

БИЗНЕС ДИНАМИКА



$$N(t) = \frac{M - a \frac{M - N_0}{a + bN_0} e^{-(a+bM)t}}{1 + b \frac{M - N_0}{a + bN_0} e^{-(a+bM)t}}$$

Асен Христов

Пловдив

2017

СЪДЪРЖАНИЕ

Увод.....	3
1. Въведение.....	7
I. ЧАСТИЧНО МИКРОИКОНОМИЧЕСКО РАВНОВЕСИЕ В ДИНАМИЧЕН АСПЕКТ.....	14
2. Частично микроикономическо равновесие.....	14
3. Цикълът на паяжината.....	20
4. Динамизиране на статични модели.....	29
5. Динамично частично равновесие.....	33
6. Билинейни динамични функции на търсене и предлагане.....	47
7. Някои специални динамични функции на търсене и предлагане.....	62
II. НЕДИФЕРЕНЦИАЛНИ МОДЕЛИ В БИЗНЕС ДИНАМИКАТА	
8. Размяна време-разходи (Time-cost trade off).....	75
9. Крива на опита (обучението) – разходен модел.....	80
III. ДИФЕРЕНЦИАЛНИ МОДЕЛИ НА БИЗНЕС ДИНАМИКАТА	
10. Крива на обучението – диференциален модел.....	85
11. Крива на обучението – обобщен диференциален модел.....	90
12. Базов модел на разпространение на иновациите.....	94
13. Фундаментален модел на разпространение на иновациите.....	96
14. Демографски модели.....	108
15. Модел на жизнения цикъл.....	116
16. Моделиране на рекламна кампания.....	122
Литература	132

Увод

Предмет на настоящата работа е изучаване на икономически и бизнес модели, при които част от икономическите величини се променят с времето. Това са динамични бизнес и икономически модели. Тъй като цялата класическа микроикономика е по същество статична, тя прави „снимка“ на микроикономическите процеси, то с тази дисциплина се стремим да запълним този „дефицит от време“. Така че, почти всички разгледани модели са по своята същност микроикономически (в макроикономиката присъствието на динамични модели е осезаемо), като изследваните величини са функции от времето. Тази работа (в третата си част) е илюстрация на факта, че с помощта на елементарни диференциални уравнения, като $y' = k$, $y' = ky$, $y' = k(c - y)$ и $y' = ky(c - y)$ могат да се моделират важни за икономиката процеси: на повишаване на производителността в следствие на обучението, на разпространение на иновациите, на жизнения цикъл на продуктите и технологиите, на ефекта от една рекламна кампания. Направено е и едно отклонение, като са разгледани някои демографски модели, поради това, че демографските процеси следват логика, подобна на тази при бизнес процесите, и следователно за тяхното моделиране може да се използват същите методи. Най-общо казано, при моделирането на бизнес и демографските процеси може да се изучават или стойностите във времето на изследваната величина или измененията (първата производна) или измененията на измененията (втората производна). Прави се хипотеза за вида на функцията, първата или втората производна, като тази хипотеза трябва да се покрива от историческите данни. Когато става дума за производни, това води до обикновено диференциално уравнение, чието решение дава вида на изследваната функция. След това тази функция може да се използва за бизнес (и демографско) прогнозиране (което е целта!), като се пресметнат стойностите ѝ за предстоящи моменти от времето.

Така можем да определим бизнес динамиката като класическа и съвременна приложна икономическа дисциплина, която с помощта на математическа методология от анализа и диференциалните (и диференчни) уравнения изучава микроикономически процеси с цел бизнес прогнозиране. Така, тя може да бъде от полза за бизнес организациите, при вземане на управленски и инвестиционни решения.

Настоящата работа се състои от въведение и три части. Разгледани са общо 35 примери-модели с решения, в които са разкрити основните методи на бизнес динамиката.

Във въведението е направена класификация на бизнес динамичните уравнения, направена е връзката между тях и диференциалните и диференчни уравнения. Като най-прост пример е разгледано диференциалното уравнение на Бернули за постоянен ръст и съответното му диференчно уравнение.

В първата част е разгледано частичното микроикономическо равновесие в динамичен контекст. В параграф 2 е дефинирано частичното микроикономическо равновесие. Разгледани са три основно модела, обуславящи неговата устойчивост – на Валрас, Маршал и Самуелсън. В параграф 3 е разгледан класическия модел „цикъл на паяжината“, показано е условието за неговата устойчивост. В случаите, когато такава устойчивост не е на лице, са показани методи за нейното подсигуриране – чрез въвеждане на данък от държавата или чрез промяна на функцията на предлагане (цикъл на паяжината с управление). Същината на цикъла на паяжината се състои в това, че функцията на предлагане за разглеждания период от време е функция от цената през предишния времеви период. Това води до рекурентна зависимост между цените. В параграф 4 е показано как, използвайки рекурентността при цикъла на паяжината, можем да динамизираме, и по този начин да решим някои статични модели. Параграф 5 е посветен на изучаване на общите закономерности на динамичното частично равновесие – при него функциите на търсене и предлагане освен от цената, зависят и от времето. В този и следващите два параграфа, се търси начин за изразяване на равновесните величини на модела – цена и количество, като функции също на времето. В параграф 5 са разгледани най-важните видове функции на търсене и предлагане на две променливи – с постоянно изменение (по цената или времето), с постоянна еластичност по цената и с постоянен във времето темп. Тази част завършва с преглед (в параграфи 6 и 7) на някои специални динамични функции на търсене и предлагане – билинейните (в параграф 6) и такива, при които някои пазарни величини, свързани с търсенето и предлагането се изменят по законите на аритметичната или геометричната прогресия.

Във втората част са показани някои недиференциални модели на бизнес динамиката. При тях се оказва обосновано да се направи хипотеза за вида на самата динамична икономическа функция. Това води до алгебрично решаване на модела. В параграф 8 е разгледан модела на размяна на време с разходи. Такава ситуация възниква, когато в предприятието трябва да се въведе нова технология или нова организация на производството. Това се прави поради намаляване на конкурентността и от там и на печалбата на предприятието. От друга страна, се оказва, че разходите по внедряването са толкова по-големи, колкото по кратък е срока за внедряване. Това води до оптимизационна задача и определянето на точния срок за въвеждане на нововъведението, така че сумата от преките разходи и пропуснатите ползи да е минимална. В параграф 9 е разгледан най-общо модела, известен като „линия на обучение (опит)“. Тъй като при една нова дейност, производителността във всеки следващ период от време се покачва (в следствие от придобития опит) с намаляващ темп, а разходите за всички такива периоди са фиксирани, то една хипотеза, че функцията на разходите ще е растяща и вдлъбната, изглежда правдоподобна. В това се състои разходния модел на процеса на придобиване на опит (обучение).

В третата (и основна за тази работа) част са разгледани диференциалните модели на бизнес динамиката. При тях не може веднага да се направи обоснована хипотеза за вида на изследваната икономическа функция, вместо това се прави хипотеза за изменението ѝ. Това води до съответното обикновено диференциално (или диференчно) уравнение, чието решение дава отговор на първоначалния въпрос – за вида на динамичната функция. В параграф 10 това е направено за модела на придобиване на опит (обучение). Там хипотезата е, че прирастът на наученото е пропорционален с постоянен коефициент на пропорция на обема на ненаученото. Това води до диференциално уравнение, чието решение е функцията на производителността. В параграф 11 се допуска възможността, коефициента на пропорционалност да се променя с времето, по такъв начин се получава обобщен модел на линия на опита. В параграф 12 е предложен най-общ модел на разпространяване на иновациите – базов модел, а в параграф 13 е разгледан подробно най-важния случай – на фундаменталния модел. Същността на фундаменталния модел е следната – при него се прави хипотеза, че скоростта на разпространение е представена като произведение на два множителя – първият е линейна растяща функция от достигнатото в момента разпространение, а вторият е обема на останалия пазар, и следователно, намаляваща функция на достигнатото в момента разпространение. Дадена е и икономическа интерпретация на коефициентите на линейната функция (първия множител) – свободният член е индикатор на външното влияние (главно от реклама), а другият – на вътрешното влияние (от човек на човек). Разгледани са моделите с външно, вътрешно и смесено влияние, изведени са функциите на разпространение и са показани някои техни свойства. За отбелязване е, че моделът с външно влияние има същото уравнение (и решение) като модела на придобиване на опит. В следващия, параграф 14 е направено едно отклонение от тематиката, но не и от методологията – разгледани са някои демографски модели, както за населението на отделни държави, така и за глобалното (световно) население. Първата група модели (предложени от Малтус) са свързани с хипотезата, че населението расте с постоянен темп и тогава неговата динамика се описва от експоненциалната функция. Макар този модел да е отдавна отречен за световното население, то в някои случаи той може да бъде полезен, особено ако приемем, че темпът може да бъде функция на времето. Друга група модели са свързани с логистичната функция (тя описва разпространението на иновациите с вътрешно влияние). Поради голямото ускоряване на ръста на световното население през 1950 – 2010 год. се появява теорията за „демографски взрив“ и от там, така наречените хиперболични демографски модели. Последващият, обаче, след „демографски взрив“ „демографски преход“ налага корекции, така се появява модела на руския физик Капица. В параграф 15 е разгледано едно обобщение на модела на разпространение на иновации със смесено влияние – модела на жизнен цикъл на продукта (технологията). Последният параграф 16 е посветен на моделирането на рекламните кампании. Разгледан е модела на Нерлов – Ароу, при който нарастването на информираността е линейна функция от разходите за реклама

(растяща) и достигнатото ниво на информираност (намаляваща). Последното се дължи на ефекта на забравяне. Изведена е функцията на обема на информираната публика за произволна по интензивност рекламна кампания, а в примерите са разгледани рекламни кампании с различни интензивности.

Целта на настоящата работа е да обезпечи избираемата дисциплина със същото наименование във ФМИ при ПУ „П. Хилендарски“, но може да бъде полезна както на математици и информатици с интереси в икономиката, така и на икономисти, които искат да направят друг прочит на известни за тях теми. Ще бъде също така от полза и на аналитични специалисти и мениджъри, които смятат, че използвайки математически методи и модели, могат да подобрят конкурентността на своите фирми.

1. Въведение

Динамичните модели в икономиката се наричат моделите, описващи икономиката в развитие, т.е. моделите, описващи икономически процеси. Те са контрапункт на статичните модели, характеризиращи дадена икономическа система в определен момент, а не в развитие. В микроикономиката, занимаваща се поведението на отделните потребители и производители на пазарите на стоки (и услуги) и ресурси, основните модели са статични – те дават една „снимка“ на разглежданата икономическа система в определен момент.

Даден модел се явява динамичен, ако поне една икономическа променлива се отнася за период от време, различен от времето, към което са отнесени другите променливи. Всички променливи в динамичните модели са отнесени към времето (t), което играе ролята на независима променлива.

С помощта на динамичните модели се решават въпросите за планирането и прогнозирането на икономическите процеси.

Икономиката е практика и наука, обхващаща производството, разпределението и потреблението на стоки и услуги. Икономическата практика е предмет на изучаване от икономическата наука. Тя се подразделя на:

- микроикономика и макроикономика;
- теоретична и приложна икономика.

Микроикономиката изучава икономическите системи локално, тя моделира поведението на отделния потребител или производител на конкретен пазар. За разлика от нея, макроикономиката изучава икономическата система на една държава глобално, в нея присъстват четири икономически агента – секторите на домакинствата и фирмите, държавата и външния сектор (всички икономики, различни от дадената, разглеждани като едно цяло). Обект на изучаване в дисциплината „Бизнес динамика“ ще бъдат динамични микроикономически модели с отношение към дейността на фирмите.

Динамичните модели в бизнес икономиката могат да се разделят на следните групи:

- модели с непрекъснато време;
- модели с дискретно време;
- модели на случайни процеси.

Като контрапункт на последната група модели, наричащи се стохастични, първите две групи се отнасят към детерминирания модели.

Моделите с непрекъснато време обикновено се свеждат до решаването на обикновени диференциални уравнения, а моделите с дискретно време – до диференчни уравнения.

Диференциални уравнения се наричат уравнения, в които неизвестната величина е функция (в случая на времето t) и в тях освен неизвестната функция $y(t)$ участват и някои нейни производни $y'(t)$, $y''(t)$, $y'''(t)$, ... и т.н. Най-високият ред участваща в обикновеното диференциално уравнение производна определя и реда на самото уравнение. Така разграничаваме обикновени диференциални уравнения от първи ред (в които се срещат $y(t)$ и $y'(t)$), от втори ред ($y(t)$, $y'(t)$ и $y''(t)$) и т.н.

Приложението на обикновените диференциални уравнения в икономиката се основава преди всичко на механичната интерпретация на производната. При нея

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

се интерпретира като скорост на изменение на икономическата величина $y(t)$.

Ако приемем, че времето е зададено дискретно (дни, седмици, месеци, години), то тогава икономическата величина $y(t)$ е определена само за $t = 0, 1, 2, \dots$, следователно ще имат смисъл само стойностите

$$y(0), y(1), y(2), \dots, y(t-1), y(t), y(t+1), \dots$$

Всяка връзка, при която $y(t+1)$ зависи от предишните стойности на величината $y(t), y(t-1), y(t-2), y(t-3), \dots$ се нарича диференчно уравнение. Ако $y(t+1)$ зависи само от $y(t)$ говорим за диференчно уравнение от първи ред, ако $y(t+1)$ зависи и от $y(t-1)$ – от втори ред и т.н.

Диференциалните уравнения могат винаги да се дазглеждат като гранични състояния на диференчните, а диференчните се получават често (но не винаги) от диференциалните чрез дискретизация на времето. Това става по следния начин:

$$\begin{aligned} y'(t) = \frac{dy}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \approx \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t+1) - y(t)}{(t+1) - t} = \frac{y(t+1) - y(t)}{1} \\ &= y(t+1) - y(t). \end{aligned}$$

Аналогично получаваме формулата

$$y''(t) \approx [y(t+2) - y(t+1)] - [y(t+1) - y(t)] = y(t+2) - 2y(t+1) + y(t)$$

Модел на Бернули на постоянния ръст. Да предположим, че една дискретно зададена величина се изменя с постоянен ръст. Това означава, че изменението става по закона

$$y(t+1) = (1+k)y(t),$$

където k е малко (от порядъка на стотни или хилядни). Тогава k ако е положително (отрицателно) се нарича ръст на нарастването (намаляването) на величината $y(t)$. Предполага се, че е зададено началното състояние на тази величина

$$y_0 = y(0).$$

Тогава ще имаме

$$y(1) = (1 + k)y_0$$

$$y(2) = (1 + k)y(1) = (1 + k)^2 y_0$$

... ..

$$y(t) = (1 + k)y(t - 1) = (1 + k)^t y_0.$$

Ако заменим $y(t + 1)$ с $y'(t) + y(t)$ ще получим диференциалното уравнение на изменението с постоянен ръст:

$$y'(t) = ky(t).$$

Това уравнение за пръв път е било предложено от Якоб Бернули. Решението му е елементарно: умножаваме уравнението

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

с dt и делим на y , получаваме

$$\frac{dy}{y} = kdt,$$

след интегриране намираме общото решение

$$\ln y = kt + C \Rightarrow y(t) = Ce^{kt}.$$

От началното условие намираме

$$C = y(0) = y_0.$$

Така окончателното решение е

$$y(t) = e^{kt} y_0.$$

Решението на диференциалното уравнение на постоянния ръст е граница на решението на съответното уравнение:

$$\lim_{k \rightarrow 0} (1 + k)^t y_0 = y_0 \lim_{k \rightarrow 0} (1 + k)^{\frac{1}{k} kt} = y_0 \left[\lim_{k \rightarrow 0} (1 + k)^{\frac{1}{k}} \right]^{kt} = e^{kt} y_0.$$

За много малки стойности на k е валидна следната формула за приближено пресмятане

$$(1 + k)^t \approx 1 + kt.$$

Тя се обосновава по следния начин. Нека k и t да са много малки величини, тогава

$$(1+k)(1+m) = 1+k+m+km \approx 1+k+m.$$

Това е така, защото ако k и m са от порядъка на стотни, то произведението km е от порядъка на десетохилядни (или най много хилядни) и може да бъде пренебрегнато. Тогава за $(1+k)^t$ получаваме

$$(1+k)^t = (1+k)(1+k) \dots (1+k) \approx 1+k+k+\dots+k = 1+kt.$$

Така окончателно получаваме приблизителните равенства

$$e^{kt} \approx (1+k)^t \approx 1+kt.$$

Забележка 1. Лесно можем да получим и формулата за приблизително деление

$$\frac{1+k}{1+m} \approx 1+k-m.$$

Забележка 2. Ясно е, че редицата

$$1, e^k, e^{2k}, \dots, e^{kt}$$

се явява геометрична прогресия с частно $q = e^k$. Когато дадена величина нараства по такъв начин, казваме че тя има експоненциален ръст.

Правилото „70“. При величините, променящи се с постоянен темп, често възниква въпроса: след колко време те ще се удвоят (утроят). Нека една величина се изменя с постоянен темп от $p\%$. Тогава законът на нейното изменение ще бъде

$$y(t) = e^{\frac{pt}{100}} y_0.$$

Предполагаме, че след определено време тя се е удвоила. Тогава ще имаме

$$e^{\frac{pt}{100}} y_0 = 2y_0 \Rightarrow e^{\frac{pt}{100}} = 2.$$

Като логаритмуваме последното равенство, получаваме

$$\frac{pt}{100} = \ln 2 \Rightarrow t = \frac{100 \ln 2}{p} = \frac{100 \cdot 0,693}{p} \approx \frac{70}{p}.$$

За да определим след колко време една величина, нарастваща с постоянен темп от $p\%$, ще се удвои, трябва 70 да разделим с p .

Аналогично получаваме правилото „110“ за утрояване:

$$t = \frac{100 \ln 3}{p} = \frac{100 \cdot 1,099}{p} \approx \frac{110}{p}.$$

Пример 1. В банка са депозирани 1000 лв. при постоянна лихва от 2% годишно. Да се пресметнат сумите на депозита на всеки 5 години до 35 години по трите формули. След колко години приблизително сумата ще се удвои.

Решение:

Първо пресмятаме по формулата

$$y(t) = e^{\frac{pt}{100}} y_0 = 1000e^{0,02t}.$$

Ще имаме

$$\begin{aligned} y(5) &= 1000e^{0,1} = 1105; y(10) = 1000e^{0,2} = 1221; y(15) = 1000e^{0,3} \\ &= 1350; y(20) = 1000e^{0,4} = 1492; y(25) = 1000e^{0,5} \\ &= 1649; y(30) = 1000e^{0,6} = 1822; y(35) = 1000e^{0,7} = 2014. \end{aligned}$$

След това извършваме пресмятанията по формулата

$$y(t) = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t y_0 = 1,02^t \cdot 1000.$$

Получаваме

$$\begin{aligned} y(5) &= 1,02^5 \cdot 1000 = 1104; y(10) = 1,02^{10} \cdot 1000 = 1219; y(15) \\ &= 1,02^{15} \cdot 1000 = 1346; y(20) = 1,02^{20} \cdot 1000 = 1486; y(25) \\ &= 1,02^{25} \cdot 1000 = 1641; y(30) = 1,02^{30} \cdot 1000 = 1811; y(35) \\ &= 1,02^{35} \cdot 1000 = 2000. \end{aligned}$$

И накрая, пресмятаме по формулата

$$y(t) = \left(1 + \frac{pt}{100}\right) y_0 = (1 + 0,02t)y_0.$$

Пресметнатите стойности нанасяме в таблицата

	$1000e^{0,02t}$	$1,02^t \cdot 1000$	$(1 + 0,02t)y_0$
$t = 5$	1105	1104	1100
$t = 10$	1221	1219	1200
$t = 15$	1350	1346	1300
$t = 20$	1492	1486	1400
$t = 25$	1649	1641	1500
$t = 30$	1822	1811	1600
$t = 35$	2014	2000	1700

Вижда се, че резултатите от първите две колонки са много близки, а резултатите от третата колонка с времето се отдалечават все повече от тях. Всъщност, не е добра идеята да се приближава геометрична прогресия (колонки 1 и 2) с аритметична (колонка 3), освен ако не става дума за много малък темп на изменение и кратък период от време.

На базата на правилото „70“ получаваме че паричният депозит ще се удвои приблизително за 35 години.

Пример 2. Да се прогнозира населението на България за 2020, 2030, 2040, 2050, 2070 и 2100 год. на базата на следните данни и като се използва модела на постоянния ръст.

История на населението на България

година	население	Темп на нарастване
2008	7541012	-0,73%
2009	7486752	-0,72%
2010	7433677	-0,71%
2011	7381264	-0,71%
2012	7329486	-0,70%
2013	7278140	-0,70%
2014	7226924	-0,70%
2015	7175548	-0,71%
2016	7124817	-0,71%
2017	7074445	-0,71%

Кога населението на България ще намалее на половината от това, което е през 2017 год.

Решение:

На базата на резултатите от таблицата приемаме постоянен ръст от -0,70% (намаление с 0,70%) годишно. Ще извършим пресмятанията по първите две формули, като данните за последната 2017 год., закръглени до хиляди приемаме за начални, т.е.

$$y_0 = 7074.$$

Тогава, по първата формула получаваме

$$y(t) = e^{\frac{pt}{100}} y_0 = 7074e^{-0,007t},$$

където

$$t = \text{дадената година} - 2017,$$

т.е. $t = 3$ за 2020 год., $t = 13$ за 2030 год., $t = 23$ за 2040 год., $t = 33$ за 2050 год., $t = 53$ за 2070 год. и $t = 83$ за 2100 год. Ще имаме

$$\begin{aligned} y(3) &= 7074e^{-0,021} = 6927; \quad y(13) = 7074e^{-0,091} = 6459; \quad y(23) = 7074e^{-0,161} \\ &= 6022; \quad y(33) = 7074e^{-0,231} = 5615; \quad y(53) = 7074e^{-0,371} \\ &= 4881; \quad y(83) = 7074e^{-0,581} = 3957. \end{aligned}$$

Аналогични пресмятания извършваме по втората формула

$$y(t) = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t y_0 = 0,993^t \cdot 7074.$$

Получаваме

$$\begin{aligned}y(3) &= 0,993^3 \cdot 7074 = 6926; y(13) = 0,993^{13} \cdot 7074 = 6457; y(23) \\&= 0,993^{23} \cdot 7074 = 6019; y(33) = 0,993^{33} \cdot 7074 = 5610; y(53) \\&= 0,993^{53} \cdot 7074 = 4875; y(83) = 0,993^{83} \cdot 7074 = 3949;\end{aligned}$$

Всички получени резултати (прогнози) нанасяме в таблица

година	$7074e^{-0,007t}$	$7074 \cdot 0,993^t$
2017	7074	7074
2020	6927	6926
2030	6459	6457
2040	6022	6019
2050	5615	5610
2070	4881	4875
2100	3957	3949

По правилото „70“ намираме, че населението на България ще намалее двойно спрямо това от 2017 год. (т.е. ще възлиза на 3537 хил.) след 100 год. или през 2127 год.

Забележка. Горните пресмятания могат да се извършват или директно или чрез преминаване към логаритми. Нека например да пресметнем $y(13)$ чрез преминаване към логаритми. По първата формула ще имаме

$$\begin{aligned}y(13) &= 7074e^{-0,091} \\&\Rightarrow \ln y(13) = \ln 7074 - 0,091 = 8,864 - 0,091 = 8,773 \Rightarrow y(13) \\&= e^{8,773} = 6458.\end{aligned}$$

По втората:

$$\begin{aligned}y(13) &= 0,993^{13} \cdot 7074 \\&\Rightarrow \ln y(13) \\&= 13 \ln 0,993 + \ln 7074 = 13(-0,007) + 8,864 = 8,773 \Rightarrow y(13) \\&= e^{8,773} = 6458.\end{aligned}$$

(грешките са от закръгляния)

1. ЧАСТИЧНО МИКРОИКОНОМИЧЕСКО РАВНОВЕСИЕ В ДИНАМИЧЕН АСПЕКТ

2. Частично микроикономическо равновесие

Разглеждаме една стока, предназначена за крайно потребление. Означаваме с x количеството от тази стока, което потребителите, участващи в даден пазар на тази стока (национален, регионален или друг) биха желали да закупят от нея. Естествено е, че x ще зависи от много фактори (или на математически език x ще е функция на много променливи) – цените на други стоки (заместващи или допълващи потреблението на тази стока), потребителския доход, вкусове, предпочитания, модни тенденции и др. Пренебрегваме всички тези фактори, защото преди всичко количеството на потреблението на стоката x ще зависи от нейната цена p . Така получаваме функцията на пазарно потребителско търсене на тази стока $x = x(p)$. Трябва да отбележим, че всички, които биха купили стоката на цена p (с удоволствие) биха я купили и на цена по-ниска от p , следователно функцията $x(p)$ е монотонно намаляваща, значи $x'(p) < 0$.

Наличието на потребителско търсене на стоката формира (микроикономически) стоков пазар. Логично е на този пазар да се появят и тези, които ще предлагат стоката – нейните производители. (В микроикономиката под производител се разбира всеки, който предлага дадена стока). Означаваме с y количеството от стоката, което би било предложено от производителите на този пазар. Естествено е, че и y (подобно на x) ще зависи от много и разнородни фактори – цените на ресурсите на производство, технологията по която се произвежда стоката, политическата и икономическа конюнктура и други. Най-важният фактор обаче е (отново) цената на стоката p . Тази функция на една променлива $y = y(p)$ ще наричаме функция на пазарно предлагане на стоката. Тя е растяща функция на аргумента си: тези които продават стоката при цена p биха се радвали да я продават и по-скъпо. Така, че $y'(p) > 0$.

Така, на пазара на тази стока се срещат двете страни – потребители и производители, снабдени със своите функции $x(p)$ и $y(p)$ съответно. Те трябва „да се разберат“ за такава цена на стоката $p = p_E$, при която пазарното търсене и пазарното предлагане да се изравнят и по този начин производителите ще предложат точно това количество $q_E = x(p_E) = y(p_E)$, което потребителите търсят. Така се получава частичния равновесен модел. При всякакво отклонение от него се получават излишъци (при $p > p_E \Rightarrow y(p) > x(p)$) или дефицити (при $p < p_E \Rightarrow y(p) < x(p)$).

Говорим за **устойчивост** на динамичен модел, когато, в зависимост от началното състояние може да се достигне до равновесно състояние в модела и това състояние да се поддържа във времето.

Най-простите динамични модели, обосноваващи съществуването и единствеността на частичното пазарно равновесие са тези на Валрас и Маршал.

Модел на Валрас. Нека цената е $p_0 > p_E$. Тогава $y(p_0) > x(p_0)$, т.е. появява се **свръхпредлагане** (излишък на стоката) в размер на $y(p_0) - x(p_0)$. Тогава ще възникне конкуренция между производителите и за да привлекат купувачи те ще се принудят да свалят цената, дотогава докато се установи равновесие при цена p_E и количество q_E . Аналогични са разсъжденията при цена $p_0 < p_E$, тогава $x(p_0) > y(p_0)$, поражда се **свръхтърсене** (дефицит на стоката) в размер на $x(p_0) - y(p_0)$ и купувачите ще се съгласят на по-високи цени. Така, според Валрас

$$\frac{dp}{dt} = h[x(p) - y(p)], h > 0$$

Следователно, според Валрас комбинацията p_E, q_E представлява устойчиво пазарно равновесие.

Модел на Маршал. Ако цената е $p_0 > p_E$, то обемът на търсене ще се съкрати до $q_0 = x(p_0) < q_E$. Но такова количество от стоката търговците са съгласни да предлагат на цена $p_1 = p^S(q_0) < p_E$ ($p^S(q_0)$ е стойността на обратната функция на предлагане). Тъй като цената на търсене p_0 превишава цената на предлагане p_1 , фирмите ще получат печалба, стимулираща ги да разширят производството, което ще доведе до увеличено предлагане, т.е. $y(t) \rightarrow q_E$, докато се изравнят обемите и цените на търсене и предлагане и се достигне до пазарното равновесие. В случай на количество, по-голямо от равновесното q_E цената на търсене ще се окаже под цената на предлагане, фирмите ще търпят загуби, което ще доведе до съкращаване на производството и отново $y(t) \rightarrow q_E$. Това може да се изрази така:

$$\frac{dq}{dt} = k[p^D(q) - p^S(q)], k > 0$$

, където с $p^D(q)$ и с $p^S(q)$ са означени обратните функции на търсене и предлагане.

Следователно, и според Маршал пресечната точка на линиите на търсене и предлагане представлява устойчиво пазарно равновесие.

Различието между двата модела е, че според Валрас цените са изключително гъвкави и моментално реагират на промяна в пазарната конюнктура. Според Маршал, това не е така и при диспропорция между търсене и предлагане обемите на пазарните сделки реагират по-бързо. Освен това Валрас приписва по-активна роля на потребителите, а според Маршал, движеща сила на пазара са предприемачите. Но и в двата случая $p(t) \rightarrow p_E$ и $q(t) \rightarrow q_E$ и бързо се достига до пазарно равновесие и то е устойчиво.

Пример 3. Дадени са функциите на пазарно търсене $x(p) = 100 - p$ и предлагане $y(p) = 2p - 20$. При $p_0 = 60$ да се намерят динамичните функции на ефективни цена $p(t)$, количество $q(t)$ и количеството излишък (или недостиг), като се използва

а) модела на Валрас при $h = 1/6$;

б) модела на Маршал при $k = 1/3$.

