонт, разбира се, с отчитане на мащаба. С други думи, петминутните трейдъри се сблъскват с такъв риск, както и трейдърите с едномесечен хоризонт.

По такъв начин, пазарът остава стабилен, защото при него липсва характерен времеви мащаб. Ако инвестиционният хоризонт се съкрати и всички станат едноминутни трейдъри (инвеститорите загубват вярата в дългосрочната информация), пазарът ще стане безпорядъчен и нестабилен. Следователно, пазарът може да погълща ударите, дотогава докато съхранява фракталната си структура. Загуби ли тази фракталност, настъпва нестабилността. В системите на хаос и фракталност случайността и необходимостта съжителстват. В тези системи ентропията е висока, но поради глобалния детерминизъм, никога не достига до максимално състояние на безпорядък.

Фракталната статистическа структура съществува, защото е устойчива. Докато участниците на пазара имат различни времеви хоризонти, паниката, настъпила при един от хоризонтите ще бъде потушена от другите инвестиционни хоризонти чрез възможността за покупка (продажба). Ако инвестиционният хоризонт стане еднороден, пазарът навлиза в „свободно падане“, появяват се разриви във времевите финансови редове.

Докато при хипотезата за ефективния пазар (основополагаща за количествения стохастичен анализ) текущата цена отразява цялата налична информация, то при

хипотезата за фракталност на пазара, информацията се оценява според информационните хоризонти на участниците. Тъй като инвеститорите с различни хоризонти оценяват информацията по различен начин, то и разпространението на информацията ще бъде неравномерно. Във всеки времеви интервал цената не може да отразява цялата налична информация, а само тази част от нея, която има значение за инвестиционен хоризонт със същата дължина. При големите времеви интервали, съответстващи на сериозните портфейлни инвеститори преобладаваща е фундаменталната информация, а при малките – техническата.

И накрая, да систематизираме хипотезата за фракталност на финансовите пазари в следните постулати:

Времевите финансови редове (ценовите диаграми) са фрактали с фрактална размерност D , като $1 < D < 2$. Поради това те притежават свойството **мащабна инвариантност** или **скейлинг**. Различните времеви интервали са почти самоподобни.

- Времевите финансови редове винаги имат определена уникална структура. Те имат свойството „памет“ за своите начални условия.
- Горните свойства се дължат на различията във времевите хоризонти на участниците във финансовите пазари и способността им да извличат онази част от наличната информация, имаща значение за техния времеви хоризонт.
- В момент, когато поради една или друга (външна) причина тези времеви хоризонти се сближат, пазарът излиза от устойчивото си състояние на фракталност и навлиза в състояние на срив.

20. Корелационна размерност на времеви ред

Съгласно хипотезата за фракталност на времевите финансови редове, те представляват фрактали. Но поради характерната за тях глобална детерминираност и локална случайност, ние не можем да очакваме, че те ще бъдат геометрични фрактали. Тогава би било прекалено лесно да се работи с тях. Времевите финансови редове, очевидно, са стохастични фрактали. Това налага да направим някои обобщения на понятието фрактална размерност, а именно – информационна, точкова и корелационна размерност.

И така, за да се пресметне фракталната размерност е необходимо да изберем някакво малко δ , да направим покритие на фрактала с фигури (кръгчета, квадратчета) с диаметър δ , да преброим колко такива фигури са необходими за покритието - $N(\delta)$. Така получаваме фракталната размерност D като гранично съотношение (при $\delta \rightarrow 0$) на $\ln N(\delta)$ и $\ln 1/\delta$, т.е.

$$D = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln 1/\delta}$$

Тази проста формула работи перфектно при геонетричните (и въобще детерминирани) фрактали, но при стохастичните има един съществен недостатък – не отчита честотата с която траекторията посещава елементите на покритието.

Информационната размерност се определя по следния начин

$$D_I = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln I(\delta)}{\ln 1/\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\delta)} p_i \ln p_i}{\ln 1/\delta},$$

където $I(\delta)$ е количеството на информация, необходимо за определяне на системата с точност δ , $N(\delta)$ – броя на фигури с диаметър δ , необходими за покритието, p_i – вероятността диаграмата да посети i -тата фигура от покритието.

Точкова размерност. Избираме достатъчно много точки от диаграмата на времевия финансов ред, нека техния брой да е N_0 . Около избрана от нас точка x от диаграмата построяваме окръжност с диаметър δ и преброяваме колко от избраните N_0 на брой точки са се оказали вътре в кръга. Тогава вероятността за това е

$$P(\delta) = \frac{N(\delta)}{N_0},$$

където $N(\delta)$ е този брой. Ако точката x лежи на линия, тогава $P(\delta) \cong b\delta$ при $\delta \rightarrow 0$ и $N_0 \rightarrow \infty$. В общият случай ще имаме $P(\delta) \cong b\delta^{D_p}$, където

$$D_p(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln P(\delta, x)}{\ln \delta}$$

Корелационна размерност. Разглеждаме покритие на диаграмата на времевия ред чрез фигурки с диаметър δ , избираме по случаен начин две точки, принадлежащи на диаграмата - x_1 и x_2 . Вероятността за това една от тези точки да попадне в i -тата фигура от покритието е равна на p_i . Ако попадението и на втората точка в тази фигура може да се счита за независимо събитие, то вероятността двете точки x_1 и x_2 да попаднат в i -тата фигура от покритието е равна на p_i^2 . Сумирайки вероятността по всички клетки от покритието ($N(\delta)$ на брой), получаваме вероятността двете точки да са разделени от разстояние, по-малко от δ :

$$C(\delta) = \sum_{i=1}^{N(\delta)} p_i^2$$

При постепенното намаляване на δ ($\delta \rightarrow 0$) тази сума ще намалява по степенен закон:

$$C(\delta) \sim \delta^{D_c},$$

което е еквивалентно на съществуването на границата

$$D_c = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln C(\delta)}{\ln \delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_{i=1}^{N(\delta)} p_i^2}{\ln \delta},$$

където D_c е корелационната размерност.

21. Индекс на Хърст и R/S анализ на времеви редове

Един от най-популярните методи на фракталния анализ на времевите финансови редове е свързан с пресмятането на индекса на Хърст и произтичащия от това R/S -анализ (R/S -статистика). В продължение на повече от петдесет години изследванията на времеви редове от различен характер (природни, икономически, финансови и др.) се осъществяват на базата на публикуваната от британския учен Хърст (H. E. Hurst) през 1951 г. статия „Long-term Storage of Reservoirs”.

Хърст, по специалност хидролог, е работил над Нилския проект и в продължение на 40 години е наблюдавал разливите на река Нил. Трябвало е да се реши следната задача: какъв обем трябва да има водохранилището, за да не се препълва или пресъхва никога? При построяването на модела са използвали предположението, че неконтролираната част от постъпващата вода представлява случаен процес с независимо събитие (например случайно блуждаене), което е обичайно предположение за всяка голяма система с голям брой степени на свобода.

Проверявайки тази хипотеза, Хърст е предложил нова статистическа характеристика – експонентата на Хърст. Оказало се е, че тази характеристика може да намери широко приложение при изследването на времеви редове от всякакъв характер (в това число и за анализ на времеви финансови редове), тъй като е изключително устойчива и позволява да се разграничат случайните редове с напълно независими едно от друго нараствания от неслучайните редове.

С помощта на алгоритъма на R/S -анализа могат да се разкрият такива свойства на времевите редове като: стойността на индекса на Хърст и съответстващия му „цвет на шума“, оценката на степента на устойчивост на времевия ред (трендоустойчивост с постоянство или хаотичност с непостоянство), наличие на дълготрайна памет и оценка на нейната дълбочина, наличие на цикличност. Значението на индекса на Хърст H и „цвета на шума“ са измежду най-важните фрактални характеристики на времевите редове.

Ще приведем алгоритъма за пресмятане на индекса на Хърст H .

Нека върху дадена величина (в частност това може да бъде цената на една акция от някакъв вид) да са направени наблюденията

$$A = \{A_i\}, i = 1, 2, \dots, N,$$

където N е броя на наблюденията.

Избираме произволен времеви промеждутък $T = n$ и организираме цикъл от $k = 1$ до $k = N - n + 1$. При $k = 1$ избираме първите n наблюдения A_1, A_2, \dots, A_n и пресмятаме пълзящата средна M_{1n} . Времевият ред от натрупаните отклонения се определя като

$$X_{1m} = \sum_{i=1}^m (A_i - M_{1n}), m \leq n$$

По-нататък, при $k = 2$ избираме серията от наблюдения A_2, A_3, \dots, A_{n+1} и пресмятаме пълзящата средна M_{2n} и натрупаните отклонения

$$X_{2m} = \sum_{i=2}^{m+1} (A_i - M_{2n})$$

И накрая, при $k = N - n + 1$ разглеждаме последната серия от n на брой наблюдения $A_{N-n+1}, A_{N-n+2}, \dots, A_N$ и пресмятаме пълзящата средна $M_{N-n+1,n}$ и натрупаните отклонения

$$X_{N-n+1,m} = \sum_{i=N-n+1}^{N-n+m} (A_i - M_{N-n+1,n})$$

Така окончателно се получават $n(N - n)$ на брой натрупани отклонения X_{km} ($k = 1, 2, \dots, N - n + 1; m = 1, 2, \dots, n$).

