

ФРАКТАЛНИ СТРУКТУРИ



1. Какво представляват фракталите

Макар че понятието „фрактал“ да се появява сравнително отскоро, първите идеи на фракталната геометрия, са възникнали още през 19 век.

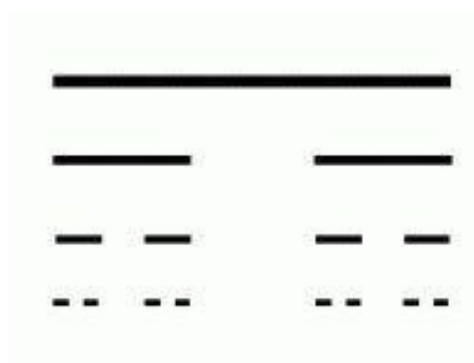


Рис.1. Прах на Кантор

През 1883г. **Георг Кантор**, един от основателите на теорията на множествата, описва как с помощта на проста, повтаряща се процедура, превръща линия в несвързани точки - фрактал, наречен **прах на Кантор** или **гребен на Кантор**. Образува се като последователно се премахва средната третина на една отсечка. Повторението на тази операция до безкрайност води до образуването на т.н. канторови пращинки,

сумата от дължините на които е равна на 0.

Може да се каже, че първия фрактал е описан в „Мозайки, формирани от петоъгълници“ от „Ръководство на живописеца“ (1525г) от Албрехт Дюрер. Това е т.н. петоъгълник на **Албрехт Дюрер** – пет петоъгълници се подреждат около идентичен петоъгълник. Тази група от шест петоъгълника има формата на петоъгълник, на който са отстранени пет триъгълни клинове. Така, с последователно изрязване на клинове се образува всяка следваща итерация.



Рис. 2. Петогълници на Дюрер – стъпки 0, 1, 2 и 3

Изучаването на фракталите в края на XIX и XX век е било по-скоро епизодично, а не систематично занимание, защото тогавашните математици са предпочитали обекти, които се описват с класическите методи и теории. Но дори и да се захванат с тази тема, те не са могли да съставят изображения на този математически модел, защото са били необходими огромно количество изчисления, които не било възможно да се извършат ръчно.

С възхода на компютърната техника става възможно да се видят фракталите в целият им блясък и многообразие. Първият, който използва компютър за тази цел е математикът от компанията на IBM **Беноа Б. Манделброт** (Benoit B. Mandelbrot).



Манделброт е роден във Варшава през 1924 г., но семейството му емигрира в Париж, където 12-годишният Манделброт попада под влиянието на чичо си Шолем Манделбройт, известен парижки математик. Малкият Беноа няма особено интерес към училище, но у него се разкрива необичаен математически талант, който му дава възможност веднага след края на войната, за да стане студент в Ecole Polytechnique в Париж. Беноа притежавал отлично пространствено въображение. Дори алгебрични проблеми той решавал геометрично. След дипломирането си в парижкия университет,

Манделброт отива в САЩ, където завършва и Калифорнийския технологичен институт. Връща се във Франция, където получава докторска степен в Университета на Париж през 1952. През 1955 г. се премества в Женева.

През 1958 г. Манделброт се установява в САЩ, където започва да работи в изследователския център на IBM в Йорктаун, защото в IBM по това време са се занимавали с интересни за Беноа Манделброт области на математиката.

Изследвайки на пръв поглед случайни колебания в цените, Манделброт открил, че те следват скрит математически ред във времето, който не се описва със стандартни криви.

Беноа Манделброт проучвал цените на памука в продължение на дълъг период от време (повече от сто години). Колебанията на цените изглеждали произволни, но Манделброт открил симетрия между дългосрочните и краткосрочните колебания в цените. Така Беноа Манделброт полага основите на своя рекурсивен (фрактален) метод.

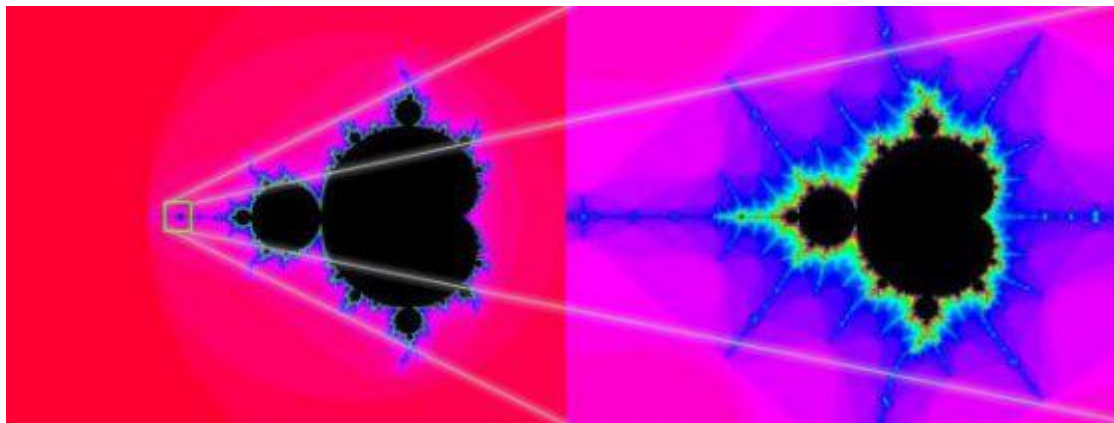
През 1975 г. Манделброт въвежда термина „фрактал“ (от лат. Fractus, което означава "счупено") за описване на структури и публикува за първи път идеите си изследването, „Фракталите: Форма, вероятност и размерност“ (Fractals: Form, Chance and Dimension). Математикът Стивън Волфрам по-късно го нарича „бащата на фракталите“.

През 1977г. Беноа Манделброт публикува “Фракталната геометрия на природата” („The Fractal Geometry of Nature“).

Манделброт използва научните резултати на други учени, работещи в периода 1875-1925 г. в тази област (Поанкаре, Фату, Жюлиа, Кантор, Хаусдорф, Пеано).

Манделброт обединява техните работи в единна система. По неговите думи: „... между неконтролируемия хаос и строгия ред на Евклид вече има нова зона – тази на фракталите”.

Едно от определенията за фрактал е геометрична фигура, състояща се от части и всяка от които представлява по-малко, поне приблизително копие на цялото. Фракталът е такъв обект, за който няма значение под какъв мащаб го разглеждаме - структурата му остава същата.



В основата на това явление е много проста идея: безкрайната красота и разнообразие на множество форми може да бъдат получени от сравнително прост модел само с две операции - **копиране** и **мащабиране**.