В двата случая да се пресметнат пазарните величини за $t = 1, 2, 3$ и 10 .

Решение:

От изравняването на пазарното търсене и предлагане

$$x(p) = 100 - p = 2p - 20 = y(p)$$

намираме равновесната цена и количество за този модел

$$p_E = 40 \text{ и } q_E = 60.$$

а) При модела на Валрас се предполага, че началната цена ще бъде

$$p(0) = p_0 = 60,$$

т.е. по-висока от равновесната $p_E = 40$. При тази цена потребителите ще търсят количество

$$x(t = 0) = x(p = 60) = 40,$$

а производителите ще предлагат количество

$$y(t = 0) = y(p = 60) = 100.$$

Ефективното продадено количество ще възлиза на по-малкото от двете

$$q(0) = \min\{x(t = 0), y(t = 0)\} = x(t = 0) = 40,$$

Следователно в началото ще има излишък

$$y(t = 0) - x(t = 0) = 100 - 40 = 60 -$$

продукция, която е произведена от производителите, но не се търси от потребителите на тази цена.

Диференциалното уравнение на този модел ще бъде

$$\frac{dp}{dt} = h[x(p) - y(p)] = \frac{1}{6}[(100 - p) - (2p - 20)] = 0,5(40 - p).$$

Умножаваме с dt и разделяме на $p - 40$, получаваме

$$\frac{dp}{p - 40} = -0,5dt.$$

След интегриране ще имаме

$$\ln(p - 40) = -0,5t + C \Rightarrow p(t) = 40 + Ce^{-0,5t}.$$

За да определим интеграционната константа C използваме началното условие

$$p(0) = 40 + C = 60 \Rightarrow C = 20$$

и окончателно динамичната функция на цената е

$$p(t) = 40 + 20e^{-0,5t}.$$

При такава цена ще имаме пазарно търсене и предлагане

$$x(t) = 100 - p(t) = 60 - 20e^{-0,5t}$$

$$y(t) = 2p(t) - 20 = 60 + 40e^{-0,5t}$$

съответно.

Тогава за динамичната функция на пазарното количество получаваме

$$q(t) = \min\{x(t), y(t)\} = x(t) = 60 - 20e^{-0,5t},$$

а обемът на излишъка ще бъде

$$y(t) - x(t) = 60e^{-0,5t}.$$

Пресмятанията нанасяме в таблица

време t	$e^{-0,5t}$	ефективна цена $p(t)$	търсене $x(t)$	предлагане $y(t)$	ефективно количество $q(t)$	излишък $y(t) - x(t)$
0	1,000	60,00	40,00	100,0	40,00	60,00
1	0,607	52,14	47,86	84,28	47,86	36,42
2	0,368	47,36	52,64	74,72	52,64	22,08
3	0,223	44,46	55,54	68,92	55,54	13,38
10	0,007	40,14	59,86	60,28	59,66	0,42

б) При модела на Маршал при цена $p = p_0 = 60$ потребителите ще търсят количество $q_0 = x(p_0) = x(60) = 40$. Тъй като обратната функция на предлагане е

$$p^s(q) = 10 + 0,5q,$$

то производителите ще произведат количество $q = q_0 = 40$ и ще го предлагат на цена $p_1 = p^s(q_0) = p^s(40) = 30$. При тази цена потребителите ще търсят количество $x(30) = 70$, тогава началният дефицит от стоката ще възлиза на

$$x(30) - y(30) = 70 - 40 = 30.$$

Така величините на модела в началният момент ще имат стойности

$$p(0) = 30; q(0) = 40; x(t = 0) = 70; y(t = 0) = 40$$

$$q(0) = \min\{x(t = 0), y(t = 0)\} = y(t = 0) = 40.$$

Обратната функция на търсене е

$$p^D(q) = 100 - q,$$

тогава диференциалното уравнение на модела ще бъде

$$\frac{dq}{dt} = k[p^D(q) - p^S(q)] = \frac{1}{3}[(100 - q) - (10 + 0,5q)] = 0,5(60 - q).$$

Умножаваме с dt и разделяме на $q - 60$, получаваме

$$\frac{dp}{q - 60} = -0,5dt.$$

След интегриране ще имаме

$$\ln(q - 60) = -0,5t + C \Rightarrow q(t) = 60 + Ce^{-0,5t}.$$

За да определим интеграционната константа C използваме началното условие

$$q(0) = 60 + C = 40 \Rightarrow C = -20$$

и окончателно динамичната функция на количеството е

$$q(t) = 60 - 20e^{-0,5t} = y(t).$$

При такова количество производителите ще предлагат при цена

$$p(t) = p^S(q(t)) = 40 - 10e^{-0,5t},$$

При тази цена потребителите ще търсят стоката в количество

$$x(t) = x(p(t)) = 60 + 10e^{-0,5t},$$

а обемът на дефицита ще бъде

$$x(t) - y(t) = 30e^{-0,5t}.$$

Пресмятанията нанасяме в таблица

време t	$e^{-0,5t}$	ефективна цена $p(t)$	търсене $x(t)$	предлагане $y(t)$	ефективно количество $q(t)$	дефицит $x(t) - y(t)$
0	1,000	30,00	70,00	40,00	40,00	30,00
1	0,607	33,97	66,07	47,86	47,86	18,21
2	0,368	36,32	63,68	52,64	52,64	11,04
3	0,223	37,77	62,24	55,54	55,54	6,70
10	0,007	39,93	60,07	59,86	58,60	0,21

Модел на Самуелсън. Предложен е от нобеловия лауреат Пол Самуалсън (1915-2009, получил нобелова награда по икономика през 1970 г.). В този модел изменението на цената в следващия момент от времето е свързан с величината на остатъчното търсене (свръхтърсене) в предишния момент чрез следната рекурентна зависимост

$$p_t = p_{t-1} + h[x(p_{t-1}) - y(p_{t-1})]; h > 0.$$

Забелязваме, че това е диференчно уравнение, получаващо се от диференциалното уравнение на модела на Валрас (чрез замяната на $p'(t)$ с $p_t - p_{t-1}$).

Коефициентът h е параметър на управление на процеса на установяване на пазарното равновесие. Може това да си представим по следния начин: независим **арбитър** след края на работния ден пресмята остатъчното търсене (разликата между дневното търсене и предлагане) и на база на горната формула пресмята цената, на която ще се продава през следващия ден.

При много малки стойности на параметъра на управление h процесът на установяване на равновесната цена ще бъде много бавен, но ще има сходимост (и устойчивост). Обратно, при големи стойности на този параметър процесът ще бъде разходящ, което не предполага установяване на пазарно равновесие.

Пример 4. Да се намери формула за цената p_t , търсенето $x_t = x(p_t)$, предлагането $y_t = y(p_t)$ и продаденото количество q_t при произволни стойности на h и p_0 , като се предполага, че функциите на търсене и предлагане са същите, като в пример 3. Да се изследва сходимостта на процеса в зависимост от стойностите на h . Да се пресметнат дневните стойности на величините 1, 2, 3, 5, 10 дни след стартиране на процеса при $h = 1/30, h = 1/2$ и $p_0 = 20$.

Решение:

Във формулата

$$p_t = p_{t-1} + h[x_{t-1} - y_{t-1}]$$

заместваме

$$x_{t-1} = x(p_{t-1}) = 100 - p_{t-1} \text{ и } y_{t-1} = y(p_{t-1}) = 2p_{t-1} - 20$$

и получаваме

$$p_t = p_{t-1} + h(120 - 3p_{t-1}) = (1 - 3h)p_{t-1} + 120h.$$

От двете страни на горното равенство изваждаме равновесната цена $p_E = 40$.
Получаваме

$$p_t - 40 = (1 - 3h)p_{t-1} + 120h - 40 = (1 - 3h)(p_{t-1} - 40).$$

Горната формула е формулата за общия член на геометричната прогресия $a_0 = p_0 - 40, a_1 = p_1 - 40, a_2 = p_2 - 40, \dots, a_t = p_t - 40, \dots$ с частно $q = 1 - 3h$. Процесът ще е сходящ при $|q| = |1 - 3h| < 1$, т.е. $h < 2/3$, като за $h = 1/3$ равновесната цена ще се установи един ден след началото на процеса, независимо от началната цена p_0 . В този случай формулата за общия член на геометричната прогресия ще бъде

$$a_t = p_t - 40 = (1 - 3h)^t(p_0 - 40) \Rightarrow p_t = 40 + (1 - 3h)^t(p_0 - 40).$$

За дневните стойности на другите величини на модела получаваме

$$x_t = x(p_t) = 60 - (1 - 3h)^t(p_0 - 40)$$

$$y_t = y(p_t) = 60 + 2(1 - 3h)^t(p_0 - 40).$$

Дневното продадено количество q_t ще бъде по-малкото от количествата на търсене x_t (при излишък) или предлагане y_t (при недостиг).

При $p_0 = 20$ и $h = 1/30$ получаваме

$$p_t = 40 - 20 \cdot 0,9^t, \quad x_t = 60 + 20 \cdot 0,9^t, \quad y_t = 60 - 40 \cdot 0,9^t.$$

Това ще бъде ситуация, при която търсенето превишава предлагането (дефицит в размер на $x_t - y_t = 60 \cdot 0,9^t$) и тогава продаденото количество q_t ще съвпада с предлагането y_t . Пресмятанията по дни за $t = 1, 2, 3, 5, 10$ на величините, свързани с модела са дадени в таблица.

t	p_t	x_t	y_t	q_t	дневен дефицит
0	20,00	80,00	20,00	20,00	60,00
1	22,00	78,00	24,00	24,00	54,00
2	23,80	76,20	27,60	27,60	48,60
3	25,42	74,58	30,84	30,84	43,74
5	28,19	71,81	36,38	36,38	35,43
10	33,03	66,97	46,05	46,05	20,92

Вижда се, че процесът е сходящ, но при тази стойност на h , сходимостта е много бавна.

3. Цикълът на паяжината

Това е пример за квазидинамичен модел, който, при определени условия може да бъде неравновесен. Разпространен е главно в селското стопанство, защото по

времето, когато производителите вземат решения за производството си, те не могат да знаят пазарната цена, на която ще реализират продукцията си.

Нека, например да разгледаме пазара на яйца. Предполагаме, че обемът на предлагане на яйца през текущата година t , зависи от решенията, които са взели производителите на яйца предишната година $t-1$. Тези решения са взети на база цената p_{t-1} на яйцата от предишната година. Предполагаме, че функцията на предлагане на яйца $y_t(p_{t-1})$ е от най-прост вид

$$y_t = bp_{t-1}$$

Търсенето, обаче ще е съобразено с цената през настоящата година

$$x_t = \alpha - \beta p_t$$

Ако яйцата не могат да се съхраняват, цената p_t трябва да е такава, че да осигури изкупуването на цялото количество y_t . Тогава

$$\alpha - \beta p_t = bp_{t-1}$$

Така че цената през всяка година е свързана с цената от предишната година посредством **рекурентната зависимост**

$$p_t = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{b}{\beta} p_{t-1} \quad (1)$$

Цената p_t , удовлетворяваща (1) за дадено p_{t-1} се нарича **пазарна клирингова цена**. Тя е различна от равновесната пазарна цена p^* , която за този модел ще се получи от $p_t = p_{t-1} = p^*$ и (1), така че

$$p^* = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{b}{\beta} p^* \quad (2)$$

откъдето следва, че $p^* = \frac{\alpha}{b+\beta}$ и $q^* = \frac{b\alpha}{b+\beta}$. Ако извадим (2) от (1), ще се получи

$$p_t - p^* = -\frac{b}{\beta} (p_{t-1} - p^*)$$

Възможни са два случая:

1) $b < \beta$, тогава $|p_t - p^*| < |p_{t-1} - p^*|$ и редицата от цени $p_0, p_1, \dots, p_{t-1}, p_t, \dots$ ще е сходяща числова редица и $\lim_{t \rightarrow \infty} p_t = p^*$. Същото важи и за редицата от количества продадени яйца $q_0, q_1, \dots, q_{t-1}, q_t, \dots$, която ще има за граница q^* . В този случай разглежданият модел е равновесен.

2) $b > \beta$ и $|p_t - p^*| > |p_{t-1} - p^*|$ обуславя разходящи числови редици, както на клиринговите цени, така и на продаваните през годините количества яйца. Всяка година клиринговата цена ще се отдалечава все по-вече от равновесната цена, така че моделът не е равновесен.

Причината този модел да се нарича цикъл на паяжината се вижда от характерната за него графика на рис. 1: в случай на сходимост, точката на равновесие с координати (p^*, q^*) играе ролята на паяка и привлича към себе си (начупената линия $ABCE \dots$) точките с координати цените и количествата, които се получават през различни периоди от времето.

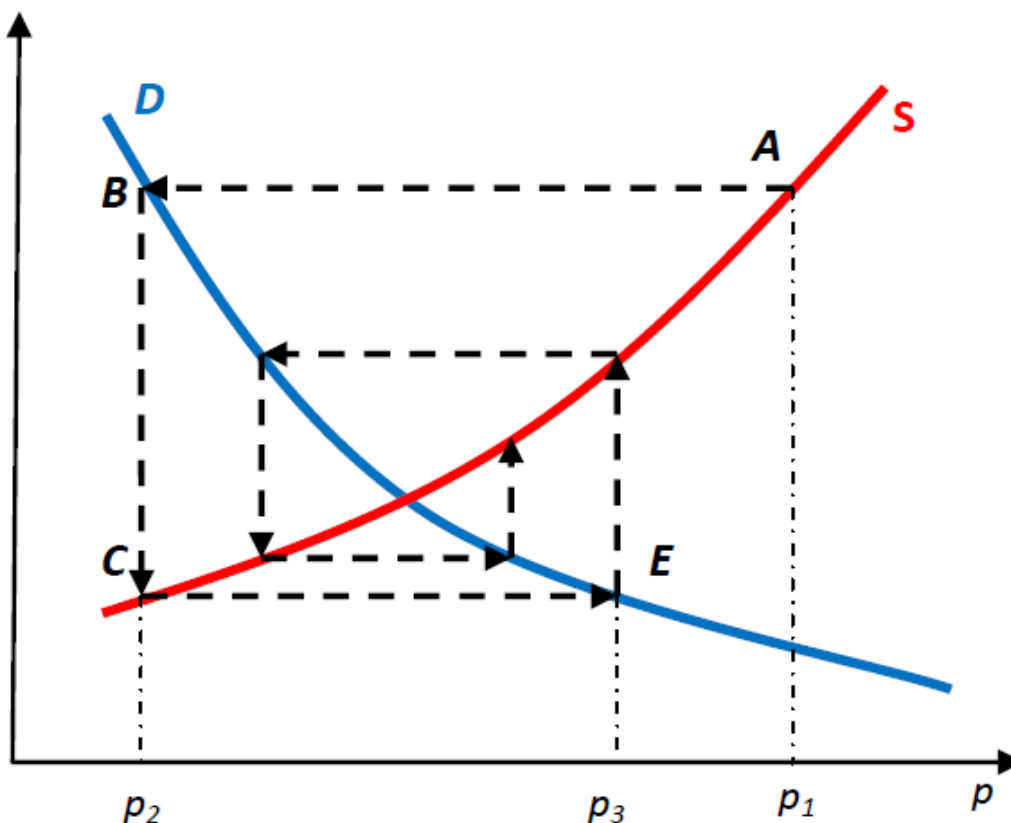


Рис.1. Характерна графика на цикъла на паяжината в случай на сходимост

Пример 5. На пазара на кромид функцията на предлагане на производителите е

$$y_t = p_{t-1} - 20,$$

а функцията на търсене от страна на потребителите –

$$x_t = 100 - 2p_t.$$

(предполага се, че цените се измерват в стотинки за килограм, а количествата – в хиляди тонове). Да се покаже, че моделът е сходящ за всяко p_0 и да се определят годишните цени и количества при $p_0 = 30$.

Решение:

Първо да определим равновесната цена p^* . Ще имаме

$$x_t(p^*) = 100 - 2p^* = p^* - 20 = y_t(p^*) \Rightarrow p^* = 40.$$

Това ще бъде цената, граница на редицата от годишни цена, в случай че моделът е сходящ. За q^* (границата от редицата на годишни количества) получаваме

$$q^* = x_t(p^*) = y_t(p^*) = 20.$$

Сега от изравняването на $x_t(p_t)$ с $y_t(p_{t-1})$ ще получим рекурентната връзка между p_t и p_{t-1} :

$$100 - 2p_t = p_{t-1} - 20 \Rightarrow p_t = 60 - 0,5p_{t-1}.$$

Изваждаме от двете страни равновесната цена $p^* = 40$ и получаваме

$$p_t - 40 = 20 - 0,5p_{t-1} = -0,5(p_{t-1} - 40).$$

Тъй като $|-0,5| < 1$, то редицата $a_t = p_t - 40$ е безкрайно намаляваща геометрична прогресия с частно $q = 0,5$ и следователно редицата от цените е сходяща числова редица с граница $p^* = 40$. От геометричната прогресия получаваме формулата за произволния член

$$p_t - 40 = (-0,5)^t(p_0 - 40).$$

Тъй като $p_0 = 30$, то окончателно за годишните цени ще имаме

$$p_t = 40 - 10(-0,5)^t.$$

Годишните търгувани количества q_t получаваме от

$$q_t = x_t(p_t) = 20 + 20(-0,5)^t.$$

Ориентирайки се по цената на кромида през нулевата година $p_0 = 30$, производителите ще предложат през първата година количество $y_1 = p_0 - 20 = 10$. Това количество обаче ще се търси от потребителите на цена, получаваща се от $x_1 = 100 - 2p_1 = 10$, т.е. $p_1 = 45$. Ориентирайки се по тази цена производителите ще предложат за следващата година количество $y_2 = p_1 - 20 = 25$, което ще се търси от потребителите на цена $p_2 = 37,5$ ($y_2 = 25 = x_2 = 100 - 2p_2 \Rightarrow p_2 = 37,5$). Така всяка следваща година годишната цена ще е два пъти по-близка до равновесната цена, като редува положението си спрямо нея (по-малка, по-голяма).

В случай, че цикълът на паяжината е расходящ, има различни начини той да бъде превърнат в сходящ.

Въвеждане на данък от държавата. Ако държавата въведе данък от 100% върху цената на производителите, то тогава те ще получават по p_t парични

единици за единица количество, а потребителите ще заплащат по $\pi_t = (1 + s)p_t$ парични единици. Тогава функцията на предлагане (от p_{t-1}) ще бъде същата, но функцията на търсене (от p_t) ще се промени:

$$x_t = \alpha - \beta \pi_t = \alpha - \beta(1 + s)p_t.$$

От изравняването на търсенето и предлагането получаваме рекурентна зависимост за клиринговите цени

$$x_t = \alpha - \beta(1 + s)p_t = bp_{t-1} = y_t \Rightarrow p_t = \frac{\alpha}{\beta(1 + s)} - \frac{b}{\beta(1 + s)}p_{t-1}.$$

За пазарната равновесна цена p^* ще имаме

$$p^* = \frac{\alpha}{\beta(1 + s)} - \frac{b}{\beta(1 + s)}p^*.$$

Като извадим последното равенство от предпоследното получаваме

$$p_t - p^* = -\frac{b}{\beta(1 + s)}(p_{t-1} - p^*).$$

Ясно е, че при $b > \beta$, когато моделът без данък е расходящ, при подходящ избор на данък s ще получим $b < \beta(1 + s)$ и моделът с данък става сходящ.

Забележка. Същият ефект като при въвеждането на данък би се получил и ако производителите (в периодите от времето, когато това е необходимо) не реализират цялата си продукция на вътрешния пазар.

Цикъл на паяжината с управление. Това се получава, когато производителите имат възможност да реагират (освен на цената от предходния период) и на цената от настоящия период. Тогава (при запазване на функцията на търсене) във функцията на предлагане аргументът p_{t-1} се заменя с $kp_{t-1} + (1 - k)p_t$, $k \in (0,1)$. Коефициентът k показва какви са теглата на цените от предходния и настоящ период и се явява параметър за управление на модела. При $k = 1$ имаме класическия цикъл на паяжината.

От изравняването на търсенето и предлагането през настоящия период получаваме рекурентната зависимост за клиринговите цени

$$\begin{aligned} x_t = \alpha - \beta p_t &= b(kp_{t-1} + (1 - k)p_t) = y_t \Rightarrow p_t \\ &= \frac{\alpha}{\beta + b(1 - k)} - \frac{bk}{\beta + b(1 - k)}p_{t-1}. \end{aligned}$$

При граничен преход в горното равенство, замествайки клиринговите цени p_t и p_{t-1} с равновесната цена p^* получаваме

$$p^* = \frac{\alpha}{\beta + b(1 - k)} - \frac{bk}{\beta + b(1 - k)}p^*$$

Като извадим последното равенство от предпоследното получаваме

$$p_t - p^* = -\frac{bk}{\beta + b(1-k)}(p_{t-1} - p^*).$$

Ясно е, че при $b > \beta$, когато моделът без данък е расходящ, при подходящ избор на параметъра за управление k ще получим $bk < \beta + b(1-k)$ (т.е. $b(2k-1) < \beta$) и моделът с управление става сходящ.

Пример 6. Нека пазарът на жито се задава с квазидинамичните функции на предлагане и търсене $y_t = 60p_{t-1}$ и $x_t = 11000 - 50p_t$.

а) Да се пресметне пазарната равновесна цена на житото и да се покаже, че не съществува пазарно равновесие при $p_0 \neq 100$.

б) Да се пресметнат цените и количествата на продадено жито за всяка година, ако $p_0 = 90$.

в) Какъв данък върху пазарната цена на житото трябва да въведе държавата, за да регулира пазара на жито. Да се пресметнат цените и количествата на продадено жито за всяка година, ако $p_0 = 120$ при данък от 30%.

г) Ако производителите могат да реагират на цената от тази година и функцията на предлагане е от вида

$$y_t = 60(kp_{t-1} + (1-k)p_t), k \in (0,1),$$

да се намерят стойностите на k , за които моделът е сходящ. Да се пресметнат цените и количествата на продадено жито за всяка година, ако $p_0 = 120$ и $k = 0,8$.

Решение:

а) Изравняваме функциите на търсене и предлагане, за да намерим рекурентната зависимост за клиринговите цени:

$$x_t = 11000 - 50p_t = 60p_{t-1} = y_t \Rightarrow p_t = 220 - 1,2p_{t-1}.$$

Заместваме в последното равенство p_{t-1} и p_t с равновесната цена p^* и получаваме

$$p^* = 220 - 1,2p^* \Rightarrow p^* = 100.$$

(за равновесното количество намираме $q^* = y_t(p^*) = 6000$). Като извадим последното равенство от предпоследното получаваме

$$p_t - 100 = -1,2(p_{t-1} - 100).$$

За $p_0 = 100$ равновесието се постига веднага (и се запазва), а за $p_0 \neq 100$ модела е разходящ. За клиринговите цени получаваме

$$p_t = 100 + (-1,2)^t(p_0 - 100),$$

А за количеството, продадено през t -тата година

$$q_t = 6000 - 50(-1,2)^t(p_0 - 100).$$

б) При начална цена $p_0 = 90$ горните формули добиват вида

$$p_t = 100 - 10(-1,2)^t \text{ и } q_t = 6000 + 500(-1,2)^t.$$

В таблицата по-долу са дадени цените и количествата през първите пет години

t	p_t	q_t
1	112	5400
2	85,6	6720
3	117,28	5136
4	79,26	7037
5	124,88	4756

Вижда се, че през всяка година с нечетен номер цената е по-висока от равновесната, а количеството – по-малко. За годините с четни номера е обратното, като разликите на годишните цени и количества с равновесните стават по-големи.

в) При въведен данък от 100s% търговците ще предлагат зърното на цена p , а потребителите ще го търсят на цена $\pi = (1 + s)p$. Тогава годишното изравняване на търсенето и предлагането ще се подsigурява от равенството

$$x_t = 11000 - 50\pi_t = 11000 - 50(1 + s)p_t = 60p_{t-1}.$$

Тогава рекурентната зависимост за клиринговите цени ще бъде

$$p_t = \frac{220}{1 + s} - \frac{1,2}{1 + s}p_{t-1}.$$

За равновесната цена ще имаме

$$p^* = \frac{220}{1 + s} - \frac{1,2}{1 + s}p^*.$$

Като извадим последното равенство от предпоследното получаваме

$$p_t - p^* = -\frac{1,2}{1 + s}(p_{t-1} - p^*).$$

При $1,2 < 1 + s \Rightarrow s > 0,2$ редиците от цени и количества ще бъдат сходящи. За равновесните цени и количества получаваме

$$p^* = \frac{220}{1 + s} - \frac{1,2}{1 + s}p^* \Rightarrow p^* = \frac{220}{2,2 + s}, q^* = y_t(p^*) = 60p^* = \frac{13200}{2,2 + s}.$$

Като заместим p^* в израза за $p_t - p^*$ получаваме

$$p_t - \frac{220}{2,2 + s} = -\frac{1,2}{1 + s} \left(p_{t-1} - \frac{220}{2,2 + s} \right).$$

За цената p_t ще имаме

$$p_t = \frac{220}{2,2 + s} + \left(-\frac{1,2}{1 + s} \right)^t \left(p_0 - \frac{220}{2,2 + s} \right).$$

При данък от 30% ($s = 0,3$) и $p_0 = 120$ изразът за годишната клирингова цена добива вида

$$p_t = 88 + 32(-0,923)^t.$$

Тогава за годишното количество търгувано зърно ще имаме

$$\begin{aligned} q_t = x_t(p_t) &= 11000 - 50 \cdot 1,3p_t = 11000 - 65p_t \\ &= 11000 - 65(88 + 32(-0,923)^t) = 5280 - 2080(-0,923)^t. \end{aligned}$$

В таблицата по-долу са дадени цените и количествата през първите пет години

t	p_t	q_t
1	58,46	7200
2	115,26	3508
3	62,84	6916
4	111,23	3770
5	66,56	6673

Вижда се, че през всяка година с нечетен номер цената е по-ниска от равновесната, а количеството – по-голямо. За годините с четни номера е обратното, като разликите на годишните цени и количества с равновесните стават все по-малки (т.е. приближават се към границите $p^* = 88$ и $q^* = 5280$).

За отбелязване е, че при $p_0 = 90$ (както при ситуацията от б)) поради близостта на началната цена до равновесната, още в началото равновесието ще бъде почти достигнато.

г) При модела с управление функцията на търсене ще бъде същата, както в класическия модел, а при функцията на предлагане ще трябва да заменим p_{t-1} с $kp_{t-1} + (1 - k)p_t$. Тогава изравняването на търсене и предлагане ще се постига при

$$x_t = 11000 - 50p_t = 60(kp_{t-1} + (1 - k)p_t) = y_t.$$

Тогава рекурентната зависимост за клиринговите цени ще бъде

$$p_t = \frac{11000}{110 - 60k} - \frac{60k}{110 - 60k} p_{t-1}.$$

За равновесната цена p^* ще е изпълнено

$$p^* = \frac{11000}{110 - 60k} - \frac{60k}{110 - 60k} p^*.$$

Като извадим последното равенство от предпоследното получаваме

$$p_t - p^* = -\frac{60k}{110 - 60k} (p_{t-1} - p^*).$$

Да намерим p^* . Ще имаме

$$\left(1 + \frac{60k}{110 - 60k}\right) p^* = \frac{11000}{110 - 60k} \Rightarrow p^* = 100.$$

Заместваме намерената p^* в израза за $p_t - p^*$ и получаваме

$$p_t - 100 = -\frac{60k}{110 - 60k} (p_{t-1} - 100)$$

Очевидно, моделът с управление ще е сходящ при $60k < 110 - 60k$, т.е. при $k < 11/12$.

При $k = 0,8 < 11/12$ ще имаме сходимост на модела. Като заместим k с 0,8 в последния израз получаваме

$$p_t - 100 = -0,774(p_{t-1} - 100).$$

При $p_0 = 120$ получаваме формула за годишната цена на зърното

$$p_t = 100 + 20(-0,774)^t$$

Формулата за годишното търгувано количество зърно ще бъде

$$q_t = x_t(p_t) = 11000 - 50(100 + 20(-0,774)^t) = 6000 - 1000(-0,774)^t.$$

В таблицата по-долу са дадени цените и количествата през първите пет години

t	p_t	q_t
1	84,52	6774
2	111,98	5401
3	90,73	6464
4	107,18	5641
5	94,44	6278

Вижда се, че през всяка година с нечетен номер цената е по-ниска от равновесната, а количеството – по-голямо. За годините с четни номера е обратното, като

разликите на годишните цени и количества с равновесните стават все по-малки (т.е. приближават се към границите $p^* = 100$ и $q^* = 6000$).

Забележка. При модела с управление равновесните цена и количество не се различават от тези при класическия модел. Това е така, защото границата на израз $kp_{t-1} + (1-k)p_t$ е $kp^* + (1-k)p^* = p^*$.