При следващата стъпка пресмятаме размаха на редицата от натрупаните отклонения $\{X_{km}\}$:

$$R_n = \max(X_{km}) - \min(X_{km})$$

За да можем да сравним така получения размах на натрупаните отклонения, Хърст е предложил да го разделим с пълзящото стандартно отклонение

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N-n+1} (A_i - M_{in})^2$$

Така ние нормираме величината R_n , получавайки безразмерната величина R_n/S_n , измерваща вариацията на времевия ред. Тя очевидно ще расте при нарастването на n до N .

Хърст е извел следното съотношение

$$\frac{R}{S} = aN^H,$$

където a е някаква константа, а H е степенния показател (индекс) на Хърст. Както по-горе N е броя на наблюденията на изучаваната величина. С други думи, налице е степенния закон

$$\frac{R}{S} \sim N^H$$

Ако логаритмуваме горното равенство, ще получим

$$\ln \frac{R}{S} = H \ln N + \ln a$$

Ако варираме броя на наблюденията N и нанасяме $\ln N$ на абсцисната ос, а $\ln \frac{R}{S}$ – на ординатната, то след извършването на линейна регресия по метода на най-малките квадрати, ще получим индекса на Хърст като наклона (тангенса на ъгъла, сключван с абсцисата) на получената от регресията права.

На получената графика често се наблюдава значително отклонение на получаващото се от горната формула H при малки стойности на $\ln N$ (и N). Стойността на N при която се наблюдава „прелом“ на графиката, т.е. пресичане на правата с наклон $H = 0,5$ е стойността, характеризираща продължителността на времето, през което времеви ред „помни“ своето начално състояние.

Ако варираме времето t , можем с нарастването му да включваме нови наблюдения върху величината $A(t)$ и да изключваме толкова стари наблюдения, колкото сме включили, по този начин ще получим локалния индекс на Хърст $H(t)$. На рис. 23 е изобразена компютърно генерирана графика на времевите функции $A(t)$ и $H(t)$, където $A(t)$ (горната графика) е съотношението EUR/USD за периода от 18.01.2007 г до 09.02.2007 г.

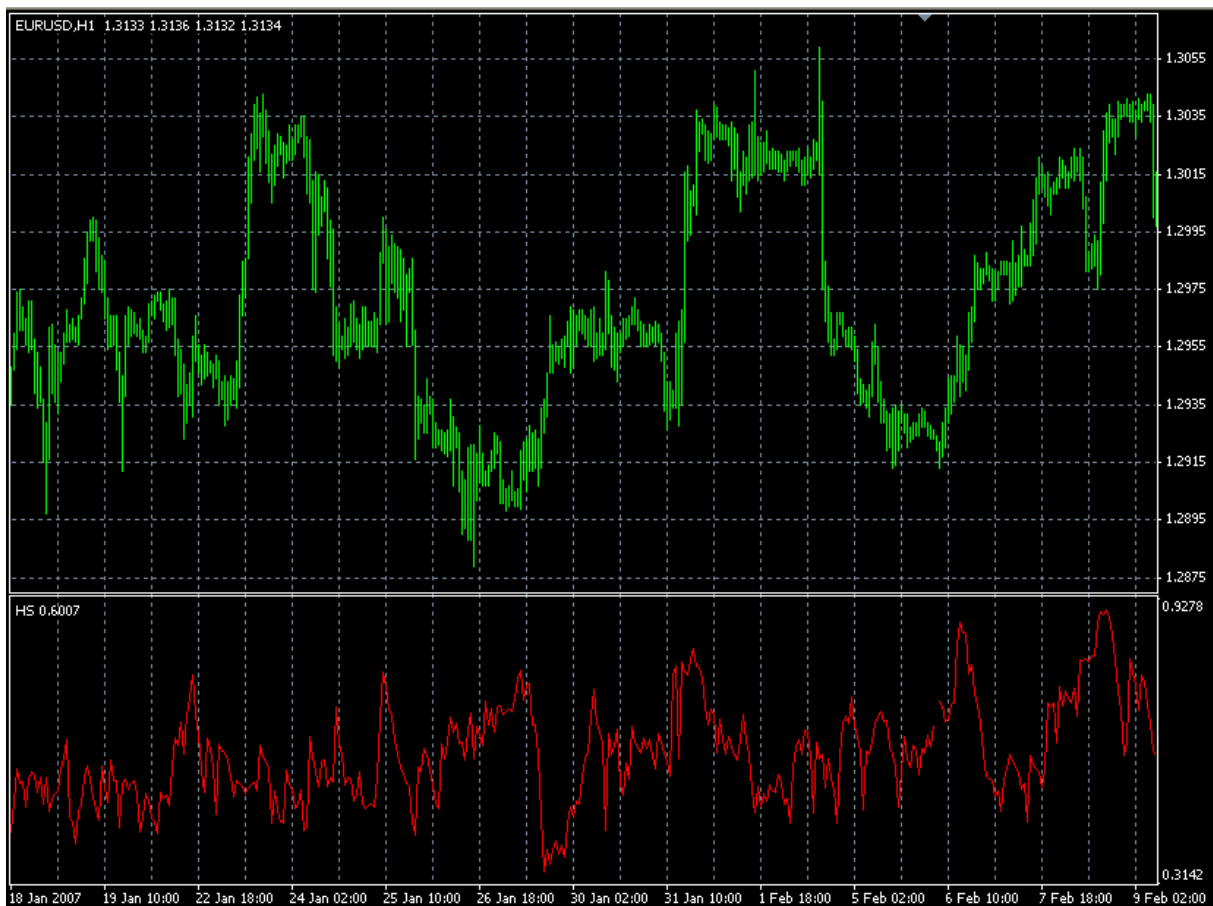


Рис. 23. Диаграми на времевия финансов ред, получен от съотношението EUR/USD за периода от 18.01.2007 г до 09.02.2007 г (горе) и на съответния локален индекс на Хърст

Индексът на Хърст може да взема следните стойности, означаващи различни степени на постоянство/волатилност на времевия ред:

1) $H = 0,5$ означава, че времевият ред се получава от редица от случайни и независими (некорелативни) нараствания. Това е така наречения „бял шум“, характеризиращ се с максимална хаотичност и минимална прогнозируемост. Мярката за корелация, изчисляваща се по формулата

$$C = 2^{2H-1} - 1$$

е равна на нула, т.е. сегашното състояние не влияе на бъдещето.

2) При $0 \leq H \leq 0,5$ се получава времеви ред, отличаващ се с антипостоянство, такъв ред се нарича „розов шум“. С други думи, ако редът е нараствал в предишен период, то голяма е вероятността той да намалява в следващ период и обратно. Колкото по-близко е H до 0, толкова повече мярката за корелация C се приближава до $-0,5$.

3) Случаят $0,5 < H < 1$ съответства на „черен шум“. Това е времеви ред, отличаващ се с дълготрайна памет. Да отбележим, че такива редове се наричат дробни браунови движения (или несиметрично случайно блуждаене). При снoйности на индекса на Хърст, значително по-големи от 0,5, разфлежданият времеви ред става трендоустойчив, т.е. ако редът нараства или намалява в предишен период, то голяма е вероятността той да продължава да го прави и в следващ период. Трендоустойчивостта на поведението на времевия ред нараства с приближаването на H към единица, като шумът става все по-малък и той се приближава до състояние на детерминираност и пълна прогнозируемост. И наистина, при $H = 1$ за мярката на корелативност получаваме $C = 1$.

На рис. 24 са изобразени диаграми на времеви редове при различни стойности на показателя на Хърст.

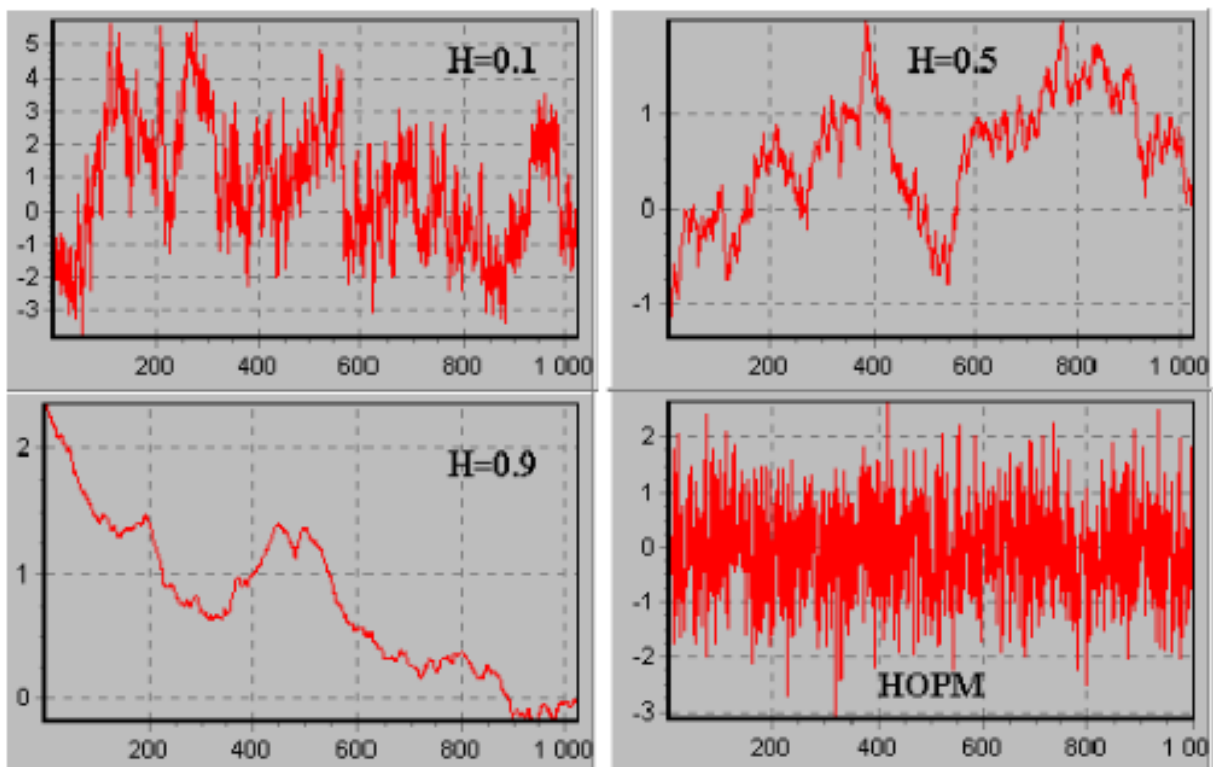


Рис. 24. Диаграми на времеви редове при различни стойности на показателя на Хърст. На диаграмата, разположена долу, вдясно също е изобразен "бял шум" ($H=0,5$), но при нормално разпределение на измененията.