Тъй като няма строга математическа дефиниция за фрактали, обикновено под „фрактал“ се разбира геометричен модел, който има едно или повече от едно от следните свойства:

- има сложна структура при каквото и да е увеличение;
- е точно или приблизително самоподобен;
- има дробна (фрактална) размерност, която е по-голяма от топологичната;
- може да се построи от **прост итерационен и рекурсивен цикъл**. Този начин на създаване определя свойствата на фракталите **самоподобие** и **дробна размерност**.

2. Видове фрактали

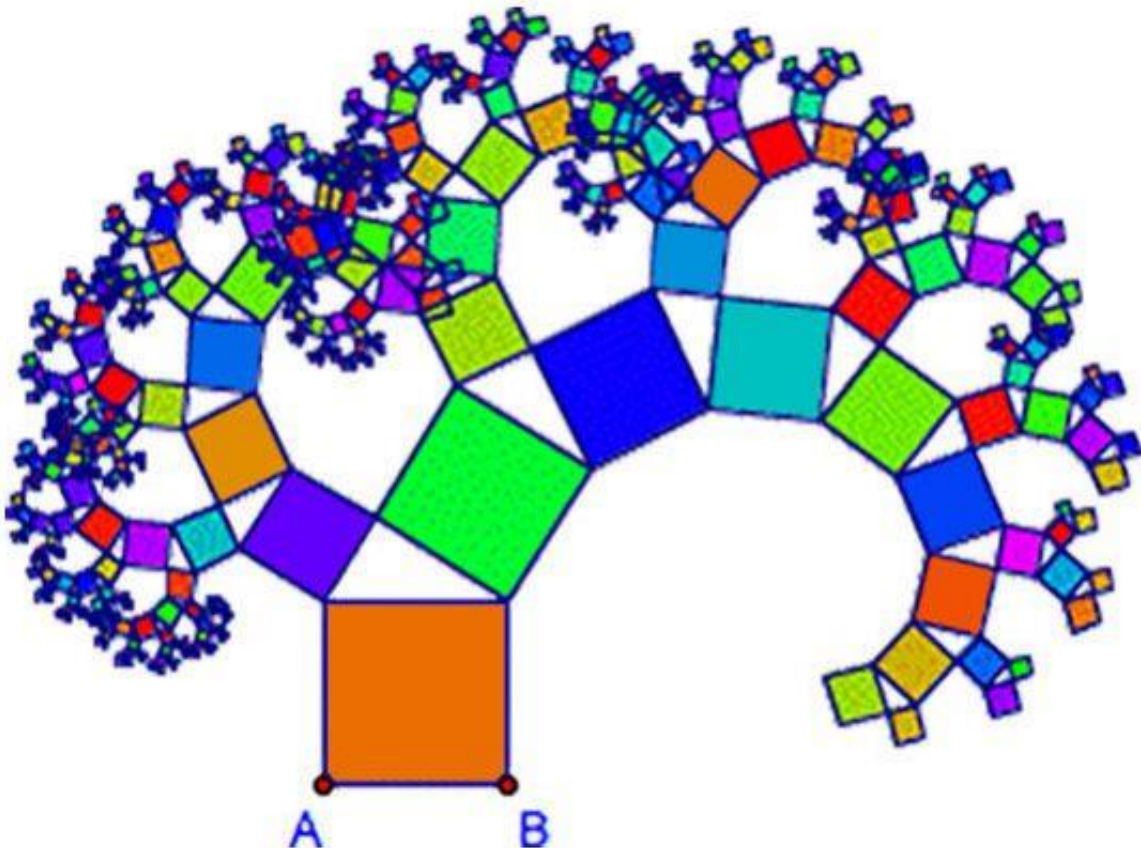


Рис. 3. Фракталът "Дървото на Питагор"

Геометрични фрактали. Наричат ги още линейни или класически фрактали, защото математиците са стигнали първо до тях. Тези фрактали са лесни за построяване и буквално всеки може да начертае такъв фрактал върху кариран лист. Тези фрактали се образуват с **итерации**. *Итерация в програмирането е такава организация на обработката на данни, при която действието се повтаря няколко пъти, без това да доведе до положение, при което функцията да извика сама себе си (това вече е рекурсия).*

В двумерния случай геометричните фрактали се получават с помощта на някаква начупена линия или плоска геометрична фигура (повърхност в тримерния случай), наречена **основа (генератор)**. За всяка стъпка от алгоритъма (т.е. за всяка итерация) всяка от отсечките, съставлящи начупената линия, се заменя с генератора, в съответния мащаб. В резултат на безкрайни повторения (итерации) на тази процедура, се получава геометричният фрактал.

Като пример можем да разгледаме фрактала „снежинката на Кох“.

