

# ФРАКТАЛЕН АНАЛИЗ НА ВРЕМЕВИТЕ РЕДОВЕ

## 1. Първи опити за фрактален анализ на финансовите пазари

През 1938 г, когато научният свят е силно впечатлен от току-що появилата се теория на фракталите, известният американски финансист Ралф Нилсън Елиот (*Ralph Nelson Elliott*) в книгата си „Вълнов принцип“ (*The Wave Principle*) предлага своя теория за поведението на цените на акциите, основана на теорията на фракталите. За основа на теорията му служи така наречената вълнова диаграма. Следвайки масовата психология, цялото движение на цените (времевият финансов ред) се разбива на пет вълни по направление на силен тренд и на три вълни – в обратното направление. Например, в случая на доминиращ тренд, ние виждаме пет вълни при движението на цените нагоре и три – при движението (корекцията) надолу. За означаване на петвълновия тренд се използват цифри, а за тривълновия – букви (рис. 1). Всяко от петвълновите движения се нарича импулсно, а от тривълновите – корективно.

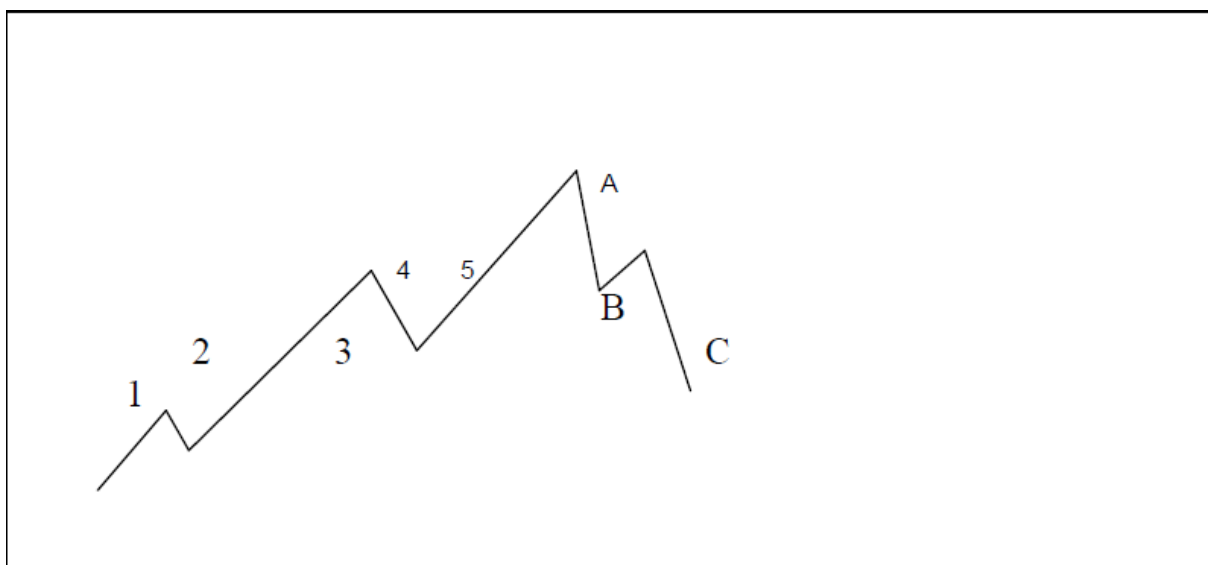
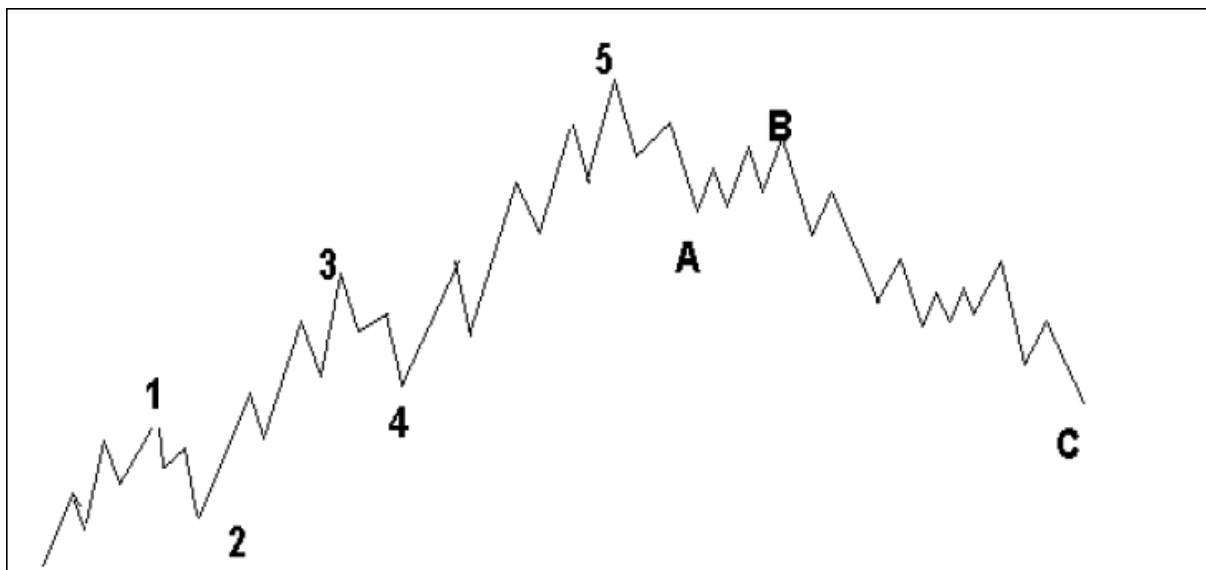


Рис. 1. Вълни на Елиот

Предположението на Елиот е, че всяка от тези импулсни и коректиращи вълни също се представя чрез вълнова диаграма на Елиот, при която се появяват нови (по-малки) вълни. По такъв начин, Елиот прилага теорията на фракталите за разлагане на тренда на по-малки части. Познаването на тези по-малки части, мащабирано в по-малки мащаби от мащаба на цялата вълнова диаграма е от голямо значение за трейдъра. Ако той знае в коя част на диаграмата се намира, ще може уверено да продава ценните книжа, когато започва коректираща вълна и да купува, ако започва импулсна вълна.

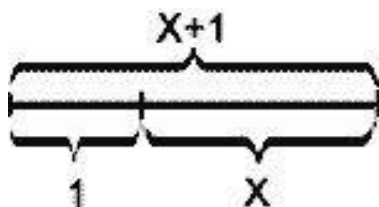


**Рис. 2. Фрактална структура на вълновата диаграма на Елиот - първа стъпка**

Освен това, Елиот изказва предположението, че съотношението на мащабите при две последователни стъпки е свързано със забележителното **златно сечение**.

Нека да припомним какво е златното сечение.

**Определение.** Ако една отсечка се раздели на две части – голяма и малка и съотношенията на дължините между голямата и малката част и между цялата отсечка и голямата част са равни, то тази пропорция наричаме златно сечение.



Ако дължината на по-малката отсечка приемем за 1, а дължината на по-голямата за  $x$ , тогава ще е изпълнено

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1} \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1,61803398 \dots$$

Това число се означава с главната гръцка буква  $\Phi$  (фи) - първата буква в името на Фидий.

Любопитно е, че  $1/\Phi = 0.61803398\dots$  – числото  $\Phi$  е единственото положително число, което се превръща в реципрочното си при изваждане на единица. Може да се представи и като сума от безкрайния ред:

$$\Phi = 1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(1 + \dots)))$$

или

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

$\Phi$  е границата, към която се стреми отношението на два последователни члена от реда на Фибоначи – 1,1,2,3,5,8,13,21,... , при който всеки член е сума от предходните два члена, т.е.

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1},$$

като първите два члена  $a_1$  и  $a_2$  са единици. И наистина, ако разделим двете страни на горното равенство с  $a_n$  получаваме

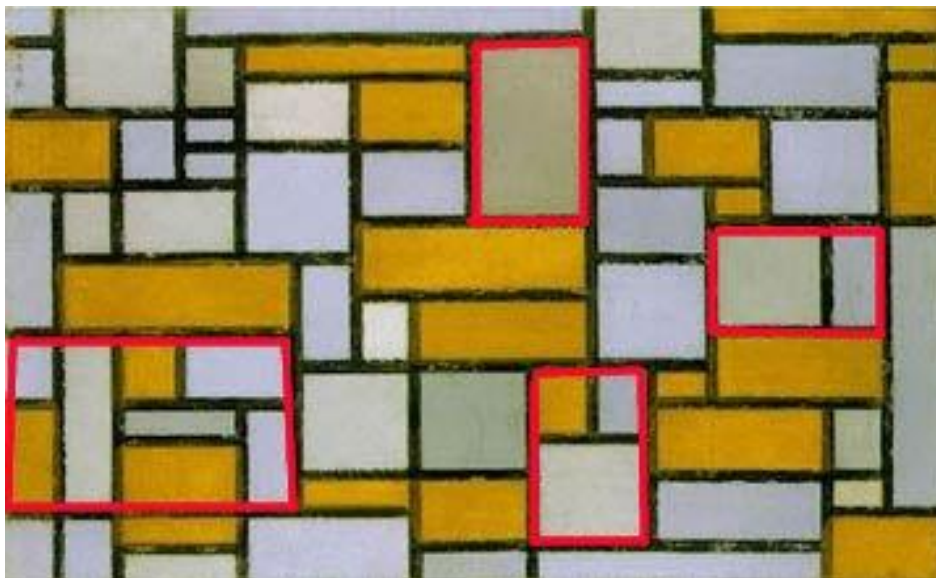
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

Нека  $x$  да е границата на съотношението на два последователни члена на редицата при  $n \rightarrow \infty$ , т.е.