Задача. Имаме следните данни за седмичното изменение на курса евро/долар

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1,19	1,21	1,21	1,20	1,21	1,23	1,21	1,24	1,25	1,23	1,24
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	
1,26	1,24	1,24	1,25	1,23	1,24	1,25	1,25	1,26	1,25	

Да се пресметне R_4/S_4 за периода от $t = 1$ до $t = 6$; за периода от $t = 1$ до $t = 9$ и за периода от $t = 1$ до $t = 12$ и на базата на това, като се използва метода на линейната регресия да се пресметне индекса на Хърст.

Решение:

Пресмятаме коефициента M_{14} :

$$M_{14} = \frac{1}{4}(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = \frac{1}{4}(19 + 21 + 21 + 20) = 20,25.$$

След това пресмятаме

$$X_{11} = A_1 - M_{14} = 19 - 20,25 = -1,25$$

$$X_{12} = (A_1 - M_{14}) + (A_2 - M_{14}) = X_{11} + (A_2 - M_{14}) = -0,5$$

$$X_{13} = X_{12} + (A_3 - M_{14}) = -0,5 + 0,75 = 0,25$$

$$X_{14} = X_{13} + (A_4 - M_{14}) = 0,25 - 0,25 = 0.$$

Ясно е, че при каквито и да е данни, винаги за последния коефициент ще получаваме 0. Сега последователно пресмятаме

$$M_{24} = \frac{1}{4}(A_2 + A_3 + A_4 + A_5) = \frac{1}{4}(21 + 21 + 20 + 21) = 20,75.$$

$$X_{22} = 0,25, X_{23} = 0,5, X_{24} = -0,25, X_{25} = 0;$$

$$M_{34} = \frac{1}{4}(A_3 + A_4 + A_5 + A_6) = \frac{1}{4}(21 + 20 + 21 + 23) = 21,25.$$

$$X_{33} = -0,25, X_{34} = -1,5, X_{35} = -1,75, X_{36} = 0;$$

$$M_{44} = \frac{1}{4}(A_4 + A_5 + A_6 + A_7) = \frac{1}{4}(20 + 21 + 23 + 21) = 21,25.$$

$$X_{44} = -1,25, X_{45} = -1,5, X_{46} = 0,25, X_{47} = 0;$$

$$M_{54} = \frac{1}{4}(A_5 + A_6 + A_7 + A_8) = \frac{1}{4}(21 + 23 + 21 + 24) = 22,25.$$

$$X_{55} = -1,25, X_{56} = -0,5, X_{57} = -1,75, X_{58} = 0;$$

$$M_{64} = \frac{1}{4}(A_6 + A_7 + A_8 + A_9) = \frac{1}{4}(23 + 21 + 24 + 25) = 23,25.$$

$$X_{66} = -0,25, X_{67} = -2,5, X_{68} = -1,75, X_{69} = 0;$$

$$M_{74} = \frac{1}{4}(A_7 + A_8 + A_9 + A_{10}) = \frac{1}{4}(21 + 24 + 25 + 23) = 23,25.$$

$$X_{77} = -2,25, X_{78} = -1,5, X_{79} = 0,25, X_{7,10} = 0;$$

$$M_{84} = \frac{1}{4}(A_8 + A_9 + A_{10} + A_{11}) = \frac{1}{4}(24 + 25 + 23 + 24) = 24.$$

$$X_{88} = 0, X_{89} = 1, X_{8,10} = 0, X_{8,11} = 0;$$

$$M_{94} = \frac{1}{4}(A_9 + A_{10} + A_{11} + A_{12}) = \frac{1}{4}(21 + 24 + 25 + 23) = 23,25.$$

$$X_{99} = 0,5, X_{9,10} = -1, X_{9,11} = -1,5, X_{9,12} = 0;$$

Сега пресмятаме R_4, S_4 и R_4/S_4 за $N = 6, 9, 12$.

За $N = 6$ ще имаме

$$R_4 = \max\{X_{km}\} - \min\{X_{km}\} \text{ при } k = 1, 2, 3; m = 1, \dots, 6 \Rightarrow R_4 = X_{23} - X_{35} \\ = 0,5 - (-1,75) = 2,25.$$

$$S_4^2 = \frac{1}{3}[X_{11}^2 + X_{22}^2 + X_{33}^2] = \frac{1}{3}[(-1,25)^2 + (0,25)^2 + (-0,25)^2] = \frac{9}{16} \Rightarrow S_4 \\ = 0,75$$

$$\frac{R_4}{S_4} = \frac{2,25}{0,75} = 3.$$

За $N = 9$ ще имаме

$$R_4 = \max\{X_{km}\} - \min\{X_{km}\} \text{ при } k = 1, \dots, 6; m = 1, \dots, 9 \Rightarrow R_4 = X_{23} - X_{67} \\ = 0,5 - (-2,5) = 3.$$

$$S_4^2 = \frac{1}{6}[X_{11}^2 + X_{22}^2 + X_{33}^2 + X_{44}^2 + X_{55}^2 + X_{66}^2] \\ = \frac{1}{6}[(-1,25)^2 + (0,25)^2 + (-0,25)^2 + (-1,25)^2 + (-1,25)^2 \\ + (0,25)^2] = \frac{13}{16} \Rightarrow S_4 = 0,901$$

$$\frac{R_4}{S_4} = \frac{3}{0,901} = 3,33.$$

За $N = 12$ ще имаме

$$R_4 = \max\{X_{km}\} - \min\{X_{km}\} \text{ при } k = 1, \dots, 9; m = 1, \dots, 12 \Rightarrow R_4 = X_{89} - X_{67} \\ = 1 - (-2,5) = 3,5.$$

$$S_4^2 = \frac{1}{9} [X_{11}^2 + X_{22}^2 + X_{33}^2 + X_{44}^2 + X_{55}^2 + X_{66}^2 + X_{77}^2 + X_{88}^2 + X_{99}^2] \\ = \frac{1}{9} [(-1,25)^2 + (0,25)^2 + (-0,25)^2 + (-1,25)^2 + (-1,25)^2 \\ + (0,25)^2 + (2,25)^2 + (0)^2 + (0,5)^2] = \frac{13}{16} \Rightarrow S_4 = 1,064$$

$$\frac{R_4}{S_4} = \frac{3,5}{1,064} = 3,3.$$

Сега ще допуснем, че връзката между $\ln R/S$ и $\ln N$ е линейна, т. е. има вида

$$\ln \frac{R}{S} = H \ln N + \ln a$$

Коефициентите на линейност H и $\ln a$ ще определим чрез линейна регресия. За целта съставяме таблицата

N	$\ln N$	$\frac{R}{S}$	$\ln \frac{R}{S}$	$(\ln N)^2$	$\ln N \cdot \ln \frac{R}{S}$
6	1,792	3	1,099	3,211	1,969
9	2,197	3,33	1,203	4,827	2,643
12	2,485	3,3	1,194	6,175	2,967

Пресмятаме сумите на елементите от втората, четвъртата, петата и шестата колона:

$$\sum \ln N = 6,474, \sum \ln \frac{R}{S} = 3,496, \sum (\ln N)^2 = 14,213, \sum \ln N \cdot \ln \frac{R}{S} = 7,579.$$

Сега пресмятаме коефициентите на линейност

$$H = \frac{3 \sum \ln N \cdot \ln \frac{R}{S} - \sum \ln N \cdot \sum \ln \frac{R}{S}}{3 \sum (\ln N)^2 - (\sum \ln N)^2} = \frac{3 \cdot 7,579 - 6,474 \cdot 3,496}{3 \cdot 14,213 - (6,474)^2} = \frac{0,104}{0,726} = 0,143;$$

$$\ln a = \frac{1}{3} \left(\sum \ln \frac{R}{S} - H \sum \ln N \right) = \frac{1}{3} (3,496 - 0,143 \cdot 6,474) = 0,857.$$