4. Динамизиране на статични модели

Много често, когато имаме работа със статични модели, чието решаване води до невъзможни или много трудни за решаване уравнения, успяваме да ги решим, свеждайки ги до динамични модели, подобни на цикъла на паяжината. Така например, ако при статичния модел на частично равновесие

$$q = x(p) = y(p)$$

уравнението, от което се определя равновесната цена $x(p) = y(p)$ не може да бъде решено ефективно, то можем да пробваме (например) да заменим аргумента на функцията на търсене с p_t , а аргумента на функцията на предлагане – с p_{t-1} . Тогава получаваме динамичния модел

$$q_t = x(p_t) = y(p_{t-1}),$$

който (евентуално) може да се реши чрез намиране на рекурентната зависимост

$$p_t = f(p_{t-1}).$$

Тогава (ако няма друг начин) може да намерим равновесната цена p_* чрез няколко итерации.

Пример 7. На пазара на резервни части за строителна техника функцията на пазарно търсене има вида

$$x(p) = \frac{10000}{\sqrt{p}},$$

а функцията на пазарно предлагане –

$$y(p) = \left(\frac{p-350}{7,5}\right)^2.$$

Да се намерят равновесните величини на модела – цена и количество.

Решение:

Тъй като производната на функцията на търсене е

$$x'(p) = -\frac{5000}{p^{\frac{3}{2}}},$$

то $x'(p) < 0$ за $p \in (0, \infty)$. Производната на функцията на предлагане е

$$y'(p) = 2 \cdot \frac{p - 350}{7,5} \cdot \frac{1}{7,5}$$

и $y'(p) > 0$ при $p \in (350, \infty)$.

Системата за определяне на равновесните величини на модела е

$$q = \frac{10000}{\sqrt{p}} = \left(\frac{p - 350}{7,5} \right)^2.$$

Ако съществува равновесна цена, тя е единственото решение на горното уравнение в интервала $p \in (350, \infty)$. След коренуване получаваме уравнението

$$\frac{p - 350}{7,5} = \frac{100}{\sqrt[4]{p}} \Rightarrow p = 350 + \frac{750}{\sqrt[4]{p}}$$

Това уравнение не можем да решим, защото след полагане $\sqrt[4]{p} = z$ получаваме алгебричното уравнение от пета степен

$$z^5 - 350z - 750 = 0.$$

За сметка на това, ние можем да заменим от едната страна на равенството p с p_{t+1} , а в другата - p с p_t . Така получаваме рекурентната зависимост

$$p_{t+1} = 350 + \frac{750}{\sqrt[4]{p_t}}$$

Стартираме итерациите с някакво произволно $p_0 > 350$, например $p_0 = 400$. В долната таблица са нанесени резултатите за първите пет итеративни пресмятания на цената, количествата на търсене и предлагане, абсолютните и относителни разлики между търсене и предлагане.

t	p_t	$x(p_t)$	$y(p_t)$	$ x(p_t) - y(p_t) $	относителна разлика %
0	400,00	500,00	44,44		
1	517,71	439,50	500,03	60,53	12,10
2	507,23	444,01	439,49	0,52	0,11
3	508,04	443,66	444,03	0,37	0,08
4	507,97	443,69	443,64	0,05	0,01
5	507,98	443,69	443,69	0,00	0,00

Да отбележим, че под относителна разлика разбираме

$$\varepsilon_t = \frac{|x(p_t) - y(p_t)|}{\max\{x(p_t), y(p_t)\}},$$

Очевидно е, че процесът на итерациите е много бързо сходящ към точното решение и лесно можем да заключим, че равновесните стойности на цената и количеството в този статичен модел са

$$p_* = 507,98 \text{ и } q_* = 443,69.$$

Пример 8. На даден пазар функцията на пазарно търсене има вида

$$x(p) = 20 - 2p^{\frac{3}{2}},$$

а функцията на пазарно предлагане –

$$y(p) = 4p^{\frac{5}{2}} - 10.$$

Да се намерят равновесните величини на модела – цена и количество.

Решение:

Първо ще намерим дефиниционните области на двете функции, изхождайки от това, че те трябва да са неотрицателни за неотрицателна стойност на аргумента и производните им трябва да са със съответния знак. За функцията на търсене ще имаме

$$x(p) = 20 - 2p^{\frac{3}{2}} \geq 0 \Leftrightarrow p^{\frac{3}{2}} \leq 10 \Leftrightarrow p \leq 10^{1,5} \cong 4,64.$$

Тъй като $x'(p) = -3p^{0,5} < 0$, то за тази функция остава ограничението $p \leq 4,64$. За функцията на предлагане получаваме

$$y(p) = 4p^{\frac{5}{2}} - 10 \geq 0 \Leftrightarrow p^{\frac{5}{2}} \geq 2,5 \Leftrightarrow p \geq 2,5^{2,5} \cong 1,44.$$

От производната $y'(p) = 10p^{1,5} > 0$ не получаваме допълнителни ограничения и за функцията на предлагане остава ограничението $p \geq 1,44$. Окончателно, в интервала $p \in [1,44; 4,64]$ (сечение на двете дефиниционни области) са дефинирани и двете функции.

От приравняването на функциите на търсене и предлагане получаваме последователно

$$20 - 2p^{\frac{3}{2}} = 4p^{\frac{5}{2}} - 10$$

$$30 - 2p^{\frac{3}{2}} = 4p^{\frac{5}{2}}$$

$$7,5 - 0,5p^{\frac{3}{2}} = p^{\frac{5}{2}}$$

$$p = (7,5 - 0,5p^{1,5})^{0,4}.$$

За отбелязване е, че горното уравнение след полагането $\sqrt{p} = z$ се преобразува в алгебричното уравнение

$$z^5 + 0,5z^3 - 7,5 = 0,$$

което не може да бъде решено.

Ако в лявата страна на уравнението $p = (7,5 - 0,5p^{1,5})^{0,4}$ заменим p с p_{t+1} , а в дясната - p с p_t , получаваме диференчното уравнение

$$p_{t+1} = (7,5 - 0,5p_t^{1,5})^{0,4}.$$

Стартираме итерационните пресмятания с някое $p_0 \in [1,44; 4,64]$, например $p_0 = 3$. В долната таблица са нанесени резултатите за първите пет итеративни пресмятания на цената, количествата на търсене и предлагане, абсолютните и относителни разлики между търсене и предлагане.

t	p_t	$x(p_t)$	$y(p_t)$	$ x(p_t) - y(p_t) $	относителна разлика %
0	3,000	9,608	52,354		
1	1,889	14,807	9,617	5,200	35,12
2	2,075	14,022	14,809	0,797	5,31
3	2,048	14,138	14,010	0,128	0,91
4	2,052	14,121	14,127	0,006	0,04
5	2,052	14,121	14,127	0,006	0,04

Вижда се, че итерацията има много бърза сходимост и с точност до трети десетичен знак може да приемем, че

$$p_* = p_5 = 2,052 \text{ и } q_* = 0,5(x(p_5) + y(p_5)) = 14,124.$$

Забележка. При динамизирането и на двата статични модела малко се отдалечихме от идеята на „цикъла на паяжината“ (в сходящия му вариант). Но ако директно във функцията на търсене заменим p с p_{t+1} , а във функцията на предлагане - p с p_t , то итерациите биха ни довели до абсолютно същите резултати.

5. Динамично частично равновесие

Нека за дадена стока, в определен момент от времето да са се формирали функции на пазарно търсене и предлагане $x = x_0(p)$ и $y = y_0(p)$ и на базата на тях – равновесна цена p_0 и равновесно количество q_0 , т.е.

$$q_0 = x_0(p_0) = y_0(p_0)$$

В друг момент от времето, под въздействие на различни пазарни сили, функциите на търсене и предлагане ще бъдат други - $x = x_1(p)$ и $y = y_1(p)$. Те ще формират и други равновесни стойности p_1 и q_1 , така че

$$q_1 = x_1(p_1) = y_1(p_1)$$

Можем да си представим следната опростена картина – всяка от тези функции или се запазва или се променя по посока на разширяване или на свиване. Какво става във всички от тези случаи с равновесните цена и количество.

пазарно търсене	пазарно предлагане	равновесна цена	равновесно количество
$x_1 = x_0$	$y_1 = y_0$	$p_1 = p_0$	$q_1 = q_0$
$x_1 = x_0$	$y_1 > y_0$	$p_1 < p_0$	$q_1 > q_0$
$x_1 = x_0$	$y_1 < y_0$	$p_1 > p_0$	$q_1 < q_0$
$x_1 > x_0$	$y_1 = y_0$	$p_1 > p_0$	$q_1 > q_0$
$x_1 > x_0$	$y_1 > y_0$	не е ясно	$q_1 > q_0$
$x_1 > x_0$	$y_1 < y_0$	$p_1 > p_0$	не е ясно
$x_1 < x_0$	$y_1 = y_0$	$p_1 < p_0$	$q_1 < q_0$
$x_1 < x_0$	$y_1 > y_0$	$p_1 < p_0$	не е ясно
$x_1 < x_0$	$y_1 < y_0$	не е ясно	$q_1 < q_0$

Тези изводи могат да бъдат направени лесно на базата на съответните D-линии и S-линии.

Забележка. Понякога използването на изразите растящо/намаляващо търсене/предлагане може да доведе до объркване. Така например твърдението „през последните две години цените на недвижимите имоти в Пловдив се вдигат с 15%, като същевременно се забелязва увеличено търсене – броят на сделките се е покачил с 12%“ може да изглежда противоречиво от микроикономическа гледна

точка, ако не се отчита динамиката. Цените са по-високи с 15%, което съответства на по-малко търсене, доколкото функцията на търсене е намаляваща. Фактически вярното тълкувание е, че за две години имаме друга функция на търсене $x_1(p)$ и $x_1(p) > x_0(p)$, ако $x_0(p)$ е пазарната функция на търсене преди две години.

За да изучим по-добре изменението на частичното микроикономическо равновесие, по-точно – изменението на равновесните цена и количество, ще въведем динамични функции на търсене и предлагане

$$x = x(p, t) \text{ и } y = y(p, t),$$

като времето t може да се изменя дискретно или непрекъснато. Във всеки конкретен момент от времето $t = t_0$ функциите $x(p) = x(p, t_0)$ и $y(p) = y(p, t_0)$ са обикновените (статични) функции на търсене и предлагане.

Определение. Ще казваме, че търсенето нараства (намалява) с времето, ако

$$x(p, t_1) < x(p, t_2) \text{ при } t_1 < t_2 \text{ (} x(p, t_1) > x(p, t_2) \text{ при } t_1 < t_2 \text{)}$$

за всяка допустима цена p . Ако съществуват както цени, за които търсенето нараства, така и такива, при които то намалява, търсенето се изменя неопределено във времето.

Абсолютно същото казано по-горе важи и за предлагането.

Нека във всеки момент от времето t да имаме налице частично пазарно равновесие, т.е. изравняване на търсенето и предлагането. Тогава системата, задаваща това равновесие ще бъде

$$q = x(p, t) = y(p, t).$$

Поради динамичния характер на функциите на търсене и предлагане, ние може да очакваме, че величините на това равновесие – цената p и количеството q ще се променят във времето, т.е. ще бъдат функции от времето $p = p(t)$ и $q = q(t)$, така че ще можем да запишем

$$q(t) = x(p(t), t) = y(p(t), t).$$

Диференцираме последното равенство по t , получаваме

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial x}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial y}{\partial t}.$$

От второто равенство намираме производната на цената по времето

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial p} - \frac{\partial y}{\partial p}}$$

а след като я заместим получаваме производната на количеството по времето

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\frac{\partial x}{\partial p} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial p}}{\frac{\partial x}{\partial p} - \frac{\partial y}{\partial p}}.$$

Горните уравнения показват как реагират равновесните цена и количество на изменение на времето в зависимост от реакциите на търсенето и предлагането на цената и времето. Така например, цената остава постоянна във времето, ако

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t}$$

търсенето и предлагането реагират по един и същ начин на времето. Ако при това е изпълнено

$$\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{\partial y}{\partial p},$$

т.е. търсенето и предлагането реагират по един и същ начин на цената, то и равновесното количество остава неизменно във времето.

За да запишем горните равенства в еластичен вид, ще трябва да дефинираме важното за икономиката понятие ценова еластичност.

Определение. Нека икономическата функция z (функция на търсене, на предлагане или друга) да е функция на цената p , т.е. $z = z(p)$. Тогава под ценова еластичност на z ще разбираме израза

$$E(z) = \frac{dz}{dp} \frac{p}{z}.$$

Тъй като

$$E(z) = \frac{dz}{dp} \frac{p}{z} = \frac{\frac{dz}{z}}{\frac{dp}{p}} \cong \frac{\frac{\Delta z}{z}}{\frac{\Delta p}{p}} = \frac{\% \text{изменение на } z}{\% \text{изменение на } p},$$

то ценовата еластичност показва с какъв % се изменя z при изменението на p с 1%.

Аналогично можем да определим понятието темп на изменение.

Определение. Нека икономическата функция z (функция на търсене, на предлагане или друга) да е функция на времето t , т.е. $z = z(t)$. Тогава под темп на изменение на z ще разбираме израза

$$T(z) = \frac{dz}{dt} \frac{1}{z}.$$

Ще имаме

$$T(z) = \frac{dz}{dt} \frac{1}{z} = \frac{\frac{dz}{z}}{\frac{dt}{1}} \cong \frac{\frac{\Delta z}{z}}{\frac{\Delta t}{1}} = [\Delta t = (t + 1) - t = 1] = \frac{\Delta z}{z} = \% \text{изменение на } z.$$

Следователно темпът на изменение показва с какъв % се изменя z при изменението на времето от един момент до следващия (достатъчно близък) момент.

За да получим уравнението на реакцията на цената на времето в еластично-темпов вид умножаваме числителя и знаменателя на израза за $\frac{dp}{dt}$ с $\frac{p}{q}$. Получаваме

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial p} - \frac{\partial y}{\partial p}} = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t}\right) \frac{p}{q}}{\left(\frac{\partial x}{\partial p} - \frac{\partial y}{\partial p}\right) \frac{p}{q}}.$$

Тъй като предполагаме частично равновесие, то $q = x = y$. така ще имаме

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial t} \frac{1}{y} - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{1}{x}\right) p}{\frac{\partial x}{\partial p} \frac{p}{x} - \frac{\partial y}{\partial p} \frac{p}{y}} = \frac{T(y) - T(x)}{E(x) - E(y)} p.$$

Делим последното равенство на p и окончателно получаваме

$$T(p) = \frac{dp}{dt} \frac{1}{p} = \frac{T(y) - T(x)}{E(x) - E(y)}.$$

Сега да направим същото за уравнението на реакцията на количеството от времето. За целта умножаваме числителя и знаменателя на дясната страна на израза за $\frac{dq}{dt}$ с $\frac{p}{q}$. Получаваме

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt} &= \frac{\frac{\partial x}{\partial p} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial p}}{\frac{\partial x}{\partial p} - \frac{\partial y}{\partial p}} = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial p} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial p}\right) \frac{p}{q}}{\left(\frac{\partial x}{\partial p} - \frac{\partial y}{\partial p}\right) \frac{p}{q}} = \frac{\frac{\partial x}{\partial p} \frac{p}{x} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial p} \frac{p}{y}}{\frac{\partial x}{\partial p} \frac{p}{x} - \frac{\partial y}{\partial p} \frac{p}{y}} \\ &= \frac{E(x) \frac{\partial y}{\partial t} - E(y) \frac{\partial x}{\partial t}}{E(x) - E(y)}\end{aligned}$$

Ако умножим двете страни на последното равенство с $\frac{1}{q}$ (отчитайки, че $q = x = y$) получаваме

$$T(q) = \frac{dq}{dt} \frac{1}{q} = \frac{E(x)T(y) - E(y)T(x)}{E(x) - E(y)}.$$

Доколкото функцията на търсене (предлагане) е функция на две независими променливи – цената p и времето t $x = x(p, t)$ ($y = y(p, t)$), то за да я определим ще трябва да зададем реакцията ѝ на тези променливи:

а) по отношение на цената p или приемаме, че е зададена големината на реакцията

$$\frac{\partial x}{\partial p} = -a_x = \text{const} \quad \left(\frac{\partial y}{\partial p} = a_y = \text{const} \right)$$

или ценовата еластичност

$$\frac{\partial x}{\partial p} \frac{p}{x} = E(x) = -\alpha_x = \text{const} \quad \left(\frac{\partial y}{\partial p} \frac{p}{y} = E(y) = \alpha_y = \text{const} \right);$$

б) по отношение на времето t се задава или като големина на реакцията

$$\frac{\partial x}{\partial t} = b_x = \text{const} \quad \left(\frac{\partial y}{\partial t} = b_y = \text{const} \right)$$

или темпа на изменение

$$\frac{\partial x}{\partial t} \frac{1}{x} = T(x) = \beta_x = \text{const} \quad \left(\frac{\partial y}{\partial t} \frac{1}{y} = T(y) = \beta_y = \text{const} \right).$$

Предполага се, че коефициентите, свързани с цената (a_x, a_y, α_x и α_y) са положителни, а тези, свързани с времето (b_x, b_y, β_x и β_y) – положителни (при растящо във времето търсене и предлагане) или отрицателни (при намаляващо във времето търсене и предлагане).

Така разглежданията ни се свеждат до общо четири случая:

1) количествените функции (на търсене и предлагане) са зададени с еластичност (от цената) и темп (от времето), т.е. дадени са

$$\frac{\partial x}{\partial p} \frac{p}{x} = E(x) = -\alpha_x, \frac{\partial y}{\partial p} \frac{p}{y} = E(y) = \alpha_y, \frac{\partial x}{\partial t} \frac{1}{x} = T(x) = \beta_x, \frac{\partial y}{\partial t} \frac{1}{y} = T(y) = \beta_y.$$

Тогава за реакцията на цената получаваме

$$T(p) = \frac{dp}{dt} \frac{1}{p} = \frac{T(y) - T(x)}{E(x) - E(y)} = \frac{\beta_x - \beta_y}{\alpha_x + \alpha_y},$$

а за реакцията на количеството –

$$T(q) = \frac{dq}{dt} \frac{1}{q} = \frac{E(x)T(y) - E(y)T(x)}{E(x) - E(y)} = \frac{\alpha_x \beta_y + \alpha_y \beta_x}{\alpha_x + \alpha_y},$$

следователно в този случай равновесните цена и количество се изменят с постоянни темпове.

2) количествените функции са зададени с еластичност (от цената) и големина на реакцията (от времето)

$$\frac{\partial x}{\partial p} \frac{p}{x} = E(x) = -\alpha_x, \frac{\partial y}{\partial p} \frac{p}{y} = E(y) = \alpha_y, \frac{\partial x}{\partial t} = b_x, \frac{\partial y}{\partial t} = b_y.$$

Тогава за реакцията на цената и количеството получаваме

$$\frac{dp}{dt} = \frac{b_x - b_y}{\alpha_x + \alpha_y} \frac{p}{q}$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{E(x) \frac{\partial y}{\partial t} - E(y) \frac{\partial x}{\partial t}}{E(x) - E(y)} = \frac{\alpha_x b_y + \alpha_y b_x}{\alpha_x + \alpha_y}.$$

3) количествените функции са зададени с големина на реакцията (от цената) и темп на изменение (от времето)

$$\frac{\partial x}{\partial p} = -a_x, \frac{\partial y}{\partial p} = a_y, \frac{\partial x}{\partial t} \frac{1}{x} = T(x) = \beta_x, \frac{\partial y}{\partial t} \frac{1}{y} = T(y) = \beta_y.$$

Тогава за реакциите на цената и количеството ще имаме

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial p} - \frac{\partial y}{\partial p}} = \frac{\beta_y y - \beta_x x}{-a_x - a_y} = \frac{\beta_x - \beta_y}{\alpha_x + \alpha_y} q$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\frac{\partial x}{\partial p} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial p}}{\frac{\partial x}{\partial p} - \frac{\partial y}{\partial p}} = \frac{-a_x \beta_y y - a_y \beta_x x}{-a_x - a_y} = \frac{a_x \beta_y + a_y \beta_x}{a_x + a_y} q \Rightarrow T(q) = \frac{dq}{dt} \frac{1}{q}$$

$$= \frac{a_x \beta_y + a_y \beta_x}{a_x + a_y},$$

т.е. в този случай само количеството се изменя с постоянен темп.

4) количествените функции са зададени с големините на реакциите им по отношение на цената и времето

$$\frac{\partial x}{\partial p} = -a_x, \frac{\partial y}{\partial p} = a_y, \frac{\partial x}{\partial t} = b_x, \frac{\partial y}{\partial t} = b_y.$$

Тогава за реакциите на цената и количеството получаваме

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial p} - \frac{\partial y}{\partial p}} = \frac{b_y - b_x}{-a_x - a_y} = \frac{b_x - b_y}{a_x + a_y},$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\frac{\partial x}{\partial p} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial p}}{\frac{\partial x}{\partial p} - \frac{\partial y}{\partial p}} = \frac{-a_x b_y - b_x a_y}{-a_x - a_y} = \frac{a_x b_y + b_x a_y}{a_x + a_y},$$

т.е. в този случай цената и количеството са с постоянна големина на реакцията на изменението на времето.

Пример 9. Дадени са следните стойности на търсенето и предлагането в зависимост от цената и времето

t	p	$x = x(p, t)$	$y = y(p, t)$
0	10	100	100
0	9	108	88
1	10	106	96

Тъй като в момент от времето $t = 0$ съществува пазарно равновесие за $p = 10$ и

$$q = 100 = x(10, 0) = y(10, 0)$$

да се намерят равновесните стойности на цената и количеството p' и q' в следващия момент от времето $t = 1$, т.е.

$$q' = x(p', 1) = y(p', 1)$$

като се използва допускането

а) че търсенето и предлагането се изменят с постоянни еластичности и темпове;

б) че търсенето и предлагането се изменят с постоянни големина на реакциите по отношение на цената и времето.

Решение:

Първо да пресметнем всички коефициенти, характеризиращи реакциите на търсенето и предлагането по отношение на цената и времето. Ще имаме

$$\frac{\partial x}{\partial p}(t=0) \cong \frac{\Delta x}{\Delta p} = \frac{108 - 100}{9 - 10} = -8 \Rightarrow \alpha_x = 8$$

$$E(x)(t=0) = \frac{\partial x}{\partial p}(t=0) \frac{p}{x} = (-8) \frac{10}{100} = -0,8 \Rightarrow \alpha_x = 0,8$$

$$\frac{\partial y}{\partial p}(t=0) \cong \frac{\Delta y}{\Delta p} = \frac{88 - 100}{9 - 10} = 12 \Rightarrow \alpha_y = 12$$

$$E(y)(t=0) = \frac{\partial y}{\partial p}(t=0) \frac{p}{y} = (12) \frac{10}{100} = 1,2 \Rightarrow \alpha_y = 1,2$$

$$\frac{\partial x}{\partial t}(p=10) \cong \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{106 - 100}{1} = 6 \Rightarrow b_x = 6$$

$$T(x)(p=10) = \frac{\partial x}{\partial t}(p=10) \frac{1}{x} = 6 \frac{1}{100} = 0,06 \Rightarrow \beta_x = 0,06$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(p=10) \cong \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{96 - 100}{1} = -4 \Rightarrow b_y = -4$$

$$T(y)(p=10) = \frac{\partial y}{\partial t}(p=10) \frac{1}{y} = (-4) \frac{1}{100} = -0,04 \Rightarrow \beta_y = -0,04$$

а) Заместваме във формулите за случая, в който количествените функции се изменят с фиксирана еластичност по цената и с фиксиран темп по времето. За темпа на цената получаваме

$$T(p) = \frac{dp}{dt} \frac{1}{p} = \frac{T(y) - T(x)}{E(x) - E(y)} = \frac{\beta_y - \beta_x}{\alpha_x + \alpha_y} = \frac{0,06 - (-0,04)}{0,8 + 1,2} = 0,05$$

Но тъй като

$$T(p) = \frac{dp}{dt} \frac{1}{p} \cong \frac{\Delta p}{\Delta t} \frac{1}{p} = \frac{\Delta p}{p} \Rightarrow \Delta p \cong T(p)p = 0,05 \cdot 10 = 0,5$$

Тогава, за новата равновесна цена p' (за $t = 1$) получаваме $p' = p + \Delta p = 10 + 0,5 = 10,5$.

Аналогично се намира новото равновесно количество q' (в момент от времето $t = 1$):

$$\begin{aligned} T(q) = \frac{dq}{dt} \frac{1}{q} &= \frac{E(x)T(y) - E(y)T(x)}{E(x) - E(y)} = \frac{\alpha_x \beta_y + \alpha_y \beta_x}{\alpha_x + \alpha_y} = \frac{0,8(-0,04) + 1,2 \cdot 0,06}{0,8 + 1,2} \\ &= 0,02; \Delta q \cong T(q)q = 0,02 \cdot 100 = 2; q' = q + \Delta q = 100 + 2 \\ &= 102. \end{aligned}$$

б) Сега замествахме във формулите за случая, в който количествените функции се изменят с фиксирани големина на реакциите по цената и времето. Получаваме

$$\frac{dp}{dt} = \frac{b_x - b_y}{a_x + a_y} = \frac{6 - (-4)}{8 + 12} = 0,5$$

Но тъй като

$$\frac{dp}{dt} \cong \frac{\Delta p}{\Delta t} = \Delta p \Rightarrow \Delta p = 0,5 \text{ и } p' = p + \Delta p = 10 + 0,5 = 10,5.$$

Аналогично

$$\frac{dq}{dt} = \frac{a_x b_y + b_x a_y}{a_x + a_y} = \frac{8(-4) + 6 \cdot 12}{8 + 12} = 2$$

$$\frac{dq}{dt} \cong \frac{\Delta q}{\Delta t} = \Delta q \Rightarrow \Delta q = 2 \text{ и } q' = q + \Delta q = 100 + 2 = 102.$$

Вижда се, че и при двете хипотези за реакциите на количествените функции по отношение на цената и времето, прогнозните резултати за равновесните стойности на цената и количеството в един следващ времеви момент съвпадат. Те биха били същите, ако изчисленията бяха направени и въз основа на формулите за другите два случая. Това е така, защото:

- формулите за реакциите в четирите случая са изведени от основните формули за реакциите (в диференциален и в еластично-темпов вид);
- прави се преход от един момент от времето $t = 0$ към следващия момент $t = 1$.

Гореизложеният метод е много добър за прогнозиране на величините на микроикономическото равновесие в краткосрочен план. Ако искаме да направим дългосрочна прогноза трябва да получим вида на функциите $p = p(t)$ и $q = q(t)$ в зависимост от предположенията, направени за количествените функции.

Нека да допуснем, че функциите на търсене и предлагане $x = x(p, t)$ и $y = y(p, t)$ са с постоянна еластичност по цената и с постоянен темп по времето, т.е.

$$E(x) = \frac{\partial x}{\partial p} \frac{p}{x} = -\alpha_x = \text{const}, \quad E(y) = \frac{\partial y}{\partial p} \frac{p}{y} = -\alpha_y = \text{const};$$

$$T(x) = \frac{\partial x}{\partial t} \frac{1}{x} = \beta_x = \text{const}, \quad T(y) = \frac{\partial y}{\partial t} \frac{1}{y} = \beta_y = \text{const}.$$

Да намерим при това предположение вида на тези функции. Например, за функцията на търсене (ако я разглеждаме като функция на само една променлива – цената p) ще имаме

$$\frac{dx}{dp} \frac{p}{x} = -\alpha_x \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\alpha_x \frac{dp}{p}.$$

След интегриране получаваме

$$\ln x = -\alpha_x \ln p + \ln C \Rightarrow x = Cp^{-\alpha_x},$$

където C е интеграционната константа. За различните стойности на другата променлива – времето t тази константа ще бъде различна, следователно тя ще бъде функция на t : $C = C(t)$ и

$$x = x(p, t) = C(t)p^{-\alpha_x}.$$

Диференцираме по t и получаваме

$$\frac{\partial x}{\partial t} = C'(t)p^{-\alpha_x}.$$

Тогава за темпа на x ще имаме

$$T(x) = \frac{\partial x}{\partial t} \frac{1}{x} = C'(t)p^{-\alpha_x} \frac{1}{C(t)p^{-\alpha_x}} = \frac{C'(t)}{C(t)} = \frac{dC}{dt} \frac{1}{C} = T(C),$$

т.е. темпът на $C(t)$ съвпада с темпа на $x(p, t)$ и

$$T(C) = \frac{dC}{dt} \frac{1}{C} = T(x) = \beta_x \Rightarrow C(t) = C_0 e^{\beta_x t},$$

където C_0 е интеграционната константа. Тогава окончателно за функцията на търсене на две променливи получаваме

$$x = x(p, t) = C_0 e^{\beta_x t} p^{-\alpha_x}.$$

Аналогично, функцията на предлагане ще има вида

$$y = y(p, t) = C_0 e^{\beta_y t} p^{\alpha_y}.$$

С аналогични пресмятания, за количествени функции с постоянна еластичност по цената и линейност по времето

$$E(x) = \frac{\partial x}{\partial p} \frac{p}{x} = -\alpha_x = \text{const}, \quad E(y) = \frac{\partial y}{\partial p} \frac{p}{y} = -\alpha_y = \text{const};$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = b_x = \text{const}, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = b_y = \text{const}$$

получаваме

$$x = x(p, t) = b_x t + C_0 p^{-\alpha_x} \quad \text{и} \quad y = y(p, t) = b_y t + C_0 p^{\alpha_y}.$$

За функции на търсене и предлагане с постоянен темпо времето и линейни по цената

$$T(x) = \frac{\partial x}{\partial t} \frac{1}{x} = \beta_x = \text{const}, \quad T(y) = \frac{\partial y}{\partial t} \frac{1}{y} = \beta_y = \text{const}.$$

$$\frac{\partial x}{\partial p} = -a_x = \text{const}, \quad \frac{\partial y}{\partial p} = a_y = \text{const}$$

ще имаме

$$x = x(p, t) = -a_x p + C_0 e^{\beta_x t} \quad \text{и} \quad y = y(p, t) = a_y p + C_0 e^{\beta_y t}.$$

И накрая, за количествени функции с постоянни големина на реакциите по цената и времето

$$\frac{\partial x}{\partial p} = -a_x = \text{const}, \quad \frac{\partial y}{\partial p} = a_y = \text{const}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = b_x = \text{const}, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = b_y = \text{const}$$

получаваме

$$x = x(p, t) = -a_x p + b_x t + C_0 \quad \text{и} \quad y = y(p, t) = a_y p + b_y t + C_0.$$

Пример 10. Да се намерят функциите на търсене и предлагане (при същите данни като в пример 9), да се изразят равновесните цена и количество като функции от времето и да се направи прогноза при $t = 1, 2, 3, 5, 10$ като се използва допускането

а) че търсенето и предлагането се изменят с постоянни еластичности и темпове;

б) че търсенето и предлагането се изменят с постоянни големина на реакциите по отношение на цената и времето.