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Тогава при граничен преход ще получим

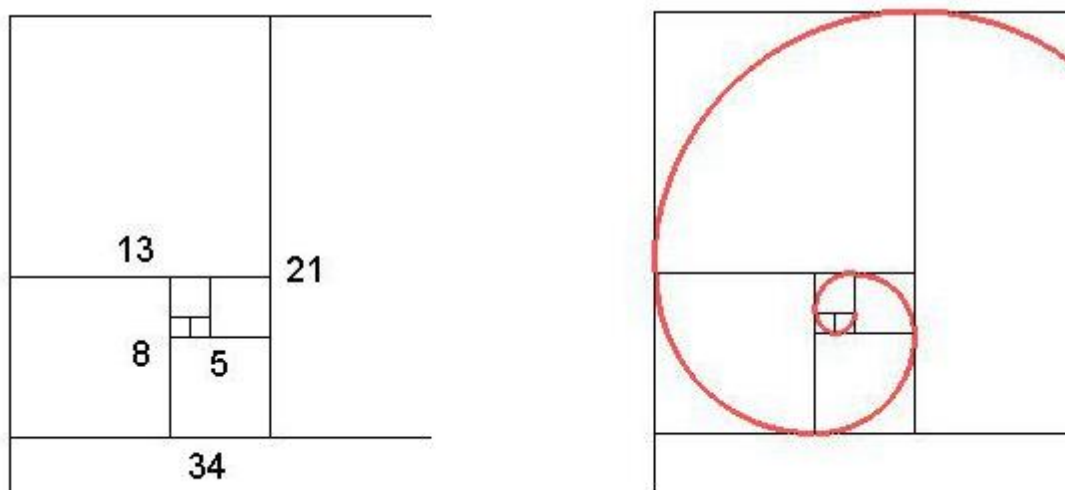
$$x = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \Phi$$



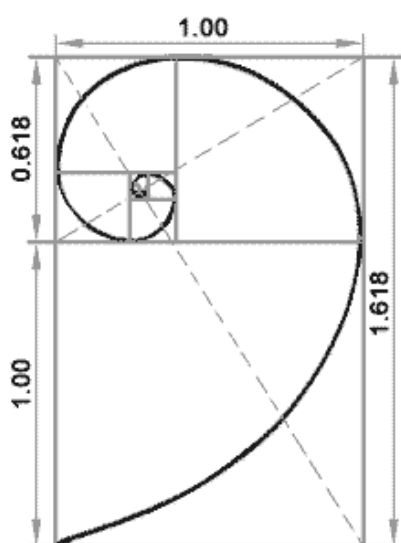
**Рис. 3. Златни правоъгълници в картина на Мандриан**

Златното сечение, от ренесанса до наши дни, се счита от художници и архитекти за мерило на красота и хармония. Това е така, поради изключително широкото разпространение на това съвършено съотношение в заобикалящата ни природа.

Като пример за това можем да разгледаме така наречената спирала на **Фибоначи**. Тя се получава по следния начин: най-напред вземаме два малки квадрата със страни 1, след това продължаваме да добавяме квадрати около изображението като всеки нов квадрат има страна, която е сума от последните две страни на квадрати. Тази група правоъгълници, чиито страни имат дължини две последователни числа на Фибоначи и която се формира от квадрати със страни, които са числа на Фибоначи, се наричат **правоъгълници на Фибоначи**. (рис. 4)



**Рис. 4. Получаване на спиралата на Фибоначи от квадратите и правоъгълниците на Фибоначи**



**Рис. 5. Получаване на спиралата на Фибоначи от златни правоъгълници**

Ако във всеки от горните квадрати впишем по четвърт кръг, ще получим **спиралата на Фибоначи**. Тази спирала не е истинска математическа логаритмична спирала, защото се съставя от фрагменти, но е добро приближение. Наричат я още **спирала на Бернули**, **логаритмична спирала**, **равноъгълна спирала**, и др. Същата спирала може да се получи и от златните правоъгълници. Това са правоъгълници, чиито страни са в златно съотношение. Златният правоъгълник има някои интересни свойства. Ако отрежем от златния правоъгълник квадрат, страната на който е равна на по-малката страна на правоъгълника, остатъкът ще

бъде отново златен правоъгълник, но с по-малки размери. Ако продължаваме да отрязваме квадрати, ще получаваме все по-малки и по-малки златни правоъгълници (рис. 5). При това ще са подредени по логаритмична спирала, съвсем същата като тази, която се образува от квадрати със страни, числата на Фибоначи. Полюсът на спиралата лежи на пресечната точка на диагоналите на началния правоъгълник и първия отрязан правоъгълник. При това диагоналите на всички следващи намаляващи златни правоъгълници минават през този полюс.

Такива спирали може да видим във формата на черупките на някои мекотели, а също и в подредбата на семената на цветовете на някои растения, семенниците на шишарките, ананаса, ухото и много други образувания. И коефициента на нарастване е много близък до 1,618.



Тази спирала е единствената, която запазва **формата си** при увеличаване на размерите. Това нейно свойство обяснява широкото и разпространение в природните образувания. Например, когато охлювът **Nautflus** расте като неговата раковина, разделена с вътрешни преградни стенички, увеличава



размерите си, като се навива по спирала. При това черупката на охлюва не променя формата си, ако увеличим мащаба. Подобни форми могат да се наблюдават както при галактиките и атмосферните явления, така и доста често в растителния и животински свят. Това свойство може да се нарече самоподобие и има пряка връзка с фракталите.

Да се върнем отново към финансовите пазари.



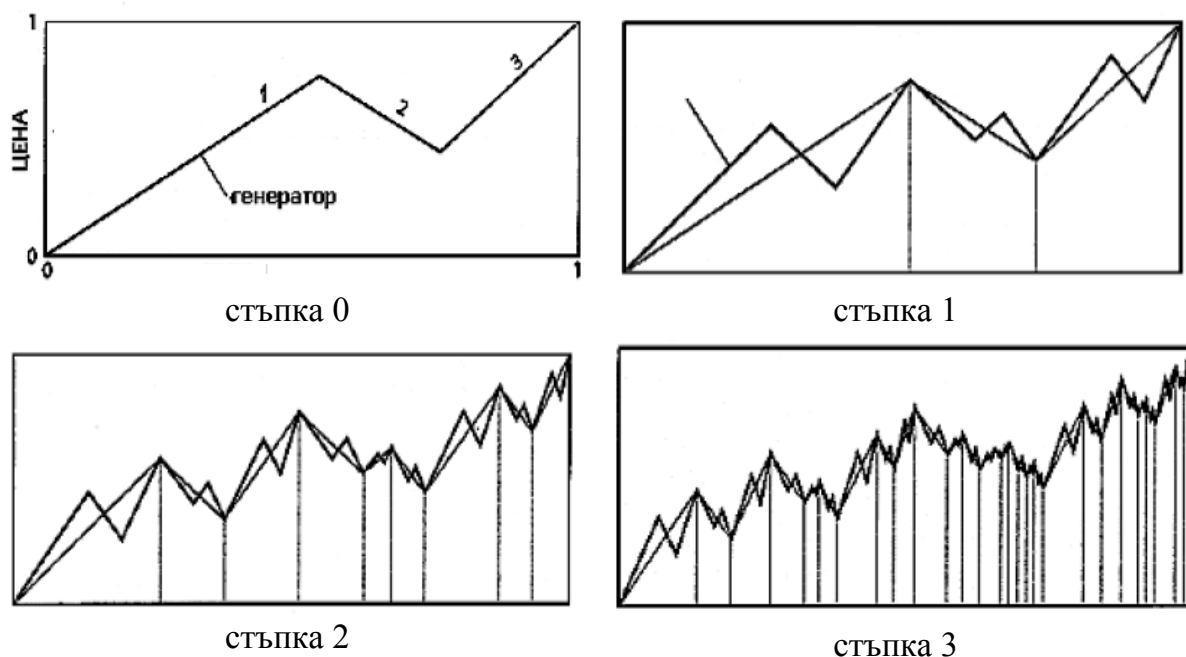
**Рис. 6. Фрактален анализ на индекса на американския долар (DX) с Hurst (Sentient Trader), използваща принципа на вълните на Елиът и златното сечение (числата на Фибоначи)**

На рис. 6 е дадена графична интерпретация на анализ на времеви ред, получен от доларовия индекс, като е използвана вълновата методика на Елиът.

На самия Елиът принадлежи мисълта: „На всяка човешка дейност са присъщи три отличителни особености: форма, време и отношение - и всичките те се подчиняват на реда на Фибоначи“.

След Елиът, Менделброт продължава изследванията на времевите финансови редове с методите на фракталния анализ. На рис. 7 е представен предложението от него фрактален генератор от три части (вълни)(стъпка 0), който може да се итерира многократно (в стъпки 1, 2 и 3). Така се получава модел, силно напоявящ за пазарните ценови колебания. Показани са само първите итерации, макар процесът да може да се продължи още. Според теорията на фракталите, итерациите са безброй много, но на практика е безсмислено да се правят итерации след достигането на времеви интервали, по-къси от времето необходимо за сключване на реални сделки с финансовия актив. Избраният

генератор илюстрира така наречените унифрактални криви, съответстващи на една относително спокойна картина на пазара.



**Рис. 7. Фрактален модел на Менделброт за пазарните ценови колебания**

Но спокойствието на финансовите пазари е налице само при крайно специфични условия. За да покаже обичайното състояние на пазара, Менделброт от унифрактала (генератора) посредством итеративни стъпки създава така наречения мултифрактал. Този метод не се опитва да прогнозира цената на финансовия инструмент, той само помага да се оцени вероятността за нейното покачване или спад.

## **2. Хипотеза за фракталност на финансовия пазар**

Следващият изследовател с принос във фракталния анализ на финансовите пазари е Е. Петерс. В своята книга „Фрактален анализ на финансовите пазари. Приложение на теорията на хаоса в инвестициите и икономиката“ (2004) той лансира хипотезата за фракталност на финансовите пазари като алтернатива на хипотезата за ефективния пазар. Хипотезата за фракталност на пазарите постулира зависимост на бъдещите цени от техните минали стойности. По този начин, процесът на ценообразуване на пазарите е глобално детерминиран, зависим от „началните условия“, т.е. от предишните значения. От друга страна, този процес е локално случаен, т.е. във всеки конкретен момент цената има два варианта на развитие.

Хипотезата за фракталност на пазара е основата на фракталния анализ. Първо, тя обосновава фракталността чрез поведението на участниците на пазара, и второ –

въз основа на теорията на фракталите, дава общи препоръки (постулати) за фракталния анализ.

Фракталният анализ е опит да се обобщи теорията на пазара на капитал и да се обясни разнорорността на инвестициите. Основен недостатък на традиционната теория (в това число и на концепцията за ефективност на пазара) се състои в опита ѝ да опрости пазара до някакъв среден инвеститор. Ситуацията на пазара обаче е много разнородна. Всеки от участниците на пазара има своя причина за участие, и поради това – свой времеви хоризонт. Стабилността на пазара е обусловена от разнородността на участниците в него. Ако всички участници имаха един и същ времеви хоризонт, ако еднакво реагираха на една и съща информация, ако влагаха капитал с едни и същи цели, то тогава пазарът би бил нестабилен. Финансовият пазар е стабилен, защото едни участници в него се стремят към краткосрочна печалба, а други – към дългосрочен икономически ръст. По такъв начин всеки участник диверсифицира другия.