Така получаваме окончателно следната линейна зависимост

$$\ln \frac{R}{S} = 0,143 \ln N + 0,857.$$

Тъй като $e^{0,857} = 2,356$, то горното равенство (след антилогаритмуване) можем да запишем и така

$$\frac{R}{S} = 2,356N^{0,143}.$$

22. Индекс на фракталност

Най-простият начин за изследване на фракталната структура на динамичните редове е да се изчисли фракталната им размерност чрез клетъчната размерност D_c . За да определим размерността D_c трябва да разбием равнината, в която е построена графиката на динамичния ред на клетки с размер δ и да определим броя на тези клетки (където се намира поне една точка от графиката) $N(\delta)$. След това, при различни δ ще построим в двоен логаритмичен мащаб графиката на функцията $N(\delta)$, която ще апроксимираме с права, например, с помощта на метода на най-малките квадрати (МНК). Тогава D_c ще се определи от ъгъла на наклон на тази права спрямо абсцисната ос. Главен недостатък на този метод се явява това, че преминаването към степенна асимптотика на функцията $N(\delta)$ при $\delta \rightarrow 0$ обикновено става крайно бавно. По-популярен е метода за определяне на D чрез индекса на Херст H (виж по-долу), който при гаусовите случайни процеси е свързан с D чрез соотношението $H = 2 - D$. Обаче за надежното пресмятане на H се изисква твърде представителен мащаб, нуждаещ се от няколко хиляди данни [63]. В рамките на такъв мащаб динамичните финансови редове, като правило, променят характера на поведението си няколко пъти. За да свържем локалната динамика на динамичния ред с фракталната му размерност, е необходимо да определим размерността D локално. За това, ще се опитаме да намерим такава апроксимираща редица, която при фиксирано δ да е оптимална (в някакъв смисъл). Като умножим двете страни на (21) с $1/\delta$ и вкараме D под знака на логаритъма, получаваме:

$$N(\delta) \sim \delta^{-D} \quad \text{при } \delta \rightarrow 0. \quad (24)$$

Ако сега умножим двете страни на (24) с δ^2 , то определението на размерността може да се запише като степенен закон за лицето на апроксимацията $S(\delta)$:

$$S(\delta) \sim \delta^{2-D} \quad \text{при } \delta \rightarrow 0. \quad (25)$$

Да отбележим, че за разлика от (24) такава форма не изисква симплексите, от които е съставена апроксимацията да са еднакви. Достатъчно е те да имат един и същ геометричен фактор δ . Това ни позволява да използваме апроксимации, които

при дадено δ (в някакъв смисъл) най-добре приближават изходната функция (т.е. са оптимални).

Нека сега върху отсечката $[a, b]$ да е зададена функцията $y = f(t)$, имаща не повече от краен брой точки на прекъсване от първи род: именно такива функции се разглеждат в качеството на моделни, например за динамичните финансови редове. Въвеждаме равномерно разбиване на отсечката

$$\omega_m = [a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b], \quad (26)$$

където $t_i - t_{i-1} = \delta = (b - a) / m$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Покриваме графиката на тази функция с правоъгълници по начин, при който това покритие да е с минимално лице в класа от всички покрития чрез правоъгълници с основа δ (рис. 23). Тогава височината на правоъгълника върху отсечката $[t_{i-1}, t_i]$ ще е равна на амплитудата $A_i(\delta)$, която е разликата между максималната и минимална стойност на функцията $f(t)$ върху този интервал.

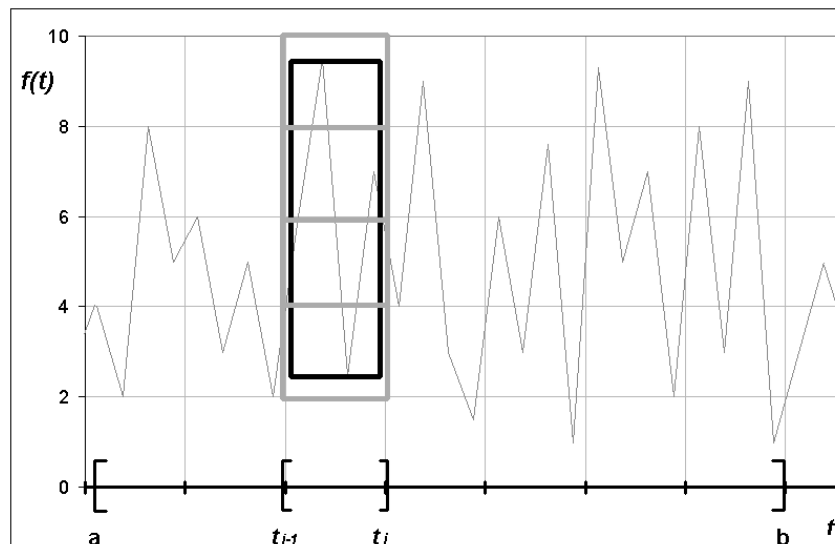


Рис. 23. Минималното (черния правоъгълник) и клеточното (сивия правоъгълник) покритие на функцията $f(t)$ върху интервала $[t_{i-1}, t_i]$, с дължина δ

Въвеждаме величината:

$$V_f(\delta) \equiv \sum_{i=1}^m A_i(\delta), \quad (27)$$

която е вариацията на $f(t)$ при това разбиване на интервала $[a, b]$. Тогава пълното лице на минималното покритие $S_{\mu}(\delta)$ може да се запише във вида:

$$S_{\mu}(\delta) = V_f(\delta)\delta. \quad (28)$$

Тогава от (25) следва, че

$$V_f(\delta) \sim \delta^{-\mu} \quad \text{при } \delta \rightarrow 0, \quad (29)$$

където

$$\mu = D_{\mu} - 1. \quad (30)$$

Ще наричаме размерността D_{μ} **размерност на минималното покритие**. За да сравним D_{μ} с другите размерности, и в частност с клетъчната размерност D_c , ще построим клетъчно разбиване на равнината на графиката на функцията $f(t)$, както е показано на рис. 8. Нека $N_i(\delta)$ е броя на клетките, покриващи графиката на $f(t)$ вътре в отсечката $[t_{i-1}, t_i]$. Тогава:

$$0 < N_i(\delta)\delta^2 - A_i(\delta)\delta < 2\delta^2. \quad (31)$$

Нека да разделим това съотношение на δ и да сумираме по i , отчитайки (27). Като резултат получаваме

$$0 < N(\delta)\delta - V_f(\delta) < 2(b-a), \quad (32)$$

където $N(\delta) = \sum N_i(\delta)$ е пълния брой клетки с размер δ , покриващи графиката на функцията $f(t)$ върху отсечката $[a, b]$. Преминавайки към граничен преход при $\delta \rightarrow 0$, с отчитане на (29) и (30), получаваме:

$$N(\delta)\delta \sim V_f(\delta) \sim \delta^{-\mu} = \delta^{1-D_{\mu}}. \quad (33)$$

От друга страна, съгласно (25)

$$N(\delta)\delta = S_c(\delta)\delta^{-1} \sim \delta^{1-D_c}. \quad (34)$$

Следователно, $D_c = D_{\mu}$.

Да отбележим обаче, че независимо от горното равенство, минималното и клетъчното покритие могат да дават различни приближения на величината $S(\delta)$ към асимптотичен режим (25), като величината на тези различия може да е доста значителна.

Връщайки се към формулата (30), забелязваме, че тъй като $D_\mu = D$ и за едномерна функция $D_T = 1$, то $\mu = D - D_T$. Затова в дадения случай индекса μ е естествено да се нарича **индекс на фракталност**. По-нататък, при анализа на динамичните финансови редове ще разглеждаме индекса на фракталност като основен фрактален показател.

Динамичните финансови редове (редовете от цените на акциите и обменните курсове на валутите) са най-популярните представители на фракталните динамични редове. Съществува надеждно числово потвърждение за фракталния характер на тези редове [64 – 68]. Теоретично фракталността се свързва с това, че на FOREX-пазарите и на фондовата борса присъстват инвеститори с различни хоризонти (от няколко часа до няколко години). Това довежда и до мащабна инвариантност (липса на някакво специално мащабиране) на ценовите редове в съответните времеви интервали [69]. С помощта на индекса на фракталност μ са били изследвани ценовите редове на акциите на тридесет компании, влизащи в индекса на Дау-Джонс (Dow Jones Industrial Index) от 1970 до 2002 г. Всеки от тези редове съдържа 8145 записа. Всеки запис съответства на един търговски ден и съдържа четири значения: информация за минималната и максимална цена, а също и цените при отваряне и затваряне на борсата. В литературата финансовите динамични редове обикновено се изобразяват с помощта на така наречените «японски свещи». Фрагмент от такъв финансов ред за компанията Coca-Cola е представен на рис. 9. За простота на анализа ще се ограничим с последните $2^{12} = 4096$ записи за всяка компания. При изчисляването на индекса μ ще използваме редица от m вложени едно в друго разбивания ω_m (26), където $m = 2^n$; $n = 0, 1, 2, \dots, 12$. Всяко разбиване се състои от 2^n интервала, съдържащи 2^{12-n} търговски дни. За всяко разбиване се изчислява величината $V_f(\delta)$ (27). Тук $A_i(\delta)$ е равна на разликата между максималната и минималната цена в интервала $[t_{i-1}, t_i]$ (в частност, ако $\delta = \delta_0$, то $A_i(\delta)$ е равна на разликата между максималната и минималната цена за деня). Типичен пример за поведението на $V_f(\delta)$ в двоен логаритмичен мащаб е представен на рис. 10 за компанията Microsoft. Ние виждаме, че данните почти точно лежат на права линия, освен двете последни точки, където линейният режим има прекъсване. За определянето на значението на μ по тези данни следва да изключим двете последни точки и да намерим линията на регресия $y = ax + b$ с помощта на метода на най-малките квадрати (МНК). Тогава $\mu = -a$.