Решение:

а) Ще търсим функцията на търсене във вида

$$x = x(p, t) = C_0 e^{\beta_x t} p^{-\alpha_x}.$$

Тъй като сме пресметнали $\alpha_x = 0,8$ и $\beta_x = 0,06$, като заместим в горния израз, получаваме

$$x = x(p, t) = C_0 e^{0,06t} p^{-0,8}.$$

След логаритмуване ще имаме

$$\ln x = \ln C_0 + 0,06t - 0,8 \ln p.$$

Константата $\ln C_0$ получаваме от условието $x(10,0) = 100$:

$$\begin{aligned} \ln 100 &= \ln C_0 \\ &- 0,8 \ln 10 \Rightarrow \ln C_0 \\ &= \ln 100 + 0,8 \ln 10 = 4,605 + 0,8 \cdot 2,303 = 6,447, \end{aligned}$$

откъдето окончателният вид на функцията на търсене (в логаритмичен вид) е

$$\ln x = 6,447 + 0,06t - 0,8 \ln p.$$

Аналогично, за функцията на предлагане от вида

$$y = y(p, t) = C_0 e^{\beta_y t} p^{\alpha_y}$$

след заместване на пресметнатите в пример 9 $\alpha_y = 1,2$ и $\beta_y = -0,04$ и след логаритмуване получаваме

$$\ln y = \ln C_0 - 0,04t + 1,2 \ln p.$$

От $y(10,0) = 100$ определяме константата:

$$\begin{aligned} \ln 100 &= \ln C_0 \\ &+ 1,2 \ln 10 \Rightarrow \ln C_0 \\ &= \ln 100 - 1,2 \ln 10 = 4,605 - 1,2 \cdot 2,303 = 1,841 \end{aligned}$$

И окончателният логаритмичен вид на функцията на предлагане е

$$\ln y = 1,841 - 0,04t + 1,2 \ln p.$$

Вече можем да запишем условието за динамично равновесие в логаритмичен вид

$$\ln q = 6,447 + 0,06t - 0,8 \ln p = 1,841 - 0,04t + 1,2 \ln p.$$

От това условие получаваме

$$\ln p = 2,303 + 0,05t \quad \text{и} \quad \ln q = 4,605 + 0,02t.$$

Можем след антилогаритмуване да намерим

$$p(t) = e^{2,303} e^{0,05t} = 10e^{0,05t} \quad \text{и} \quad q(t) = e^{4,605} e^{0,02t} = 100e^{0,02t}.$$

На базата на горните формули можем да направим прогноза за равновесните цена и количество при $t = 1, 2, 3, 5, 10$

t	$p(t)$	$q(t)$
1	10,51	102,0
2	11,05	104,1
3	11,62	106,2
5	12,84	110,5
10	16,49	122,1

Забележка 1. В този случай можем да определим функциите $p(t)$ и $q(t)$ директно (като имаме пред вид, че ако функциите на търсене и предлагане са с постоянна ценова еластичност и постоянен темп, то $p(t)$ и $q(t)$ са с постоянен темп). Ще имаме

$$p(t) = p_0 e^{T(p)t} \quad \text{и} \quad q(t) = q_0 e^{T(q)t}$$

където $p_0 = p(0)$, $q_0 = q(0)$, а с $T(p)$ и $T(q)$ са означени постоянните темпове на $p(t)$ и $q(t)$. Тъй като $p_0 = 10$, $q_0 = 100$, $T(p) = 0,05$ и $T(q) = 0,02$ (изчислени са в решението на пример 9 а)), то получаваме

$$p(t) = 10e^{0,05t} \quad \text{и} \quad q(t) = 100e^{0,02t}$$

Забележка 2. Ако първото от горните две равенства вдигнем на степен 0,4, получаваме

$$p^{0,4} = 10^{0,4} e^{0,02t} \Rightarrow e^{0,02t} = \left(\frac{p}{10}\right)^{0,4} = \frac{q}{100} \Rightarrow q = 10^{1,6} p^{0,4} = 39,81 p^{0,4},$$

т.е. изключвайки t от формулите за $p(t)$ и $q(t)$, ние получаваме връзка между равновесните стойности на количеството и цената през цялото време. В този случай се вижда, че функцията $q = 39,81 p^{0,4}$ е с постоянна ценова еластичност

$$E(q) = 0,4 = \frac{0,02}{0,05} = \frac{T(q)}{T(p)}.$$

б) Ще търсим функциите на търсене и предлагане във вида

$$x = x(p, t) = -a_x p + b_x t + C_0 \text{ и } y = y(p, t) = a_y p + b_y t + C_0$$

т.е. линейни по отношение на двете си променливи. Тъй като в решението на пример 9 сме пресметнали $a_x = 8, b_x = 6, a_y = 12, b_y = -4$, то като заместим в горните изрази, получаваме

$$x(p, t) = -8p + 6t + C_0 \text{ и } y(p, t) = 12p - 4t + C_0$$

Интеграционните константи C_0 (те са различни за двете функции) намираме от началното условие

$$x(10,0) = -8 \cdot 10 + C_0 = 100 \Rightarrow C_0 = 180 \text{ и } x(p, t) = 180 - 8p + 6t$$

$$y(10,0) = 12 \cdot 10 + C_0 = 100 \Rightarrow C_0 = -20 \text{ и } y(p, t) = 12p - 4t - 20.$$

Тогава динамичното условие за частично равновесие ще бъде

$$q = 180 - 8p + 6t = 12p - 4t - 20,$$

откъдето получаваме

$$p = 10 + 0,5t \text{ и } q = 100 + 2t.$$

Нанасяме прогнозните равновесни цени и количества при $t = 1, 2, 3, 5, 10$ в таблица

t	$p(t)$	$q(t)$
1	10,50	102
2	11,00	104
3	11,50	106
5	12,50	110
10	15,00	120

Ясно е, че след изключването на t от горните формули, получаваме следната линейна връзка между равновесното количество q и равновесната цена p :

$$q = 60 + 4p.$$

Накрая ще отбележим, че в случай а) (когато функциите са с постоянни ценови еластичности и постоянни темпове) функциите $p(t)$ и $q(t)$ са с постоянни темпове и последователните стойности $p(0), p(1), p(2), \dots$ и $q(0), q(1), q(2), \dots$ образуват геометрични прогресии (първата – с частно $e^{T(p)}$, а втората – с частно $e^{T(q)}$). В този случай казваме, че има експоненциално изменение. В случай б) (когато функциите на търсене и предлагане са линейни по двата си аргумента) функциите $p(t)$ и $q(t)$ са линейни и $p(0), p(1), p(2), \dots$; $q(0), q(1), q(2), \dots$ образуват аритметични прогресии. Тогава се говори за линейно изменение.

6. Билинейни динамични функции на търсене и предлагане

Определение. Динамична функция от вида

$$x(p, t) = a - bp + \alpha t + \beta pt,$$

където a и b са положителни константи, а α и β могат да бъдат както положителни, така и отрицателни, ще наричаме **билинейна функция на търсене**.

Ясно е, че ако фиксираме всяка от променливите, то билинейната функция на търсене е линейна спрямо другата променлива.

Една линейна функция на търсене, зависеща само от цената се определя от две константи:

$$x(p) = A - Bp.$$

Тя пресича координатните оси в две точки, имащи важно икономическо значение. Пресечната точка с количествената ос $x(0) = A$ съответства на търсене на стоката при цена $p = 0$. То е максималното възможно количество на търсене и показва какъв е пазарния капацитет. Означаваме

$$\text{пазарен капацитет} = q_0 = x(0) = A.$$

Точката на пресичане с ценовата ос, съответства на цена p_0 , при която стоката престава да се търси. Тя е най-високата възможна цена на търсене и очевидно

$$x(p_0) = A - Bp_0 = 0 \Rightarrow p_0 = \frac{A}{B}.$$

Ще наричаме тази цена p_0 гранична цена. Тогава ще имаме

$$x(p) = A \left(1 - \frac{B}{A}p\right) = q_0 \left(1 - \frac{p}{p_0}\right).$$

Да се върнем към билинейната функция на търсене. За нея ще имаме

$$x(p, t) = (a + \alpha t) \left(1 - \frac{b - \beta t}{a + \alpha t}p\right).$$

Тогава за динамичния пазарен капацитет $q_0(t)$ и динамичната гранична цена $p_0(t)$ получаваме

$$q_0(t) = a + \alpha t \quad \text{и} \quad p_0(t) = \frac{a + \alpha t}{b - \beta t}$$

Ясно е, че при $\alpha > 0$ функцията $q_0(t)$ ще е растяща, а при $\alpha < 0$ – намаляваща. Във вторият случай, обаче трябва $|\alpha| \ll a$ (модул от α много по-малко от a), защото в противен случай при малки стойности на t ще се получава $q_0(t) = 0$ и билинейната функция на търсене няма да може да се използва за икономическо прогнозиране.

Аналогична е ситуацията, когато $\beta > 0$. Тогава е необходимо $\beta \ll b$, защото в противен случай знаменателят на израза за $p_0(t)$ ще се нулира за малки стойности на t . За да продължим анализа на функцията $p_0(t)$ ще трябва да пресметнем първата ѝ производна:

$$p_0'(t) = \frac{\alpha(b - \beta t) + \beta(a + \alpha t)}{(b - \beta t)^2} = \frac{\alpha b + \beta a}{(b - \beta t)^2}.$$

От израза за производната се вижда, че при $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ $p_0'(t) > 0$ и функцията $p_0(t)$ е растяща, а при $\alpha < 0$ и $\beta < 0$ $p_0'(t) < 0$ и функцията $p_0(t)$ е намаляваща. Ако α и β са с различни знаци, ще можем да преценим поведението на $p_0(t)$ само след пресмятането на числителя $\alpha b + \beta a$ на производната $p_0'(t)$.

Ясно е, че ако пазарният капацитет и граничната цена едновременно нарастват с течение на времето, то и търсенето ще нараства, ако те намаляват, ще намалява и търсенето. В случай, че една от тези величини расте, а другата намалява, ще имаме неопределено търсене, растящо при едни цени и намаляващо при други.

Пример 11. Билинейната функция на търсене е зададена чрез своите коефициенти

	a	b	α	β
а)	10	5	0,5	0,2
б)	10	5	0,5	2,5
в)	10	5	0,5	-0,2
г)	10	5	-0,5	-0,2
д)	10	5	-5	-0,2
е)	10	5	0,5	-0,3
ж)	10	5	-0,5	0,3

Да се определи в кои от случаите функцията може да бъде използвана за икономическо прогнозиране. В кои от случаите тя моделира растящо, намаляващо или неопределено търсене. В последния случай, да се определи при кои цени търсенето расте и при кои – намалява.

Решение:

а) При $\alpha = 0,5 > 0$ и $\beta = 0,2 > 0$ двете функции $q_0(t)$ и $p_0(t)$ ще растат едновременно. Знаменателят на $p_0(t)$ $b - \beta t = 5 - 0,2t$ ще се нулира за $t = 25$, така че билинейната функция с тези коефициенти ще може да моделира растящо търсене, например за $t \leq 10$.

б) Тъй като $\beta = 2,5$ знаменателят на $p_0(t)$ $b - \beta t = 5 - 2,5t$ ще се нулира за $t = 2$, така че тази билинейна функция не може да се използва за моделиране на динамично търсене.

в) При $\alpha = 0,5 > 0$ пазарният капацитет $q_0(t)$ расте. Тъй като α и β са с различни знаци, то за да определим поведението на граничната цена $p_0(t)$ ще трябва да пресметнем числителя на нейната производна $\alpha b + \beta a = 0,5 \cdot 5 - 0,2 \cdot 10 = 0,5 > 0$. Тогава ще имаме $p_0'(t) > 0$, следователно $p_0(t)$ е растяща функция. Тогава билинейната функция ще може да моделира растящо търсене.

г) При $\alpha = -0,5 < 0$ и $\beta = -0,2 < 0$ двете функции $q_0(t)$ и $p_0(t)$ ще намаляват едновременно, така че билинейната функция може да моделира спадащо търсене за достатъчно малки стойности на t , например $t \leq 10$. Това е така, защото $q_0(t) = a + \alpha t = 10 - 0,5t$ се нулира за $t = 20$.

д) Тази функция не може да се използва за моделиране на динамично търсене, защото за пазарния капацитет имаме $q_0(t) = a + \alpha t = 10 - 5t$ и той се нулира при $t = 2$.

е) В този случай $\alpha = 0,5 > 0$ пазарният капацитет $q_0(t)$ расте. Тъй като α и β са с различни знаци, то за да определим поведението на граничната цена $p_0(t)$ ще трябва да пресметнем числителя на нейната производна $\alpha b + \beta a = 0,5 \cdot 5 - 0,3 \cdot 10 = -0,5 < 0$. Тогава ще имаме $p_0'(t) < 0$, следователно $p_0(t)$ е намаляваща функция. Тогава билинейната функция ще може да моделира неопределено търсене.

За да определим при кои цени търсенето ще расте с времето и при кои ще намалява, трябва да пресметнем частната производна на билинейната функция по времето. Ще имаме

$$x(p, t) = 10 - 5p + 0,5t - 0,3pt \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial t} = 0,5 - 0,3p \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial t} = 0 \text{ за } p = \frac{5}{3}.$$

Тъй като за граничната цена имаме

$$p_0(t) = \frac{10 + 0,5t}{5 + 0,3t} > \frac{5}{3} \text{ за всяко } t,$$

то окончателно получаваме, че

$$\text{при } p \in \left(0, \frac{5}{3}\right) \frac{\partial x}{\partial t} > 0 \text{ и търсенето расте с времето}$$

$$\text{при } p \in \left(\frac{5}{3}, \frac{10 + 0,5t}{5 + 0,3t}\right) \frac{\partial x}{\partial t} < 0 \text{ и търсенето намалява с времето.}$$

ж) В този случай $\alpha = -0,5 < 0$ пазарният капацитет $q_0(t)$ намалява. Тъй като α и β са с различни знаци, то за да определим поведението на граничната цена $p_0(t)$ ще трябва да пресметнем числителя на нейната производна $\alpha b + \beta a = -0,5 \cdot 5 + 0,3 \cdot 10 = 0,5 > 0$. Тогава ще имаме $p_0'(t) > 0$, следователно $p_0(t)$ е растяща функция. Тогава билинейната функция ще може да моделира неопределено търсене.

За да определим при кои цени търсенето ще расте с времето и при кои ще намалява, трябва да пресметнем частната производна на билинейната функция по времето. Ще имаме

$$x(p, t) = 10 - 5p - 0,5t + 0,3pt \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial t} = -0,5 + 0,3p \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial t} = 0 \text{ за } p = \frac{5}{3}.$$

Тъй като за граничната цена имаме

$$p_0(t) = \frac{10 - 0,5t}{5 - 0,3t} > \frac{5}{3} \text{ за всяко } t,$$

то окончателно получаваме, че

$$\text{при } p \in \left(0, \frac{5}{3}\right) \frac{\partial x}{\partial t} < 0 \text{ и търсенето намалява с времето}$$

$$\text{при } p \in \left(\frac{5}{3}, \frac{10 + 0,5t}{5 + 0,3t}\right) \frac{\partial x}{\partial t} < 0 \text{ и търсенето расте с времето.}$$

Пример 12. За динамична функция на търсене е дадено, че пазарният капацитет в началото е $q_0(0) = 100$ при начална гранична цена $p_0(0) = 100$. Да се моделира търсенето чрез билинейна функция, ако

а) $q_0(1) = 98$ и $p_0(1) = 105$;

б) $q_0(1) = 98$ и $p_0(1) = 97$;

в) $q_0(1) = 104$ и $p_0(1) = 105$;

а) $q_0(1) = 104$ и $p_0(1) = 97$.

Решение:

Ще използваме формулите

$$q_0(t) = a + \alpha t \text{ и } p_0(t) = \frac{a + \alpha t}{b - \beta t}.$$

При $t = 0$ имаме

$$q_0(0) = a = 100$$

$$p_0(t) = \frac{100}{b} = 100 \Rightarrow b = 1.$$

а) ще имаме

$$q_0(1) = 100 + \alpha = 98 \Rightarrow \alpha = -2$$

$$p_0(1) = \frac{100 - 2}{1 - \beta} = 105 \Rightarrow 105 - 105\beta = 98 \text{ и } \beta = \frac{1}{15}.$$

Така окончателно, за билинейната функция на търсене получаваме

$$x(p, t) = 100 - p - 2t + \frac{1}{15}pt.$$

Ясно е, че търсенето е неопределено, защото пазарният капацитет намалява, а граничната цена нараства. Трябва да определим цените, при които търсенето нараства с времето и цените при които то намалява. За целта пресмятаме частната производна на билинейната функция по времето:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -2 + \frac{p}{15} \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial t} = 0 \text{ при } p = 30,$$

при $p < 30$ търсенето намалява с времето и при $p > 30$ – нараства.

б) Аналогично получаваме

$$\alpha = -2; p_0(1) = \frac{100 - 2}{1 - \beta} = 97 \Rightarrow 97 - 97\beta = 98 \text{ и } \beta = -\frac{1}{97};$$

$$x(p, t) = 100 - p - 2t - \frac{1}{97}pt.$$

Това е билинейна функция на търсене, моделираща намаляващо с времето търсене (защото има спад както на пазарния капацитет, така и на граничната цена).

в) Ще имаме

$$q_0(1) = 100 + \alpha = 104 \Rightarrow \alpha = 4$$

$$p_0(1) = \frac{100 + 4}{1 - \beta} = 105 \Rightarrow 105 - 105\beta = 104 \text{ и } \beta = \frac{1}{105};$$

$$x(p, t) = 100 - p + 4t + \frac{1}{105}pt.$$

Това е билинейна функция на нарастващо с времето търсене.

г) В този случай получаваме

$$\alpha = 4; p_0(1) = \frac{100 + 4}{1 - \beta} = 97 \Rightarrow 97 - 97\beta = 104 \text{ и } \beta = -\frac{7}{97};$$

$$x(p, t) = 100 - p + 4t - \frac{7}{97}pt.$$

Както в случай б) и тук става дума за неопределено изменящо се с времето търсене. Тъй като

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 4 - \frac{7p}{97} \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial t} = 0 \text{ при } p = \frac{97 \cdot 4}{7} \cong 55,43,$$

то при $p < 55,43$ търсенето нараства с времето и при $p > 55,43$ – намалява.

Определение. Динамична функция от вида

$$y(p, t) = -a + bp + \alpha t + \beta pt,$$

където a и b са положителни константи, а α и β могат да бъдат както положителни, така и отрицателни, ще наричаме **билинейна функция на предлагане**.

Ако фиксираме всяка от променливите, то билинейната функция на предлагане е линейна спрямо другата променлива.

Една линейна функция на предлагане, зависеща само от цената се определя от две константи:

$$y(p) = -A + Bp = B \left(p - \frac{A}{B} \right).$$

Ясно е, че тази функция се нулира при цена p_0 , така че

$$y(p_0) = 0 \Leftrightarrow p_0 = \frac{A}{B}.$$

Тази цена p_0 е най-ниската възможна цена на предлагане и ще я наричаме гранична цена на предлагане. Означаваме с k наклона на линията на предлагане към ценовата ос, тогава ще можем да запишем

$$y(p) = k(p - p_0).$$

Да се върнем към билинейната функция на предлагане. Ще имаме

$$y(p, t) = (b + \beta t) \left(p - \frac{a - \alpha t}{b + \beta t} \right).$$

Тогава, за динамичните функции на наклона $k = k(t)$ и граничната цена на предлагане $p_0 = p_0(t)$ получаваме

$$k(t) = b + \beta t \quad \text{и} \quad p_0(t) = \frac{a - \alpha t}{b + \beta t}.$$

Ясно е, че при $\beta > 0$ наклонът на линията на предлагане ще нараства, а при $\beta < 0$ – ще намалява. Във вторият случай трябва да е изпълнено неравенството $|\beta| \ll b$, защото в противен случай ще имаме $k(t) = 0$ за много малки стойности на t и такава функция не може да моделира динамичното предлагане.

Аналогична е ситуацията с параметъра α : когато $\alpha > 0$ ще трябва да е изпълнено неравенството $\alpha \ll a$. Ако не е така, числителят на $p_0(t)$, а от там и самата $p_0(t)$ ще се нулират при малки стойности на t (което не е фатално) и с нарастването на t ще стават отрицателни.

За да продължим анализа на функцията $p_0(t)$ ще трябва да пресметнем първата ѝ производна:

$$p_0'(t) = \frac{-\alpha(b + \beta t) - \beta(a - \alpha t)}{(b + \beta t)^2} = -\frac{\alpha b + \beta a}{(b + \beta t)^2}.$$

От израза за производната се вижда, че при $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ $p_0'(t) < 0$ и функцията $p_0(t)$ е намаляваща, а при $\alpha < 0$ и $\beta < 0$ $p_0'(t) > 0$ и функцията $p_0(t)$ е растяща. Ако α и β са с различни знаци, ще можем да преценим поведението на $p_0(t)$ само след пресмятането на числителя $\alpha b + \beta a$ на производната $p_0'(t)$.

Ясно е, че ако едновременно наклонът нараства с течение на времето, а граничната цена намалява, то и предлагането ще нараства. При намаляване на наклона и нарастване на граничната цена, предлагането намалява, а при едновременно нарастване или намаляване на двата показателя на предлагането, то ще бъде неопределено. В последният случай, ще имаме растящо предлагане при едно цени и намаляващо при други.

Забележка. Тъй като за функцията на търсене на една променлива имаме

$$x(p) = A - Bp = -B \left(p - \frac{A}{B} \right) = -k(p - p_0),$$

то и търсенето може да бъде определено чрез наклона на линията на търсене към ценовата ос и граничната цена.

Пример 13. Билинейната функция на предлагане е зададена чрез своите коефициенти

	a	b	α	β
а)	10	5	0,5	0,2
б)	10	5	0,5	-0,2
в)	10	5	0,5	-2
г)	10	5	5	0,2
д)	10	5	-0,5	-0,2
е)	10	5	-0,5	0,2

Да се определи в кои от случаите функцията може да бъде използвана за икономическо прогнозиране. В кои от случаите тя моделира растящо, намаляващо или неопределено предлагане. В последният случай, да се определи при кои цени предлагането расте и при кои – намалява.

Решение:

а) При $\beta = 0,2 > 0$ динамичната функция $k(t)$ е растяща. Тъй като $\alpha = 0,5 > 0$, то $p_0'(t) < 0$ и динамичната функция $p_0(t)$ е намаляваща. В този случай коефициентът α не крие заплаха, защото числителят на $p_0(t)$ $a - \alpha t = 10 - 0,5t$ се нулира за $t = 20$ и билинейна функция с такива коефициенти може да се използва за моделиране на предлагане, което расте с времето.

б) При $\beta = -0,2 < 0$ динамичната функция $k(t)$ е намаляваща. При $\alpha = 0,5$ ще имаме $p_0'(t) < 0$ и динамичната функция $p_0(t)$ е намаляваща. В този случай търсенето е неопределено. За да намерим цените, при които предлагането ще расте и тези, при които ще намалява, трябва да пресметнем частната производна по времето. Ще имаме

$$y(p, t) = -10 + 5p + 0,5t - 0,2pt \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial t} = 0,5 - 0,2p.$$

Тъй като

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow p = 2,5 \text{ и за } p < 2,5 \quad \frac{\partial y}{\partial t} > 0, \text{ а за } p > 2,5 \quad \frac{\partial y}{\partial t} < 0,$$

а от друга страна

$$p_0(t) = \frac{10 - 0,5t}{5 - 0,2t} < 2,5,$$

то в интервала $p \in (p_0(t); 2,5)$ предлагането ще нараства с времето, а при $p \in (2,5; \infty)$ - ще спада.

в) При $\beta = -2 < 0$ изразът за динамичната функция на наклона е $k(t) = 5 - 2t$ и $k(t)$ става отрицателен (а това е невъзможно при функцията на предлагане) при $t > 2,5$, така че функция с такива коефициенти не може да се използва за моделиране на динамично предлагане.

г) При $\alpha = 5 > 0$ числителят на динамичната функция $p_0(t)$ става $10 - 5t$ и за $t = 2$ той се нулира. Това показва, че при тези коефициенти функцията не може да се използва за моделиране на предлагането.

д) При $\beta = -0,2 < 0$ динамичната функция $k(t)$ е намаляваща. Тъй като $\alpha = -0,5 < 0$, то $p_0'(t) > 0$ и динамичната функция $p_0(t)$ е растяща. В този случай билинейна функция с такива коефициенти може да се използва за моделиране на предлагане, което намалява с времето.

е) При $\beta = 0,2 > 0$ динамичната функция $k(t)$ е растяща. При $\alpha = -0,5$ ще имаме $p_0'(t) > 0$ и динамичната функция $p_0(t)$ е растяща. В този случай търсенето е неопределено. За да намерим цените, при които предлагането ще расте и тези, при които ще намалява, трябва да пресметнем частната производна по времето. Ще имаме

$$y(p, t) = -10 + 5p - 0,5t + 0,2pt \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial t} = -0,5 + 0,2p.$$

Тъй като

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow p = 2,5 \text{ и за } p < 2,5 \quad \frac{\partial y}{\partial t} < 0, \text{ а за } p > 2,5 \quad \frac{\partial y}{\partial t} > 0,$$

а от друга страна

$$p_0(t) = \frac{10 + 0,5t}{5 + 0,2t} < 2,5,$$

то в интервала $p \in (p_0(t); 2,5)$ предлагането ще намалява с времето, а при $p \in (2,5; \infty)$ - ще нараства.

Пример 14. За динамична функция на предлагане е дадено, че наклонът на линията на предлагане в началото е $k(0) = 1$ при начална гранична цена $p_0(0) = 40$. Да се моделира предлагането чрез билинейна функция, ако

а) $k(1) = 1,03$ и $p_0(1) = 41$;

б) $k(1) = 1,03$ и $p_0(1) = 39$;

в) $k(1) = 0,98$ и $p_0(1) = 41$;

г) $k(1) = 0,98$ и $p_0(1) = 39$.

Решение:

Ще използваме формулите

$$k(t) = b + \beta t \quad \text{и} \quad p_0(t) = \frac{a - \alpha t}{b + \beta t}.$$

Тъй като

$$k(0) = b = 1 \quad \text{и} \quad p_0(0) = \frac{a}{b} = \frac{a}{1} = a = 40,$$

то условията при $t = 1$ остава да определим коефициентите α и β .

а) Ще имаме

$$k(1) = 1 + \beta = 1,03 \Rightarrow \beta = 0,03;$$

$$p_0(1) = \frac{40 - \alpha}{1 + 0,03} = 39 \Rightarrow \alpha = -2,23$$

и видът на билинейната функция на предлагане ще бъде

$$y(p, t) = -40 + p - 2,23t + 0,03pt.$$

Тъй като от $t = 0$ до $t = 1$ наклонът нараства (което свидетелства за повишено предлагане) и граничната цена нараства (свидетелстващо за обратното), то става дума за неопределено изменящо се във времето предлагане. За да намерим цените, при които предлагането ще расте и тези, при които ще намалява, трябва да пресметнем частната производна по времето. Ще имаме

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -2,23 + 0,03p \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow p = \frac{223}{3} \cong 74,33.$$

Така получаваме, че

$$\text{при } p \in (p_0(t); 74,33) \quad \frac{\partial y}{\partial t} < 0 \text{ и предлагането намалява с времето}$$

$$\text{при } p \in (74,33; \infty) \quad \frac{\partial y}{\partial t} > 0 \text{ и предлагането расте с времето.}$$

б) Тъй като и в този случай $k(1) = 1,03$, то $\beta = 0,03$. Да определим коефициента α от условието за $p_0(1)$:

$$p_0(1) = \frac{40 - \alpha}{1 + 0,03} = 39 \Rightarrow \alpha = -0,17$$

и видът на билинейната функция на предлагане е

$$y(p, t) = -40 + p - 0,17t + 0,03pt.$$

Тъй като от $t = 0$ до $t = 1$ изменението на наклона и изменението на граничната цена на предлагане свидетелстват за растящо предлагане, то става дума за растящо във времето предлагане.