Фондовият пазар се състои от инвеститори, започващи от тик-трейдъри и завършващи с дългосрочни инвеститори. Всеки от тях има индивидуален инвестиционен хоризонт. Тези инвеститори с еднакъв времеви хоризонт могат да се обединят в клъстери, които да се подредят във времето. Стабилният пазар – това е пазара, на който всички участници могат да извършват сделки помежду си, като всички са изложени на еднакъв риск, независимо от времените си хоризонти. Статистическите изследвания показват, че плътността на разпределението на печалбата е еднаква за дейтрейдърите (с времеви хоризонт от един ден), за трейдърите с едноседмичен хоризонт и за такива с тримесечен или едногодишен хоризонт, разбира се, с отчитане на мащаба. С други думи, петминутните трейдъри се сблъскват с такъв риск, както и трейдърите с едномесечен хоризонт.

По такъв начин, пазарът остава стабилен, защото при него липсва характерен времеви мащаб. Ако инвестиционният хоризонт се съкрати и всички станат едноминутни трейдъри (инвеститорите загубват вярата в дългосрочната информация), пазарът ще стане безпорядъчен и нестабилен. Следователно, пазарът може да поглъща ударите, дотогава докато съхранява фракталната си структура. Загуби ли тази фракталност, настъпва нестабилността. В системите на хаос и фракталност случайността и необходимостта съжителстват. В тези системи ентропията е висока, но поради глобалния детерминизъм, никога не достига до максимално състояние на безпорядък.

Фракталната статистическа структура съществува, защото е устойчива. Докато участниците на пазара имат различни времеви хоризонти, паниката, настъпила при един от хоризонтите ще бъде потушена от другите инвестиционни



хоризонти чрез възможността за покупка (продажба). Ако инвестиционният хоризонт стане еднороден, пазарът навлиза в „свободно падане“, появяват се разриви във времеви финансови редове.

Докато при хипотезата за ефективния пазар (основополагаща за количествения стохастичен анализ) текущата цена отразява цялата налична информация, то при хипотезата за фракталност на пазара, информацията се оценява според информационните хоризонти на участниците. Тъй като инвеститорите с различни хоризонти оценяват информацията по различен начин, то и разпространението на информацията ще бъде неравномерно. Във всеки времеви интервал цената не може да отразява цялата налична информация, а само тази част от нея, която има значение за инвестиционен хоризонт със същата дължина. При големите времеви интервали, съответстващи на сериозните портфейлни инвеститори преобладаваща е фундаменталната информация, а при малките – техническата.

И накрая, да систематизираме хипотезата за фракталност на финансовите пазари в следните постулати:

Времеви финансови редове (ценовите диаграми) са фрактали с фрактална размерност  $D$ , като  $1 < D < 2$ . Поради това те притежават свойството **машабна инвариантност** или **скейлинг**. Различните времеви интервали са почти самоподобни.

- Времеви финансови редове винаги имат определена уникална структура. Те имат свойството „памет“ за своите начални условия.
- Горните свойства се дължат на различията във времеви хоризонти на участниците във финансовите пазари и способността им да извличат онази част от наличната информация, имаща значение за техния времеви хоризонт.
- В момент, когато поради една или друга (външна) причина тези времеви хоризонти се сближат, пазарът излиза от устойчивото си състояние на фракталност и навлиза в състояние на срив.

### 3. Корелационна размерност на времеви ред

Съгласно хипотезата за фракталност на времеви финансови редове, те представляват фрактали. Но поради характерната за тях глобална детерминираност и локална случайност, ние не можем да очакваме, че те ще бъдат геометрични фрактали. Тогава би било прекалено лесно да се работи с тях. Времеви финансови редове, очевидно, са стохастични фрактали. Това налага

да направим някои обобщения на понятието фрактална размерност, а именно – информационна, точкова и корелационна размерност.

И така, за да се пресметне фракталната размерност е необходимо да изберем някакво малко  $\delta$ , да направим покритие на фрактала с фигури (кръгчета, квадратчета) с диаметър  $\delta$ , да преброим колко такива фигури са необходими за покритието -  $N(\delta)$ . Така получаваме фракталната размерност  $D$  като гранично съотношение (при  $\delta \rightarrow 0$ ) на  $\ln N(\delta)$  и  $\ln 1/\delta$ , т.е.

$$D = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln 1/\delta}$$

Тази проста формула работи перфектно при геонетричните (и въобще детерминирани) фрактали, но при стохастичните има един съществен недостатък – не отчита честотата с която траекторията посещава елементите на покритието.

**Информационната размерност** се определя по следния начин

$$D_I = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln I(\delta)}{\ln 1/\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\delta)} p_i \ln p_i}{\ln 1/\delta},$$

където  $I(\delta)$  е количеството на информация, необходимо за определяне на системата с точност  $\delta$ ,  $N(\delta)$  – броя на фигури с диаметър  $\delta$ , необходими за покритието,  $p_i$  – вероятността диаграмата да посети  $i$ -тата фигура от покритието.

Точкова размерност. Избираме достатъчно много точки от диаграмата на времеви финансов ред, нека техния брой да е  $N_0$ . Около избрана от нас точка  $x$  от диаграмата построяваме окръжност с диаметър  $\delta$  и преброяваме колко от избраните  $N_0$  на брой точки са се оказали вътре в кръга. Тогава вероятността за това е

$$P(\delta) = \frac{N(\delta)}{N_0},$$

където  $N(\delta)$  е този брой. Ако точката  $x$  лежи на линия, тогава  $P(\delta) \cong b\delta$  при  $\delta \rightarrow 0$  и  $N_0 \rightarrow \infty$ . В общият случай ще имаме  $P(\delta) \cong b\delta^{D_p}$ , където

$$D_p(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln P(\delta, x)}{\ln \delta}$$

**Корелационна размерност.** Разглеждаме покритие на диаграмата на времеви ред чрез фигурки с диаметър  $\delta$ , избираме по случаен начин две точки, принадлежащи на диаграмата -  $x_1$  и  $x_2$ . Вероятността за това една от тези точки

да попадне в  $i$ -тата фигура от покритието е равна на  $p_i$ . Ако попадението и на втората точка в тази фигура може да се счита за независимо събитие, то вероятността двете точки  $x_1$  и  $x_2$  да попаднат в  $i$ -тата фигура от покритието е равна на  $p_i^2$ . Сумирайки вероятността по всички клетки от покритието ( $N(\delta)$  на брой), получаваме вероятността двете точки да са разделени от разстояние, по-малко от  $\delta$ :

$$C(\delta) = \sum_{i=1}^{N(\delta)} p_i^2$$

При постепенното намаляване на  $\delta$  ( $\delta \rightarrow 0$ ) тази сума ще намалява по степенен закон:

$$C(\delta) \sim \delta^{D_c},$$

което е еквивалентно на съществуването на границата

$$D_c = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln C(\delta)}{\ln \delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_{i=1}^{N(\delta)} p_i^2}{\ln \delta},$$

където  $D_c$  е корелационната размерност.

#### 4. Индекс на Хърст и $R/S$ анализ на времеви редове

Един от най-популярните методи на фракталния анализ на времевите финансови редове е свързан с пресмятането на индекса на Хърст и произтичащия от това  $R/S$ -анализ ( $R/S$ -статистика). В продължение на повече от петдесет години изследванията на времеви редове от различен характер (природни, икономически, финансови и др.) се осъществяват на базата на публикуваната от британския учен Хърст (H. E. Hurst) през 1951 г статия „Long-term Storage of Reservoirs”.

Хърст, по специалност хидролог, е работил над Нилския проект и в продължение на 40 години е наблюдавал разливите на река Нил. Трябвало е да се реши следната задача: какъв обем трябва да има водохранилището, за да не се препълва или пресъхва никога? При построяването на модела са използвали предположението, че неконтролираната част от постъпващата вода представлява случаен процес с независимо събитие (например случайно блуждаене), което е обичайно предположение за всяка голяма система с голям брой степени на свобода.

Проверявайки тази хипотеза, Хърст е предложил нова статистическа характеристика – експонентата на Хърст. Оказало се е, че тази характеристика

може да намери широко приложение при изследването на времеви редове от всякакъв характер (в това число и за анализ на времеви финансови редове), тъй като е изключително устойчива и позволява да се разграничат случайните редове с напълно независими едно от друго нараствания от неслучайните редове.

С помощта на алгоритъма на  $R/S$ -анализа могат да се разкрият такива свойства на времевите редове като: стойността на индекса на Хърст и съответстващия му „цвет на шума“, оценката на степента на устойчивост на времевия ред (трендоустойчивост с постоянство или хаотичност с непостоянство), наличие на дълготрайна памет и оценка на нейната дълбочина, наличие на цикличност. Значението на индекса на Хърст  $H$  и „цвета на шума“ са измежду най-важните фрактални характеристики на времевите редове.

Ще приведем алгоритъма за пресмятане на индекса на Хърст  $H$ .

Нека върху дадена величина (в частност това може да бъде цената на една акция от някакъв вид) да са направени наблюденията

$$A = \{A_i\}, i = 1, 2, \dots, N,$$

където  $N$  е броя на наблюденията.

Избираме произволен времеви промеждутък  $T = n$  и организираме цикъл от  $k = 1$  до  $k = N - n + 1$ . При  $k = 1$  избираме първите  $n$  наблюдения  $A_1, A_2, \dots, A_n$  и пресмятаме пълзящата средна  $M_{1n}$ . Времевият ред от натрупаните отклонения се определя като

$$X_{1m} = \sum_{i=1}^m (A_i - M_{1n}), m \leq n$$

По-нататък, при  $k = 2$  избираме серията от наблюдения  $A_2, A_3, \dots, A_{n+1}$  и пресмятаме пълзящата средна  $M_{2n}$  и натрупаните отклонения

$$X_{2m} = \sum_{i=2}^{m+1} (A_i - M_{2n})$$

И накрая, при  $k = N - n + 1$  разглеждаме последната серия от  $n$  на брой наблюдения  $A_{N-n+1}, A_{N-n+2}, \dots, A_N$  и пресмятаме пълзящата средна  $M_{N-n+1,n}$  и натрупаните отклонения

$$X_{N-n+1,m} = \sum_{i=N-n+1}^{N-n+m} (A_i - M_{N-n+1,n})$$

Така окончателно се получават  $n(N - n)$  на брой натрупани отклонения  $X_{km} (k = 1, 2, \dots, N - n + 1; m = 1, 2, \dots, n)$ .

При следващата стъпка пресмятаме размаха на редицата от натрупаните отклонения  $\{X_{km}\}$ :

$$R_n = \max(X_{km}) - \min(X_{km})$$

За да можем да сравним така получения размах на натрупаните отклонения, Хърст е предложил да го разделим с пълзящото стандартно отклонение

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N-n+1} (A_i - M_{in})^2$$

Така ние нормираме величината  $R_n$ , получавайки безразмерната величина  $R_n/S_n$ , измерваща вариацията на времевия ред. Тя очевидно ще расте при нарастването на  $n$  до  $N$ .