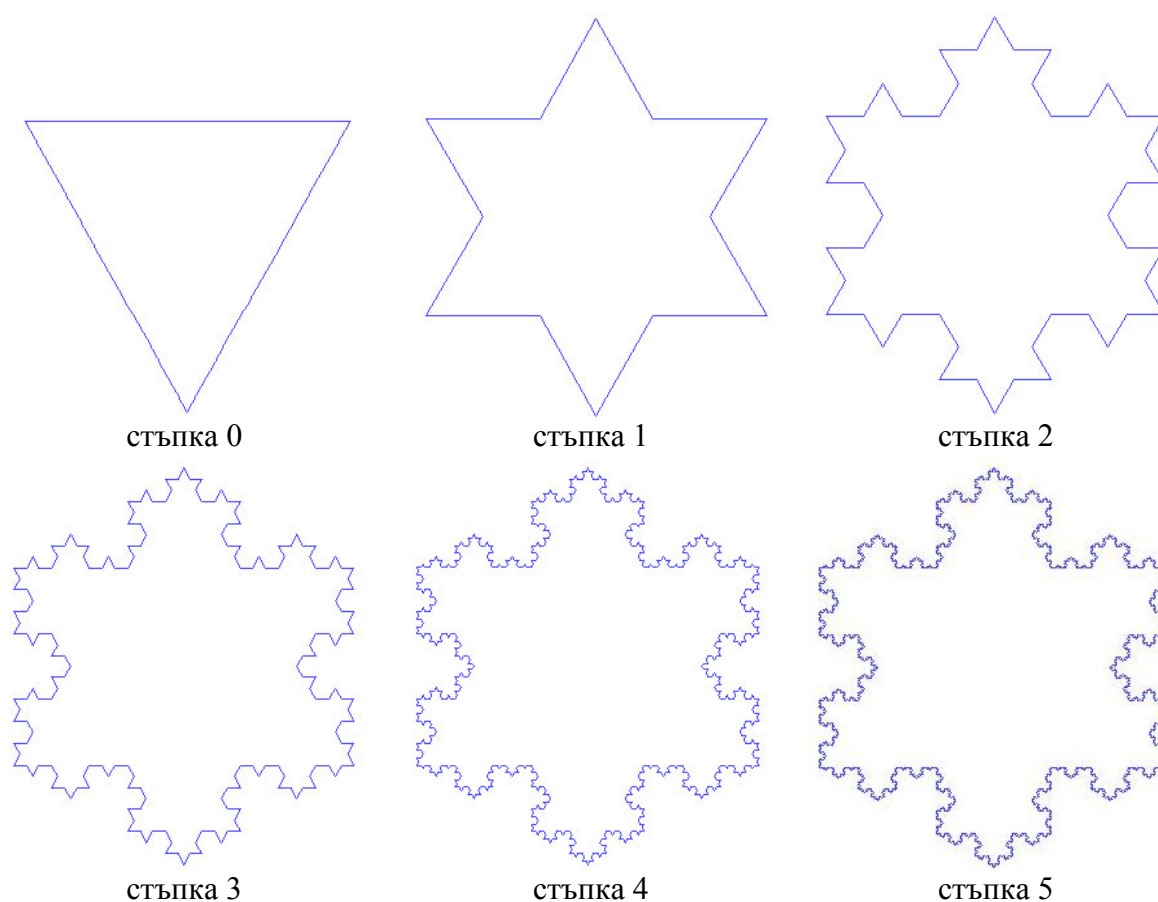


Рис. 4. Итеративно построяване на фрактала „снежинка на Кох“

При стъпка 0 (рис. 4) е даден обърнат правилен триъгълник. При стъпка 1 всяка от страните му се разделя на три равни части, като средната се премахва.

Премахнатата отсечка се взема за основа на правилен триъгълник, чиито две други страни се добавят. Итеративният процес продължава по същия начин със все повече на брой и все по-малки по мащаб правилни триъгълници.

Друг начин за получаване на геометрични фрактали е **рекурсията** (заместването). При нея на всяка следваща стъпка частите на фигурата се заместват (по един и същ начин) с други фигури с все по-малки мащаби. Един прекрасен пример за такъв геометричен фрактал е **драконът от книгата „Юрски парк“ на Майкъл Крайтън, (Хартер-Хейтуей)**. Представяме си равнобедрен правоъгълен триъгълник. При стъпка 0 вземаме хипотенузата му, която при стъпка 1 замества (тя отпада) с двата катета. На всяка следваща стъпка всяка от отсечките се замества по същия начин.

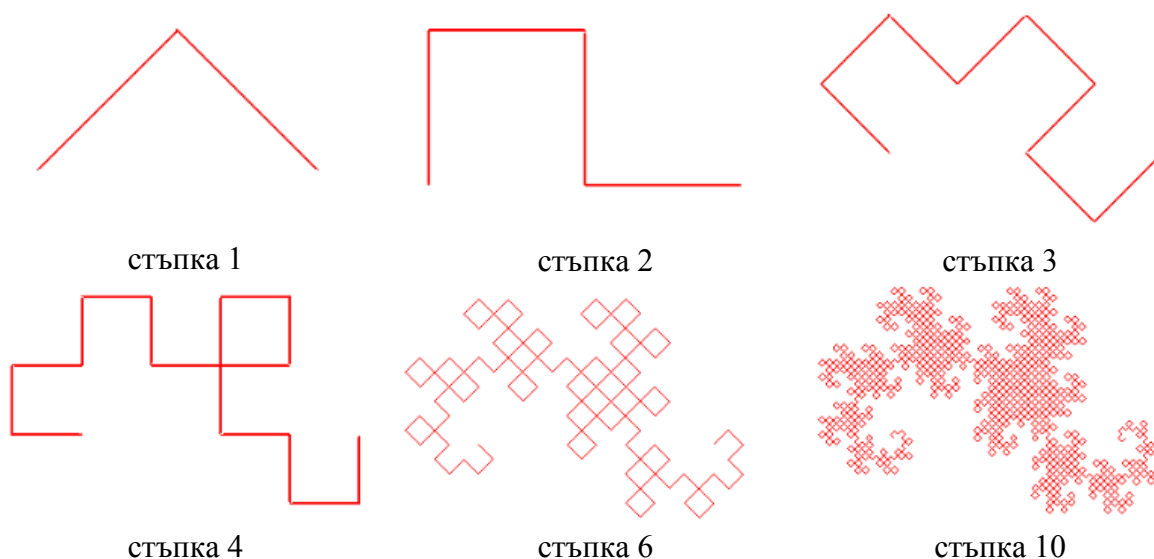


Рис. 5. Фракталът Хартер-Хейтуей

Забележително е, че при итерации (рекурсии) от различен вид при неограниченото им прилагане може да се достигне до един и същ резултат. Триъгълникът на Серпински се получава по итеративен път – при стъпка 0 се взема равнобедрен триъгълник, при стъпка 1 от него се премахва два пъти по-малък равнобедрен триъгълник с върхове – средите на страните на първия триъгълник. При всяка следваща итерация от всеки равнобедрен триъгълник от предишната стъпка се премахва съответния два пъти по-малък равнобедрен триъгълник.