в) Ще имаме

$$k(1) = 1 + \beta = 0,98 \Rightarrow \beta = -0,02;$$

$$p_0(1) = \frac{40 - \alpha}{1 - 0,02} = 41 \Rightarrow \alpha = -0,18$$

и видът на билинейната функция на предлагане ще бъде

$$y(p, t) = -40 + p - 0,18t - 0,02pt.$$

Това е функция, моделираща спадащо с времето предлагане.

г) Тъй като и в този случай $k(1) = 0,98$, то $\beta = -0,02$. Да определим коефициента α от условието за $p_0(1)$:

$$p_0(1) = \frac{40 - \alpha}{1 - 0,02} = 39 \Rightarrow \alpha = 1,78$$

и видът на билинейната функция на предлагане е

$$y(p, t) = -40 + p + 1,78t - 0,02pt.$$

Измененията на наклона на линията на предлагане и граничната цена на предлагане дават разнопосочни сигнали за поведението на предлагането във времето, така че става дума за неопределено предлагане. За да намерим цените, при които предлагането ще расте и тези, при които ще намалява, трябва да пресметнем частната производна по времето. Ще имаме

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 1,78 - 0,02p \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow p = \frac{178}{2} = 89.$$

Така получаваме, че

$$\text{при } p \in (p_0(t); 89) \frac{\partial y}{\partial t} > 0 \text{ и предлагането нараства с времето}$$

при $p \in (89; \infty)$ $\frac{\partial y}{\partial t} < 0$ и предлагането спада с времето.

Пример 15. Да се определят динамичните функции на равновесните цена и количество $p = p(t)$, $q = q(t)$, ако динамичното търсене $x(p, t)$ и динамичното предлагане $y(p, t)$ са зададени както в:

а) 12 в) и 14 б);

б) 12 в) и 14 в);

в) 12 а) и 14 а);

г) 12 г) и 14 г).

Да се направи прогноза при $t = 1, 2, 3, 5, 10$.

Решение:

Динамичното равновесие се постига при изпълнението на равенствата

$$q(t) = x(p(t), t) = y(p(t), t).$$

а) В този случай имаме нарастване както на търсенето, така и на предлагането, което води до сигурен растеж на равновесното количество и неопределеност при изменението на равновесната цена. Прилагаме условието за динамично равновесие:

$$q(t) = 100 - p(t) + 4t + 0,095p(t)t = -40 + p(t) - 0,17t + 0,03p(t)t.$$

От второто равенство получаваме

$$p(t) = \frac{140 + 4,17t}{2 + 0,0205t}.$$

Като заместим намерената функция $p(t)$ в единия от изразите за търсенето и предлагането (например в израза за предлагането), получаваме

$$q(t) = -(40 + 0,17t) + (1 + 0,03t) \frac{140 + 4,17t}{2 + 0,0205t} = \frac{60 + 7,21t + 0,1216t^2}{2 + 0,0205t}.$$

За да определим изменението на динамичната равновесна цена, диференцираме и получаваме

$$p'(t) = \frac{4,17(2 + 0,0205t) - (140 + 4,17t)0,0205}{(2 + 0,0205t)^2} = \frac{5,47}{(2 + 0,0205t)^2},$$

така че при тези конкретни данни равновесната цена ще нараства с времето. Прогнозните резултати за $t = 1, 2, 3, 5, 10$ нанасяме в таблица

t	$p(t)$	$q(t)$
0	70,00	30,00
1	71,35	33,32
2	72,68	36,70
3	73,98	40,13
5	76,50	47,13
10	82,40	65,42

Вижда се, че равновесната цена расте със забавяне, а равновесното количество – с ускорение.

б) В този случай имаме нарастване както на търсенето при спад на предлагането, което води до сигурно нарастване на равновесната цена и неопределеност при изменението на равновесното количество. Прилагаме условието за динамично равновесие:

$$q(t) = 100 - p(t) + 4t + 0,0095p(t)t = -40 + p(t) - 0,18t - 0,02p(t)t.$$

От второто равенство получаваме

$$p(t) = \frac{140 + 4,18t}{2 - 0,0295t}.$$

Като заместим намерената функция $p(t)$ в единия от изразите за търсенето и предлагането (например в израза за предлагането), получаваме

$$q(t) = -(40 + 0,18t) + (1 - 0,02t) \frac{140 + 4,18t}{2 - 0,0295t} = \frac{60 + 2,2t - 0,0783t^2}{2 - 0,0295t}.$$

За да определим характера на изменение на равновесното количество диференцираме и получаваме

$$\begin{aligned} q'(t) &= \frac{(2,2 - 0,1566t)(2 - 0,0295t) + (60 + 2,2t - 0,0783t^2)0,0295}{(2 - 0,0295t)^2} \\ &= \frac{6,17 - 0,3132t + 0,0023t^2}{(2 - 0,0295t)^2}. \end{aligned}$$

Установяваме, че корените на числителя са $t_1 \cong 23$ и $t_2 \cong 113$ и тъй като $q'(t) > 0$ за $(0, t_1) \cup (t_2, \infty)$ (знаменателят е положителен, то за интервала на прогнозиране $t \leq 10$ равновесното количество ще нараства.

Прогнозните резултати за $t = 1, 2, 3, 5, 10$ нанасяме в таблица

t	$p(t)$	$q(t)$
0	70,00	30,00
1	73,17	31,53
2	76,43	33,02
3	79,80	34,47
5	86,86	37,27
10	106,63	43,50

Вижда се, че равновесната цена расте с ускорение, а равновесното количество – със забавяне.

в) В този случай имаме неопределено изменение във времето както на търсенето, така и на предлагането. Прилагаме условието за динамично равновесие:

$$q(t) = 100 - p(t) + 4t + 0,0667p(t)t = -40 + p(t) - 2,23t + 0,03p(t)t.$$

От второто равенство получаваме

$$p(t) = \frac{140 + 0,23t}{2 - 0,0367t}.$$

Като заместим намерената функция $p(t)$ в единия от изразите за търсенето и предлагането (например в израза за предлагането), получаваме

$$q(t) = -(40 + 2,23t) + (1 + 0,03t) \frac{140 + 0,23t}{2 - 0,0367t} = \frac{60 + 1,438t + 0,0887t^2}{2 - 0,0367t}.$$

В този случай е очевидно, че с времето има растеж както на цената, така и на количеството – с нарастване на t числителите на изразите за $p(t)$ и $q(t)$ растат, а знаменателите – намаляват.

Прогнозните резултати за $t = 1, 2, 3, 5, 10$ нанасяме в таблица

t	$p(t)$	$q(t)$
0	70,00	30,00
1	71,43	31,34
2	72,91	32,82
3	74,44	34,45
5	77,70	38,21
10	87,14	50,88

Вижда се, че равновесните цена и количество растат с ускорение, като при количеството това е по-силно изразено.

г) В този случай имаме неопределено изменение във времето както на търсенето, така и на предлагането. Прилагаме условието за динамично равновесие:

$$q(t) = 100 - p(t) + 4t - 0,0722p(t)t = -40 + p(t) + 1,78t - 0,02p(t)t.$$

От второто равенство получаваме

$$p(t) = \frac{140 + 2,22t}{2 + 0,0522t}.$$

Като заместим намерената функция $p(t)$ в единия от изразите за търсенето и предлагането (например в израза за предлагането), получаваме

$$q(t) = -(40 - 1,78t) + (1 - 0,02t) \frac{140 + 2,22t}{2 + 0,0522t} = \frac{60 + 0,892t + 0,0485t^2}{2 + 0,0522t}.$$

В този случай, тъй като и числителите и знаменателите на изразите за $p(t)$ и $q(t)$ растат, за да преценим характеристиките на изменение на динамичните функции $p(t)$ и $q(t)$ ще трябва да пресметнем първите производни.

За функцията $p(t)$ ще имаме

$$p'(t) = \frac{2,22(2 + 0,0522t) - (140 + 2,22t)0,0522}{(2 + 0,0522t)^2} = -\frac{2,868}{(2 + 0,0205t)^2},$$

така че при тези конкретни данни равновесната цена ще намалява с времето.

Аналогично, за функцията $q(t)$ получаваме

$$\begin{aligned} q'(t) &= \frac{(0,892 - 0,097t)(2 + 0,0522t) - (60 + 0,892t + 0,0485t^2)0,0522}{(2 + 0,0522t)^2} \\ &= \frac{-1,348 + 0,194t + 0,0026t^2}{(2 + 0,0522t)^2}. \end{aligned}$$

Установяваме, че корените на числителя са $t_1 \cong -81$ и $t_2 \cong 6,4$ и тъй като $q'(t) < 0$ за $t = 1, 2, \dots, 6$ и равновесното количество ще намалява, а $q'(t) > 0$ за $t = 7, 8, \dots, 10$ и равновесното количество ще нараства.

Прогнозните резултати за $t = 1, 2, 3, 5, 10$ нанасяме в таблица

t	$p(t)$	$q(t)$
0	70,00	30,00
1	69,30	29,70
2	68,64	29,45
3	68,01	29,26
5	66,83	29,05
10	64,31	29,25

Вижда се, че равновесните цена намалява със забавен темп. Равновесното количество намаля до $t = 6$: $q(6) = 29,01$ и след това нараства от $t = 7$: $q(7) = 29,01$.

7. Някои специални динамични функции на търсене и предлагане

За линейната функция на търсене ще имаме

$$x = A - Bp = -B \left(p - \frac{A}{B} \right) = -k^D (p - p_0^D).$$

Горното равенство ни позволява да дефинираме една функция на търсене чрез две величини – коефициента на наклона на линията на търсене към ценовата ос k^D и граничната цена на търсене p_0^D . Фактически за пазарния капацитет ще имаме $q_0 = k^D p_0^D$.

Аналогично, за линейната функция на предлагане получаваме

$$y = -A + Bp = B \left(p - \frac{A}{B} \right) = k^S (p - p_0^S),$$

като k^S е коефициент на наклона на линията на предлагане към ценовата ос, а p_0^S – граничната цена на предлагане.

За да има частично пазарно равновесие между търсене и предлагане, зададени по този начин е достатъчно да е изпълнено условието $p_0^D > p_0^S$, тогава равновесието ще се определя от

$$q = -k^D (p - p_0^D) = k^S (p - p_0^S).$$

Решавайки горната система получаваме

$$p = \frac{k^D p_0^D + k^S p_0^S}{k^D + k^S}$$

за равновесната цена и

$$q = \frac{k^D k^S (p_0^D - p_0^S)}{k^D + k^S}.$$

Ако сега предположим, че k^D, p_0^D, k^S и p_0^S са функции на времето t , т.е. имаме $k^D = k^D(t), p_0^D = p_0^D(t), k^S = k^S(t), p_0^S = p_0^S(t)$, то на базата на горните формули ще можем да определим динамичните функции на равновесните цена и количество $p(t)$ и $q(t)$:

$$p(t) = \frac{k^D(t)p_0^D(t) + k^S(t)p_0^S(t)}{k^D(t) + k^S(t)}$$

$$q(t) = \frac{k^D(t)k^S(t)(p_0^D(t) - p_0^S(t))}{k^D(t) + k^S(t)}.$$

Най-лесно това може да бъде направено, ако са зададени линейните функции на търсене и предлагане в два последователни момента от времето $t = 0$ и $t = 1$, което ни позволява да възстановим динамичните функции $k^D = k^D(t), p_0^D = p_0^D(t), k^S = k^S(t), p_0^S = p_0^S(t)$ в два важни случая – ако предположим, че

а) те са линейни функции на времето (изменят се в аритметични прогресии);

б) те се изменят с постоянни темпове (в геометрични прогресии).

Пример 16. Да се определят динамичните функции на равновесните цена и количество $p = p(t)$, $q = q(t)$, при предположение, че функциите $k^D = k^D(t), p_0^D = p_0^D(t), k^S = k^S(t), p_0^S = p_0^S(t)$ се изменят по закона на аритметичната прогресия и данните са както в пример 15. Да се направи прогноза при $t = 1, 2, 3, 5, 10$.

Решение:

Тъй като

$$k^D = \frac{q_0}{p_0^D}$$

и за всички функции на търсене от пример 12 $q_0(0) = 100$ и $p_0^D(0) = 100$, то получаваме, че $k^D(0) = 1$.

а) Определяме $k^D(1)$ от условията за функцията на търсене в пример 12 в):

$$k^D(1) = \frac{q_0(1)}{p_0^D(1)} = \frac{104}{105} \cong 0,99.$$

Ако $k^D(0) = 1$ и $k^D(1) = 0,99$ са първите два члена на една аритметична прогресия, то общият член ще се задава с формулата

$$k^D(t) = 1 - 0,01t.$$

Аналогично, за общия член на аритметична прогресия, чиито първи два члена са $p_0^D(0) = 100$ и $p_0^D(1) = 105$ получаваме

$$p_0^D(t) = 100 + 5t.$$

За коефициентите, определящи функцията на предлагане ще имаме съответно

$$k^S(0) = 1 \text{ и } k^S(1) = 1,03 \Rightarrow k^S(t) = 1 + 0,03t$$

$$p_0^S(0) = 40 \text{ и } p_0^S(1) = 39 \Rightarrow p_0^S(t) = 40 - t.$$

Сега можем да заместим получените динамични функции $k^D = k^D(t)$, $p_0^D = p_0^D(t)$, $k^S = k^S(t)$, $p_0^S = p_0^S(t)$ във формулата за динамичната равновесна цена, получаваме

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{k^D(t)p_0^D(t) + k^S(t)p_0^S(t)}{k^D(t) + k^S(t)} = \frac{(1 - 0,01t)(100 + 5t) + (1 + 0,03t)(40 - t)}{(1 - 0,01t) + (1 + 0,03t)} \\ &= \frac{140 + 4,2t - 0,08t^2}{2 + 0,02t}. \end{aligned}$$

Заместваме същите функции и във формулата за динамичното равновесно количество:

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{k^D(t)k^S(t)(p_0^D(t) - p_0^S(t))}{k^D(t) + k^S(t)} \\ &= \frac{(1 - 0,01t)(1 + 0,03t)((100 + 5t) - (40 - t))}{(1 - 0,01t) + (1 + 0,03t)} \\ &= \frac{60 + 7,2t + 0,102t^2 - 0,0018t^3}{2 + 0,02t}. \end{aligned}$$

В този случай има неяснота относно поведението на $p(t)$ ($q(t)$ расте с времето). Тази неяснота можем да изясним с помощта на първата производна:

$$\begin{aligned} p'(t) &= \frac{(4,2 - 0,16t)(2 + 0,02t) - (140 + 4,2t - 0,08t^2)0,02}{(2 + 0,02t)^2} \\ &= \frac{5,6 - 0,32t - 0,0016t^2}{(2 + 0,02t)^2}. \end{aligned}$$

Установяваме, че корените на числителя са $t_1 \cong -216$ и $t_2 \cong 16$ и тъй като $p'(0) > 0$, то за интервала на прогнозиране $t \leq 10$ равновесната цена ще нараства.

Прогнозните резултати за $t = 1, 2, 3, 5, 10$ нанасяме в таблица

t	$p(t)$	$q(t)$
0	70,00	30,00
1	71,35	33,32
2	72,59	36,66
3	73,73	40,03
5	75,71	46,82
10	79,09	63,82

б) Тъй като началните условия за динамичното търсене са същите, както в а), то функциите $k^D(t) = 1 - 0,01t$ и $p_0^D(t) = 100 + 5t$.

За коефициентите, определящи функцията на предлагане ще имаме съответно

$$k^S(0) = 1 \text{ и } k^S(1) = 0,98 \Rightarrow k^S(t) = 1 - 0,02t$$

$$p_0^S(0) = 40 \text{ и } p_0^S(1) = 41 \Rightarrow p_0^S(t) = 40 + t.$$

Сега можем да заместим получените динамични функции $k^D = k^D(t), p_0^D = p_0^D(t), k^S = k^S(t), p_0^S = p_0^S(t)$ във формулата за динамичната равновесна цена, получаваме

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{k^D(t)p_0^D(t) + k^S(t)p_0^S(t)}{k^D(t) + k^S(t)} = \frac{(1 - 0,01t)(100 + 5t) + (1 - 0,02t)(40 + t)}{(1 - 0,01t) + (1 - 0,02t)} \\ &= \frac{140 + 4,2t - 0,07t^2}{2 - 0,03t}. \end{aligned}$$

Заместваме същите функции и във формулата за динамичното равновесно количество:

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{k^D(t)k^S(t)(p_0^D(t) - p_0^S(t))}{k^D(t) + k^S(t)} \\ &= \frac{(1 - 0,01t)(1 - 0,02t)((100 + 5t) - (40 + t))}{(1 - 0,01t) + (1 - 0,02t)} \\ &= \frac{60 + 2,2t - 0,108t^2 + 0,0008t^3}{2 - 0,03t}. \end{aligned}$$

Прогнозните резултати за $t = 1, 2, 3, 5, 10$ нанасяме в таблица

t	$p(t)$	$q(t)$
0	70,00	30,00
1	73,16	31,52
2	76,35	32,98
3	79,57	34,37
5	86,08	36,97
10	102,94	42,35

в) Определяме $k^D(1)$ от условията за функцията на търсене в пример 12 а):

$$k^D(1) = \frac{q_0(1)}{p_0^D(1)} = \frac{98}{105} \cong 0,933.$$

Ако $k^D(0) = 1$ и $k^D(1) = 0,933$ са първите два члена на една аритметична прогресия, то общият член ще се задава с формулата

$$k^D(t) = 1 - 0,067t.$$

Аналогично, за общия член на аритметична прогресия, чиито първи два члена са $p_0^D(0) = 100$ и $p_0^D(1) = 105$ получаваме

$$p_0^D(t) = 100 + 5t.$$

За коефициентите, определящи функцията на предлагане ще имаме съответно

$$k^S(0) = 1 \text{ и } k^S(1) = 0,98 \Rightarrow k^S(t) = 1 - 0,02t$$

$$p_0^S(0) = 40 \text{ и } p_0^S(1) = 41 \Rightarrow p_0^S(t) = 40 + t.$$

Сега можем да заместим получените динамични функции $k^D = k^D(t)$, $p_0^D = p_0^D(t)$, $k^S = k^S(t)$, $p_0^S = p_0^S(t)$ във формулата за динамичната равновесна цена, получаваме

$$p(t) = \frac{k^D(t)p_0^D(t) + k^S(t)p_0^S(t)}{k^D(t) + k^S(t)} = \frac{(1 - 0,067t)(100 + 5t) + (1 - 0,02t)(40 + t)}{(1 - 0,067t) + (1 - 0,02t)} \\ = \frac{140 - 1,5t - 0,355t^2}{2 + 0,087t}.$$

Заместваме същите функции и във формулата за динамичното равновесно количество:

$$\begin{aligned}
 q(t) &= \frac{k^D(t)k^S(t)(p_0^D(t) - p_0^S(t))}{k^D(t) + k^S(t)} \\
 &= \frac{(1 - 0,067t)(1 - 0,02t)((100 + 5t) - (40 + t))}{(1 - 0,067t) + (1 - 0,02t)} \\
 &= \frac{60 - 1,22t - 0,27t^2 + 0,0052t^3}{2 - 0,087t}.
 \end{aligned}$$

Прогнозните резултати за $t = 1, 2, 3, 5, 10$ нанасяме в таблица

t	$p(t)$	$q(t)$
0	70,00	30,00
1	72,21	30,59
2	74,25	30,95
3	76,08	31,08
5	78,99	30,54
10	79,20	23,01

В този случай има неяснота относно поведението и на двете динамични функции $p(t)$ и $q(t)$. Тази неяснота можем да изясним с помощта на първата производна, за $p'(t)$ получаваме

$$\begin{aligned}
 p'(t) &= \frac{(-1,5 - 0,71t)(2 - 0,087t) + (140 - 1,5t - 0,355t^2)0,087}{(2 - 0,087t)^2} \\
 &= \frac{9,18 - 1,42t + 0,031t^2}{(2 - 0,087t)^2}.
 \end{aligned}$$

Установяваме, че корените на числителя са $t_1 \cong 7,8$ и $t_2 \cong 38$ и тъй като $p'(0) > 0$, то за интервала $t \in (0, t_1)$ ще има нарастване на равновесната цена, а при $t > t_1$ – спад. Пресмятаме $p(7) = 80,59$ и $p(8) = 80,74$ и се уверяваме, че най-високата равновесна цена се постига при $t = 8$.

За производната $q'(t)$ получаваме

$$\begin{aligned}
 q'(t) &= \frac{(-1,22 - 0,54t + 0,0156t^2)(2 - 0,087t) + (60 - 1,22t - 0,27t^2 + 0,0052t^3)0,087}{(2 - 0,087t)^2} \\
 &= \frac{2,78 - 1,08t + 0,0547t^2 - 0,0009t^3}{(2 - 0,087t)^2}
 \end{aligned}$$

За да преценим знака на производната, трябва да нулираме числителя. Тъй като коефициента пред t^3 е много малък, то като го пренебрегнем получаваме квадратното уравнение

$$2,78 - 1,08t + 0,0547t^2 = 0$$

с корени $t_1 \cong 3$ и $t_2 \cong 17$ и тъй като $q'(0) > 0$, то за интервала $t \in (0, t_1)$ ще има нарастване на равновесното количество, а при $t > t_1$ – спад. Пресмятаме $q(4) = 30,95$ и се убеждаваме, че най-голямото количество се постига при $t = 3$.

г) Определяме $k^D(1)$ от условията за функцията на търсене в пример 12 а):

$$k^D(1) = \frac{q_0(1)}{p_0^D(1)} = \frac{104}{97} \cong 1,072.$$

Ако $k^D(0) = 1$ и $k^D(1) = 1,072$ са първите два члена на една аритметична прогресия, то общият член ще се задава с формулата

$$k^D(t) = 1 + 0,072t.$$

Аналогично, за общия член на аритметична прогресия, чиито първи два члена са $p_0^D(0) = 100$ и $p_0^D(1) = 97$ получаваме

$$p_0^D(t) = 100 - 3t.$$

За коефициентите, определящи функцията на предлагане ще имаме съответно

$$k^S(0) = 1 \text{ и } k^S(1) = 0,98 \Rightarrow k^S(t) = 1 - 0,02t$$

$$p_0^S(0) = 40 \text{ и } p_0^S(1) = 39 \Rightarrow p_0^S(t) = 40 - t.$$

Сега можем да заместим получените динамични функции $k^D = k^D(t)$, $p_0^D = p_0^D(t)$, $k^S = k^S(t)$, $p_0^S = p_0^S(t)$ във формулата за динамичната равновесна цена, получаваме

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{k^D(t)p_0^D(t) + k^S(t)p_0^S(t)}{k^D(t) + k^S(t)} = \frac{(1 + 0,072t)(100 - 3t) + (1 - 0,02t)(40 - t)}{(1 + 0,072t) + (1 - 0,02t)} \\ &= \frac{140 + 2,4t - 0,196t^2}{2 + 0,052t}. \end{aligned}$$

Заместваме същите функции и във формулата за динамичното равновесно количество:

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{k^D(t)k^S(t)(p_0^D(t) - p_0^S(t))}{k^D(t) + k^S(t)} \\ &= \frac{(1 + 0,072t)(1 - 0,02t)((100 - 3t) - (40 - t))}{(1 + 0,072t) + (1 - 0,02t)} \\ &= \frac{60 + 1,12t - 0,188t^2 + 0,0028t^3}{2 - 0,087t}. \end{aligned}$$

В този случай има неяснота относно поведението и на двете динамични функции $p(t)$ и $q(t)$. Тази неяснота можем да изясним с помощта на първата производна, за $p'(t)$ получаваме

$$p'(t) = \frac{(2,4 - 0,392t)(2 + 0,052t) - (140 + 2,4t - 0,196t^2)0,052}{(2 + 0,052t)^2} \\ = \frac{-2,48 - 0,684t - 0,0102t^2}{(2 + 0,052t)^2} < 0.$$

Това показва, че равновесната цена намалява с времето.

За производната $q'(t)$ получаваме

$$q'(t) = \frac{(1,12 - 0,376t + 0,0084t^2)(2 + 0,052t) - (60 + 1,12t - 0,188t^2 + 0,0028t^3)0,052}{(2 + 0,052t)^2} \\ = \frac{-0,88 - 0,752t - 0,01t^2 + 0,0003t^3}{(2 + 0,052t)^2}$$

Тъй като коефициента пред t^3 е много малък, то можем да го пренебрегнем и получаваме, че $q'(t) < 0$, т.е. равновесното количество също намалява с времето.

Прогнозните резултати за $t = 1, 2, 3, 5, 10$ нанасяме в таблица

t	$p(t)$	$q(t)$
0	70,00	30,00
1	69,30	29,70
2	68,45	29,23
3	67,46	28,64
5	65,09	27,10
10	57,30	21,90

Вижда се, че и при двете величини има спад с нарастващ темп.

Пример 17. Да се определят динамичните функции на равновесните цена и количество $p = p(t)$, $q = q(t)$, при предположение, че функциите $k^D = k^D(t)$, $p_0^D = p_0^D(t)$, $k^S = k^S(t)$, $p_0^S = p_0^S(t)$ се изменят по закона на геометричната прогресия и данните са както в пример 15. Да се направи прогноза при $t = 1, 2, 3, 5, 10$.