Хърст е извел следното съотношение

$$\frac{R}{S} = aN^H,$$

където  $a$  е някаква константа, а  $H$  е степенния показател (индекс) на Хърст. Както по-горе  $N$  е броя на наблюденията на изучаваната величина. С други думи, налице е степенния закон

$$\frac{R}{S} \sim N^H$$

Ако логаритмуваме горното равенство, ще получим

$$\ln \frac{R}{S} = H \ln N + \ln a$$

Ако варираме броя на наблюденията  $N$  и нанасяме  $\ln N$  на абсцисната ос, а  $\ln \frac{R}{S}$  – на ординатната, то след извършването на линейна регресия по метода на най-малките квадрати, ще получим индекса на Хърст като наклона (тангенса на ъгъла, сключван с абсцисата) на получената от регресията права.

На получената графика често се наблюдава значително отклонение на получаващото се от горната формула  $H$  при малки стойности на  $\ln N$  (и  $N$ ). Стойността на  $N$  при която се наблюдава „прелом“ на графиката, т.е. пресичане на правата с наклон  $H = 0,5$  е стойността, характеризираща продължителността на времето, през което времеви ред „помни“ своето начално състояние.



Ако варираме времето  $t$ , можем с нарастването му да включваме нови наблюдения върху величината  $A(t)$  и да изключваме толкова на брой стари наблюдения, колкото сме включили, по този начин ще получим локалния индекс на Хърст  $H(t)$ . На рис. 8 е изобразена компютерно генерирана графика на времевите функции  $A(t)$  и  $H(t)$ , където  $A(t)$  (горната графика) е съотношението EUR/USD за периода от 18.01.2007 г до 09.02.2007 г.



**Рис. 8.** Диаграми на времевия финансов ред, получен от съотношението EUR/USD за периода от 18.01.2007 г до 09.02.2007 г (горе) и на съответния локален индекс на Хърст

Индексът на Хърст може да взема следните стойности, означаващи различни степени на постоянство/волатилност на времевия ред:

1)  $H = 0,5$  означава, че времевият ред се получава от редица от случайни и независими (некорелативни) нараствания. Това е така наречения „бял шум“, характеризиращ се с максимална хаотичност и минимална прогнозируемост. Мярката за корелация, изчисляваща се по формулата

$$C = 2^{2H-1} - 1$$

е равна на нула, т.е. сегашното състояние не влияе на бъдещето.

2) При  $0 \leq H \leq 0,5$  се получава времеви ред, отличаващ се с антипостоянство, такъв ред се нарича „розов шум“. С други думи, ако редът е нараствал в предишен период, то голяма е вероятността той да намалява в следващ период и обратно. Колкото по-близко е  $H$  до 0, толкова повече мярката за корелация  $C$  се приближава до  $-0,5$ .

3) Случаят  $0,5 < H < 1$  съответства на „черен шум“. Това е времеви ред, отличаващ се с дълготрайна памет. Да отбележим, че такива редове се наричат дробни браунови движения (или несиметрично случайно блуждаене). При стойности на индекса на Хърст, значително по-големи от 0,5, разфледаният времеви ред става трендоустойчив, т.е. ако редът нараства или намалява в предишен период, то голяма е вероятността той да продължава да го прави и в следващ период. Трендоустойчивостта на поведението на времевия ред нараства с приближаването на  $H$  към единица, като шумът става все по-малък и той се приближава до състояние на детерминираност и пълна прогнозируемост. И наистина, при  $H = 1$  за мярката на корелативност получаваме  $C = 1$ .

На рис. 9 са изобразени диаграми на времеви редове при различни стойности на показателя на Хърст.

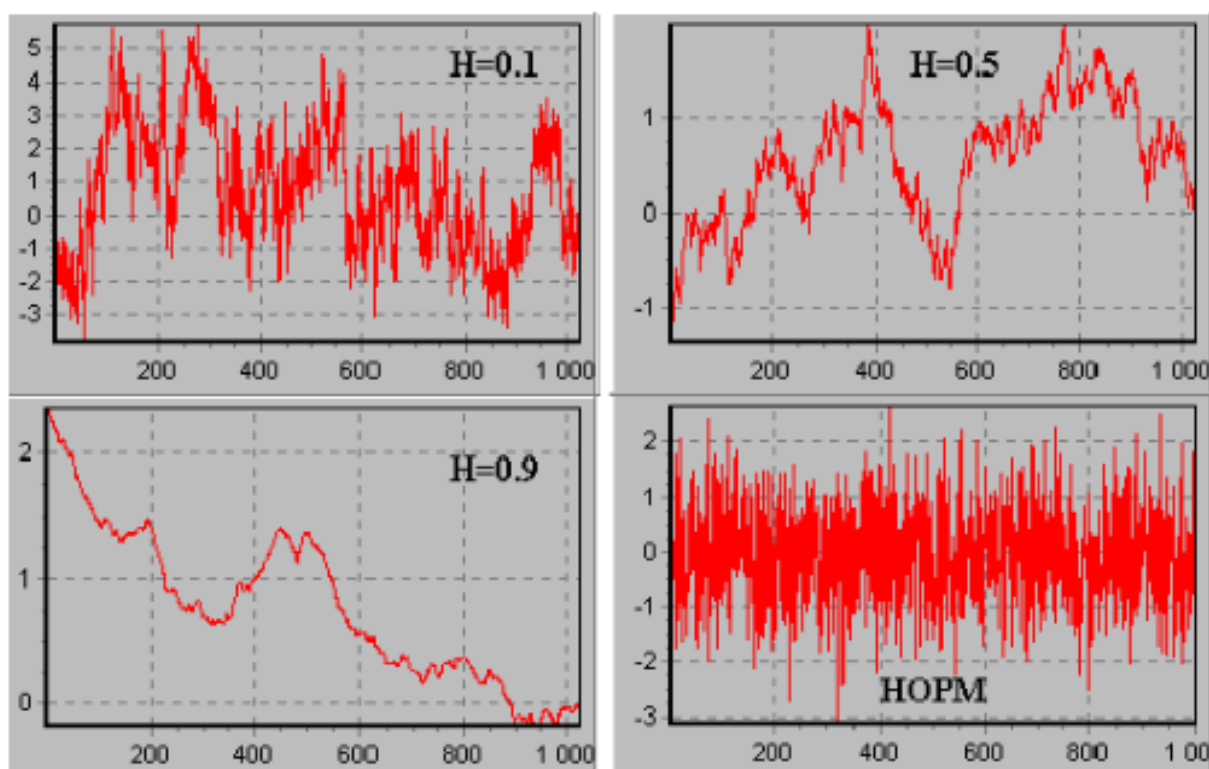


Рис. 9. Диаграми на времеви редове при различни стойности на показателя на Хърст. На диаграмата, разположена долу, вдясно също е изобразен "бял шум" ( $H=0,5$ ), но при нормално разпределение на измененията.

## 5. Индекс на фракталност

3.1. Най-простият начин за изследване на фракталната структура на динамичните редове е да се изчисли фракталната им размерност чрез клетъчната размерност  $D_c$ . За да определим размерността  $D_c$  трябва да разбием равнината, в която е построена графиката на динамичния ред на клетки с размер  $\delta$  и да определим броя на тези клетки (където се намира поне една точка от графиката)  $N(\delta)$ . След това, при различни  $\delta$  ще построим в двоен логаритмичен мащаб графиката на функцията  $N(\delta)$ , която ще апроксимираме с права, например, с помощта на метода на най-малките квадрати (МНК). Тогава  $D_c$  ще се определи от ъгъла на наклон на тази права спрямо абсцисната ос. Главен недостатък на този метод се явява това, че преминаването към степенна асимптотика на функцията  $N(\delta)$  при  $\delta \rightarrow 0$  обикновено става крайно бавно. По-популярен е метода за определяне на  $D$  чрез индекса на Херст  $H$  (виж по-долу), който при гаусовите случайни процеси е свързан с  $D$  чрез соотношението  $H = 2 - D$ . Обаче за надежното пресмятане на  $H$  се изисква твърде представителен мащаб, нуждаещ се от няколко хиляди данни [63]. В рамките на такъв мащаб динамичните финансови редове, като правило, променят характера на поведението си няколко пъти. За да свържем локалната динамика на динамичния ред с фракталната му размерност, е необходимо да определим размерността  $D$  локално. За това, ще се опитаме да намерим такава апроксимираща редица, която при фиксирано  $\delta$  да е оптимална (в някакъв смисъл). Като умножим двете страни на (21) с  $1/\delta$  и вкараме  $D$  под знака на логаритъма, получаваме:

$$N(\delta) \sim \delta^{-D} \quad \text{при } \delta \rightarrow 0. \quad (24)$$

Ако сега умножим двете страни на (24) с  $\delta^2$ , то определението на размерността може да се запише като степенен закон за лицето на апроксимацията  $S(\delta)$ :

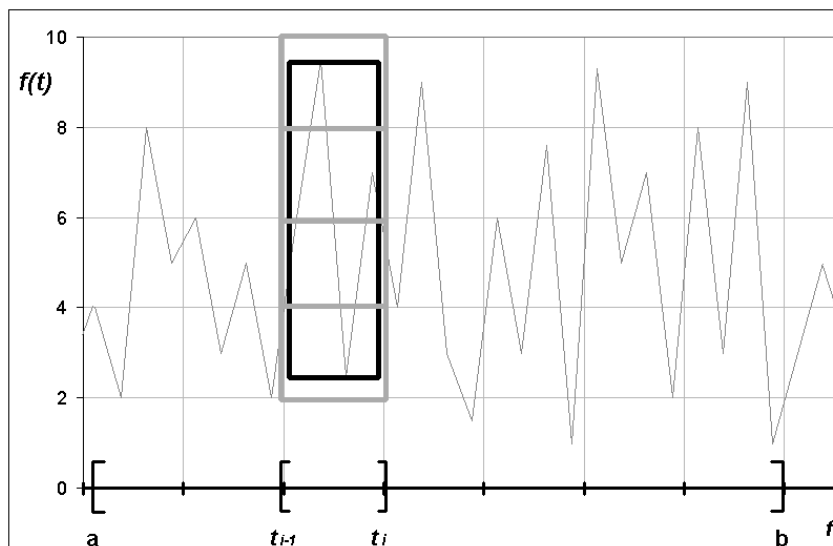
$$S(\delta) \sim \delta^{2-D} \quad \text{при } \delta \rightarrow 0. \quad (25)$$

Да отбележим, че за разлика от (24) такава форма не изисква симплексите, от които е съставена апроксимацията да са еднакви. Достатъчно е те да имат един и същ геометричен фактор  $\delta$ . Това ни позволява да използваме апроксимации, които при дадено  $\delta$  (в някакъв смисъл) най-добре приближават изходната функция (т.е. са оптимални).