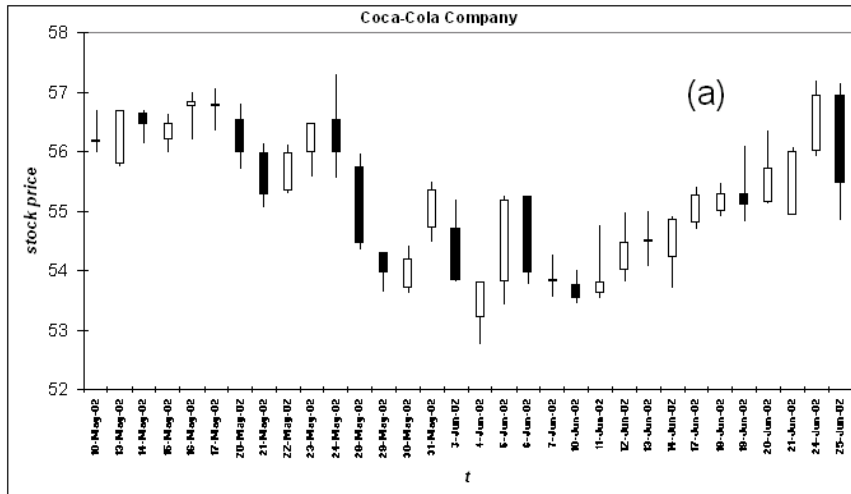


Рис. 24. Типично поведение на цените при интервал от 32 дни (използван е дневния график на цените на акциите на компанията Coca-Cola). Във финансовите графици е прието цените да се изобразяват не с едномерни линии, а с интервали (така наречените барови графици или графици във вида на японски свещи). Един правоъгълник (наричан тяло на свещта) с два щриха отгоре и отдолу (наричани сенки на свещта) изобразява колебанието на цените в рамките на деня. Най-горната точка от горната сянка показва най-високата цена, достигната през деня, а най-долната точка от долната сянка – най-ниската за деня. Горната и долната граница на тялото на свещта показват сените при отваряне и затваряне на борсата. При това, ако тялото е бяло (черно), то при затваряне цената е по-висока (по-ниска), отколкото при отваряне.

При ниво на надежност $\alpha = 0.95$ в приведения пример получаваме $\mu = 0.472 \pm 0.008$, $R^2 = 0.999$. Тук R^2 е коефициент на детерминация за линията на регресия. Резултатите за останалите компании са следните:

$$\mu_{\min} = 0.469 \pm 0.019, R^2 = 0.999 \text{ (Intel Corporation);}$$

$$\mu_{\max} = 0.532 \pm 0.007, R^2 = 0.997 \text{ (International Paper Company).}$$

Да отбележим, че за всяка от 30-те компании графиката на $V_f(\delta)$ почти точно лежи на права линия при всички представителни интервали до 32, а понякога и до 16 дни. При това, за интервали, по-малки от 500 дни, като правило, отсъстват отклонения от линейната част. Типичен пример за $V_f(\delta)$ при интервали до 32 дни е представен на рис. 11а. При $\alpha = 0.95$ ние получаваме $\mu = 0.571 \pm 0.071$, $R^2 = 0.992$.

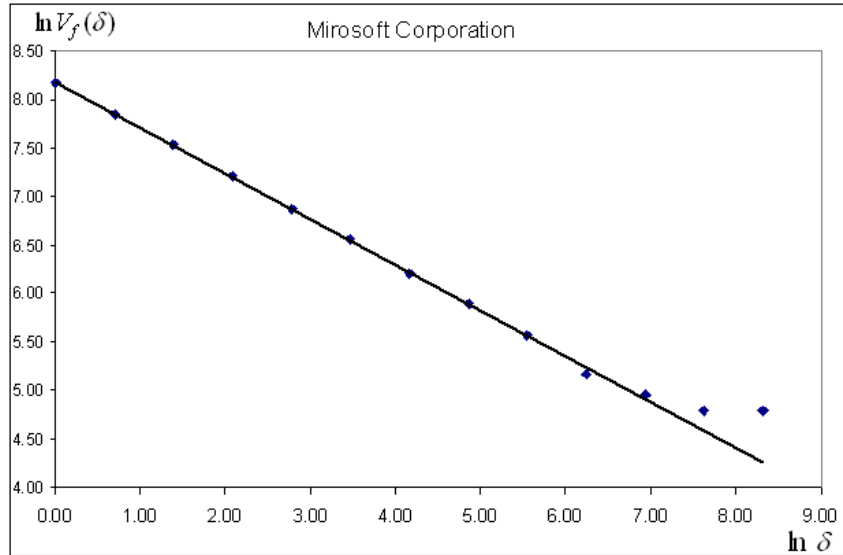


Рис. 25. Резултат от пресмятането на индекса на вариация за динамичния ред на цените на акциите на компанията Microsoft на интервал от 4096 дни. Правата $y = ax + b$ се определя по метода МНК по всички точки с изключение на последните две

За да оценим преимуществата на построения алгоритъм, ще го сравним с метода за изчисляване на фракталната размерност с помощта на индекса на Хърст H . Този метод традиционно се смята за най-ефективен метод за определяне на фракталната размерност на динамичните финансови редове [63]. Както е известно, индексът на Хърст H се определя въз основа на предположението, че

$$\langle |f(t + \delta) - f(t)| \rangle \sim \delta^H \quad \text{при } \delta \rightarrow 0, \quad (35)$$

Където ъгловите скобки означават усредняване по времевия интервал. За да сравним индекса μ с показателя H , ще въведем следното естествено определение за средна амплитуда $\langle A_i(\delta) \rangle$ на разбиването ω_m (виж (26), (27)):

$$\langle A(\delta) \rangle \equiv m^{-1} \sum_{i=1}^m A_i(\delta). \quad (36)$$

Умножаваме (27) с $m^{-1} \sim \delta$ и заместваем в (29). Получаваме:

$$\langle A(\delta) \rangle \sim \delta^{H_\mu} \quad \text{при } \delta \rightarrow 0, \quad (37)$$

където

$$H_\mu \equiv 1 - \mu. \quad (38)$$

Както вече отбелязахме (виж по-горе), ако $f(t)$ е реализация на гаусов случаен процес, то показателя H е свързан с D , а следователно, и с индекса μ , чрез съотношението:

$$H = 2 - D_\mu = 1 - \mu. \quad (39)$$

Следователно, в този случай $H = H_\mu$. Обаче, реалните финансови редове, като правило, не се явяват гаусови (виж например [44,48]) и затова значенията на H_μ и H могат силно да се различават. Действително, във формулата (37) имаме степенен закон за средната амплитуда на функцията $f(t)$ на интервал с дължина δ , в същото време, във формулата (35) имаме степенен закон за средната разлика между началното и крайното значение на $f(t)$ върху същия интервал. Както се оказва, индекса μ се изчислява с порядък по-точно, отколкото показателя на Херст H в подавяващо болшинство от случаите. Да вземем например ценовия ред на компанията Alcoa Inc., която е на първо място по азбучен ред в списъка на индекса Дау-Джонс. Разглеждаме редицата от 32 дневните интервали на изходния динамичен финансов ред (състоящ се от 8145 търговски дни, всеки с четири на брой значения), изместени един спрямо друг с един ден. Общият брой на такива интервали е $N = 8145 - 32 = 8113$. За всеки от тях изчисляваме H и μ на базата на (35) и (27), (29). При пресмятането на H за тези интервали ще използваме $32 + 1 = 33$ цени на затваряне $C(t)$ и осредняваме по непресичащите се подинтервали с дължина $\delta = 2^n$, където $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Това означава, че:

$$\langle |C(t + \delta) - C(t)| \rangle = (\delta/32) \sum_{i=0}^{32/\delta} |C(t_{i+1}) - C(t_i)|, \quad (40)$$

където $t_{i+1} = t_i + \delta$.

В съответствие с предположението (35) за всяко δ пресмятаме

$$x = \ln \delta, \quad y = \langle |C(t + \delta) - C(t)| \rangle \quad (41)$$

и апроксимираме резултатите с права линия

$$y = ax + b \quad (42)$$

с помощта на МНК. След това полагаме $H = a$.

За определянето на индекса μ използваме (27) във вида:

$$V_f(\delta) = \sum_{i=1}^{32/\delta} A_i(\delta), \quad (43)$$

където $A_i(\delta)$ е амплитудата на $f(t)$ във интервала $[t_i, t_i + \delta]$.

В съответствие с предположението (29) изчисляваме за всяко δ

$$x = \ln \delta, \quad y = \ln V_f(\delta) \quad (44)$$

и аппроксимираме получените резултати с права (42) с помощта на МНК. След това полагаме $\mu = -a$.

В качество на критерий за точност на разчетите избираме ширина на доверителния интервал Δ , в който значението на величината μ (или H) попада с вероятност 0,90 и $K = 1 - R^2$, където R^2 е коефициент на детерминация (ако точките лежат точно на правата, то $R^2 = 1$ и $K = 0$).

За всеки от 8113-те интервала се изчисляват μ , Δ_μ , K_μ и H , Δ_H , K_H . Типичните фрагменти от графиките на функциите $\Delta_\mu(t)$, $\Delta_H(t)$ и $K_\mu(t)$, $K_H(t)$, са построени по интервали, десните краища на които съвпадат с момента t , и са представени на рис. 27а и 27б. Както се вижда от тези рисунки, в подавляващото болшинство от случаите индексът μ е определен с порядък по-точно, отколкото H .