Решение:

Ако $z_0, z_1, z_2, \dots, z_t, \dots$ е динамична редица, подчинена на закона на геометричната прогресия, то очевидно за общия член ще имаме

$$z_t = \left(\frac{z_1}{z_0}\right)^t z_0$$

В решението на тази задача ще използваме модифициран вариант на формулата за равновесната цена

$$p(t) = \frac{k^D(t)p_0^D(t) + k^S(t)p_0^S(t)}{k^D(t) + k^S(t)} = \frac{p_0^D(t) + \frac{k^S(t)}{k^D(t)}p_0^S(t)}{1 + \frac{k^S(t)}{k^D(t)}}$$

а) В този случай имаме $k^D(0) = 1$ и $k^D(1) = 0,99$, следователно за динамичната функция $k^D(t)$ получаваме

$$k^D(t) = 0,99^t.$$

При $p_0^D(0) = 100$ и $p_0^D(1) = 105$ ще имаме

$$p_0^D(t) = 1,05^t \cdot 100.$$

Аналогично, за функцията на предлагане получаваме

$$k^S(0) = 1 \text{ и } k^S(1) = 1,03 \Rightarrow k^S(t) = 1,03^t$$

$$p_0^S(0) = 40 \text{ и } p_0^S(1) = 39 \Rightarrow p_0^S(t) = \left(\frac{39}{40}\right)^t 40 = 0,975^t \cdot 40.$$

Заместваме намерените динамични функции $k^D(t)$, $p_0^D(t)$, $k^S(t)$ и $p_0^S(t)$ във формулата за динамичната равновесна цена и получаваме

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{p_0^D(t) + \frac{k^S(t)}{k^D(t)}p_0^S(t)}{1 + \frac{k^S(t)}{k^D(t)}} = \frac{1,05^t \cdot 100 + \frac{1,03^t}{0,99^t} 0,975^t \cdot 40}{1 + \frac{1,03^t}{0,99^t}} \\ &= \frac{1,05^t 100 + \left(\frac{1,03 \cdot 0,975}{0,99}\right)^t 40}{1 + \left(\frac{1,03}{0,99}\right)^t} = \frac{1,05^t \cdot 100 + 1,014^t \cdot 40}{1 + 1,04^t}. \end{aligned}$$

По същия начин пресмятаме динамичното равновесно количество

$$\begin{aligned}
 q(t) &= \frac{k^D(t)k^S(t)(p_0^D(t) - p_0^S(t))}{k^D(t) + k^S(t)} = \frac{k^S(t)(p_0^D(t) - p_0^S(t))}{1 + \frac{k^S(t)}{k^D(t)}} \\
 &= \frac{1,03^t(1,05^t \cdot 100 - 0,975^t \cdot 40)}{1 + \frac{1,03^t}{0,99^t}} \\
 &= \frac{(1,03 \cdot 1,05)^t 100 - (1,03 \cdot 0,975)^t 40}{1 + \left(\frac{1,03}{0,99}\right)^t} = \frac{1,082^t \cdot 100 - 1,004^t \cdot 40}{1 + 1,04^t}.
 \end{aligned}$$

Прогнозните резултати за $t = 1, 2, 3, 5, 10$ нанасяме в таблица

t	$p(t)$	$q(t)$
0	70,00	30,00
1	71,35	33,35
2	72,72	36,87
3	74,11	40,56
5	76,93	48,49
10	84,22	71,89

б) В този случай функцията на търсене е същата, като в а), така че

$$k^D(t) = 0,99^t \text{ и } p_0^D(t) = 1,05^t \cdot 100.$$

За функцията на предлагане получаваме

$$k^S(0) = 1 \text{ и } k^S(1) = 0,98 \Rightarrow k^S(t) = 0,98^t$$

$$p_0^S(0) = 40 \text{ и } p_0^S(1) = 41 \Rightarrow p_0^S(t) = \left(\frac{41}{40}\right)^t 40 = 1,025^t \cdot 40.$$

Заместваме намерените динамични функции $k^D(t)$, $p_0^D(t)$, $k^S(t)$ и $p_0^S(t)$ във формулата за динамичната равновесна цена и получаваме

$$\begin{aligned}
 p(t) &= \frac{p_0^D(t) + \frac{k^S(t)}{k^D(t)} p_0^S(t)}{1 + \frac{k^S(t)}{k^D(t)}} = \frac{1,05^t \cdot 100 + \frac{0,98^t}{0,99^t} 1,025^t \cdot 40}{1 + \frac{0,98^t}{0,99^t}} \\
 &= \frac{1,05^t \cdot 100 + \left(\frac{0,98 \cdot 1,025}{0,99}\right)^t \cdot 40}{1 + \left(\frac{0,98}{0,99}\right)^t} = \frac{1,05^t \cdot 100 + 1,0146^t \cdot 40}{1 + 0,99^t}.
 \end{aligned}$$

По същия начин пресмятаме динамичното равновесно количество

$$\begin{aligned}
q(t) &= \frac{k^D(t)k^S(t)(p_0^D(t) - p_0^S(t))}{k^D(t) + k^S(t)} = \frac{k^S(t)(p_0^D(t) - p_0^S(t))}{1 + \frac{k^S(t)}{k^D(t)}} \\
&= \frac{0,98^t(1,05^t \cdot 100 - 1,025^t \cdot 40)}{1 + \frac{0,98^t}{0,99^t}} \\
&= \frac{(0,98 \cdot 1,05)^t 100 - (0,98 \cdot 1,025)^t 40}{1 + \left(\frac{0,98}{0,99}\right)^t} \\
&= \frac{1,029^t \cdot 100 - 1,0045^t \cdot 40}{1 + 0,99^t}.
\end{aligned}$$

Прогнозните резултати за $t = 1, 2, 3, 5, 10$ нанасяме в таблица

t	$p(t)$	$q(t)$
0	70,00	30,00
1	73,16	31,52
2	76,47	33,09
3	79,96	34,72
5	87,46	38,16
10	109,81	47,92

в) за коефициентите, определящи функцията на търсене ще имаме

$$k^D(0) = 1 \text{ и } k^D(1) = 0,933 \Rightarrow k^D(t) = 0,933^t.$$

$$p_0^D(0) = 100 \text{ и } p_0^D(1) = 105 \Rightarrow p_0^D(t) = 1,05^t \cdot 100.$$

За коефициентите, определящи функцията на предлагане ще имаме съответно

$$k^S(0) = 1 \text{ и } k^S(1) = 0,98 \Rightarrow k^S(t) = 0,98^t.$$

$$p_0^S(0) = 40 \text{ и } p_0^S(1) = 41 \Rightarrow p_0^S(t) = 1,025^t \cdot 40.$$

Сега можем да заместим получените динамични функции $k^D = k^D(t), p_0^D = p_0^D(t), k^S = k^S(t), p_0^S = p_0^S(t)$ във формулата за динамичната равновесна цена, получаваме

$$\begin{aligned}
p(t) &= \frac{p_0^D(t) + \frac{k^S(t)}{k^D(t)} p_0^S(t)}{1 + \frac{k^S(t)}{k^D(t)}} = \frac{1,05^t \cdot 100 + \frac{0,98^t}{0,933^t} 1,025^t \cdot 40}{1 + \frac{0,98^t}{0,933^t}} \\
&= \frac{1,05^t \cdot 100 + \left(\frac{0,98 \cdot 1,025}{0,933}\right)^t \cdot 40}{1 + \left(\frac{0,98}{0,933}\right)^t} = \frac{1,05^t \cdot 100 + 1,0766^t \cdot 40}{1 + 1,05^t}.
\end{aligned}$$

Аналогично, за динамичната функция на равновесно количество ще имаме

$$\begin{aligned}
 q(t) &= \frac{k^D(t)k^S(t)(p_0^D(t) - p_0^S(t))}{k^D(t) + k^S(t)} = \frac{k^S(t)(p_0^D(t) - p_0^S(t))}{1 + \frac{k^S(t)}{k^D(t)}} \\
 &= \frac{0,98^t(1,05^t \cdot 100 - 1,025^t \cdot 40)}{1 + \frac{0,98^t}{0,933^t}} \\
 &= \frac{(0,98 \cdot 1,05)^t 100 - (0,98 \cdot 1,025)^t 40}{1 + \left(\frac{0,98}{0,933}\right)^t} \\
 &= \frac{1,029^t \cdot 100 - 1,0045^t \cdot 40}{1 + 1,05^t}.
 \end{aligned}$$

Прогнозните резултати за $t = 1, 2, 3, 5, 10$ нанасяме в таблица

t	$p(t)$	$q(t)$
0	70,00	30,00
1	72,22	30,60
2	74,49	31,16
3	76,79	31,71
5	81,48	32,71
10	93,79	34,71

г) За коефициентите, определящи функцията на търсене ще имаме

$$k^D(0) = 1 \text{ и } k^D(1) = 1,072 \Rightarrow k^D(t) = 1,072^t.$$

$$p_0^D(0) = 100 \text{ и } p_0^D(1) = 97 \Rightarrow p_0^D(t) = 0,97^t \cdot 100.$$

За коефициентите, определящи функцията на предлагане ще имаме съответно

$$k^S(0) = 1 \text{ и } k^S(1) = 0,98 \Rightarrow k^S(t) = k^S(t) = 0,98^t.$$

$$p_0^S(0) = 40 \text{ и } p_0^S(1) = 39 \Rightarrow p_0^S(t) = k^S(t) = 0,975^t \cdot 40.$$

Сега можем да заместим получените динамични функции $k^D = k^D(t), p_0^D = p_0^D(t), k^S = k^S(t), p_0^S = p_0^S(t)$ във формулата за динамичната равновесна цена, получаваме

$$p(t) = \frac{p_0^D(t) + \frac{k^S(t)}{k^D(t)} p_0^S(t)}{1 + \frac{k^S(t)}{k^D(t)}} = \frac{0,97^t \cdot 100 + \frac{0,98^t}{1,072^t} 0,975^t \cdot 40}{1 + \frac{0,98^t}{1,072^t}}$$

$$= \frac{0,97^t \cdot 100 + \left(\frac{0,98 \cdot 0,975}{1,072}\right)^t \cdot 40}{1 + \left(\frac{0,98}{1,072}\right)^t} = \frac{0,97^t \cdot 100 + 0,891^t \cdot 40}{1 + 0,914^t}.$$

Аналогично, за динамичната функция на равновесно количество ще имаме

$$q(t) = \frac{k^D(t)k^S(t)(p_0^D(t) - p_0^S(t))}{k^D(t) + k^S(t)} = \frac{k^S(t)(p_0^D(t) - p_0^S(t))}{1 + \frac{k^S(t)}{k^D(t)}}$$

$$= \frac{0,98^t(0,97^t \cdot 100 - 0,975^t \cdot 40)}{1 + \frac{0,98^t}{1,072^t}}$$

$$= \frac{(0,98 \cdot 0,97)^t \cdot 100 - (0,98 \cdot 0,975)^t \cdot 40}{1 + \left(\frac{0,98}{1,072}\right)^t}$$

$$= \frac{0,9506^t \cdot 100 - 0,9555^t \cdot 40}{1 + 0,914^t}.$$

Прогнозните резултати за $t = 1, 2, 3, 5, 10$ нанасяме в таблица

t	$p(t)$	$q(t)$
0	70,00	30,00
1	69,30	29,70
2	68,57	29,34
3	67,80	28,92
5	66,14	27,94
10	61,38	24,89

II. НЕДИФЕРЕНЦИАЛНИ МОДЕЛИ В БИЗНЕС ДИНАМИКАТА

8. Размяна време-разходи (Time-cost trade off)

Много често в предприятието възниква следната ситуация: печалбата започва да спада поради ред причини като:

- Физическа амортизация на съществуващата техника и оборудване;
- Морална амортизация, неконкурентност на използваната в производството технология;
- Неадекватност на съществуващата организация на предприятието.

Тогава се налага кардинална промяна на техниката, технологията на производство или организацията на предприятието, например, внедряване на нова информационна система. Това обаче струва определени разходи. Тези разходи обикновено са много по-големи, ако това обновление се форсира във времето. Със скъсяването на развойния график на въвеждане на иновацията, следва да се изпълняват много задачи едновременно и така изпълнението на всяка задача бави изпълнението на другите задачи, има повече неуспешни стартове и неефективни дейности. Освен това, струпването на повече технически изпълнители при изпълнението на проекта води до понижаване на ефективността на всеки от тях. Ако се цели изпълнението на проекта за обновление в много кратък срок, вероятно ще се наложи и привличането на външни за фирмата, скъпо струващи специалисти. По такъв начин фирмата се изправя пред функцията на замяна на време с разходи и трябва да определи какъв е оптималния срок за въвеждане на иновацията, отчитайки и това, че с времето печалбата спада още повече. Отговорът зависи от зависимостта между брутната печалба (като функция на времето) и разходите по внедряване на иновацията (също зависещи от времето).

Нека $\Pi(t)$ е функцията на брутната печалба (без разходите по внедряване на иновацията) на фирмата. Предполага се, че това е намаляваща функция (в противен случай не се налага обновление), т.е.

$$\Pi'(t) < 0.$$

С $C(t)$ означаваме разходите по внедряване на иновацията. И за тази функция се предполага, че е намаляваща (поне до определен момент), т.е.

$$C'(t) < 0.$$

Тогава печалбата с приспаднати разходи по внедряване на обновлението ще бъде $\Pi(t) - C(t)$. Задачата за размяна време-разходи се свежда до следната оптимизационна задача

$$\Pi(t) - C(t) \rightarrow \max.$$

Условието от първи ред за тази задача за безусловен максимум предполага нулиране на първата производна:

$$\Pi'(t) - C'(t) = 0 \Leftrightarrow \Pi'(t) = C'(t).$$

От решаването на горното уравнение получаваме оптималното време за въвеждането на иновацията $t = t_0$, за което е изпълнено равенството $\Pi'(t_0) = C'(t_0)$. В този случай се казва, че оптималното време за въвеждане на иновацията трябва да изравни маргиналната печалба с маргиналия разход по въвеждане на иновацията. За да е изпълнено това, необходимо е за тази стойност $t = t_0$ да е валидно условието от втори ред

$$\Pi''(t_0) - C''(t_0) < 0 \Leftrightarrow \Pi''(t_0) < C''(t_0).$$

Пример 18. Дадена компания от химическата промишленост иска да въведе нова пластмаса, защото произвежданата от нея пластмаса става все по-неконкурентна на пазара и функцията на брутната печалба е

$$\Pi(t) = 480 - 20t.$$

Разходите по внедряване на производството на новата пластмаса са

$$C(t) = 500 - 100t + 5t^2.$$

(и в двата случая времето t се изменя в месеци). Да се определи за колко месеца трябва да бъде внедрено производството на новата пластмаса.

Решение:

Тъй като

$$C'(t) = -100 + 10t \Rightarrow C'(t) < 0 \text{ при } t < 10.$$

От друга страна, маргиналната печалба е

$$\Pi'(t) = -20.$$

От изравняването на маргиналната печалба с маргиналните разходи по внедряването на новата пластмаса в производство получаваме

$$\Pi'(t) = C'(t) \Leftrightarrow -20 = -100 + 10t \Leftrightarrow t = 8.$$

Условието от втори ред за тази задача е изпълнено за всяко t :

$$\Pi''(t) = 0 < 10 = C''(t).$$

Полученият максимум на брутната печалба с приспаднати разходи при внедряване за 8 месеца е

$$\Pi(8) - C(8) = (480 - 20 \cdot 8) - (500 - 100 \cdot 8 + 5 \cdot 8^2) = 320 - 20 = 300.$$

Забележка. В горният пример за функция на разходите по внедряването беше използвана функцията

$$C(t) = a - bt + ct^2,$$

където коефициентите a , b и c са положителни и $a \gg b \gg c$. Тъй като за първата производна имаме

$$C'(t) = -b + 2ct \Rightarrow C'(t) < 0 \text{ при } t < \frac{b}{2c},$$

то за тази функция е характерно, че от $t = 0$ (когато разходите възлизат на $C(0) = a$) до $t = \frac{b}{2c}$ разходите спадат, достигайки своя минимум

$$C\left(\frac{b}{2c}\right) = a - \frac{b^2}{4c},$$

а след това започват да нарастват.

Пример за функция на постоянно спадащи разходи е функцията

$$C(t) = C_0 + \frac{a}{t - t_0} \text{ при } t > t_0.$$

И наистина, за първата производна имаме

$$C'(t) = -\frac{a}{(t - t_0)^2} < 0, \text{ като}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = C_0,$$

т.е. правата $C = C_0$ играе ролята на хоризонтална асимптота за графиката на функцията $C = C(t)$, с други думи, минималните разходи $C = C_0$ никога не могат да бъдат достигнати.

Много често спадът на печалбата се счита за косвен разход (indirect cost) и се бележи с $IC(t)$. Тогава формулата за печалбата ще изглежда така

$$\Pi(t) = \Pi_0 - IC(t),$$

където Π_0 е достигнатото максимално ниво на печалба, преди тя да започне да спада (т.е. преди да се появи косвеният разход). Естествено, косвеният разход

расте с времето и той става причината за появата на прекия разход (direct cost) $DC(t)$, който всъщност е разхода по внедряването на иновацията, който преди означавахме с $C(t)$.

Тогава задачата за максимизиране на печалбата с приспаднати разходи по внедряване на иновацията ще се модифицира така

$$\Pi_0 - IC(t) - DC(t) = \Pi_0 - (IC(t) + DC(t)) \rightarrow \max,$$

което означава, че модифицираната оптимизационна задача е

$$IC(t) + DC(t) \rightarrow \min,$$

т.е., ще трябва да минимизираме сумата от преките и косвени разходи.

Условието от първи ред за тази оптимизационна задача е

$$IC'(t) + DC'(t) = 0.$$

Ако $t = t_0$ е решението на горното уравнение, то за него трябва да е изпълнено условието от втори ред

$$IC''(t) + DC''(t) > 0.$$

Пример 19. Очаква се, че печалбата ще започне да спада след 30 дена, като спадът ще бъде от 10000\$ дневно. Внедряването на новата технология може да започне най рано след 85 дни. Ако това стане за 15 дена (т.е. от $t = 85$ до $t = 100$) разходите за това ще възлизат на 1300000\$, а за 75 дена (от $t = 85$ до $t = 160$) – 700000\$. Предполага се, че функцията на преките разходи е от вида

$$DC(t) = C_0 + \frac{a}{t - t_0}.$$

Да се намери оптималното време за внедряване на новата технология.

Решение:

Ясно е, че косвените разходи се задават с формулата

$$IC(t) = -300 + 10t \quad \text{за } t \geq 30.$$

Сега трябва, използвайки данните да намерим функцията на преките разходи. Ясно е, че $t_0 = 85$, тогава за нея ще имаме

$$DC(t) = C_0 + \frac{a}{t - 85}$$

и тя ще бъде възстановена, ако намерим коефициентите C_0 и a . Заместваме данните за нея и получаваме

$$DC(100) = C_0 + \frac{a}{100 - 85} = 1300 \Rightarrow 15C_0 + a = 19500$$

$$DC(160) = C_0 + \frac{a}{160 - 85} = 700 \Rightarrow 75C_0 + a = 52500.$$

Изваждаме първото от второто уравнение и получаваме

$$60C_0 = 33000 \Rightarrow C_0 = 550.$$

Тогава за другия коефициент a намираме $a = 11250$ и окончателният вид на функцията на преките разходи ще бъде

$$DC(t) = 550 + \frac{11250}{t - 85}.$$

(Всички парични величини се измерват в хиляди \$).

Условието от първи ред за тази оптимизационна задача е

$$IC'(t) + DC'(t) = 0.$$

За съответните производни намираме

$$IC'(t) = 10,$$

$$DC'(t) = -\frac{11250}{(t - 85)^2}.$$

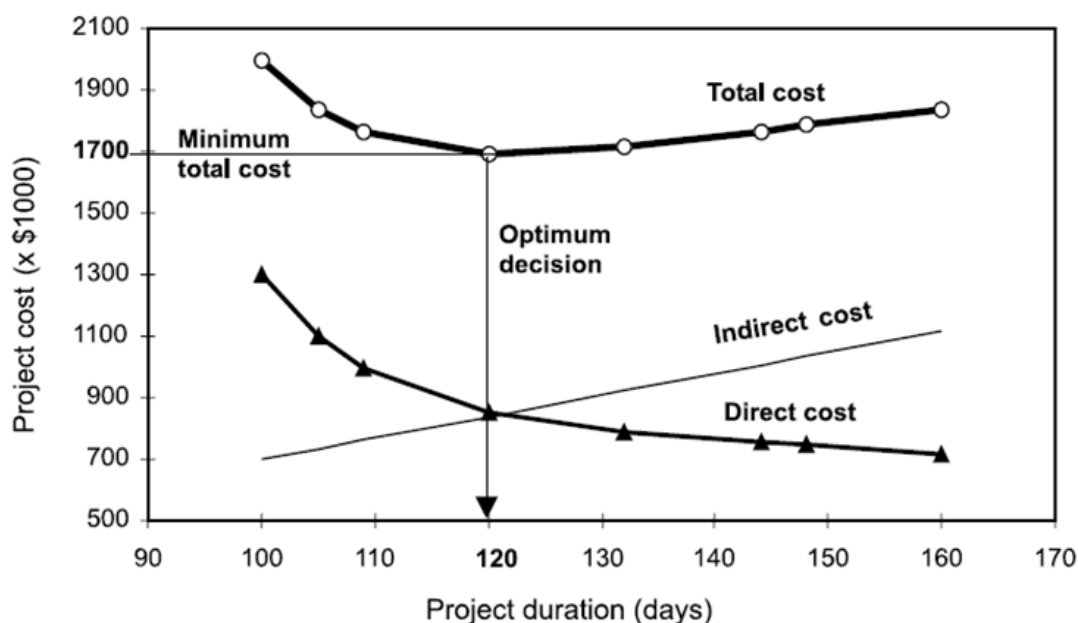
Като заместим в горното уравнение получаваме

$$\frac{11250}{(t - 85)^2} = 10 \Rightarrow (t - 85)^2 = 1125 \Rightarrow t - 85 = 35 \text{ и } t = 120.$$

Това е времето минимизиращо сумата от преките и косвени разходи. Тази минимална сума е

$$\{IC(t) + DC(t)\}_{min} = IC(120) + DC(120) = 900 + 900 = 1800.$$

На рис. 2 данните от примера са нанесени графично.



Source: Optimization of construction time - Cost trade-off analysis using genetic algorithms by Hegazy, and Ayed (1999). pp.682

Рис 2. Минимизиране на сумата от преките и косвени разходи - графика

9. Крива на опита (обучението) – разходен модел

Често в бизнеса (и не само там) възниква ситуация, при която трябва да се усвоява нова (за работника, служителя, фирмата) производствена операция. При такава ситуация прави впечатление, че производителността на труда нараства с всеки изминал период от време, но това нарастване става със забавящ се темп. Ако с $L(t)$ означим произведената продукция за t -тия период от време (час, ден, седмица), то ще имаме $L'(t) > 0$ но $L''(t) < 0$. Така например редът от производителности $L(1) = 10$, $L(2) = 16$, $L(3) = 21$, $L(4) = 25$ дава достоверна картина за изменението на производителността във времето. Да разгледаме общото произведено количество като функция на времето, с $x(t)$ означаваме произведеното количество за t -тия период от време и тези преди него. При такава бизнес ситуация се прави предположението, че финансирането на всеки период от времето е едно и също. Нека, например, това да са 100 парични единици. Нанасяме тези данни в таблица

t	$L(t)$	$x(t)$	$C(t)$	$AC(t)$
1	10	10	100	10,00
2	16	26	200	7,69
3	21	47	300	6,38
4	25	72	400	5,56

В последната колонка е нанесена себестойността (разхода за производството на единица продукция). Ако разглеждаме разходите като функция на количеството, т.е. $C = C(x)$, то прави впечатление, че и за тази функция е характерно, че е

растяща, но това нарастване се забавя с нарастването на количеството, т.е. $C'(x) > 0$ и $C''(x) < 0$. Най-прост математически пример за функция с такива свойства е степенната функция със степенен показател между 0 и 1., т.е. $C(x) = ax^\alpha, \alpha \in (0,1)$. Тогава за функцията на средните разходи ще имаме

$$AC(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{a}{x^{1-\alpha}}.$$

Възникват два вида предположения:

- производителността $L(t)$ може да нараства неограничено във времето или
- тя е ограничена от някаква пределна производителност L_{max} , т.е. $L(t) < L_{max}$ и даже $\lim_{t \rightarrow \infty} L(t) = L_{max}$.

Във вторият случай себестойността ще бъде ограничена отдолу от величината

$$c_0 = \frac{c}{L_{max}},$$

където c е разхода за един период от времето. Тъй като за себестойността е в сила неравенството

$$AC(x) > c_0,$$

тя може да бъде представена във вида

$$AC(x) = c_0 + \frac{a}{x^{1-\alpha}}$$

и следователно за функцията на разходите $C(x)$ ще имаме

$$C(x) = c_0x + ax^\alpha.$$

Пример 20. За организирането на един производствен цикъл във фирма (траещ една работна седмица) са необходими 6000 лв. Първата седмица са произведени 1000 изделия, а втората – 1560. Да се моделира функцията на разходите за производството на тези изделия и да се определи производството през третата седмица, при положение, че:

а) няма други ограничения;

б) смята се, че повече от 2400 изделия седмично не могат да се произведат.

И в двата случая да се определи количеството произведена продукция като функция на времето

$$x = x(t),$$

като x е количеството произведени изделия в хил. бр., а t са седмиците, през които това количество е произведено.

Решение:

а) При положение, че липсват допълнителни ограничения, предполагаме, че видът на разходната функция е

$$C(x) = ax^\alpha, \alpha \in (0,1),$$

като коефициентите на степенната функция a и α ще намерим от дадените условия. Това, че през първата седмица са произведени 1000 изделия означава, че $C(1) = 6$, защото разходите през първата седмица са 6000 лв. за 1000 произведени бройки. Тъй като $C(1) = a1^\alpha = 6$, то $a = 6$ и $C(x) = 6x^\alpha, \alpha \in (0,1)$. Остава да намерим α . Тъй като през втората седмица са произведени 1560 изделия, то през първата и втората седмица са произведени общо 2560 изделия, като за това са похарчени 12000 лв.; това означава, че $C(2,56) = 12$. Като заместим, получаваме $C(2,56) = 6 \cdot 2,56^\alpha = 12 \Rightarrow 2,56^\alpha = 2$. Логаритмувайки последното равенство, ще имаме

$$\alpha \ln 2,56 = \ln 2 \Rightarrow \alpha = \frac{\ln 2}{\ln 2,56} = \frac{0,69}{0,94} = 0,734.$$

Така окончателният вид на функцията на разходите е

$$C(x) = 6x^{0,734}.$$

За да отговорим на въпроса колко изделия са произведени през третата седмица, ще трябва да пресметнем производството през първите три седмици. Тъй като за седмица се правят по 6000 лв. разходи, то за първите три седмици разходите възлизат на 18000 лв., следователно ще имаме

$$C(x) = 6x^{0,734} = 18 \text{ или } x^{0,734} = 3.$$

Логаритмуваме последното равенство и получаваме

$$0,734 \ln x = \ln 3 \Rightarrow \ln x = \frac{\ln 3}{0,734} = \frac{1,1}{0,734} = 1,5.$$

След антилогаритмуване ще имаме

$$x = e^{1,5} = 4,48.$$

Доколкото през първите три седмици са произведени 4480 изделия, а през първите две – 2560, то през третата седмица произведените изделия са 1920.

Очевидно, разходите направени за t на брой седмици $6t$ хил. лв. Тогава връзката между x и t получаваме от уравнението

$$C(x) = 6x^{0,734} = 6t = C(t),$$

изравняващо разходите като функции на количеството и на времето.

Получаваме

$$x^{0,734} = t \Rightarrow x = t^{\frac{1}{0,734}} = t^{1,362}.$$

б) При предположението, че за седмица (с фиксирани разходи от 6000 лв.) могат да се произведат най-много 2400 изделия, би следвало да очакваме пределна себестойност от $6000/2400 = 2,5$ лв. за брой. Тогава функцията на средните разходи ще бъде

$$AC(x) = \frac{C(x)}{x} = 2,5 + \frac{a}{x^{1-\alpha}} \quad \text{за } \alpha \in (0,1),$$

следователно ще имаме функция на разходите от вида

$$C(x) = 2,5x + ax^{\alpha}.$$

Коефициентите на тази квазилинейно-степенна функция ще се определят от данните на задачата $C(1) = 6$ и $C(2,56) = 12$. От първото условие получаваме

$$C(1) = 2,5 \cdot 1 + a \cdot 1^{\alpha} = 6 \Rightarrow a = 3,5 \quad \text{и} \quad C(x) = 2,5x + 3,5x^{\alpha},$$

а от второто –

$$C(2,56) = 2,5 \cdot 2,56 + 3,5 \cdot 2,56^{\alpha} = 12 \Rightarrow 2,56^{\alpha} = \frac{12 - 6,4}{3,5} = 1,6.$$

Тъй като $1,6^2 = 2,56$, то $\alpha = 1/2$ и

$$C(x) = 2,5x + 3,5x^{0,5} = 2,5x + 3,5\sqrt{x}.$$

За да определим произведеното количество през третата седмица, ще трябва да решим уравнението

$$2,5x + 3,5\sqrt{x} = 18.$$

Ако положим $z = \sqrt{x}$ ще получим квадратното уравнение

$$2,5z^2 + 3,5z - 18 = 0$$

с положителен корен

$$z = \frac{-3,5 + \sqrt{3,5^2 + 180}}{5} = \frac{-3,5 + \sqrt{192,25}}{5} = \frac{-3,5 + 13,865}{5} = 2,073.$$

Тогава за количеството x получаваме

$$x = z^2 = 2,073^2 = 4,297.$$

С други думи, през първите три седмици са произведени 4297 изделия, а през първите две – 2560. Тогава през третата седмица ще се произведат $4297 - 2560 = 1737$ изделия.

Функционалната зависимост $x = x(t)$ на произведеното количество x (хил. бр.) за време t (седмици) определяме (както в а)), изравнявайки разходите като функции на количеството и на времето:

$$C(x) = 2,5x + 3,5\sqrt{x} = 6t = C(t).$$

Получаваме квадратното уравнение с неизвестно $\sqrt{x}$

$$2,5x + 3,5\sqrt{x} - 6t = 0,$$

откъдето

$$\sqrt{x} = -0,7 + \sqrt{0,49 + 2,4t}.$$

След вдигане на квадрат получаваме

$$x = 0,98 + 2,4t - 1,4\sqrt{0,49 + 2,4t}.$$

III. ДИФЕРЕНЦИАЛНИ МОДЕЛИ НА БИЗНЕС ДИНАМИКАТА

10. Крива на обучението – диференциален модел

Разглеждаме функцията на обучение $L(t)$. Тази функция може да описва, например, производителността на служителя. Нека L_{max} бъде максималната възможна стойност на $L(t)$. В много случаи е на лице правилото: скоростта на обучение е пропорционална на оставащия обем (все още не научен) материал. Математически, това е представено с уравнението:

$$\frac{dL}{dt} = k(L_{max} - L)$$

където k е коефициент на пропорционалност. Това диференциално уравнение е уравнение с разделени променливи и лесно може да бъде решено в общ вид:

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= k(L_{max} - L) \Rightarrow \frac{dL}{(L_{max} - L)} = k dt \\ \Rightarrow \int \frac{dL}{(L_{max} - L)} &= \int k dt \Rightarrow - \int \frac{d(L_{max} - L)}{(L_{max} - L)} = kt + \ln C \\ \Rightarrow -\ln(L_{max} - L) &= kt + \ln C \Rightarrow \ln(L_{max} - L) \\ &= -kt + \ln C \Rightarrow \ln(L_{max} - L) = \ln e^{-kt} + \ln C.\end{aligned}$$

След като се отървем от логаритмите, ние получаваме общото решение на диференциалното уравнение:

$$(L_{max} - L) = C e^{-kt}.$$

Константата C може да бъде определена от първоначалното състояние: $L(t = 0) = M$. Следователно, $C = L_{max} - M$, в резултат на това кривата на обучение е описана с формулата:

$$L(t) = L_{max} - (L_{max} - M)e^{-kt}$$

В последният израз параметъра M представлява първоначалното ниво на знания или умения. В най-простият случай, може да се предположи, че $M = 0$. Другият параметър k е "контрол" на скоростта на обучение. Криви на обучение за различните стойности на M и k са показани на Рис. 3 и Рис. 4.