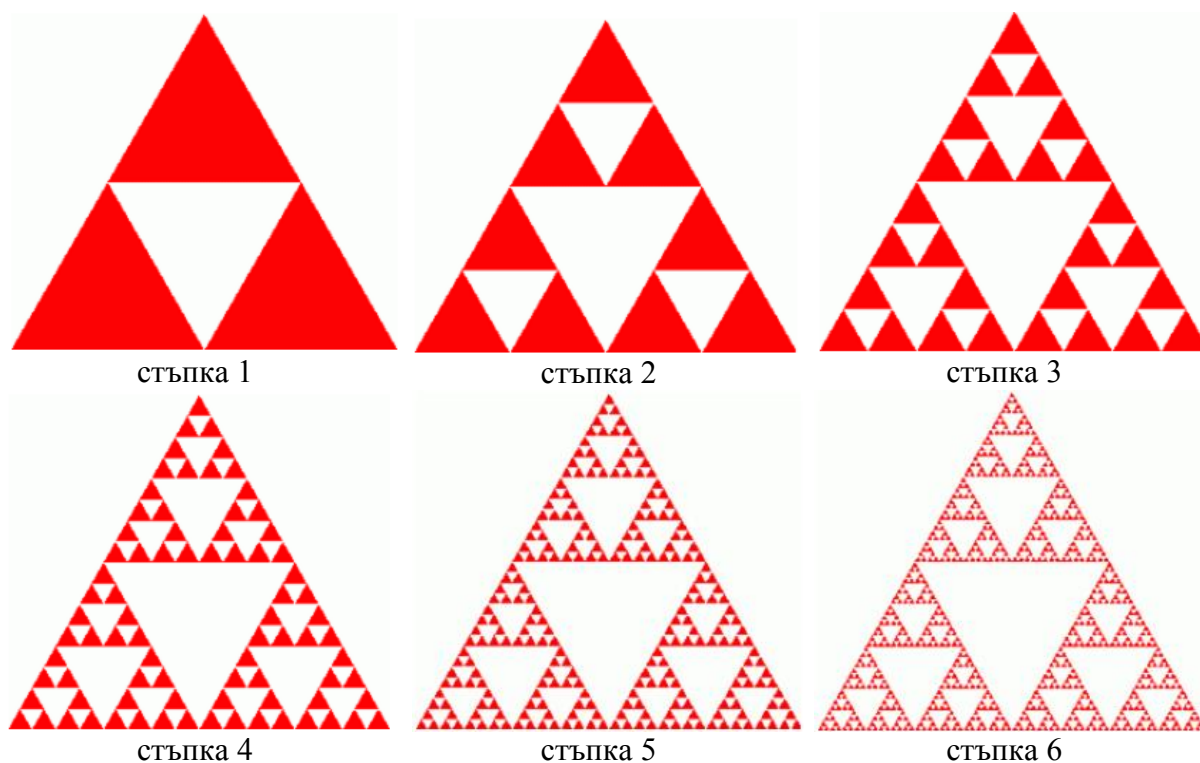


Рис. 6. Фрактал „триъгълник на Серпински“

Кривата на триъгълника на Серпински (**arrowhead curves**) се получава по рекурсивен път. Представяме си равнобедрен трапец с голяма основа с два пъти по-голяма дължина от малката основа, която е равна на бедрата . При стъпка 0 вземаме голямата основа, която при стъпка 1 замества с останалите три страни на трапеца. Тази рекурсия се повтаря неограничено. На рис. 7 са показани някои от стъпките за получаване на този фрактал. За отбелязване е, че резултатът от стъпка 8 съвпада резултата от стъпка 6 за триъгълника на Серпински.

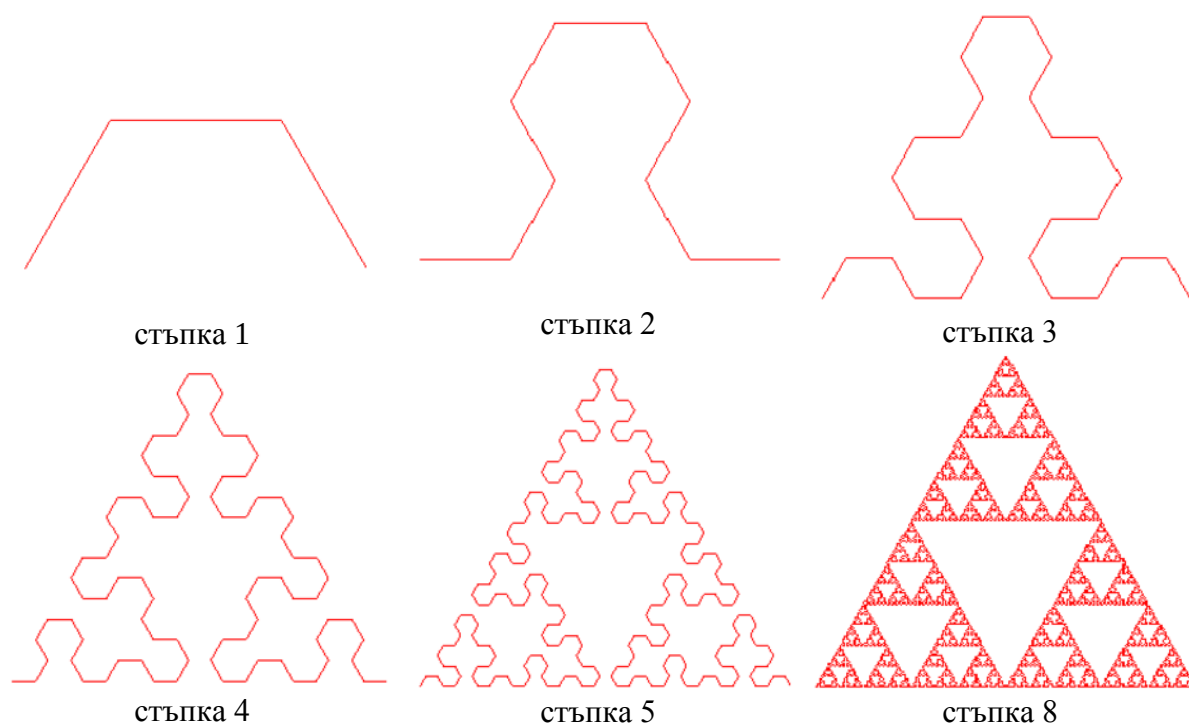


Рис. 7. Фрактал крива на триъгълника на Серпински

За отбелязване е, че всички описани по-горе фрактали се получават на базата на линия или на равнинна фигура. Това са така наречените **плоски фрактали**. Наред с това, съществуват и **пространствени фрактали**. Пример за такива е тетраедър на Серпински. На стъпка 0 се взема правилен тетраедър. При стъпка 1 от него се премахва всичко, освен четири тетраедъра, всеки от които има линейни размери равни на половината от линейния размер на първоначалния тетраедър. След това процесът продължава итеративно (рис. 8).