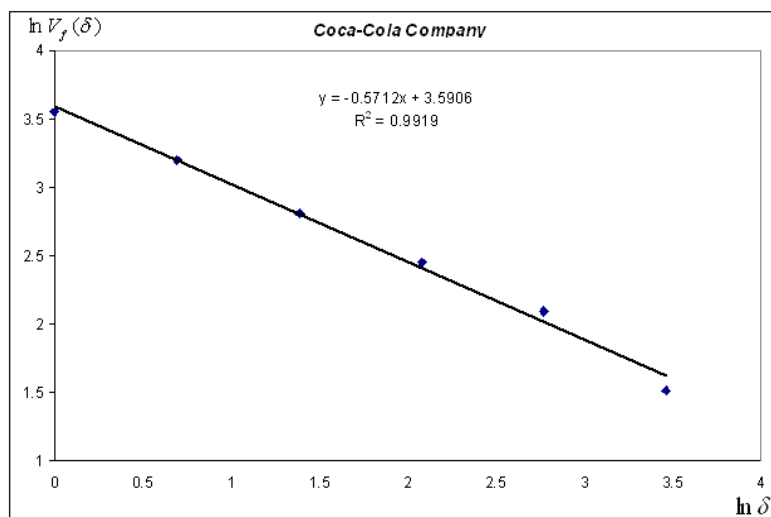


Рис. 26а. Резултат от пресмятането на $V_f(\delta)$ в двоен логаритмичен мащаб за динамичния ред, представен на рис. 24. Правата $y = ax + b$ е построена по метода МНК. За определяне на μ следва да се отъждестви $\mu = -a$

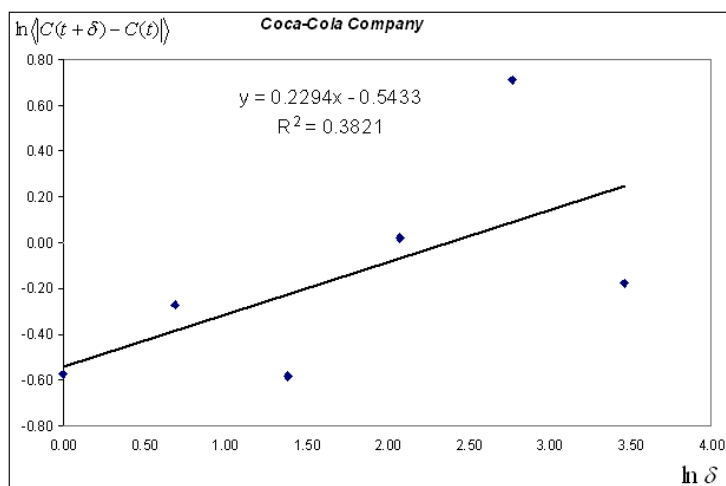


Рис. 26б. Резултат от пресмятането на $\langle |C(t+\delta) - C(t)| \rangle$ (където $C(t)$ е цената при затваряне) за същия ред и съответстващата зависимост $y = ax + b$. За определянето на показателя на Херст H следва да отъждествим $H = a$

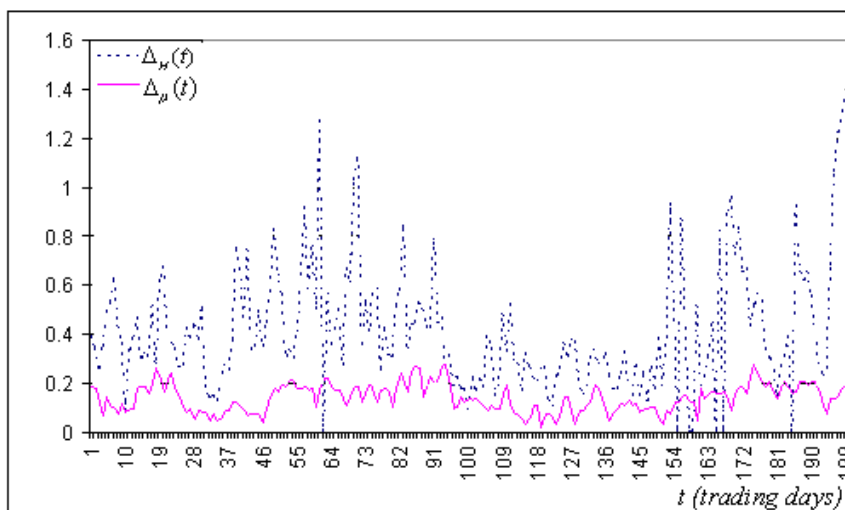


Рис. 27а. Типичен фрагмент от динамичен ред с ширина на доверителните интервали $\Delta_H(t)$ и $\Delta_\mu(t)$, построени по реда от цените на затваряне $C(t)$ за компанията Alcoa Inc.

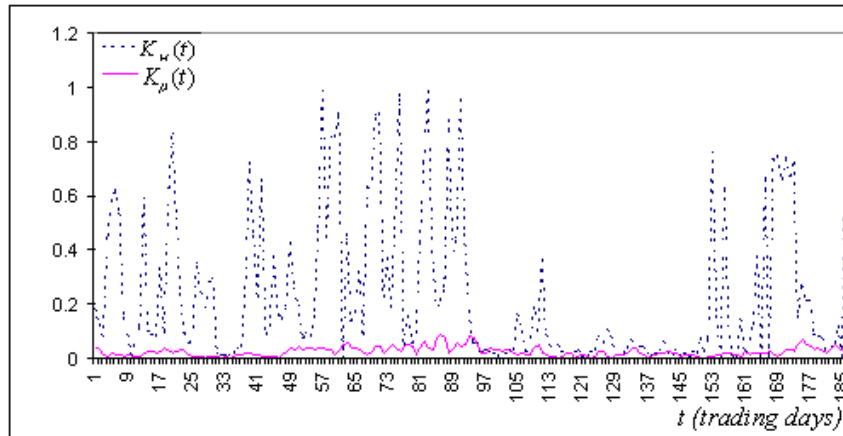


Рис. 276. Съответния фрагмент на реда за значенията на $K_H(t)$ и $K_\mu(t)$, построени по същия ред $C(t)$

Резултатите от проведените изчисления са следните:

$$\langle \Delta_\mu \rangle = 0.107, \quad \langle \Delta_H \rangle = 0.452;$$

$$\langle K_\mu \rangle = 0.0147, \quad \langle K_H \rangle = 0.245.$$

Освен това се оказва, че $\Delta_\mu < \Delta_H$ за 99 %, и $K_\mu < K_H$ за 91 % от изследваните интервали. Аналогични резултати са получени и за други ценови редове. В качеството на типичен пример на рис. 27а и 27б са представени резултатите от пресмятането на μ и H на един и същ 32-дневен интервал, показан на рис. 9. За $\alpha = 0.90$ се получават следните резултати:

$$\mu = 0.571 \pm 0.071, \quad H_\mu = 0.429 \pm 0.071, \quad R_\mu^2 = 0.992;$$

$$H = 0.229 \pm 0.405, \quad R_H^2 = 0.382.$$

Както и следва да се очаква, индексът μ е определен много по-точно, отколкото показателя H .

По такъв начин, главното преимущество на индекса μ в сравнение с други фрактални показатели (в частност с показателя на Хърст H) е това, че съответстващата му величина – вариацията на реда $V_f(\delta)$ има по-бърз преход към степенен асимптотичен режим. Това позволява използването му като локална характеристика, определяща динамиката на изходния процес, тъй като репрезентативния мащаб, необходим за надлежното определяне на индекса μ може да се счита, че е от същия порядък, както мащаба на основното състояние на моделирания процес.

Към такива състояния се отнасят флатовете (периодите на относително спокойствие) и трендовете (периодите на относително дълго движение нагоре или надолу). За да съотнесем значението на μ с поведението на динамичния ред е естествено да въведем функцията $\mu(t)$ като такова значение на μ , което можем да пресметнем със задоволителна точност на минимален, предшестващ t времеви интервал τ_μ . В случай на непрекъсната аргумент t в качеството на такъв интервал може да се вземе произволно малък мащаб. Обаче, тъй като на практика динамичните финансови редове винаги имат минимален мащаб (в нашия случай той е един ден), то τ_μ има крайна дължина (в нашия случай вземаме $\tau_\mu = 32$ дни).

Както се оказва, използването на функцията $\mu(t)$ позволява да се придвижим към решаването на двете основни задачи от анализа на динамичните финансови редове – задачата за идентификация и задачата за прогнозиране.