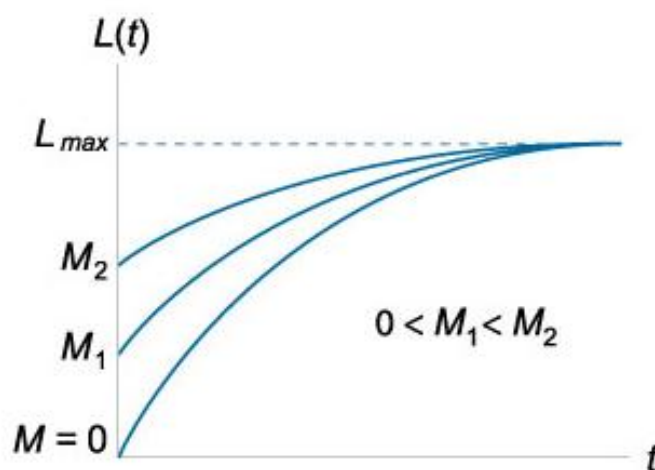


Рис. 3. Графики на криви на обучението при различни стойности на параметъра M

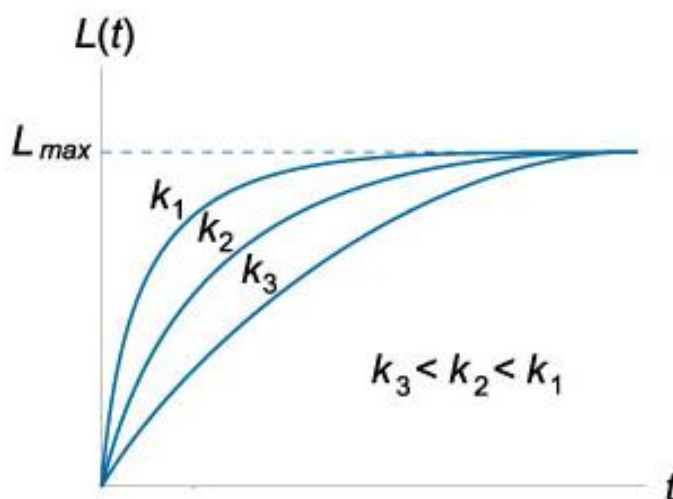


Рис. 4. Графики на кривата на обучението при различни стойности на параметъра k

Както може да се види, кривата на обучение L във всички случаи отбелязва по-бързо нарастване в началото на процеса, след това с доближаване до максималната стойност L_{max} се наблюдава намаляване скоростта на обучение. Разбира се, колкото по-голяма е стойността на параметъра k толкова по-стръмна е линията на обучението (в началото).

Да разгледаме дискретният вариант, т.е. диференчното уравнение, съответстващо на диференциалното уравнение, задаващо линията на опита. Тъй като

$$\frac{dL}{dt} \cong \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{L_{t+1} - L_t}{(t+1) - t} = L_{t+1} - L_t,$$

то получаваме

$$L_{t+1} - L_t = k(L_{max} - L_t) \text{ или } \frac{L_{t+1} - L_t}{L_{max} - L_t} = k = const.$$

Преобразуваме малко диференчното уравнение и получаваме

$$L_{t+1} = (1 - k)L_t + kL_{max}.$$

Такава числова редица се нарича геометрико-аритметична прогресия. В общият случай тя се задава по следния начин

$$a_{n+1} = qa_n + d.$$

За a_1 получаваме

$$a_1 = qa_0 + d.$$

За a_2 ще имаме

$$a_2 = q(qa_0 + d) + d = q^2a_0 + qd + d = q^2a_0 + (1 + q)d = q^2a_0 + \frac{1 - q^2}{1 - q}d.$$

Индукционното допускане е, че общият член на тази числова редица има вида

$$a_n = q^n a_0 + \frac{1 - q^n}{1 - q} d.$$

Тогава за a_{n+1} ще имаме

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= q \left(q^n a_0 + \frac{1 - q^n}{1 - q} d \right) + d = q^{n+1} a_0 + \frac{1 - q^n}{1 - q} qd + d \\ &= q^{n+1} a_0 + \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} q + 1 \right) d = q^{n+1} a_0 + \frac{q - q^{n+1} + 1 - q}{1 - q} d \\ &= q^{n+1} a_0 + \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} d. \end{aligned}$$

С това ние доказахме формулата по метода на математическата индукция.

В нашият случай ще имаме $a_0 = L_0 = M$, $q = 1 - k$ и $d = kL_{max}$. Заместваме в получената формула за общия член на геометрико-аритметичната прогресия и получаваме

$$\begin{aligned} L_t &= (1 - k)^t M + \frac{1 - (1 - k)^t}{1 - (1 - k)} kL_{max} = (1 - k)^t M + (1 - (1 - k)^t) L_{max} \\ &= L_{max} - (L_{max} - M)(1 - k)^t. \end{aligned}$$

Пример 21. Фармацевт в аптека трябва да провери 1000 рецепти на ден. Нов фармацевт след една седмица работа може да провери 100 рецепти на ден. Да се изчисли броят на рецептите, които фармацевта ще бъде в състояние да провери на ден след още една седмица работа.

Решение:

За простота, първоначалното ниво на умения, нека бъде нула: $M = 0$. Процесът на обучение може да бъде описан от следния закон:

$$L(t) = L_{max}(1 - e^{-kt}),$$

и тъй като по условие имаме $L_{max} = 1000$, то формулата за седмичната производителност на фармацевта ще бъде

$$L(t) = 1000(1 - e^{-kt}).$$

Ние ще определим параметъра k , знаейки, броят на рецептите, които са проверени след една седмица:

$$L(1) = 1000(1 - e^{-k}) = 100 \Rightarrow e^{-k} = 0,9$$

След логаритмуване получаваме

$$-k = \ln 0,9 \Rightarrow k = -\ln 0,9 = 0,105$$

Така намираме формулата за седмичната производителност на фармацевта

$$L(t) = 1000(1 - e^{-0,105t})$$

Сега може да се изчисли ефективността на новия фармацевт, две седмици след началото на работата:

$$L(2) = 1000(1 - e^{-0,105 \cdot 2}) = 1000(1 - e^{-0,21}) = 1000(1 - 0,811) = 189.$$

Пример 22. Да предположим, че новините, които се разпространяват в медиите са описани със закона на кривата на обучение. Какъв трябва да бъде процентът на "населението", което е наясно в самото начало с тази новина, така че през първата седмица нивото е 50%, а след четири седмици - 90%?

Решение.

Новината се разпространи по закона:

$$L(t) = L_{max} - (L_{max} - M)e^{-kt}$$

В горната формула времето t се изразява в седмици. Сега параметъра M представяме като rL_{max} , където r е в интервала $0 \leq r \leq 1$ и законът за разпространение добива вида

$$L(t) = L_{max}(1 - (1 - r)e^{-kt}).$$

Сега ще използваме данните за разпространение на новините – през първата седмица имаме $L(t) = 0,5L_{max}$ и през четвъртата - $L(4) = 0,9L_{max}$. Заместваме $t = 1$ и $t = 4$ във формулата за разпространение и получаваме

$$L(1) = L_{max}(1 - (1 - r)e^{-k}) = 0,5L_{max}$$

$$L(4) = L_{max}(1 - (1 - r)e^{-4k}) = 0,9L_{max}$$

Разделяме на L_{max} , ние получаваме система от уравнения с две неизвестни, които са r и k :

$$(1 - (1 - r)e^{-k}) = 0,5 \Rightarrow (1 - r)e^{-k} = 0,5$$

$$(1 - (1 - r)e^{-4k}) = 0,9 \Rightarrow (1 - r)e^{-4k} = 0,1$$

Логаритмуваме двете страни на всяко едно от уравненията:

$$\ln(1 - r) - k = \ln 0,5 = -0,693$$

$$\ln(1 - r) - 4k = \ln 0,1 = -2,303$$

Умножавам първото уравнение с (-4) и след това събирам двете уравнения:

$$\begin{aligned} -3 \ln(1 - r) &= 4 \cdot 0,693 - 2,303 = 2,772 - 2,303 = 0,469 \Rightarrow \ln(1 - r) \\ &= -0,156 \Rightarrow (1 - r) = e^{-0,156} = 0,856 \Rightarrow r = 0,144 \end{aligned}$$

В този случай, първоначалното ниво на разпространение на новината, трябва да бъде:

$$L(t) = M = rL_{max} = 0,144L_{max} = 14,4\% \text{от } L_{max}.$$

Пример 23. Да се определи функцията на производителност $L(t)$ и да се пресметне количеството, произведено през третата седмица при условията на пример 1 б).

Решение:

Допускаме, че производителността се задава чрез формулата

$$L(t) = L_{max} - (L_{max} - M)e^{-kt},$$

където $L(t)$ е количеството, произведено през t -тата седмица в хил. бр. тъй като (по условие) $L_{max} = 2,4$, то ще имаме

$$L(t) = 2,4 - (2,4 - M)e^{-kt}$$

Използваме, че през първата седмица (т.е. при $t = 1$) са произведени 1 хил. бр.:

$$L(1) = 2,4 - (2,4 - M)e^{-k} = 1,$$

а през втората седмица – 1,56 хил. бр.:

$$L(2) = 2,4 - (2,4 - M)e^{-2k} = 1,56.$$

Така получаваме следната система от две уравнения за неизвестните коефициенти M и k

$$(2,4 - M)e^{-k} = 1,4$$

$$(2,4 - M)e^{-2k} = 0,84.$$

Логаритмуваме горните уравнения и получаваме

$$\ln(2,4 - M) - k = \ln 1,4 = 0,336$$

$$\ln(2,4 - M) - 2k = \ln 0,84 = -0,174.$$

То извадим второто уравнение от първото, получаваме коефициента $k = 0,51$.
Тогава от първото уравнение ще имаме

$$\ln(2,4 - M) = 0,336 + 0,51 = 0,846.$$

След антилогаритмуване получаваме

$$(2,4 - M) = e^{0,846} = 2,33.$$

Тогава, окончателният вид на линията на опита ще бъде

$$L(t) = 2,4 - 2,33e^{-0,51t}.$$

За да получим количеството, произведено през третата седмица, необходимо е да намерим

$$L(3) = 2,4 - (2,33)e^{-1,53} = 1,895.$$

Забележка 1. При двата подхода – разходния и диференциалния се получават два различни резултата за количеството, което ще се произведе през третата седмица – 1737 бр. чрез разходния подход и 1895 бр. чрез диференциалния. Това е така, защото процесът на придобиване на опит (обучението) е моделиран чрез два съвсем различни модела. В случая, при втория модел, опитът се придобива по-бързо. Това е и фундаменталната разлика между чистата математика и приложната: в приложната отговорът не е еднозначен – резултатът зависи не само от първоначалните данни, но и от избрания математически модел.

Забележка 2. Не бива да се бърка количеството $x(t)$ от разходния модел с количеството $L(t)$ от диференциалния. Първото е количеството, произведено до момент t включително, а второто – количеството, произведено в момент t . Връзката между двете величини е

$$L(t) = x(t) - x(t - 1).$$

Разбира се, горното равенство е вярно, ако величините $x(t)$ и $L(t)$ са получени от един и същ модел.

11. Крива на обучението – обобщен диференциален модел

Законът за производителността в процеса на обучение (натрупване на опит) беше изведен на база на предположението, че скоростта на нарастване на производителността е пропорционална във всеки момент на разликата между пределната производителност и достигнатата към този момент производителност.

Но не всички емпирични данни от реални процеси на обучение потвърждават това предположение. Така например, ако $L(1) = 10$, $L(2) = 16$, $L(3) = 21$, $L(4) = 25$ (примера в началото на параграф 9), то би следвало да е изпълнено

$$\frac{L(2) - L(1)}{L_{max} - L(1)} = \frac{L(3) - L(2)}{L_{max} - L(2)} = \frac{L(4) - L(3)}{L_{max} - L(3)},$$

Като всички тези пропорции трябва да са равни на k . От първото равенство ще имаме

$$\frac{16 - 10}{L_{max} - 10} = \frac{21 - 16}{L_{max} - 16} \Rightarrow 6(L_{max} - 16) = 5(L_{max} - 10) \Rightarrow L_{max} = 46 \text{ и}$$

$$\frac{L(2) - L(1)}{L_{max} - L(1)} = \frac{L(3) - L(2)}{L_{max} - L(2)} = \frac{1}{6}.$$

От второто равенство ще имаме

$$\frac{21 - 16}{L_{max} - 16} = \frac{25 - 21}{L_{max} - 21} \Rightarrow 5(L_{max} - 21) = 4(L_{max} - 16) \Rightarrow L_{max} = 41 \text{ и}$$

$$\frac{L(3) - L(2)}{L_{max} - L(2)} = \frac{L(4) - L(3)}{L_{max} - L(3)} = \frac{1}{5}.$$

Т.е. получават се две различни стойности за параметрите на модела L_{max} и k .

Това ни навежда на мисълта да направим обобщение на диференциалния модел на кривата на обучение, при който коефициентът на пропорция k може да се променя с времето, т.е. $k = k(t)$. Тогава диференциалното уравнение на модела ще бъде

$$\frac{dL}{dt} = k(t)(L_{max} - L),$$

По същият начин получаваме общото решение

$$(L_{max} - L) = Ce^{-kt}.$$

$$L(t) = L_{max} - Ce^{-\int k(t)dt}.$$

Пример 24. Предполага се, че за модел на обучение с променлива пропорция $k(t)$ е от вида

$$k(t) = \frac{k_0}{at + 1},$$

като $k(0) = 0,2$ и $k(50) = 0,1$. Ако допуснем, че $L(0) = M = 0$, то след колко време ще бъде достигната 90% от максималната производителност? А 99%?

Решение:

Да намерим общото решение за $L(t)$ при функция $k(t)$ от такъв вид. Първо ще трябва да интегрираме $k(t)$:

$$\int k(t)dt = \int \frac{k_0}{at + 1} dt = \frac{k_0}{a} \int \frac{d(at + 1)}{at + 1} = \frac{k_0}{a} \ln(at + 1).$$

Тогава за $e^{-\int k(t)dt}$ ще имаме

$$e^{-\int k(t)dt} = e^{-\frac{k_0}{a} \ln(at+1)} = \frac{1}{(at + 1)^{\frac{k_0}{a}}}.$$

Окончателно, за общото решение получаваме

$$L(t) = L_{max} - \frac{C}{(at + 1)^{\frac{k_0}{a}}}.$$

Заместваме $t = 0$ за да определим интеграционната константа C :

$$L(0) = L_{max} - \frac{C}{(a \cdot 0 + 1)^{\frac{k_0}{a}}} = L_{max} - C \Rightarrow C = L_{max} - L(0) = L_{max} - M.$$

Така получаваме окончателният вид на функцията на производителност $L(t)$ при променлив коефициент от такъв вид:

$$L(t) = L_{max} - \frac{L_{max} - M}{(at + 1)^{\frac{k_0}{a}}}.$$

Тъй като допускаме, че $M = 0$, то за $L(t)$ получаваме

$$L(t) = L_{max} \left(1 - \frac{1}{(at + 1)^{\frac{k_0}{a}}} \right).$$

Остава да определим параметрите k_0 и a на функцията $k(t)$ от условията на задачата. Ще имаме

$$k(0) = \frac{k_0}{a \cdot 0 + 1} = 0,2 \Rightarrow k_0 = 0,2 \text{ и } k(t) = \frac{0,2}{at + 1}$$

$$k(50) = \frac{0,2}{a \cdot 50 + 1} = 0,1 \Rightarrow a \cdot 50 + 1 = 2 \Rightarrow a = 0,02 \text{ и } k(t) = \frac{0,2}{0,02t + 1}.$$

Тогава за $L(t)$ получаваме

$$L(t) = L_{max} \left(1 - \frac{1}{(0,02t + 1)^{10}} \right).$$

Да направим сравнение с крива на обучение, получаваща се при $k = \text{const} = 0,2$ (в разглеждания случай $k(t)$ е намаляваща функция). Съгласно изводите от предишния параграф за $k = 0,2$ ($M = 0$ и произволно L_{max} ще имаме

$$L(t) = L_{max}(1 - e^{-0,2t}).$$

Сравнението между двата модела правим за $t = 1, 2, 3, 5, 10$ и $L_{max} = 100$.

t	$L(t)$ при $k = \text{const} = 0,2$	$L(t)$ при $k(t) = \frac{0,2}{0,02t+1}$
1	18,13	17,97
2	32,97	32,44
3	45,12	44,16
5	63,21	61,45
10	86,47	83,85

Вижда се, че при разглеждания модел има забавяне (увеличаващо се с течение на времето) в сравнение със стандартния модел.

Сега трябва да отговорим на въпроса: при каква стойност на t ще бъде достигната 90% от максималната производителност? Ще имаме

$$L_{\max} \left(1 - \frac{1}{(0,02t + 1)^{10}} \right) = 0,9L_{\max} \Rightarrow \frac{1}{(0,02t + 1)^{10}} = 0,1 \Rightarrow (0,02t + 1)^{10} = 10 \Rightarrow 0,02t + 1 = 10^{0,1} \cong 1,26 \text{ и } t \cong 13.$$

И наистина

$$L(13) = L_{\max} \left(1 - \frac{1}{(0,02 \cdot 13 + 1)^{10}} \right) = 0,9008L_{\max}.$$

Аналогични са пресмятанията за 99% от $L_{\max}$:

$$L_{\max} \left(1 - \frac{1}{(0,02t + 1)^{10}} \right) = 0,99L_{\max} \Rightarrow \frac{1}{(0,02t + 1)^{10}} = 0,01 \Rightarrow (0,02t + 1)^{10} = 100 \Rightarrow 0,02t + 1 = 100^{0,1} \cong 1,58 \text{ и } t \cong 29.$$

$$L(29) = L_{\max} \left(1 - \frac{1}{(0,02 \cdot 29 + 1)^{10}} \right) = 0,9897L_{\max}.$$



Рис. 5. Иновациите преди и сега - стоманения плуг на Джон Дир (XIX в.) и Apple Watch

12. Базов модел на разпространение на иновациите

През последните 50-60 години са създадени много математически модели на разпространение на иновативни продукти на пазарите.

Да започнем с очевидната схема (показана на рис. 6) за разпространение на един иновативен продукт сред потребителите.

Нека

$T(t)$ – общ брой на индивидите на пазара в момент от времето t ;

$M(t)$ – общ брой на потенциалните потребители на иновативния продукт в момент от времето t ;

$N(t)$ – общ брой действителни потребители на иновативния продукт в момент от времето t ;

$m(t) = \frac{dM(t)}{dt}$ – брой на индивидите, преминаващи за безкрайно малко време dt от необхванатия пазар към потенциалния;

$n(t) = \frac{dN(t)}{dt}$ – **скорост на разпространение на иновацията** – брой на индивидите, преминаващи за безкрайно малко време dt от потенциалния пазар към действителния.



Рис. 6. Преместване на потребителите между сегментите на иновационния пазар

В теорията на иновациите под **дифузия на иновацията** се разбира решението

$$N = N(t)$$

на задачата на Коши за обикновеното диференциално уравнение

$$\frac{dN(t)}{dt} = f(t, N(t))$$

с начално условие

$$N(0) = N_0 ,$$

където $N(t)$ е обема на разпространение на иновацията към момент от времето t (който е равен или на броя продадени екземпляра от иновативния продукт или на броя на действителните потребители); $f(t, N(t))$ е функцията, определяща вида

на дифузионната крива, отразяваща предположението за начина на разпространение на иновацията. Предполагаме, че $N(t)$ е непрекъснато диференцируема функция, а $f(t, N(t))$ – унимодална.

Забележка. Унимодална функция в интервала $[a, b]$ се нарича функция, притежаваща единствен минимум (максимум) x^* в този интервал и монотонна от двете страни на x^*

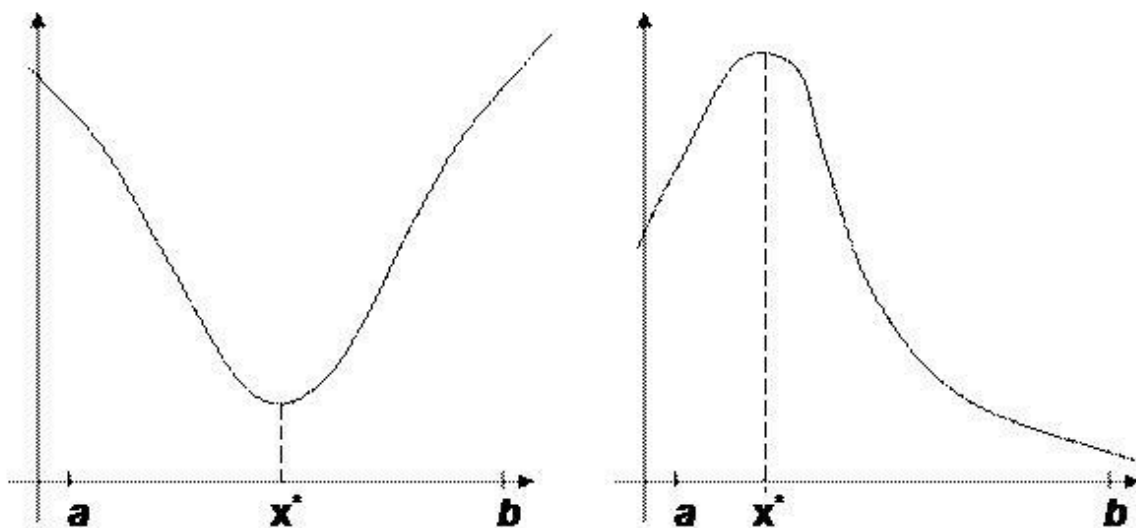


Рис. 7. Графики на унимодални функции

Базовият модел на разпространение на иновациите е

$$\frac{dN(t)}{dt} = g(t, N(t))(M - N(t))$$

В този модел се предполага, че общият брой на потенциални потребители M е постоянен във времето, а скоростта на разпространение на иновацията $\frac{dN(t)}{dt}$ във всеки момент е пропорционална на обема на потенциалния пазар $M - N(t)$. При увеличаването на действителните потребители на продукта $N(t)$ намаляват потенциалните потребители $M - N(t)$, което забавя скоростта на разпространение на иновацията.

13. Фундаментален модел на разпространение на иновациите

Общ фундаментален модел. Функцията $g(t, N(t))$ в израза на базовия модел се нарича **скорост на адаптацията** и обикновено се интерпретира като вероятност потенциалния потребител да закупи иновативния продукт в момент t . Във фундаменталния модел тази функция се приема за линейна функция на $N(t)$:

$$g(t, N(t)) = a + bN(t)$$

Като заместим скоростта на адаптация в базовия модел получаваме

$$\frac{dN(t)}{dt} = (a + bN(t))(M - N(t)),$$

което е обикновеното диференциално уравнение на фундаменталния модел за разпространение на иновациите. Параметрите a и b в този модел отразяват съответно външните и вътрешни влияния върху скоростта на адаптация. Смята се, че събираемостта $a(M - N)$, отразяващо външното влияние върху потребителя е вследствие от маркетингови и рекламни компании (внушаващи на потребителя, че иновативния продукт му е необходим). Вътрешното влияние, на което съответства събираемостта $bN(M - N)$ е резултат от комуникацията между действителните и потенциалните потребители (в резултат от което на потенциалните потребители се предава информация за иновативния продукт).

Модели с външно влияние. Първите модели за разпространение на иновациите са се основавали на предположението, че скоростта на разпространение на иновацията $\frac{dN(t)}{dt}$ зависи само от потенциалната възможност за насищане на пазара, с други думи, само от броя на потенциалните потребители $M - N(t)$, като коефициентът a отразява иновационността на потребителите (тяхната нужда от иновацията) и ефективността на стратегията на продавача (маркетинг и реклама). Такива модели на външно влияние са частни случаи на фундаменталния модел на разпространяване на иновациите и се получават при $b = 0$. Съответното обикновено диференциално уравнение добива вида

$$\frac{dN(t)}{dt} = a(M - N(t))$$

Разделяйки променливите получаваме

$$\int \frac{dN}{M - N} = \int a dt$$

След интегриране получаваме общото решение

$$\ln(M - N) = -at + C,$$

откъдето

$$N(t) = M - Ce^{-at}$$

Чрез началното условие на задачата на Коши $N(0) = N_0$ определяме $C = M - N_0$. Така окончателно ще имаме

$$N(t) = M - (M - N_0)e^{-at}$$

Графиката на решението на модела $N = N(t)$ е дадена на рис. 8

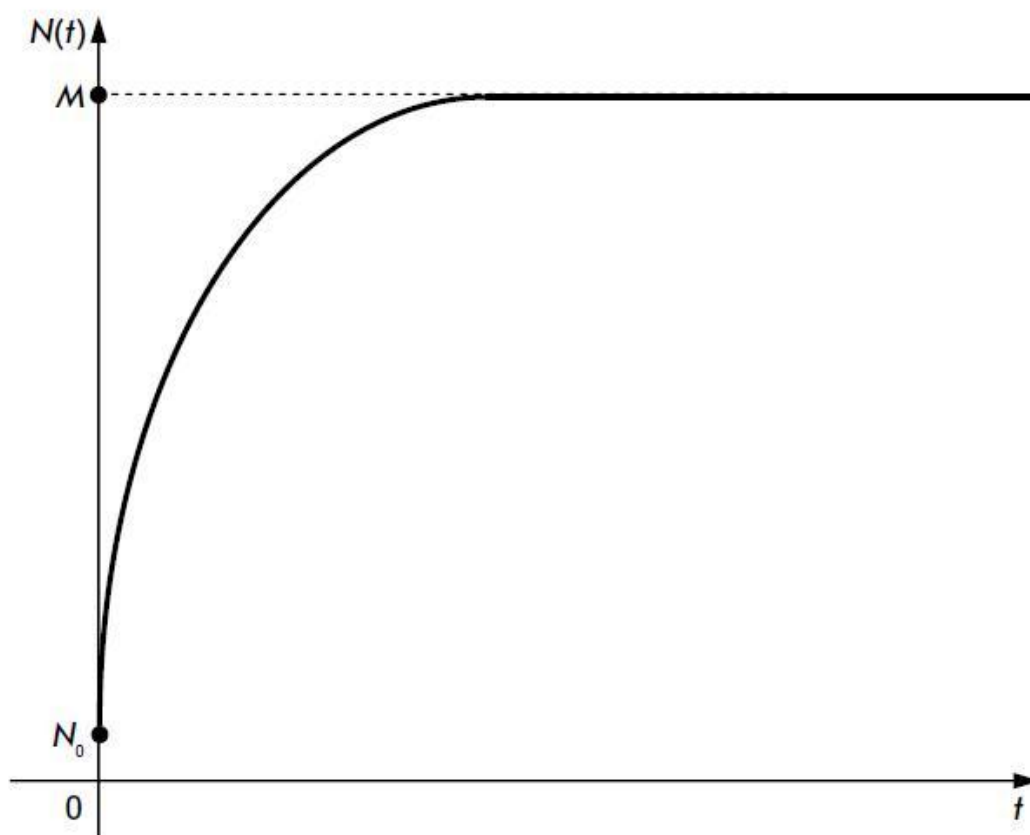


Рис. 8. Ръст на действителния пазар при модела с външно влияние

За първи път в теорията на иновациите функции от този вид се появяват през 1957 г. в изследванията на Дж. Колман, Е. Катц и Х. Менцел, които с тяхна помощ описват разпространението на новите лекарства сред лекарите. През 1960 г. Л. Форт и Дж. Уудлок прогнозираят чрез такива функции търсенето на някои видове стоки, а Р. Хемблин, Б. Джакобсън и Дж. Милър през 1973 г. построяват модел за разпространяване на стачките и политическите демонстрации.

Основните ограничения на модела с външно влияние се състои в това, че този модел не отчита взаимодействието между действителните и потенциалните потребители на иновациите. Поради това този модел може да се използва при описване процеса на разпространение на иновации, които са по-прости и с малка социална значимост.

Забележка. Моделът на разпространение на иновациите с външно влияние съвпада с модела на придобиване на опит (обучение).

Модел с вътрешно влияние. Те представляват частен случай на фундаменталния модел на разпространение на иновациите при $a = 0$. Тогава диференциалното уравнение на модела изглежда така

$$\frac{dN(t)}{dt} = bN(t)(M - N(t))$$

Основното предположение, лежащо в основата на този модел се състои в допускането, че скоростта на разпространение на иновацията $\frac{dN(t)}{dt}$ е пропорционална както на потенциалната възможност за насищане на пазара $M - N(t)$, така и на достигнатото ниво на разпространение $N(t)$. При това се предполага, че външните влияния (нуждата на индивида от иновацията и общата информация за продукта, получена не по пътя на лични контакти между действителните и потенциалните потребители) не оказва въздействие върху процеса на вземане на решение за придобиване на продукта. В този модел се счита, че потребителят взема това решение само под въздействие на контактите си с действителни ползватели на иновативния продукт. Коефициентът b в горното уравнение е пропорционален на вероятността за среща на двама случайно избрани индивиди, единият от които ползва продукта, а другия – още не.