3.2. Нека сега върху отсечката  $[a, b]$  да е зададена функцията  $y = f(t)$ , имаща не повече от краен брой точки на прекъсване от първи род: именно такива функции се разглеждат в качеството на моделни, например за динамичните финансови редове. Въвеждаме равномерно разбиване на отсечката

$$\omega_m = [a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b], \quad (26)$$

където  $t_i - t_{i-1} = \delta = (b - a) / m$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). Покриваме графиката на тази функция с правоъгълници по начин, при който това покритие да е с минимално лице в класа от всички покрития чрез правоъгълници с основа  $\delta$  (рис. 8). Тогава височината на правоъгълника върху отсечката  $[t_{i-1}, t_i]$  ще е равна на амплитудата  $A_i(\delta)$ , която е разликата между максималната и минимална стойност на функцията  $f(t)$  върху този интервал.



**Рис. 8. Минималното (черния правоъгълник) и клеточното (сивия правоъгълник) покритие на функцията  $f(t)$  върху интервала  $[t_{i-1}, t_i]$ , с дължина  $\delta$**

Въвеждаме величината:

$$V_f(\delta) \equiv \sum_{i=1}^m A_i(\delta), \quad (27)$$

Която е вариацията на  $f(t)$  при това разбиване на интервала  $[a, b]$ . Тогава пълното лице на минималното покритие  $S_\mu(\delta)$  може да се запише във вида:

$$S_\mu(\delta) = V_f(\delta)\delta. \quad (28)$$

Тогава от (25) следва, че

$$V_f(\delta) \sim \delta^{-\mu} \quad \text{при } \delta \rightarrow 0, \quad (29)$$

където

$$\mu = D_\mu - 1. \quad (30)$$

Ще наричаме размерността  $D_\mu$  **размерност на минималното покритие**. За да сравним  $D_\mu$  с другите размерности, и в частност с клетъчната размерност  $D_c$ , ще построим клетъчно разбиване на равнината на графиката на функцията  $f(t)$ , както е показано на рис. 8. Нека  $N_i(\delta)$  е броя на клетките, покриващи графиката на  $f(t)$  вътре в отсечката  $[t_{i-1}, t_i]$ . Тогава:

$$0 < N_i(\delta)\delta^2 - A_i(\delta)\delta < 2\delta^2. \quad (31)$$

Нека да разделим това съотношение на  $\delta$  и да сумираме по  $i$ , отчитайки (27). Като резултат получаваме

$$0 < N(\delta)\delta - V_f(\delta) < 2(b-a), \quad (32)$$

където  $N(\delta) = \sum N_i(\delta)$  е пълния брой клетки с размер  $\delta$ , покриващи графиката на функцията  $f(t)$  върху отсечката  $[a, b]$ . Преминавайки към граничен преход при  $\delta \rightarrow 0$ , с отчитане на (29) и (30), получаваме:

$$N(\delta)\delta \sim V_f(\delta) \sim \delta^{-\mu} = \delta^{1-D_\mu}. \quad (33)$$

От друга страна, съгласно (25)

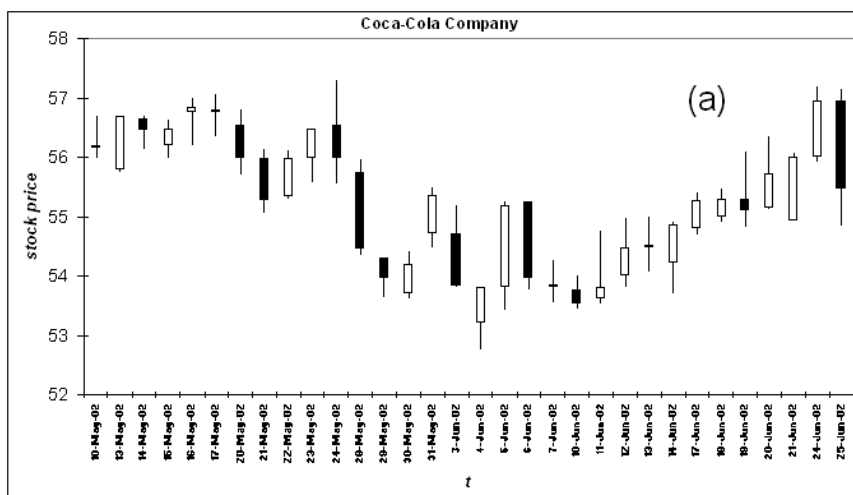
$$N(\delta)\delta = S_c(\delta)\delta^{-1} \sim \delta^{1-D_c}. \quad (34)$$

Следователно,  $D_c = D_\mu$ .

Да отбележим обаче, че независимо от горното равенство, минималното и клетъчното покритие могат да дават различни приближения на величината  $S(\delta)$  към асимптотичен режим (25), като величината на тези различия може да е доста значителна.

Връщайки се към формулата (30), забелязваме, че тъй като  $D_\mu = D$  и за едномерна функция  $D_T = 1$ , то  $\mu = D - D_T$ . Затова в дадения случай индекса  $\mu$  е естествено да се нарича **индекс на фракталност**. По-нататък, при анализа на динамичните финансови редове ще разглеждаме индекса на фракталност като основен фрактален показател.

3.3. Динамичните финансови редове (редовете от цените на акциите и обменните курсове на валутите) са най-популярните представители на фракталните динамични редове. Съществува надеждно числово потвърждение за фракталния характер на тези редове [64 – 68]. Теоретично фракталността се свързва с това, че на FOREX-пазарите и на фондовата борса присъстват инвеститори с различни хоризонти (от няколко часа до няколко години). Това довежда и до мащабна инвариантност (липса на някакво специално мащабиране) на ценовите редове в съответните времеви интервали [69]. С помощта на индекса на фракталност  $\mu$  са били изследвани ценовите редове на акциите на тридесет компании, влизащи в индекса на Дау-Джонс (Dow Jones Industrial Index) от 1970 до 2002 г. Всеки от тези редове съдържа 8145 записа. Всеки запис съответства на един търговски ден и съдържа четири значения: информация за минималната и максимална цена, а също и цените при отваряне и затваряне на борсата. В литературата финансовите динамични редове обикновено се изобразяват с помощта на така наречените «японски свещи». Фрагмент от такъв финансов ред за компанията Coca-Cola е представен на рис. 9. За простота на анализа ще се ограничим с последните  $2^{12} = 4096$  записи за всяка компания. При изчисляването на индекса  $\mu$  ще използваме редица от  $m$  вложени едно в друго разбивания  $\omega_m$  (26), където  $m = 2^n$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots, 12$ . Всяко разбиване се състои от  $2^n$  интервала, съдържащи  $2^{12-n}$  търговски дни. За всяко разбиване се изчислява величината  $V_f(\delta)$  (27). Тук  $A_i(\delta)$  е равна на разликата между максималната и минималната цена в интервала  $[t_{i-1}, t_i]$  (в частност, ако  $\delta = \delta_0$ , то  $A_i(\delta)$  е равна на разликата между максималната и минималната цена за деня). Типичен пример за поведението на  $V_f(\delta)$  в двоен логаритмичен мащаб е представен на рис. 10 за компанията Microsoft. Ние виждаме, че данните почти точно лежат на права линия, освен двете последни точки, където линейният режим има прекъсване. За определянето на значението на  $\mu$  по тези данни следва да изключим двете последни точки и да намерим линията на регресия  $y = ax + b$  с помощта на метода на най-малките квадрати (МНК). Тогава  $\mu = -a$ .



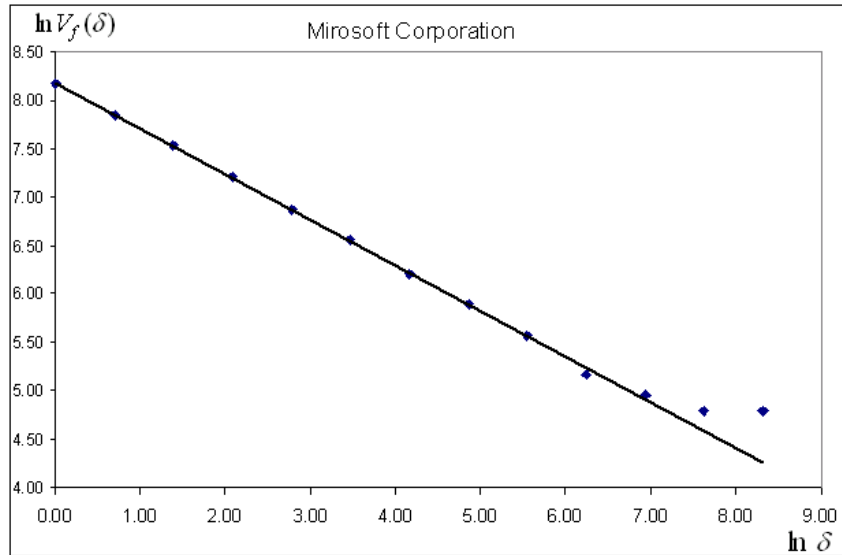
**Рис. 9. Типично поведение на цените при интервал от 32 дни (използван е дневния график на цените на акциите на компанията Coca-Cola). Във финансовите графики е прието цените да се изобразяват не с едномерни линии, а с интервали (така наречените барови графики или графики във вида на японски свещи). Един правоъгълник (наричан тяло на свщта) с два щриха отгоре и отдолу (наричани сенки на свщта) изобразява колебанието на цените в рамките на деня. Най-горната точка от горната сянка показва най-високата цена, достигната през деня, а най-долната точка от долната сянка – най-ниската за деня. Горната и долната граница на тялото на свщта показват сените при отваряне и затваряне на борсата. При това, ако тялото е бяло (черно), то при затваряне цената е по-висока (по-ниска), отколкото при отваряне.**

При ниво на надежност  $\alpha = 0.95$  в приведения пример получаваме  $\mu = 0.472 \pm 0.008$ ,  $R^2 = 0.999$ . Тук  $R^2$  е коефициент на детерминация за линията на регресия. Резултатите за останалите компании са следните:

$$\mu_{\min} = 0.469 \pm 0.019, R^2 = 0.999 \text{ (Intel Corporation);}$$

$$\mu_{\max} = 0.532 \pm 0.007, R^2 = 0.997 \text{ (International Paper Company).}$$

Да отбележим, че за всяка от 30-те компании графиката на  $V_f(\delta)$  почти точно лежи на права линия при всички представителни интервали до 32, а понякога и до 16 дни. При това, за интервали, по-малки от 500 дни, като правило, отсъстват отклонения от линейната част. Типичен пример за  $V_f(\delta)$  при интервали до 32 дни е представен на рис. 11а. При  $\alpha = 0.95$  ние получаваме  $\mu = 0.571 \pm 0.071$ ,  $R^2 = 0.992$ .