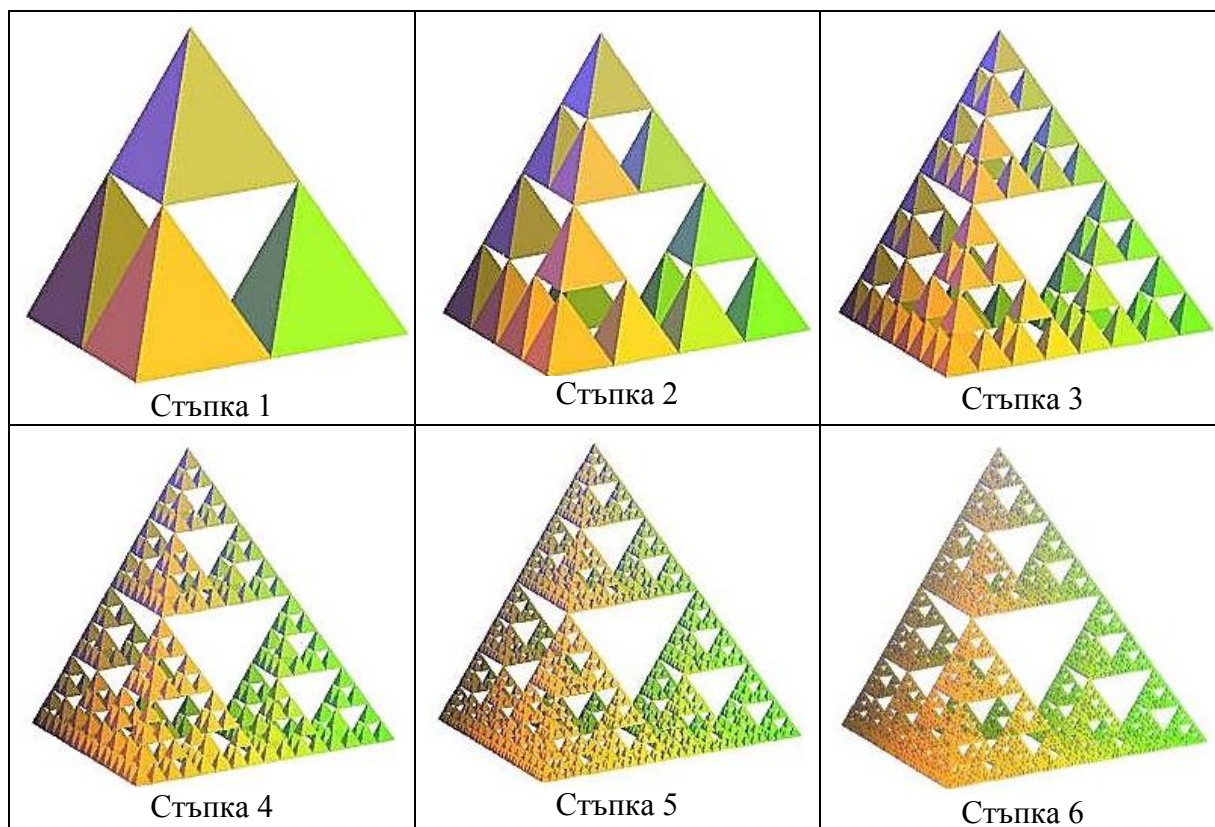


Рис. 8. Тетраедър на Серпински

Алгебрични фрактали. Това е другата основна група фрактали. Наричат се алгебрични, защото те са изградени на базата на алгебрични формули. За геометричните фрактали не са нужни формули или уравнения, затова всеки може да начертае триъгълника на Серпински до 3 или 4 итерация без никакви затруднения, но да се направи това, например, с множеството на Жулиа е толкова невъзможно колкото да се измери дължината на бреговата линия на Англия.

Алгебричните фрактали изглеждат безкрайно сложни в сравнение с геометричните, но могат да бъдат генерирани с много проста формула. Има няколко начина за получаване на алгебрични фрактали.

Първият метод е на базата на многократно итерационно пресмятане на функцията $z_{n+1} = f(z_n)$ където z_n и z_{n+1} са **комплексни числа**, а f е някаква функция. Изчисляването на тази функция продължава докато не бъдат изпълнени определени условия и когато това условие се изпълни, на екрана се появява точка. Функцията може да има различно поведение: за различни точки в комплексната равнина.

Основни примери за алгебрични фрактали, получени чрез комплекснозначни функции са **множествата на Жюлиа** и **множеството на Манделброт**. На рис. 9 е дадена компютърна графична интерпретация на множество на Жюлиа.

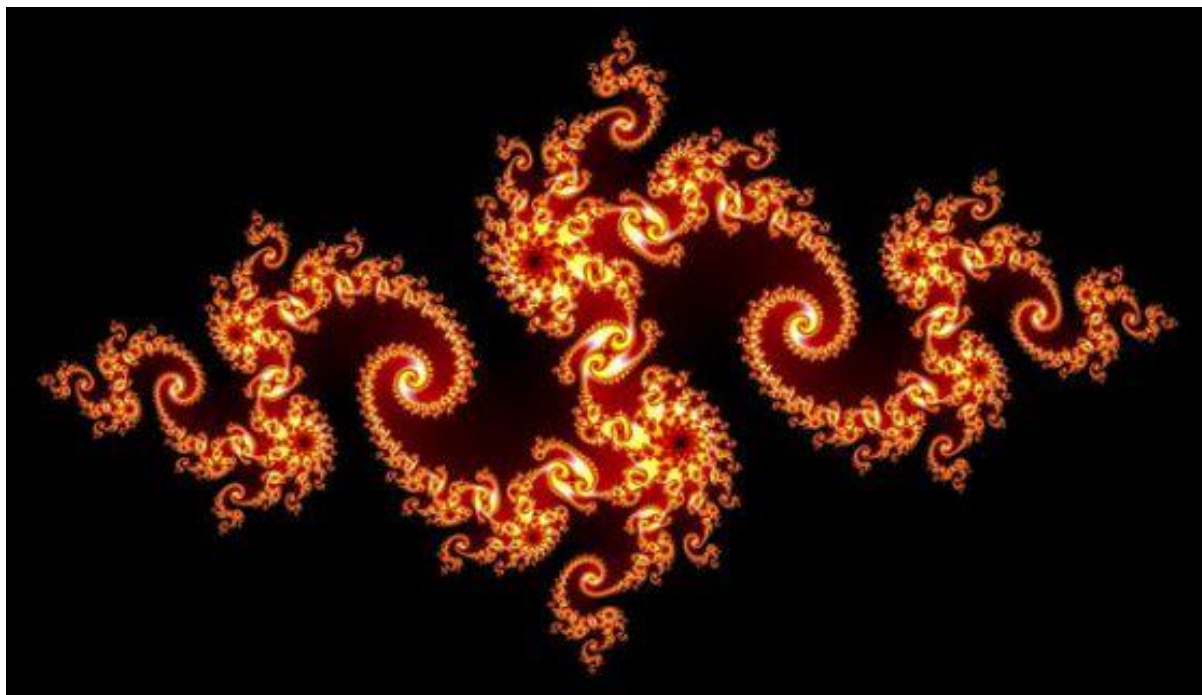


Рис. 9. Фрактално множество на Жюлиа - компютърна графична интерпретация

Геометричните и алгебричните фрактали са двата класа на **детерминирани** (определени) **фрактали**.

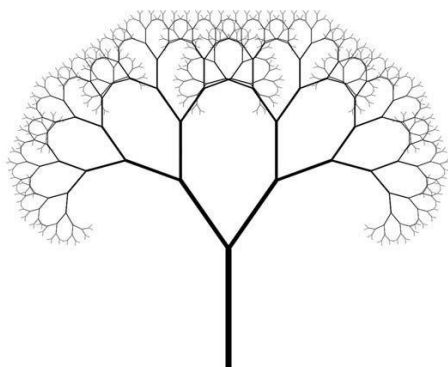
Стохастични (случайни) фрактали. Природните явления не протичат в стерилна, изолирана среда, а в комплексни условия, съчетание от множество преплетени случайни влияния от външни фактори, затова в природата фракталите не изглеждат така изчистени както илюстрациите досега. За моделирането им се използват стохастични (случайни) фрактали.

Стохастичен фрактал е траекторията на Брауново движение. Такива фрактали са рандомизирани, т.е. при построяването им, за всяка рекурсивна стъпка да се въвеждат случайни величини.