Задачата за идентификация обикновено се заключава в коректно определяне на макросъстоянието на системата на база наблюдаваната и реализация чрез финансов динамичен ред. За решаването на тази задача са направени разчети на функциите $\mu(t)$ за всяка от компаниите, влизащи в индекса на Дау-Джонс. На рис. 28 е представен типичен фрагмент на ценови ред за такава компания заедно с пресметнатата за този фрагмент функция $\mu(t)$. Достатъчно бегъл поглед на рис. 28 ни убеждава, че индексът μ има отношение към поведението на динамичния ред. И действително, на интервала между 1-я и 39-я ден, при който цената се държи относително стабилно (флат), $\mu(t) > 0.5$. По-нататък, едновременно с развитието на тренд при графиката на цената, $\mu(t)$ пада рязко до значения по-малки от $\mu = 0.5$ и, накрая, след 56-я ден, когато цената е в промеждутъчно състояние между тренд и флат, $\mu(t)$ се връща към стойността $\mu \approx 0.5$. По такъв начин, изходният ред се оказва толкова по-стабилен, колкото по-голямо е значението на μ . При това, ако $\mu > 0.5$ се наблюдава флат, а при $\mu < 0.5$ – тренд. Накрая, ако $\mu \approx 0.5$, то процесът се намира в промеждутъчно състояние между тренд и флат. Подобна корелация между стойностите на μ и характера на поведение на изходния динамичен ред се наблюдава за подавяващо болшинство от участъците на ценовите редове. За да се представят агрегирани резултати, ще се разгледа отново ценовия ред на компанията Alcoa Inc. за периода 1970 – 2002 г. и 8113 интервала с дължина 32 дни, изместени един спрямо друг с един ден. За всеки от тези интервали ще изберем пет показателя за стабилност:

$F_1 = \log(C_i/C_{i-32})$ – логаритмично увеличение на цената при закриване C_i за 32-дневния интервал;

$F_2 = A_i/A_{i-32}$, където A_i – амплитудата на колебание на цените за последните 32 дни;

$F_3 = \sigma[\log(C)]$ – стандартното отклонение на цената при затваряне за последните 32 дни;

F_4 – стойност на коефициента на наклон на линията на линейна регресия, апроксимираща ценовия ред;

$F_5 = \left(C_i - C_{i-32} / \sum_{j=i-31}^i |C_j - C_{j-1}| \right)$ – разлика между текущата цена и цената 32 дни назад, нормирана от сумата на модулите на ежедневните промени на цените за 32 дни.

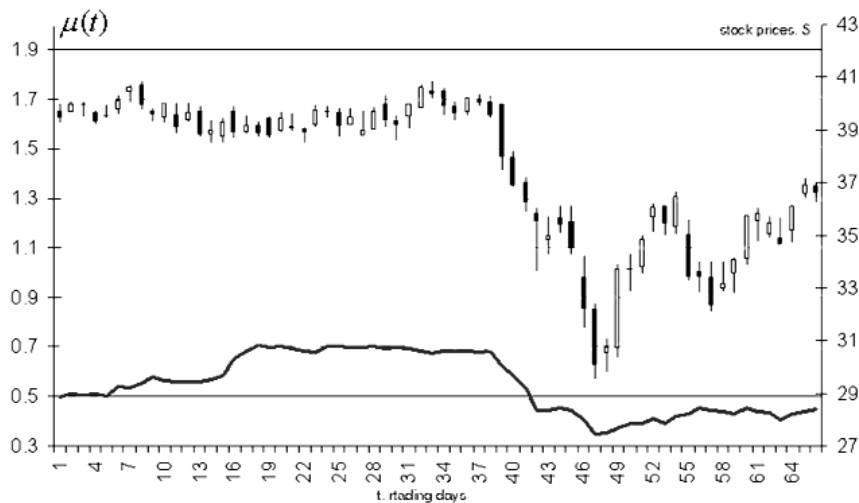


Рис. 28. Ежедневни цени на акциите на компанията Exxon Mobil Corporation (дясна скала – японските свещи) и графика на функцията $\mu(t)$ (лява скала, плътната линия)

За всички избрани показатели на стабилност е справедливо следното твърдение: колкото по-стабилно е поведението на изходния ред (колебанията са малки), толкова по-близко по модул е значението на F_m до нулата и обратното – колкото по-силно е изразен тренда, толкова по-голямо по модул е значението на F_m . На рис. 29 са представени значенията на μ и F_m за всеки от указаните по-горе 32-дневни интервали. От тези диаграми е видна явната корелация между стойностите на фракталния индекс μ и стабилността на ценовия ред. Вижда се, че колкото по-голяма е стойността на μ , толкова по-стабилно е поведението на реда, и колкото по-малко е μ , толкова по-силно в изходния ред е изразен тренда.

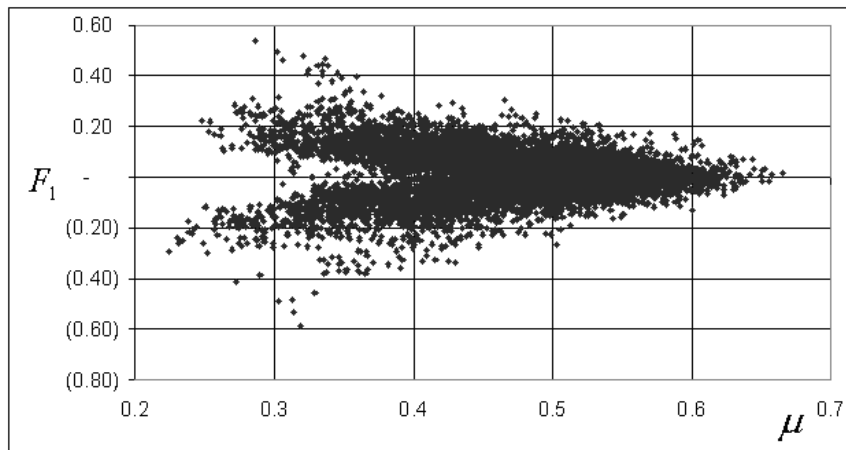
Теоретичната обосновка на такава корелация може да се направи чрез винеровския случаен процес, който се явява класически модел на брауново движение. Да припомним, че от постулатите на този модел (виж въведението) следва, че:

$$\langle (X(t) - X(t_0))^2 \rangle = \sigma^2 |t - t_0|, \quad (45)$$

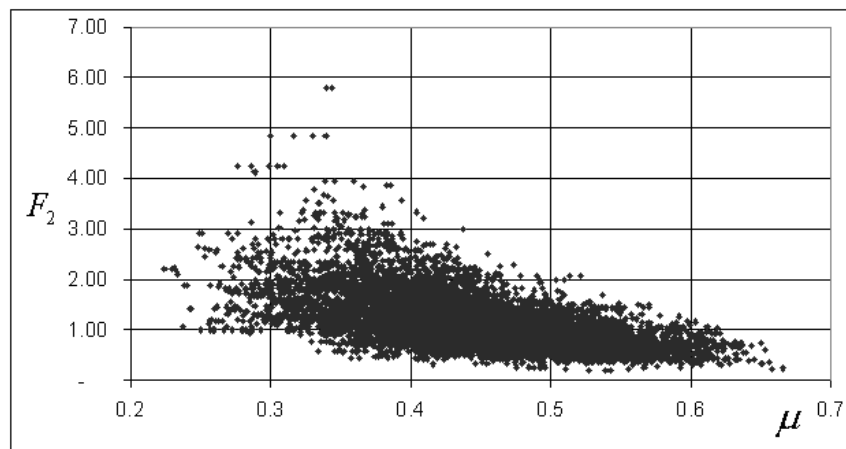
където ъгловите скобки означават статистическо осредняване по времевия интервал; $X(t)$ и $X(t_0)$ – значения на процеса в моментите от време t и t_0 съответно; σ^2 – дисперсия за единица време (във финансовата наука параметъра σ е известен като волатилност). От (45) може да се получи, че този процес се преобразува сам в себе си при изменение на мащаба на времето b пъти и едновременно изменение на пространствения мащаб $b^{1/2}$ пъти. Следователно, фракталната размерност на графиката на този процес е $D = 1.5$ ($\mu = 0.5$).

По-нататък, понеже винеровския процес не притежава памет, то графиката му във всяка своя част ще заема промеждутъчни значения между тренд и флат. От друга страна, тъй като при пресмятането на индекса μ за съответстващия репрезентативен мащаб имаме $\tau_\mu \gg 1$, то изхождайки от формулите (36) – (37) процесът е толкова по-стабилен, колкото по-голяма е стойността на μ (рис. 15). Затова случая $\mu < 0.5$ е естествено да се интерпретира като тренд, а случая $\mu > 0.5$ – като флат. По такъв начин, индексът μ действително се явява показател за стабилност на изходния динамичен ред.

Напомним, че в съответствие с хипотезата за ефективен пазар поведението на цените трябва да бъде близко до случайното блуждаене. Проверката на това предположение обикновено се свежда до изследване на разпределението на ценовите нараствания за нормалност и до изучаването на техните автокорелационни функции [70 – 75]. Изводите, които може да се направят на базата на тези изследвания, не позволяват да се оцени степента на отклонение на динамичните финансови редове от случайното блуждаене. Използването на индекса на вариация μ позволява да се проведе по-подробен анализ.