**Рис. 10.** Резултат от пресмятането на индекса на вариация за динамичния ред на цените на акциите на компанията Microsoft на интервал от 4096 дни. Правата  $y = ax + b$  се определя по метода МНК по всички точки с изключение на последните две

3.4. За да оценим преимуществата на построения алгоритъм, ще го сравним с метода за изчисляване на фракталната размерност с помощта на индекса на Херст  $H$ . Този метод традиционно се смята за най-ефективен метод за определяне на фракталната размерност на динамичните финансови редове [63]. Както е известно, индексът на Херст  $H$  се определя въз основа на предположението, че

$$\langle |f(t + \delta) - f(t)| \rangle \sim \delta^H \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0, \quad (35)$$

Където ъгловите скобки означават усредняване по времевия интервал. За да сравним индекса  $\mu$  с показателя  $H$ , ще въведем следното естествено определение за средна амплитуда  $\langle A_i(\delta) \rangle$  на разбиването  $\omega_m$  (виж (26), (27)):

$$\langle A(\delta) \rangle \equiv m^{-1} \sum_{i=1}^m A_i(\delta). \quad (36)$$

Умножаваме (27) с  $m^{-1} \sim \delta$  и заместваме в (29). Получаваме:

$$\langle A(\delta) \rangle \sim \delta^{H_\mu} \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0, \quad (37)$$

където

$$H_\mu \equiv 1 - \mu. \quad (38)$$



Както вече отбелязахме (виж по-горе), ако  $f(t)$  е реализация на гаусов случаен процес, то показателя  $H$  е свързан с  $D$ , а следователно, и с индекса  $\mu$ , чрез съотношението:

$$H = 2 - D_\mu = 1 - \mu. \quad (39)$$

Следователно, в този случай  $H = H_\mu$ . Обаче, реалните финансови редове, като правило, не се явяват гаусови (виж например [44,48]) и затова значенията на  $H_\mu$  и  $H$  могат силно да се различават. Действително, във формулата (37) имаме степенен закон за средната амплитуда на функцията  $f(t)$  на интервал с дължина  $\delta$ , в същото време, във формулата (35) имаме степенен закон за средната разлика между началното и крайното значение на  $f(t)$  върху същия интервал. Както се оказва, индекса  $\mu$  се изчислява с порядък по-точно, отколкото показателя на Херст  $H$  в подавляващо болшинство от случаите. Да вземем например ценовия ред на компанията Alcoa Inc., която е на първо място по азбучен ред в списъка на индекса Дау-Джонс. Разглеждаме редицата от 32 дневните интервали на изходния динамичен финансов ред (състоящ се от 8145 търговски дни, всеки с четири на брой значения), изместени един спрямо друг с един ден. Общият брой на такива интервали е  $N = 8145 - 32 = 8113$ . За всеки от тях изчисляваме  $H$  и  $\mu$  на базата на (35) и (27), (29). При пресмятането на  $H$  за тези интервали ще използваме  $32 + 1 = 33$  цени на затваряне  $C(t)$  и осредняваме по непресячащите се подинтервали с дължина  $\delta = 2^n$ , където  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ . Това означава, че:

$$\langle |C(t + \delta) - C(t)| \rangle = (\delta/32) \sum_{i=0}^{32/\delta} |C(t_{i+1}) - C(t_i)|, \quad (40)$$

където  $t_{i+1} = t_i + \delta$ .

В съответствие с предположението (35) за всяко  $\delta$  пресмятаме

$$x = \ln \delta, \quad y = \langle |C(t + \delta) - C(t)| \rangle \quad (41)$$

и апроксимираме резултатите с права линия

$$y = ax + b \quad (42)$$

с помощта на МНК. След това полагаме  $H = a$ .

За определянето на индекса  $\mu$  използваме (27) във вида:

$$V_f(\delta) = \sum_{i=1}^{32/\delta} A_i(\delta), \quad (43)$$

където  $A_i(\delta)$  е амплитудата на  $f(t)$  в интервала  $[t_i, t_i + \delta]$ .

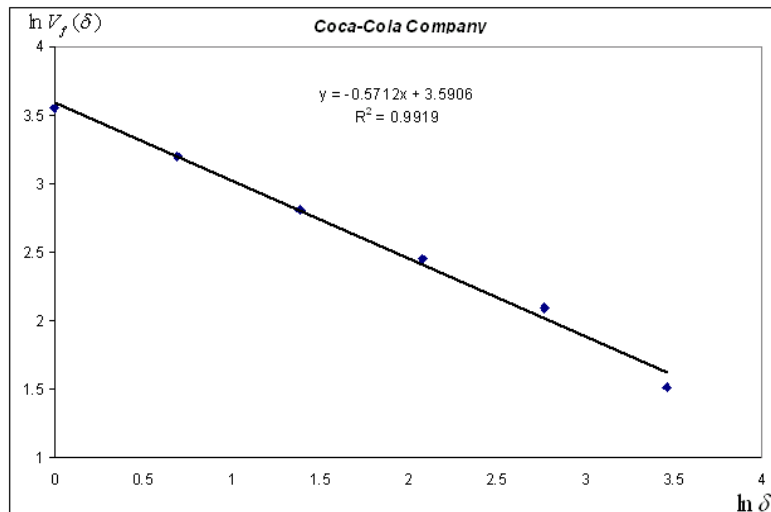
В съответствие с предположението (29) изчисляваме за всяко  $\delta$

$$x = \ln \delta, \quad y = \ln V_f(\delta) \quad (44)$$

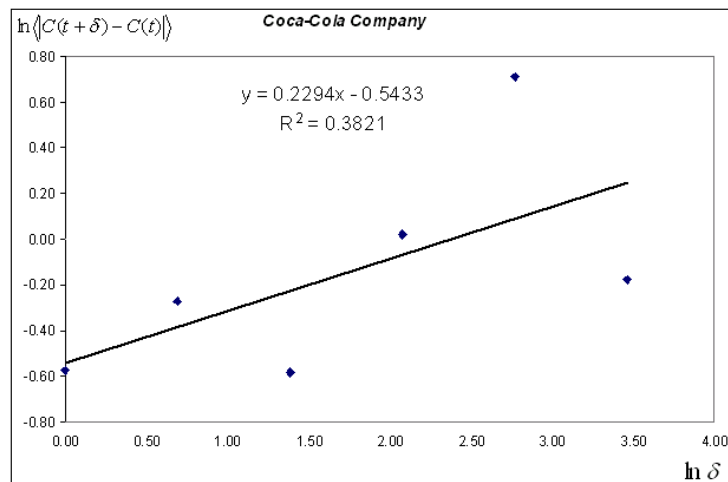
и апроксимираме получените резултати с права (42) с помощта на МНК. След това полагаме  $\mu = -a$ .

В качество на критерий за точност на разчетите избираме ширина на доверителния интервал  $\Delta$ , в който значението на величината  $\mu$  (или  $H$ ) попада с вероятност 0,90 и  $K = 1 - R^2$ , където  $R^2$  е коефициент на детерминация (ако точките лежат точно на правата, то  $R^2 = 1$  и  $K = 0$ ).

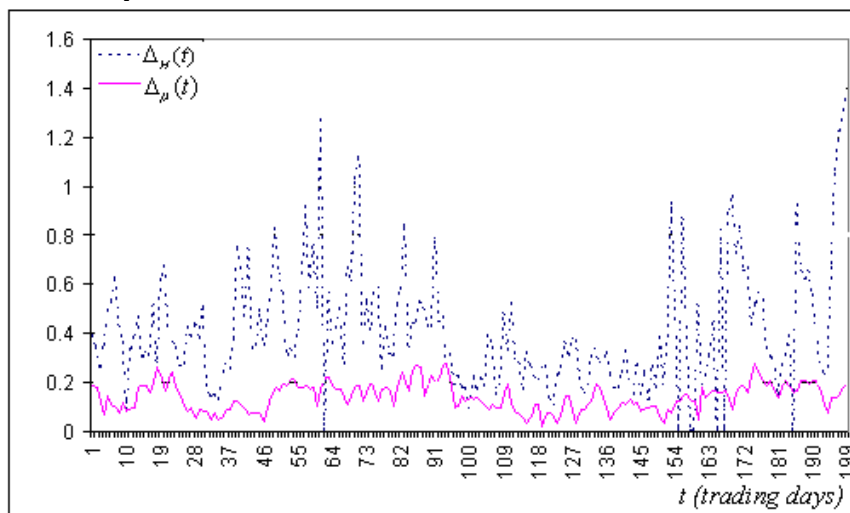
За всеки от 8113-те интервала се изчисляват  $\mu$ ,  $\Delta_\mu$ ,  $K_\mu$  и  $H$ ,  $\Delta_H$ ,  $K_H$ . Типичните фрагменти от графиките на функциите  $\Delta_\mu(t)$ ,  $\Delta_H(t)$  и  $K_\mu(t)$ ,  $K_H(t)$ , са построени по интервали, десните краища на които съвпадат с момента  $t$ , и са представени на рис. 12а и 12б. Както се вижда от тези рисунки, в подавляващото болшинство от случаите индексът  $\mu$  е определен с порядък по-точно, отколкото  $H$ .



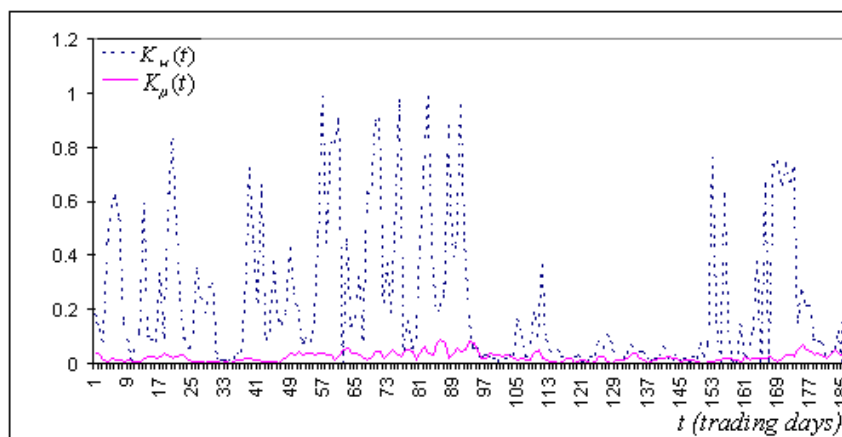
**Рис. 11а.** Резултат от пресмятането на  $V_f(\delta)$  в двоен логаритмичен мащаб за динамичния ред, представен на рис. 9. Прямата  $y = ax + b$  е построена по метода МНК. За определяне на  $\mu$  следва да се отъждестви  $\mu = -a$



**Рис. 11б.** Резултат от пресмятането на  $\langle |C(t+\delta) - C(t)| \rangle$  (където  $C(t)$  е цената при затваряне) за същия ред и съответстващата зависимост  $y = ax + b$ . За определянето на показателя на Херст  $H$  следва да отъждествим  $H = a$



**Рис. 12а.** Типичен фрагмент от динамичен ред с ширина на доверителните интервали  $\Delta_H(t)$  и  $\Delta_\mu(t)$ , построени по реда от цените на затваряне  $C(t)$  за компанията Alcoa Inc.