При детерминирани фрактали – алгебрични и геометрични е спазет принципа на точното самоподобие, а при стохастичните се говори за приблизително самоподобие.

Фракталните структури са най-видими при растенията. По същество, самият им растеж е подчинен на итерации. Примерите за фрактали в растителния свят са многобройни, някои очевидни, други не толкова. Самата цикличност на растежа им обуславя самоподобие и оттам фракталната структура. Друг фактор е

стремежът на по същество линейни сегменти като клоните да запълват площ или обем заради цели като повече светлина, въздух, вода, хранителни вещества (при корените), жизнено пространство. Тази тенденция на запълване на по-висши измерения е подобна на дробната размерност на фракталите и оформя подобни структури.



Повечето растения имат някаква форма на разклонение - основното стъбло се разделя на няколко клона, всеки от тях се разделя на по-малки клонки и това продължава до най-малките клончета.

Вероятно сте обърнали внимание, че клонче от дървото изглежда подобно на цялото дърво и

листче от папрат изглежда почти идентично на цялото растение.



Едни от най-популярните фрактали са **папратите**, получени от британския математик **Майкъл Барнсли** (Michael Barnsley) през 1988г. Те се генерират в темата Системи Итеративни Функции (Iterated Functions System - IFS). Могат да се разглеждат като вариант на дървовидните фрактали.



Рис. 10. Естествена папрат и папрат на Барнсли, получена чрез Системи Итеративни Функции (IFS).

3. Фрактална размерност

Съгласно едно от определенията, дадено от Бенуа Манделброт «фрактал се нарича множество, чиято хаусдорфова размерност е строго по-голяма от топологичната му размерност». За да разберем това определение, ще напомним за двата принципно различни подхода към понятието размерност. От гледна точка на второто, размерността на геометричните фигури е минималния брой координати, необходим за нейното описание като множество от точки със съхраняване на структурата на естествена близост: например за описването на линията е достатъчна една координата, за описване на повърхнина – две, а за описване на тяло – три координати. Тъй като тази размерност е топологичен инвариант (т.е. тя се съхранява при взаимно еднозначно и непрекъснато пвеобразуване на пространството), то тя е логично да се нарече **топологична** размерност, означаваме я с D_T . Този подход е отразен в работите на Пуанкаре, Брауер, Менгер, Урисон, Лебег и др. За негов връх се смята хомологичната теория на размерността на Александров. От гледна точка на първия подход,

размерността е число D , изразяващо връзката между естествената мярка на геометричната фигура (например, дължина, лице, обем) с величината (в дадения случай дължина), положена в основата на изходната метрична система. Ако метричният еталон е такава величина, то ако я увеличим (намалим) b пъти, то указаната мярка се намаля (увеличава) b^D пъти. Тази размерност се нарича **метрична**. Източник на това определение е следния израз за обичайната мярка M (дължина, лице или обем) на произволна геометрична линия, повърхнина или тяло:

$$M = \lim_{\delta \rightarrow 0} [N(\delta)\delta^D], \quad D=1, 2, 3, \quad (20)$$

където $N(\delta)$ е броя на симплексите (отсечки, клетки или кубове) с геометричен фактор (линеен размер) δ , определящи апроксимацията на изходното множество (по този начин в училищната геометрия се намира дължината на окръжност чрез апроксимацията и с вписани и описани правилни многоъгълници). Въз основа на горния израз, Хаусдорф е предложил през 1919 г. своето знаменито определение за размерност в случай на компактно множество в произволно метрично пространство [61]:

$$D = \lim_{\delta \rightarrow 0} [\ln N(\delta) / \ln(1/\delta)], \quad (21)$$

където $N(\delta)$ е минималния брой сфери с радиус δ , покриващи това множество. Да отбележим, че за регулярните геометрични фигури имаме $D = D_T$. За екзотичните множества (а именно фракталите) $D > D_T$. Следва да се отбележи, че ако изходното множество е вградено в евклидовото пространство, то в определението (21) вместо покритие от сфери може да се вземе каква да е друга негова апроксимация с прости фигури (например, клетки, кубове) с геометричен фактор δ . Тогава, заедно със сферичната размерност D се появяват нови фрактални размерности (клетъчна, вътрешна и др.), които също са гранични стойности при $\delta \rightarrow 0$. Обикновено тези фрактални размерности съвпадат помежду си, обаче скоростта на сходимост към границата може да бъде различна в различните случаи. Тъй като, на практика размерността се пресмята въз основа на краен брой покрития или други апроксимации, то правилния избор на последните има принципно значение.

Първоначалното определение (21) се е разглеждало като удобно средство за систематизация на различни «паталогични» множества от типа на функциите на Вайерщрас, кривите на Пеано и техните многобройни разновидности, които възникват по естествен начин при обсъждане основите на математическия анализ. Тъй като такива множества, въпреки изключителната си нерегулярност,

обикновено са инвариантни относно преобразования на мащаба, те притежават хаусдорфова размерност. При това, като правило тази размерност е дробна. По-нататък ще разгледаме прости примери за такива множества, за да можем на базата на тях да поясним идеята, въз основа на която ще се построи фракталния анализ на динамичните финансови редове.

3. Първият пример – това е кривата на Кох. Тя се построява с помощта на итеративна (повтаряща се) процедура. При нулевата стъпка се взема единичната отсечка (рис. 3). При първата стъпка тази отсечка се разделя на три равни части. След това се построява равноностранен триъгълник с основа средната третинка и тя се премахва. След това на всяка следваща стъпка тази процедура се повтаря с всички налични отсечки. Множеството, което се получава при тази итеративна процедура се нарича *крива на Кох*. Трябва да се каже, че всички моделни фрактали се построяват като граница на редица от някакви базови комплекси. Такива базови комплекси Манделброт нарича **предфрактали**. За пресмятането на хаусдорфовата размерност на кривата на Кох в качество на апроксимираща редица е удобно да вземем нейното представяне на n -тата стъпка на итерацията (предфрактал от n -то поколение). В този случай множеството може да се апроксимира от 4^n отсечки, намалени, спрямо първата 3^n пъти. Макар такава апроксимация да не се явява покритие, за дадения обект тя е най-естествената. Ако сега вземем $\delta = (1/3)^n$, то $N(\delta) = 4^n$. Преминавайки към граничен преход при $n \rightarrow \infty$ по формулата (21), получаваме $D = \ln 4 / \ln 3 (\approx 1,26)$. Такава размерност се нарича **вътрешна**. Не е трудно да се покаже, че в дадения случай тя съвпада с хаусдорфовата размерност. Да отбележим, че ако в качеството на нулево приближение вземем не единичната отсечка а равноностранен триъгълник със страна единица, и приложим спрямо всяка от страните на триъгълника гореописаната процедура, то в резултат ще получим така наречената снежинка на Кох (рис. 4).