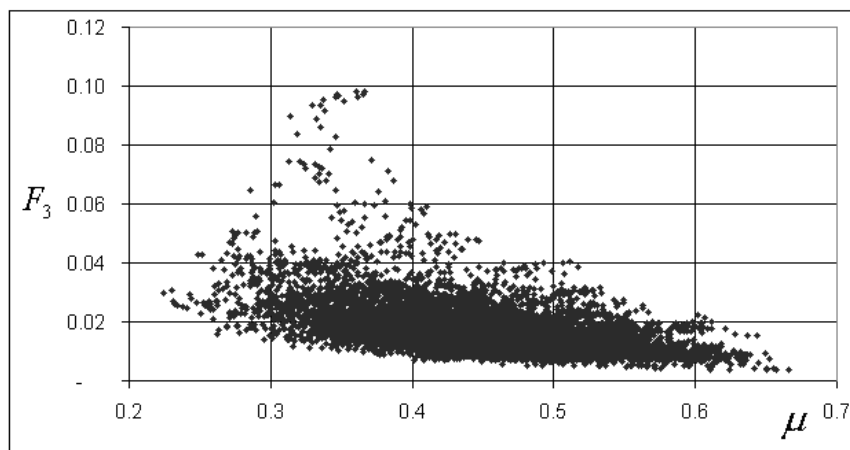


a

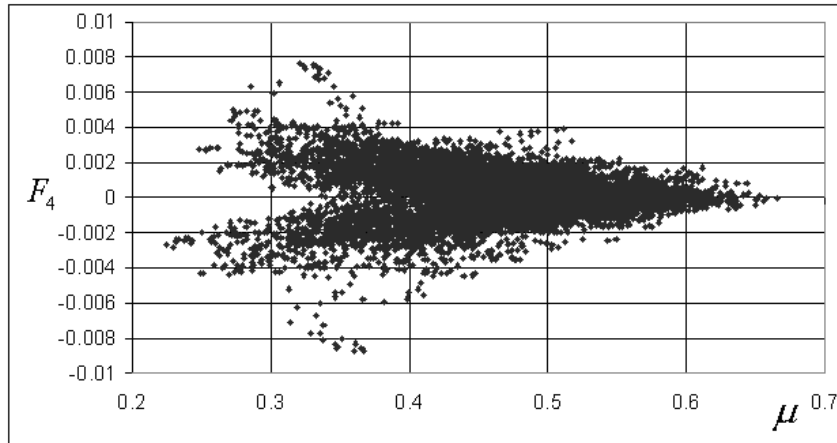


б

Рис. 29. Типични грфики на зависимост между значението на μ и различните показатели на стабилност F_m ($m = 1, 2, 3, 4, 5$) за 32-дневните интервали на ценовия ред на компанията Alcoa Inc.

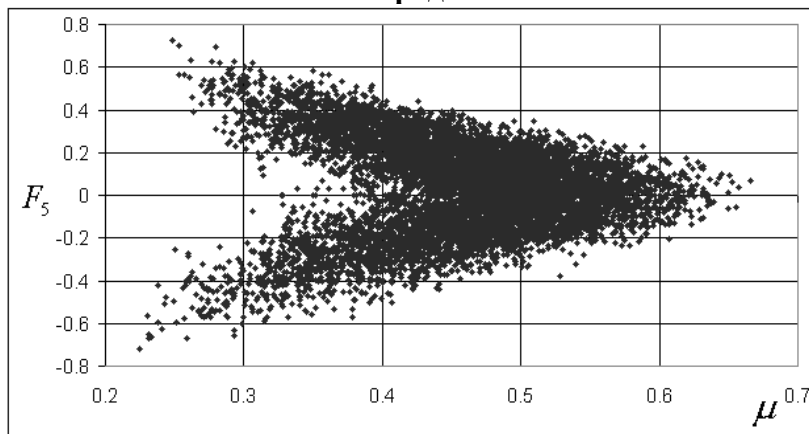


в



2

Рис. 29. Продължение



δ

Рис. 29. Край

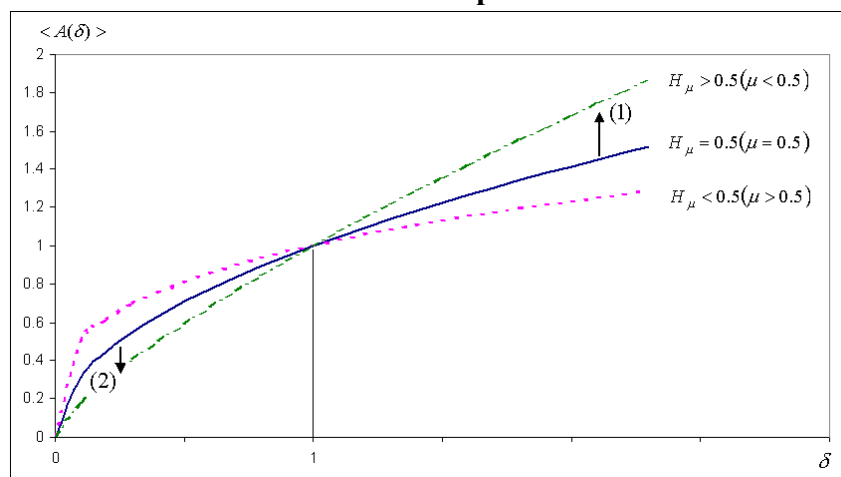


Рис. 30. Зависимост на $\langle A(\delta) \rangle$ за динамичните редове при различни стойности на μ (H_μ): плътната линия съответства на изменение на амплитудата при брауново движение, пунктираната и шрихпунктираната – за трендове и флатове съответно

И наистина, ако използваме локалния показател μ , можем да направим оценка на това за каква част от общото време ценовите редове се намират в различните

състояния. За целта, да се върнем към разгледаните по-горе 32-дневни времеви интервали и да пресметнем за всеки от тях значенията μ , μ_- и μ_+ , където μ_- и μ_+ са съответно долната и горна граница на доверителния интервал, в който истинското значение на μ попада с вероятност 0.9. Ще считаме, че при $\mu_+ < 0.5$ ($\mu_- > 0.5$) редът се намира в състояние на тренд (флат), а при $\mu_- \leq 0.5 \leq \mu_+$ – в състояние на брауново движение. Изчислява се общият брой на сегментите за всеки тип поведение и се пресмята делът от времето, прекарано от първоначалния момент за реда във всяко от състоянията. Резултатът от разчетите за ценовите редове на някои компании е представен в таблицата

Състояние на динамичния ред:	Брауново движение	Тренд	Флат
Alcoa Inc	23 %	43 %	34 %
Boeing Corp	24 %	37 %	39 %
IBM	25 %	39 %	36 %
Microsoft Corp	26 %	36 %	38 %
Exxon Mobile Corp	15 %	50 %	35 %

Аналогични резултати са получеби за целия списък от компании, влизащи в списъка от компании, влизащи в индекса на Дау-Джонс. Както се вижда от табл. 1, динамичните редове се намират в състояние близко до случайното блуждане в по-малко от 30% от общото време. Използвайки получените числови данни и вида на функцията $\mu(t)$ (виж рис. 14), може да се направи следния извод: реалните динамични финансови редова демонстрират сложно непреодично поведение, при което трендове и флатове по хаотичен начин се сменят от брауново движение. Като познаваме значенето на функцията $\mu(t)$, можем да определим какъв тип поведение преобладава във всяка точка от реда.

Най-голям интерес представлява обаче използването на построенията на фракталния анализ за решаване на задачата за прогнозиране на динамичните финансови редове. Оказва се, че наличието на степенна зависимост за функцията $V_f(\delta)$ в достатъчно голям диапазон на мащаби ни позволява да предложим нов подход за прогнозирането на фазовите преходи в хаотичните системи. И наистина, да се обърнем към формули (37), (38) и рис. 30. Да предположим, че динамичния ред се намира в състояние на случайно блуждане. В този случай $D = 1.5$ ($\mu = 0.5$) и зависимостта на $\langle A(\delta) \rangle$ се описва от плътната линия на рис. 30. Предполагаме, че в системата се е извършил фазов преход, в резултат от което динамичния ред преминава в състояние на тренд. Това означава, че след някакво време (т.е. за големи δ) амплитудата на колебанията ще се увеличи (стрелка (1) на рис. 30). Обаче, както е видно от графиката, прехода на динамичния ред към ново състояние предизвиква едновременно намаляване на амплитудата при малки мащаби (стрелка (2) на рис. 30). По такъв начин, увеличаването на едромашабните флуктации води

до намаляване на дребномащабните и обратно. Този ефект, който служи за ключ към прогнозата за силни флуктации в големи мащаби и следва от наличието на степенен закон, е бил в действително намерен и потвърден при обработката на голямо количество емпирични данни.

Литература

- [1] В. Милева, Бръсначът на Окам, <http://bgchaos.com/>
- [2] В. К. Балханов, Основы фрактальной геометрии и фрактального исчисления, Улан-Удэ, 2013, ISBN 978-5-9793-0549-3
- [3] И. К. Борисович, Фрактальная геометрия, Казань, 2010
- [4] Д. И. Иудин, Е. В. Копосов, Фракталы: от простого к сложному, Нижны Новгород, 2014, ISBN 978-5-87941-829-3
- [5] Б. Мандельброт, Фрактальная геометрия природы, Москва, 2002
- [6] Н. Талев, Черният лебед, Инфодар, София, 2011, ISBN: 978-954-761-499-4
- [7] Д. И. Трубецков, Е. Г. Трубецкова, Фракталы и время (от Ричардсона и Мандельброта до Поллока). Фрактальная геометрия, Москва, 2017, ISBN 978-5-906906-45-8.
- [8] List of fractals by Hausdorff dimension, https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_fractals_by_Hausdorff_dimension
- [9] Fractal, <https://en.wikipedia.org/wiki/Fractal>
- [10] М.М. Дубовиков, Н.В. Старченко, Финансовая компания «Интраст», Экономическая физика и анализ финансовых временных рядов
- [11] В. И. Жижилев, Оптимальные стратегии извлечения прибыли на рынке FOREST и ценных бумаг, Москва, Изд. „Финансовы консултант“, 2002
- [12] Алмазов А. А., Фрактальная теория финансовые рынки