**Рис. 12б. Съответния фрагмент на реда за значенията на  $K_H(t)$  и  $K_\mu(t)$ , построени по същия ред  $C(t)$**

Резултатите от проведените изчисления са следните:

$$\langle \Delta_\mu \rangle = 0.107, \quad \langle \Delta_H \rangle = 0.452;$$

$$\langle K_\mu \rangle = 0.0147, \quad \langle K_H \rangle = 0.245.$$

Освен това се оказва, че  $\Delta_\mu < \Delta_H$  за 99 %, и  $K_\mu < K_H$  за 91 % от изследваните интервали. Аналогични резултати са получени и за други ценови редове. В качеството на типичен пример на рис. 12а и 12б са представени резултатите от пресмятането на  $\mu$  и  $H$  на един и същ 32-дневен интервал, показан на рис. 9. За  $\alpha = 0.90$  се получават следните резултати:

$$\mu = 0.571 \pm 0.071, \quad H_\mu = 0.429 \pm 0.071, \quad R_\mu^2 = 0.992;$$

$$H = 0.229 \pm 0.405, \quad R_H^2 = 0.382.$$

Както и следва да се очаква, индексът  $\mu$  е определен много по-точно, отколкото показателя  $H$ .

По такъв начин, главното преимущество на индекса  $\mu$  в сравнение с други фрактални показатели (в частност с показателя на Херст  $H$ ) е това, че съответстващата му величина – вариацията на реда  $V_f(\delta)$  има по-бърз преход към степенен асимптотичен режим. Това позволява използването му като локална характеристика, определяща динамиката на изходния процес, тъй като репрезентативния мащаб, необходим за надлежното определяне на индекса  $\mu$  може да се счира, че е от същия порядък, както мащаба на основното състояние на моделирания процес. Към такива състояния се отнасят флатовете (периодите на относително спокойствие) и трендовете (периодите на относително дълго движение нагоре или надолу). За да съотнесем значението на  $\mu$  с поведението на динамичния ред е естествено да въведем функцията  $\mu(t)$  като такова значение на  $\mu$ , което можем да пресметнем със задоволителна точност на минимален, предшестващ  $t$  времеви интервал  $\tau_\mu$ . В случай на непрекъсната аргумент  $t$  в качеството на такъв интервал може да се вземе произволно малък мащаб. Обаче, тъй като на практика динамичните финансови редове винаги имат минимален

мащаб (в нашия случай той е един ден), то  $\tau_\mu$  има крайна дължина (в нашия случай вземаме  $\tau_\mu = 32$  дни).

Както се оказва, използването на функцията  $\mu(t)$  позволява да се придвижим към решаването на двете основни задачи от анализа на динамичните финансови редове – задачата за идентификация и задачата за прогнозиране.

3.5. Задачата за идентификация обикновено се заключава в коректно определяне на макросъстоянието на системата на база наблюдаваната и реализация чрез финансов динамичен ред. За решаването на тази задача са направени разчети на функциите  $\mu(t)$  за всяка от компаниите, влизащи в индекса на Дау-Джонс. На рис. 13 е представен типичен фрагмент на ценови ред за такава компания заедно с пресметнатата за този фрагмент функция  $\mu(t)$ . Достатъчно бегъл поглед на рис. 13 ни убеждава, че индексът  $\mu$  има отношение към поведението на динамичния ред. И действително, на интервала между 1-я и 39-я ден, при който цената се държи относително стабилно (флат),  $\mu(t) > 0.5$ . Понататък, едновременно с развитието на тренд при графиката на цената,  $\mu(t)$  пада рязко до значения по-малки от  $\mu = 0.5$  и, накрая, след 56-я ден, когато цената е в промеждутъчно състояние между тренд и флат,  $\mu(t)$  се втъща към стойността  $\mu \approx 0.5$ . По такъв начин, изходният ред се оказва толкова по-стабилен, колкото по-голямо е значението на  $\mu$ . При това, ако  $\mu > 0.5$  се наблюдава флат, а при  $\mu < 0.5$  – тренд. Накрая, ако  $\mu \approx 0.5$ , то процесът се намира в промеждутъчно състояние между тренд и флат. Подобна корелация между стойностите на  $\mu$  и характера на поведение на изходния динамичен ред се наблюдава за подавяващо болшинство от участъците на ценовите редове. За да се представят агрегирани резултати, ще се разгледа отново ценовия ред на компанията Alcoa Inc. за периода 1970 – 2002 г. и 8113 интервала с дължина 32 дни, изместени един спрямо друг с един ден. За всеки от тези интервали ще изберем пет показатели за стабилност:

$F_1 = \log(C_i/C_{i-32})$  – логаритмично увеличение на цената при закриване  $C_i$  за 32-дневния интервал;

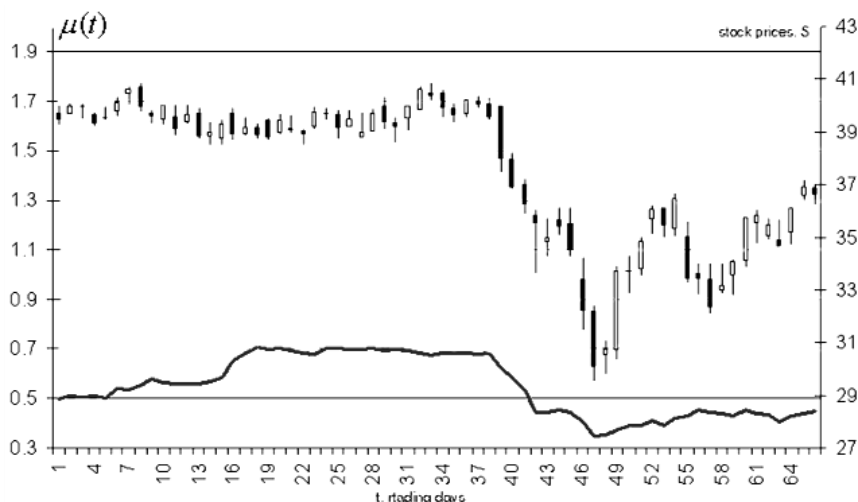
$F_2 = A_i/A_{i-32}$ , където  $A_i$  – амплитудата на колебание на цените за последните 32 дни;

$F_3 = \sigma[\log(C)]$  – стандартното отклонение на цената при затваряне за последните 32 дни;

$F_4$  – стойност на коефициента на наклон на линията на линейна регресия, апроксимираща ценовия ред;

$$F_5 = \left( C_i - C_{i-32} / \sum_{j=i-31}^i |C_j - C_{j-1}| \right) - \text{разлика между текущата цена и цената 32 дни}$$

назад, нормирана от сумата на модулите на ежедневните промени на цените за 32 дни.



**Рис. 13. Ежедневни цени на акциите на компанията Exxon Mobil Corporation (дясна скала – японските свещи) и графика на функцията  $\mu(t)$  (лява скала, плътната линия)**

За всички избрани показатели на стабилност е справедливо следното твърдение: колкото по-стабилно е поведението на изходния ред (колебанията са малки), толкова по-близко по модул е значението на  $F_m$  до нулата и обратното – колкото по-силно е изразен тренда, толкова по-голямо по модул е значението на  $F_m$ . На рис. 14 са представени значенията на  $\mu$  и  $F_m$  за всеки от указаните по-горе 32-дневни интервали. От тези диаграми е видна явната корелация между стойностите на фракталния индекс  $\mu$  и стабилността на ценовия ред. Вижда се, че колкото по-голяма е стойността на  $\mu$ , толкова по-стабилно е поведението на реда, и колкото по-малко е  $\mu$ , толкова по-силно в изходния ред е изразен тренда.

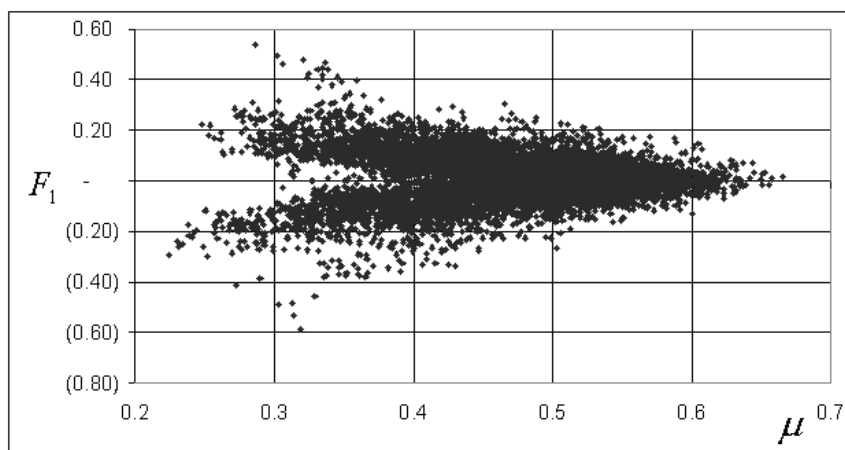
Теоретичната обосновка на такава корелация може да се направи чрез винеровския случаен процес, който се явява класически модел на брауново движение. Да припомним, че от постулатите на този модел (виж въведението) следва, че:

$$\langle (X(t) - X(t_0))^2 \rangle = \sigma^2 |t - t_0|, \quad (45)$$

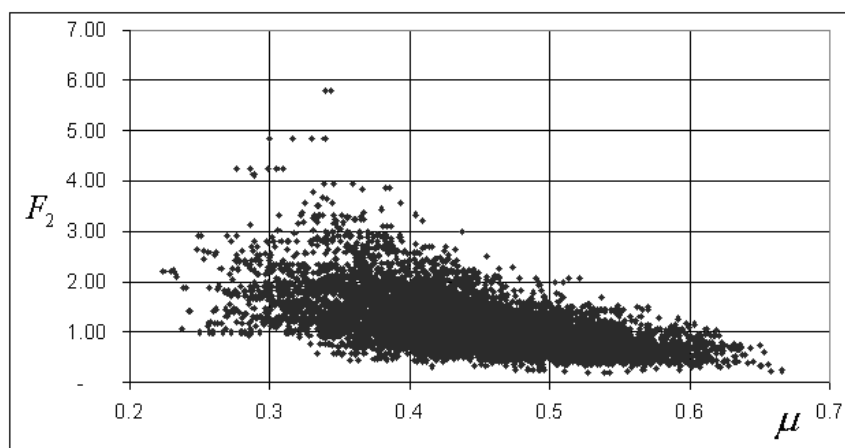
където ъгловите скобки означават статистическо осредняване по времеви интервал;  $X(t)$  и  $X(t_0)$  – значения на процеса в моментите от време  $t$  и  $t_0$  съответно;  $\sigma^2$  – дисперсия за единица време (във финансовата наука параметъра  $\sigma$  е известен като волатилност). От (45) може да се получи, че този процес се преобразува сам в себе си при изменение на мащаба на времето  $b$  пъти и едновременно изменение на пространствения мащаб  $b^{1/2}$  пъти. Следователно, фракталната размерност на графиката на този процес е  $D = 1.5$  ( $\mu = 0.5$ ).