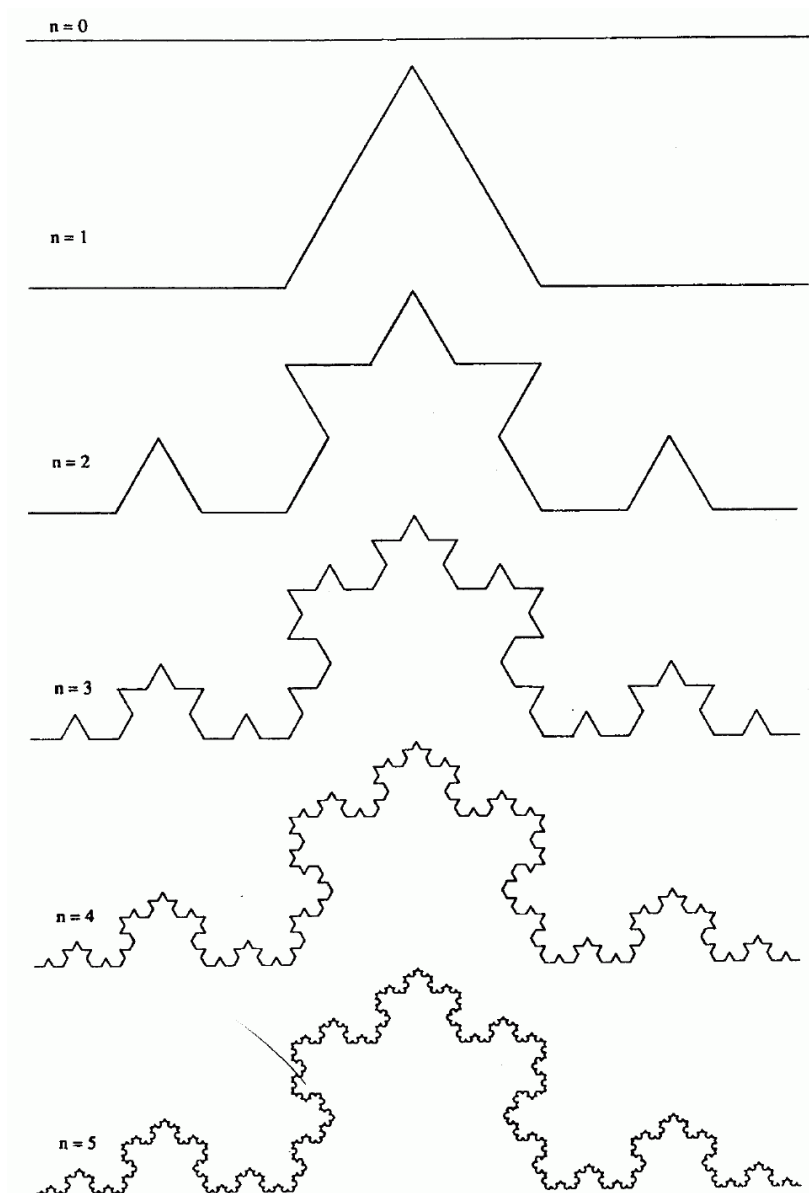


Рис. 11. Кривата на Кох – първите пет стъпки на итерацията

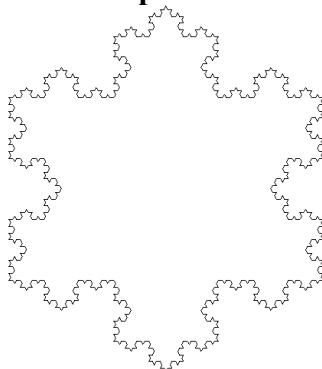


Рис. 12. Снежинката на Кох на петата стъпка на итерацията

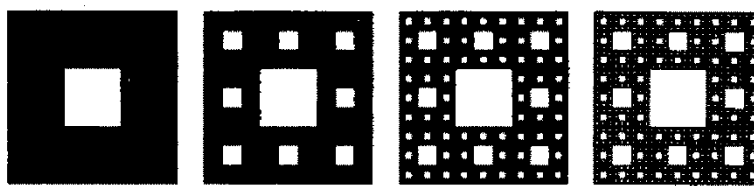


Рис. 13. Килим на Серпински – първите четири стъпки от итерацията

Втория пример – това е килима на Серпински, който се построява по следния начин. На нулевата стъпка се взема единичен квадрат. На първа – този квадрат се разделя на девет равни квадрата и се премахва средния (рис. 5). По-нататък, при всяка следваща стъпка тази процедура се повтаря за всички останали квадрати. Множеството, което се получава в качеството на граничен преход на тези процедури се нарича *килим на Серпински*. За пресмятане на фракталната размерност, в качество на n -та апроксимация пак ще вземем предфрактала от n -то поколение. В този случай, той ще бъде покрит от 8^n квадрати, при намаляване на мащаба 3^n пъти. Това означава, че при $\delta = (1/3)^n$, $N(\delta) = 8^n$. Премахвайки към граничен преход при $n \rightarrow \infty$, получаваме $D = \ln 8 / \ln 3 (\approx 1,89)$.

Да отбележим, че апроксимациите, които използвахме в тези случаи дават оптимални приближения (в някакъв смисъл) на всяка стъпка на итерацията. Именно този факт ни позволи да получим значението за D още на първата стъпка, което е невъзможно, ако използваме други апроксимации. За да поясним това по-подробно, нека за който да е от тези два примера да построим графика, като по хоризонталната ос са разположени значенията на $\ln(1/\delta)$, а по вертикалната – значенията на $\ln N(\delta)$ (рис. 6). Тъй като в логаритмичен мащаб всички степенни функции се превръщат в линейни, то степента D се определя като тангенса на ъгъла на наклон на съответната права. Очевидно е, че при $\delta = (1/3)^n$ всички данни за указаните примери са разположени на една права. Ако за пресмятането на D в този пример се използват други апроксимации, то се получава графика, която се приближава към тази права асимптотично. При това, ако апроксимацията е избрана неудачно, то това приближаване ще много бавно. По-нататък, при фракталния анализ на динамичните финансови редове, това съображение (за необходимостта от избор на оптимална апроксимация) ще играе основна роля.