По-нататък, понеже винеровския процес не притежава памет, то графиката му във всяка своя част ще заема промеждутъчни значения между тренд и флат. От друга страна, тъй като при пресмятането на индекса  $\mu$  за съответстващия репрезентативен мащаб имаме  $\tau_\mu \gg 1$ , то изхождайки от формулите (36) – (37) процесът е толкова по-стабилен, колкото по-голяма е стойността на  $\mu$  (рис. 15). Затова случая  $\mu < 0.5$  е естествено да се интерпретира като тренд, а случая  $\mu > 0.5$  – като флат. По такъв начин, индексът  $\mu$  действително се явява показател за стабилност на изходния динамичен ред.

Напомниме, че в съответствие с хипотезата за ефективен пазар поведението на цените трябва да бъде близко до случайното блуждаене. Проверката на това предположение обикновено се свежда до изследване на разпределението на ценовите нараствания за нормалност и до изучаването на техните автокорелационни функции [70 – 75]. Изводите, които може да се направят на базата на тези изследвания, не позволяват да се оцени степента на отклонение на динамичните финансови редове от случайното блуждаене. Използването на индекса на вариация  $\mu$  позволява да се проведе по-подробен анализ.

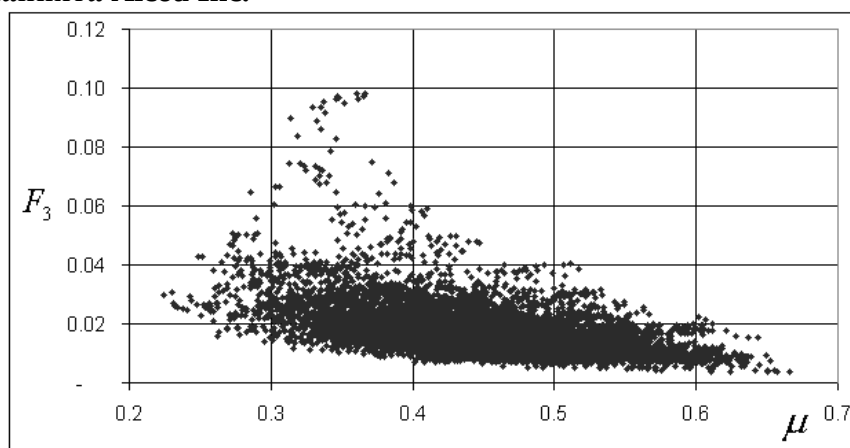


a

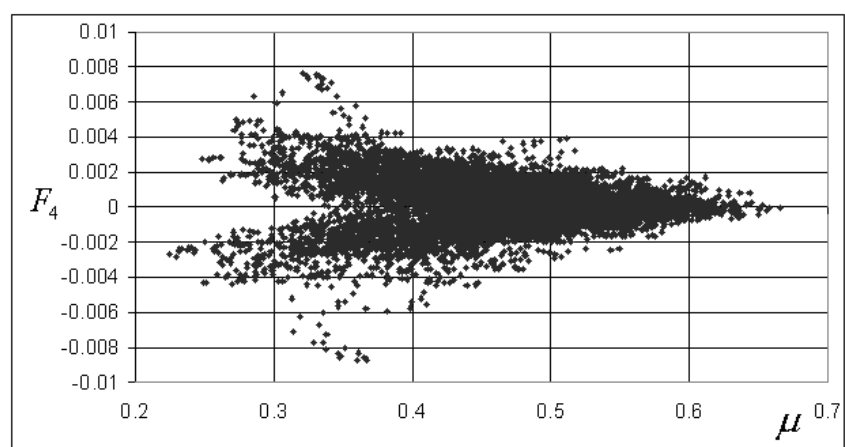


б

Рис. 14. Типични грфики на зависимост между значението на  $\mu$  и различните показатели на стабилност  $F_m$  ( $m = 1, 2, 3, 4, 5$ ) за 32-дневните интервали на ценовия ред на компанията Alcoa Inc.



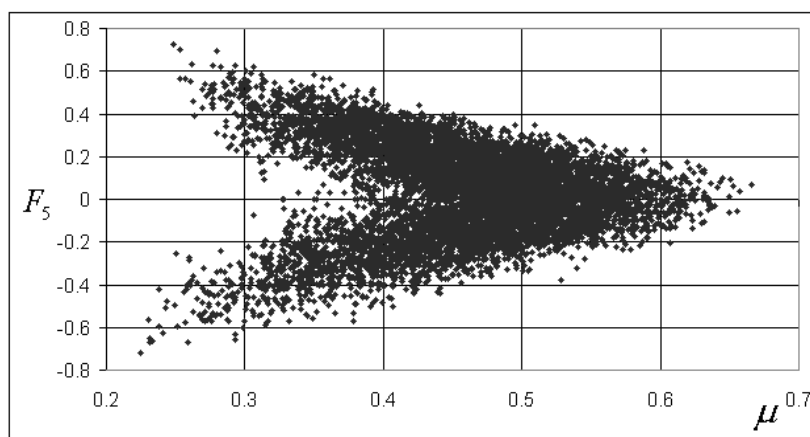
в



г

Рис. 14. Продължение





$\delta$

Рис. 14. Край

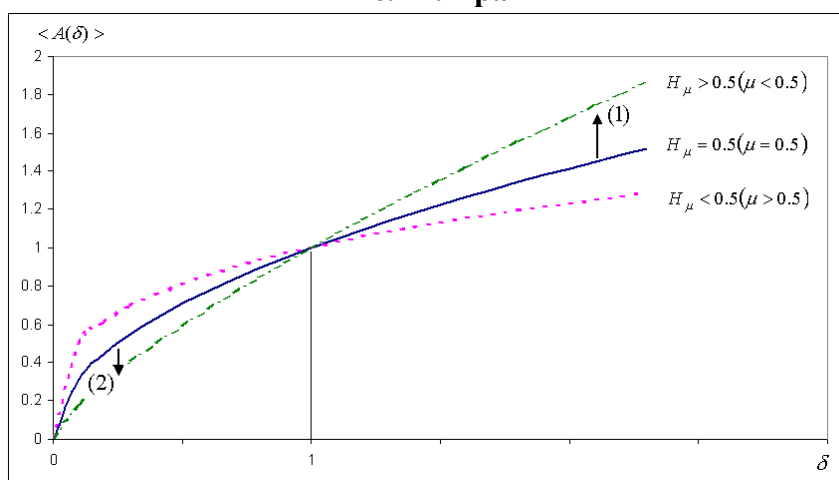


Рис. 15. Зависимост на  $\langle A(\delta) \rangle$  за динамичните редове при различни стойности на  $\mu$  ( $H_\mu$ ): плътната линия съответства на изменение на амплитудата при брауново движение, пунктираната и шрихпунктираната – за трендове и флатове съответно

И наистина, ако използваме локалния показател  $\mu$ , можем да направим оценка на това за каква част от общото време ценовите редове се намират в различните състояния. За целта, да се върнем към разгледаните по-горе 32-дневни времеви интервали и да пресметнем за всеки от тях значенията  $\mu$ ,  $\mu_-$  и  $\mu_+$ , където  $\mu_-$  и  $\mu_+$  са съответно долната и горна граница на доверителния интервал, в който истинското значение на  $\mu$  попада с вероятност 0.9. Ще считаме, че при  $\mu_+ < 0.5$  ( $\mu_- > 0.5$ ) редът се намира в състояние на тренд (флат), а при  $\mu_- \leq 0.5 \leq \mu_+$  – в състояние на броуново движение. Изчислява се общият брой на сегментите за всеки тип поведение и се пресмята делът от времето, прекарано от първоначалния момент за реда във всяко от състоянията. Резултатът от разчетите за ценовите редове на някои компании е представен в табл. 1.

Таблица 1

| Състояние на динамичния ред: | Брауново движение | Тренд | Флат |
|------------------------------|-------------------|-------|------|
| Alcoa Inc                    | 23 %              | 43 %  | 34 % |
| Boeing Corp                  | 24 %              | 37 %  | 39 % |
| IBM                          | 25 %              | 39 %  | 36 % |
| Microsoft Corp               | 26 %              | 36 %  | 38 % |
| Exxon Mobile Corp            | 15 %              | 50 %  | 35 % |

Аналогични резултати са получеби за целия списък от компании, влизащи в списъка от компании, влизащи в индекса на Дау-Джонс. Както се вижда от табл. 1, динамичните редове се намират в състояние близко до случайното блуждене в по-малко от 30% от общото време. Използвайки получените числови данни и вида на функцията  $\mu(t)$  (виж рис. 14), може да се направи следния извод: реалните динамични финансови редова демонстрират сложно непреодично поведение, при което трендове и флатове по хаотичен начин се сменят от брауново движение. Като познаваме значенето на функцията  $\mu(t)$ , можем да определим какъв тип поведение преобладава във всяка точка от реда.

3.6. Най-голям интерес представлява обаче използването на построенията на фракталния анализ за решаване на задачата за прогнозиране на динамичните финансови редове. Оказва се, че наличието на степенна зависимост за функцията  $V_f(\delta)$  в достатъчно голям диапазон на мащаби ни позволява да предложим нов подход за прогнозирането на фазовите преходи в хаотичните системи. И наистина, да се обърнем към формули (37), (38) и рис. 15. Да предположим, че динамичния ред се намира в състояние на случайно блуждаене. В този случай  $D=1.5$  ( $\mu=0.5$ ) и зависимостта на  $\langle A(\delta) \rangle$  се описва от плътната линия на рис. 15. Предполагаме, че в системата се е извършил фазов преход, в резултат от което динамичния ред преминава в състояние на тренд. Това означава, че след някакво време (т.е. за големи  $\delta$ ) амплитудата на колебанията ще се увеличи (стрелка (1) на рис. 15). Обаче, както е видно от графиката, прехода на динамичния ред към ново състояние предизвиква едновременно намаляване на амплитудата при малки мащаби (стрелка (2) на рис. 15). По такъв начин, увеличаването на едромасштабните флуктации води до намаляване на дребномасштабните и обратно. Този ефект, който служи за ключ към прогнозата за силни флуктации в големи мащаби и следва от наличието на степенен закон, е бил в действително намерен и потвърден при обработката на голямо количество емпирични данни.