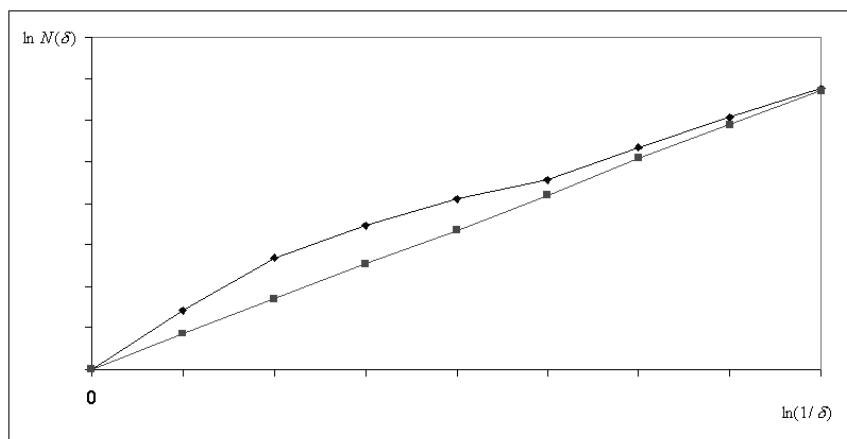


Рис. 13. Зависимост в двоен логаритмичен мащаб на броя симплекси $N(\delta)$, съставляващи апроксимацията от характерния размер на симплексите δ . Ако такива апроксимации са предфрактални, то тази зависимост е линейна. В противен случай, тази зависимост само се приближава асимптотично към линейната при $\delta \rightarrow 0$

4. Когато са се разглеждали такива примери, никой не се е надявал, че множества с нетривиална (дробна) хаусдорфова размерност биха имали каквото и да било отношение към природата. Сега, до голяма степен благодарение на усилията на Манделброт, ние знаем, че фракталите ни заобикалят навсякъде. Някои от фракталите се променят постоянно като движещите се облаци и разгарящия се пламък на огъня, а други, подобно на дърветата или нашата съдова система, съхраняват структурата си, придобита по пътя на еволюцията. При това, реалният диапазон на мащабите, където могат да се наблюдават фрактални структури се простира от разстоянието между молекулите в полимерите до разстоянието между струпвания от галактики във вселената. Може да се каже, че всички силни нерегулярности във вселената се стремят да добият самоподобна (фрактална) структура, която за тях е най-благоприятна от енергийна гледна точка.



Ще се опитаме да поясним общата специфика на природните фрактали върху примера на бреговата линия, толкова повече, че този пример представлява исторически интерес. Именно тук за първи път е открита интересна закономерност, която впоследствие е осмислена като фракталност. В работата на изтъкнатия английски метеоролог и картограф Ричардсън (публикувана след смъртта му през 1961 г.) [62] с помощта на редица от все по-точни карти се прави опит да бъде измерен периметърът на бреговата линия на Великобритания. Данните се нанасят на графика, където по хоризонталната и вертикална ос се нанасят съответно логаритмите на мащабния фактор на картата m и периметра $P(m)$. Резултатите са се оказали поразителни. Данните почти точно се разположили върху права линия (рис. 7). Това означава, че благодарение на «изкривяванията», които се появяват при намаляване на мащабния фактор на картата периметърът е «разходящ» (т.е. $P(m) \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow 0$), и при това по степенен закон. От тук следва, че бреговата линия притежава фрактална размерност. И наистина, тъй като мащабния фактор на картата m е право пропорционален на минималното различимо по размер δ («разрешено» за картата), то измерването на периметърът с помощта на редица от все по-точни карти може да се представи като измерване с помощта на редица от все по-точни апроксимации на бреговата линия с начупени линии с размер на звеното δ . Тогава наличието на степенен закон при прехода към по-точни карти означава, че:

$$P(\delta) \sim \delta^{-\alpha}, \quad (22)$$

където $P(\delta)$ е периметъра, съответствующ на разрешеното δ ; α – константа¹. Ако сега отчетем, че $P(\delta) = N(\delta)\delta$, където $N(\delta)$ – брой на звената в начупената линия, апроксимираща периметъра, то $N(\delta)$ получаваме изрази:

$$N(\delta) \sim \delta^{-(\alpha+1)}, \quad (23)$$

откъдето веднага следва, че бреговата линия на Великобритания е фрактал с фрактална размерност $D = \alpha + 1$ (виж. формулата (21)).

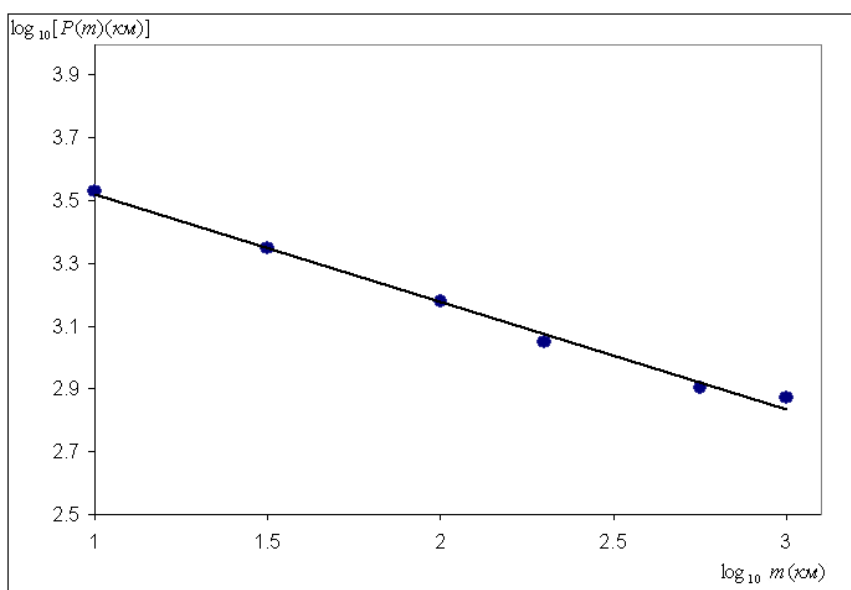


Рис. 15. Зависимост на дължината на бреговата линия на Великобритания $P(m)$ от мащабния фактор на картата m при двоен логаритмичен мащаб

Въз основа на този пример могат да се забележат основните особености на природните фрактали, които ги правят съществено различни от моделните:

първо, при тях свойството на самоподобие, характерно за моделните фрактали не е налице (по-точно – наблюдава се частично самоподобие);

второ, при пресмятане на фракталната им размерност степенният закон се проявява като «промеждутъчна асимптотика» (т.е. при $\delta \rightarrow 0$ се взема мащаб, който е малък в сравнение с някои характерни мащаби, но е много по-голям от минималния). Последното означава, че за построяването на съответната зависимост в двоен логаритмичен мащаб следва да се изключат мащаби по-малки от определен минимален мащаб (наложен от спецификата на природния

¹ Тук и по-нататък в изложението символът $\sim$ означава, че при $\delta \rightarrow 0$ изразите отлясно и отляво (които обикновено се стремят към нула или безкрайност) се различават най-много с константа.

фрактал и практичната потребност, налагаща изучаването му), като особена роля тук играе «изкуството» на правилния избор на системата за апроксимация.

В следващия раздел ще разгледаме фрактални динамични редове, явяващи се едни от най-важните класове природни фрактали.