Горното диференциално уравнение е с разделени променливи. Ще имаме

$$\int \frac{dN}{N(M - N)} = \int b dt$$

За да интегрираме лявата страна представяме изрза $\frac{1}{N(M - N)}$ като сума на две дроби с неопределени коефициенти

$$\frac{1}{N(M - N)} = \frac{A}{N} + \frac{B}{M - N} = \frac{AM - AN + BN}{N(M - N)}$$

От системата $B - A = 0, AM = 1$ намираме $A = B = \frac{1}{M}$ и

$$\frac{1}{N(M - N)} = \frac{1}{M} \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{M - N} \right)$$

Тогава ще имаме

$$\int \frac{dN}{N} + \int \frac{dN}{M - N} = bMt + C$$

или

$$\ln \frac{N}{M-N} = bMt + C \Leftrightarrow \frac{N}{M-N} = C_1 e^{bMt}$$

за $C_1 = e^C$. Окончателно получаваме

$$N(t) = \frac{C_1 M e^{bMt}}{1 + C_1 e^{bMt}} = \frac{M}{1 + C_2 e^{-bMt}}$$

за $C_2 = C_1^{-1}$. Това е общото решение на диференциалното уравнение. За определяне на интеграционната константа C_2 ще използваме началното условие на задачата на Коши. Имаме

$$N(0) = \frac{M}{1 + C_2} = N_0 \Rightarrow C_2 = \frac{M - N_0}{N_0}$$

Така достигаме до окончателното решение на модела

$$N(t) = \frac{M}{1 + \frac{M - N_0}{N_0} e^{-bMt}}$$

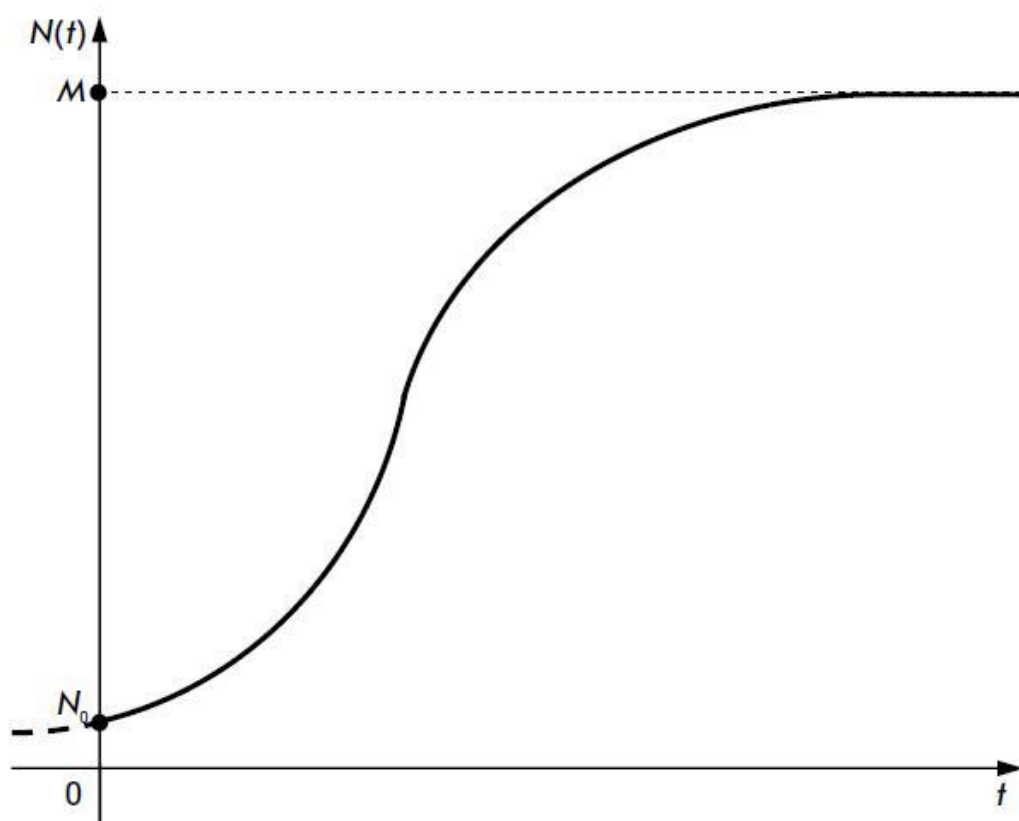


Рис. 9. Ръст на действителния пазар при модел с вътрешно влияние

Функцията $N = N(t)$, описваща разпространението на иновация в случай на вътрешно влияние се нарича *S- линия* или **логистична линия**. Нейната графика е представена на рис. 9.

Първите модели с вътрешно влияние са предложени от Ц. Грилехес през 1957 г. и Е. Менсфийлд през 1961 г. Ц. Грилехес е изучавал разпространението на хибридни сортове царевица сред фермерите от различни региони на САЩ, а Е. Менсфийлд – факторите, влияещи на разпространението на иновациите в различни отрасли на икономиката на САЩ.

Модели със смесено влияние. Най-разпространените модели на разпространение на иновациите са тези, при които и двата коефициента a и b са различни от нула – моделите със смесено влияние. Те се основават на така наречената **комуникационна хипотеза**, формулирана от П. Лазарсфелд, Б. Берелсон и Х. Гаудет през 1948 г. Тази хипотеза се състои в предположението, че съобщенията за продукта в средствата за масово осведомяване не оказват влияние върху основната част от потенциалните потребители, но достигат до определена малка група, която след това влияе на останалите потребители.

Моделите със смесено влияние предполагат, че на процеса на вземане на решение за придобиване на иновативния продукт оказват влияние и външните фактори – нуждата на индивида от продукта и съобщенията за него в средствата за масово осведомяване и вътрешните фактори – личните контакти на действителните ползватели с потенциалните.

Диференциалното уравнение на модела със смесено влияние е

$$\frac{dN(t)}{dt} = (a + bN(t))(M - N(t))$$

или

$$\int \frac{dN}{(a + bN)(M - N)} = \int dt$$

Разлагаме дробта $\frac{1}{(a+bN)(M-N)}$ по метода на неопределените коефициенти. Имаме

$$\frac{1}{(a + bN)(M - N)} = \frac{A}{a + bN} + \frac{B}{M - N} = \frac{AM - AN + Ba + BbN}{N(M - N)}$$

От системата $Bb - A = 0, AM + Ba = 1$ получаваме $B = \frac{1}{a+bM}$ и $A = \frac{b}{a+bM}$. Тогава ще имаме

$$\frac{1}{a+bM} \left(\int \frac{bdN}{a+bN} + \int \frac{dN}{M-N} \right) = t + C$$

или

$$\frac{1}{a+bM} \ln \frac{a+bN}{M-N} = t + C$$

откъдето

$$\frac{a+bN}{M-N} = e^{(a+bM)(t+C)}$$

Окончателно получаваме общото решение на модела

$$N(t) = \frac{M - ae^{-(a+bM)(t+C)}}{1 + be^{-(a+bM)(t+C)}}$$

Сега остава да определим интеграционната константа C от началното условие на задачата на Коши. Имаме

$$N(0) = \frac{M - ae^{-(a+bM)C}}{1 + be^{-(a+bM)C}} = N_0 \Rightarrow e^{-(a+bM)C} = \frac{M - N_0}{a + bN_0}$$

Така достигаме до окончателното решение на модела

$$N(t) = \frac{M - a \frac{M - N_0}{a + bN_0} e^{-(a+bM)t}}{1 + b \frac{M - N_0}{a + bN_0} e^{-(a+bM)t}}$$

или

$$N(t) = \frac{M(a + bN_0) - a(M - N_0)e^{-(a+bM)t}}{(a + bN_0) + b(M - N_0)e^{-(a+bM)t}}$$

И наистина, при $b = 0$ получаваме

$$N(t) = M - (M - N_0)e^{-at}$$

което е решението на модела с външно влияние, а при $a = 0$

$$N(t) = \frac{M}{1 + \frac{M - N_0}{N_0} e^{-bMt}}$$

решението на модела с вътрешно влияние.

Графиката на функцията $N = N(t)$, показана на рис. 10 се нарича **обобщена логистична линия**.

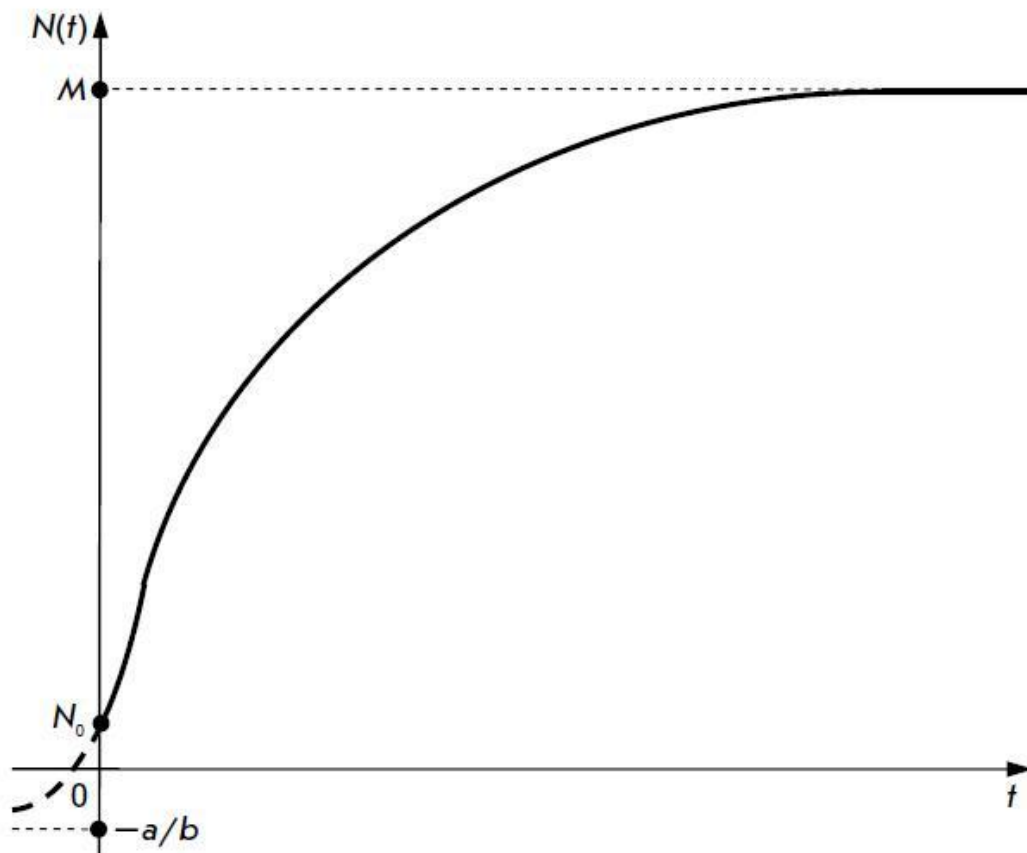


Рис. 10. Ръст на действителния пазар при модел със смесено влияние

Пример 25. Нека търговска компания реализира някакъв иновативен продукт, за който в момента $t = 0$ от реклама в средствата за масова информация са получили информация 1% от общия брой M на потенциалните потребители. По-нататък тази информация се разпространява чрез общуване на хората помежду си. Известно е, че разпространение на информацията се извършва съобразно модела с вътрешно влияние, като $bM = 0,2$. За какво време броя на потребителите, осведомени за продукта ще достигнат до 80% от общия брой M на потенциалните потребители.

Решение:

Тъй като модела на разпространение на иновациите е с вътрешно влияние, то трябва да използваме формулата

$$N(t) = \frac{M}{1 + \frac{M - N_0}{N_0} e^{-bMt}}$$

Тъй като $N_0 = 1\%$ от $M = 0,01M$ и $bM = 0,2$, то като заместим във формулата, получаваме

$$N(t) = \frac{M}{1 + \frac{M - 0,01M}{0,01M} e^{-0,2t}} = \frac{M}{1 + 99e^{-0,2t}}.$$

За да определим времето, след което ще бъдат обхванати 80% от общия брой M на потенциалните потребители, трябва да решим уравнението

$$\frac{M}{1 + 99e^{-0,2t}} = 0,8M.$$

Последователно получаваме

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + 99e^{-0,2t}} = 0,8 &\Rightarrow 1 + 99e^{-0,2t} = 1,25 \Rightarrow 99e^{-0,2t} = 0,25 \Rightarrow e^{-0,2t} = \frac{0,25}{99} \\ &= 0,002525 \Rightarrow -0,2t = \ln 0,002525 \cong -5,98 \text{ и } t \cong 30. \end{aligned}$$

И наистина, при $t = 30$ ще имаме

$$N(30) = \frac{M}{1 + 99e^{-0,2 \cdot 30}} = \frac{M}{1 + 99e^{-6}} = 0,797M$$

Пример 26. Известно е, че разпространението на даден иновативен продукт се реализира посредством закона

$$N'(t) = 0,4N(t) - 0,002N^2(t),$$

като при $t = 0$ са обхванати 10% от потенциалните потребители на продукта. След колко единици време скоростта на нарастване на потребителите от растяща ще стане намаляваща.

Решение:

Преобразуваме закона за разпространение

$$N'(t) = 0,4N(t) - 0,002N^2(t) = 0,002N(t)(200 - N(t)),$$

следователно става дума за разпространение на иновациите с вътрешно влияние с параметри $b = 0,002$, $M = 200$ и $N_0 = 10\%$ от $M = 0,1 \cdot 200 = 20$. Заместваме тези стойности във формулата

$$N(t) = \frac{M}{1 + \frac{M - N_0}{N_0} e^{-bMt}}$$

и получаваме

$$N(t) = \frac{200}{1 + \frac{200 - 20}{20} e^{-0,002 \cdot 200t}} = \frac{200}{1 + 9e^{-0,4t}}.$$

Диференцираме закона за разпространение повторно и получаваме

$$N''(t) = 0,4N'(t) - 0,004N(t)N'(t) = 0,004N'(t)(100 - N(t))$$

Тъй като $N'(t) > 0$, то ще следва че

при $100 - N(t) > 0$, т. е. $N(t) < 100$ ще имаме $N''(t) > 0$

при $100 - N(t) < 0$, т. е. $N(t) > 100$ ще имаме $N''(t) < 0$.

Тогава, при $N(t) = 100$ ще става смяна на характера на разпространение - скоростта на нарастване на потребителите от растяща ще стане намаляваща. Така задачата се свежда до намирането на това t , при което се получава $N(t) = 100$. Ще имаме

$$\begin{aligned} N(t) = \frac{200}{1 + 9e^{-0,4t}} = 100 &\Rightarrow 1 + 9e^{-0,4t} = 2 \Rightarrow 9e^{-0,4t} = 1 \Rightarrow e^{-0,4t} = \frac{1}{9} \\ &\Rightarrow -0,4t = \ln \frac{1}{9} \cong -2,2 \Rightarrow t = 5,5. \end{aligned}$$

Пример 27. За процеса на разпространение на иновация със смесено влияние е известно, че:

- при $t = 0$ са обхванати 10% от потенциалните потребители;
- при $t = 4,2$ са обхванати 30% от потенциалните потребители и тогава скоростта на нарастване на потребителите от растяща става намаляваща.

Да се намери закона за разпространение на продукта. След колко единици време половината от потенциалните потребители са станали действителни.

Решение:

Първото условие означава, че $N_0 = 10\%$ от $M = 0,1M$.

След като разпространението на иновацията е със смесено влияние, то закона за разпространение на иновацията ще бъде

$$N'(t) = (a + bN(t))(M - N(t)).$$

Диференцираме повторно и получаваме

$$\begin{aligned} N''(t) &= bN'(t)(M - N(t)) - (a + bN(t))N'(t) \\ &= N'(t)(bM - bN(t) - a - bN(t)) = N'(t)(bM - a - 2bN(t)). \end{aligned}$$

Знакът на втората производна $N''(t)$ ще се определя от знака на израза $bM - a - 2bN(t)$, тъй като $N'(t) > 0$. Този израз се нулира при

$$N(t) = \frac{bM - a}{2b} = \frac{M}{2} - \frac{a}{2b},$$

значи тогава ще става смяната на характера на разпространение. От друга страна, в условието на задачата е дадено, че характера на разпространение се сменя при $N(t) = 0,3M$. Приравняваме двете условия и получаваме

$$\frac{M}{2} - \frac{a}{2b} = 0,3M \Rightarrow \frac{a}{2b} = 0,2M \Rightarrow a = 0,4bM.$$

Във формулата за $N(t)$ при разпространение на иновацията със смесено влияние

$$N(t) = \frac{M - a \frac{M - N_0}{a + bN_0} e^{-(a+bM)t}}{1 + b \frac{M - N_0}{a + bN_0} e^{-(a+bM)t}}$$

заместваме N_0 с $0,1M$ и a с $0,4bM$ и получаваме

$$N(t) = \frac{M - 0,4bM \frac{M - 0,1M}{0,4bM + 0,1bM} e^{-(0,4bM+bM)t}}{1 + b \frac{M - 0,1M}{0,4bM + 0,1bM} e^{-(0,4bM+bM)t}} = \frac{1 - 0,72e^{-1,4bMt}}{1 + 1,8e^{-1,4bMt}} M.$$

Сега ще използваме, че $N(4,2) = 0,3M$. Това води до уравнението

$$\begin{aligned} \frac{1 - 0,72e^{-5,88bM}}{1 + 1,8e^{-5,88bM}} &= 0,3 \Rightarrow 1 - 0,72e^{-5,88bM} = 0,3 + 0,54e^{-5,88bM} \Rightarrow 0,7 \\ &= 1,26e^{-5,88bM} \Rightarrow e^{-5,88bM} = \frac{0,7}{1,26} = \frac{5}{9} \Rightarrow -5,88bM \\ &= \ln \frac{5}{9} \cong -0,588 \Rightarrow bM = 0,1. \end{aligned}$$

Така окончателно, за $N(t)$ получаваме

$$N(t) = \frac{1 - 0,72e^{-0,14t}}{1 + 1,8e^{-0,14t}} M.$$

За да намерим кога иновацията, разпространявайки се по този начин, ще обхване 50% от потенциалните потребители, ще трябва да решим уравнението $N(t) = 0,5M$ или

$$\begin{aligned}
N(t) &= \frac{1 - 0,72e^{-0,14t}}{1 + 1,8e^{-0,14t}} M = 0,5M \Rightarrow 1 - 0,72e^{-0,14t} = 0,5 + 0,9e^{-0,14t} \Rightarrow 0,5 \\
&= 1,62e^{-0,14t} \Rightarrow e^{-0,14t} = \frac{0,5}{1,62} = \frac{25}{81} \Rightarrow -0,14t \\
&= \ln \frac{25}{81} \cong -1,176 \Rightarrow t \cong 8,4.
\end{aligned}$$

Пример 28. Предполага се, че дадена иновативна стока се разпространява само чрез вътрешно влияние. Известни са $N_0 = 10$, $N_1 = N(1) = 13,5$ и $N_2 = N(2) = 18$. Да се намерят параметрите на модела и формулата на разпространението, да се пресметнат N_1 , N_2 (за проверка), N_3 , N_5 и N_{10} .

Решение:

Тъй като $N_0 = 10$, то като заместим във формулата за $N(t)$ в случай на разпространение с вътрешно влияние, получаваме

$$N(t) = \frac{M}{1 + \frac{M - 10}{10} e^{-bMt}} = \frac{M}{1 + (0,1M - 1)e^{-bMt}}.$$

Като използваме, че $N(1) = 13,5$ и $N(2) = 18$ ще имаме

$$N(1) = \frac{M}{1 + (0,1M - 1)e^{-bM}} = 13,5 \Rightarrow M = 13,5 + (1,35M - 13,5)e^{-bM}$$

$$N(2) = \frac{M}{1 + (0,1M - 1)e^{-2bM}} = 18 \Rightarrow M = 18 + (1,8M - 18)e^{-2bM}.$$

Тъй като $e^{-2bM} = (e^{-bM})^2$, то горната система може да се разглежда като система от две уравнения за две неизвестни. След полагането $M = x$ и $e^{-bM} = y$, тази система добива вида

$$x - 13,5 - 1,35xy + 13,5y = 0$$

$$x - 18 - 1,8xy^2 + 18y^2 = 0$$

От всяко от тези уравнения изразяваме неизвестното x :

$$x = \frac{13,5(1 - y)}{1 - 1,35y} \quad \text{и} \quad x = \frac{18(1 - y^2)}{1 - 1,8y^2}.$$

Така можем да получим уравнение за y :

$$\frac{13,5(1 - y)}{1 - 1,35y} = \frac{18(1 - y^2)}{1 - 1,8y^2} = \frac{18(1 - y)(1 + y)}{1 - 1,8y^2}$$

или

$$\frac{13,5}{1 - 1,35y} = \frac{18(1 + y)}{1 - 1,8y^2}.$$

След преобразуване на горното уравнение, получаваме следното уравнение за неизвестното y :

$$13,5 - 24,3y^2 = 18 - 24,3y + 18y - 24,3y^2 \Rightarrow 6,3y = 4,5 \Rightarrow y = \frac{5}{7}.$$

Като заместим в един от изразите за x намираме

$$x = \frac{13,5(1 - y)}{1 - 1,35y} = \frac{13,5\left(1 - \frac{5}{7}\right)}{1 - 1,35 \cdot \frac{5}{7}} = \frac{\frac{27}{7}}{\frac{7 - 1,35 \cdot 5}{7}} = \frac{27}{0,25} = 108.$$

Тъй като сме положили $M = x$, то получаваме $M = 108$. За $e^{-bM} = y$ ще имаме

$$e^{-bM} = \frac{5}{7} \Rightarrow bM = -\ln \frac{5}{7} = \ln \frac{7}{5} = \ln 1,4 \cong 0,336.$$

Като заместим намерените параметри в израза за $N(t)$ получаваме окончателно

$$N(t) = \frac{M}{1 + (0,1M - 1)e^{-bMt}} = \frac{108}{1 + 9,8e^{-0,336t}}.$$

Като използваме горната формула, можем да извършим пресмятанията

$$N(1) = \frac{108}{1 + 9,8e^{-0,336}} = \frac{108}{1 + 9,8 \cdot 0,7146} = \frac{108}{8} = 13,5$$

$$N(2) = \frac{108}{1 + 9,8e^{-0,672}} = \frac{108}{1 + 9,8 \cdot 0,5107} = \frac{108}{6} = 18$$

$$N(3) = \frac{108}{1 + 9,8e^{-1,008}} = \frac{108}{1 + 9,8 \cdot 0,3649} = \frac{108}{4,576} = 23,6$$

$$N(5) = \frac{108}{1 + 9,8e^{-1,68}} = \frac{108}{1 + 9,8 \cdot 0,1864} = \frac{108}{2,826} = 38,2$$

$$N(10) = \frac{108}{1 + 9,8e^{-3,36}} = \frac{108}{1 + 9,8 \cdot 0,0347} = \frac{108}{1,34} = 80,6$$

14. Демографски модели

Ръстът на населението (в света, в една отделна държава или регион) е динамичен процес, който ефективно може да се опише с подходящи диференциални (или диференчни) уравнения. По-долу ще разгледаме някои основни математически демографски модели, предложени от икономисти, математици и физици.

Малтусиански модел на демографския ръст

Най-простият модел за ръста на населението е бил предложен още през 1798 год. от британския учен Томас Робърт Малтус. Този модел се основава на предположението, че ръстът на населението е експоненциален и се подчинява на диференциалното уравнение

$$\frac{dN}{dt} = aN,$$

където a е константа на постоянния ръст (малтусиански параметър). Това фактически е диференциалното уравнение за постоянния ръст на Бернули. Неговото решение е експоненциалната функция:

$$N(t) = N_0 e^{at},$$

където N_0 съответства на първоначалния размер на популацията.

Даденият прост модел, изглежда, описва коректно началната фаза на растежа на населението. Обаче точността на експоненциалния модел в последствие се влошава, в резултат на насищане и други нелинейни ефекти (рис. 11).



Рис. 11. Разлика между реалния и експоненциален ръст след първоначалната фаза

Логистичен модел

Този клас демографски модели за пръв път е бил предложен от френския математик Пиер Франсоа Фергелстом през 1838 год. Този модел се нарича логистичен и е еквивалентен на модела на разпространение на иновациите с вътрешно влияние, следователно, диференциалното уравнение, което го описва е

$$\frac{dN}{dt} = bN(M - N) = bMN \left(1 - \frac{N}{M}\right) = aN \left(1 - \frac{N}{M}\right),$$

където с M е означен максималния възможен размер на популацията. Ако представим диференциалното уравнение във вида

$$\frac{dN}{dt} = aN - \frac{aN^2}{M},$$

то първото събираемо съответства на ръста на населението (малтусианско събираемо), а второто ограничава този ръст поради отсъствието на ресурси или други причини. Както знаем (от предишния параграф) логистичното уравнение разполага с точно решение

$$N(t) = \frac{M}{1 + \frac{M - N_0}{N_0} e^{-at}}$$

Графиките на логистичните линии изглеждат много добре. На рис. 12 са показани няколко такива линии при различни стойности на N_0 , а на рис. 13 е показано как формата на логистичната линия зависи от постоянния ръст a .

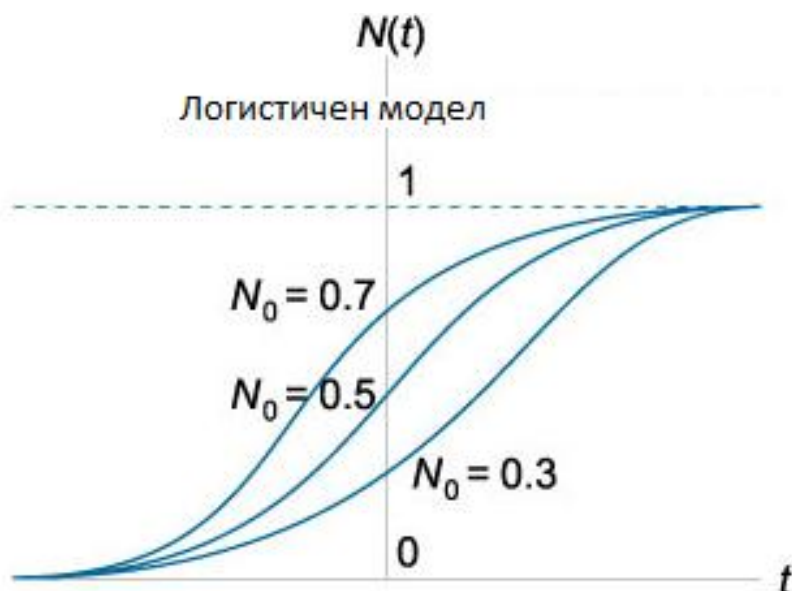


Рис. 12. Логистични линии при различни стойности на началния размер на популацията

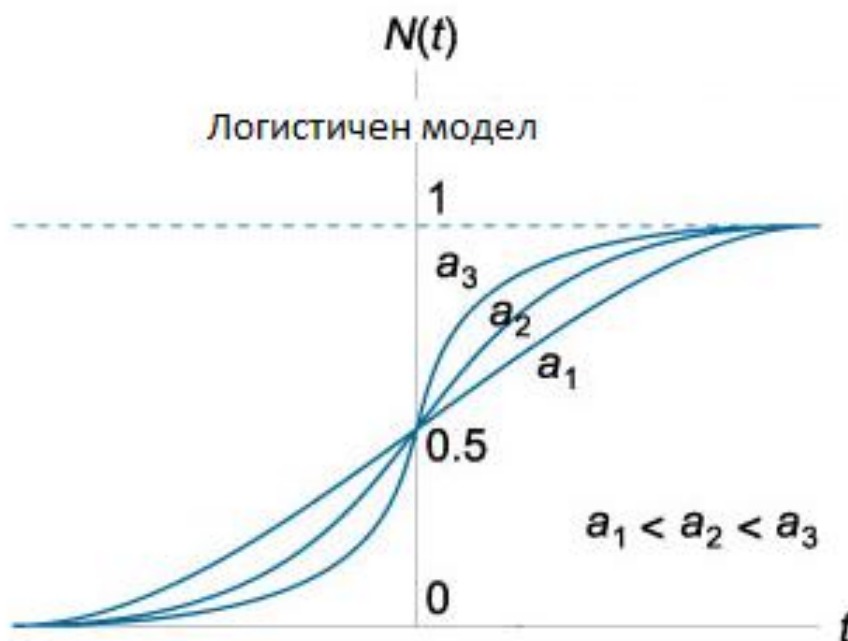


Рис. 13. Логистични линии при различни стойности на коефициента на постоянен ръст

Хиперболични модели

Разгледаните по-горе модели са полезни при анализа на демографските процеси в рамките на столетия. Ако, обаче, се разглежда изменението на световното население в рамките на няколко хилядолетия, то добре се вижда, че основният прираст на населението на Земята от 2 до 7 милиарда души се е случил през последните 70 години (оценката за световното население 3000 год. пр. н. е. – 25 млн., 2000 год. пр. н. е. – 35 млн., 1000 год. пр. н. е. – 50 млн., 1 год. от н. е. – 200 млн., 1000 год. – 400 млн., 1500 год. – 460 млн., 1700 год. – 680 млн., 1800 год. – 980 млн., 1900 год. – 1650 млн., 1950 год. – 2525 млн., 2000 год. – 6125 млн., 2016 год. – 7400 млн.). Такъв тип зависимост напомня за хиперболична линия. Прост хиперболичен модел за ръста на земното население е бил предложен от няколко изследователи (Форстер (1960), Хостер (1975), Шкловски (1980)), описващи световното население с израза

$$N(t) = \frac{C}{T_1 - t} = \frac{200}{2025 - t} (\text{млрд}).$$

По тази формула получаваме 1700 год. – 615 млн., 1800 год. – 890 млн., 1900 год. – 1600 млн., 1950 год. – 2667 млн., 2000 год. – 8 млрд. от тази формула следва, че населението на Земята се стреми към безкрайност с приближаването на 2025 год.

Реална динамика на световното население, обаче, демонстрира така наречения демографски преход, който следва след фазата на демографския взрив. Това ново

състояние се характеризира с понижаване на раждаемостта и смъртността едновременно. Такъв преход вече е обхванал всички развити страни. В резултат на този демографски преход, нарастването на населението се прекратява и то даже може да намалява. Глобалното население на Земята встъпва в демографския преход в началото на ХХІ век.

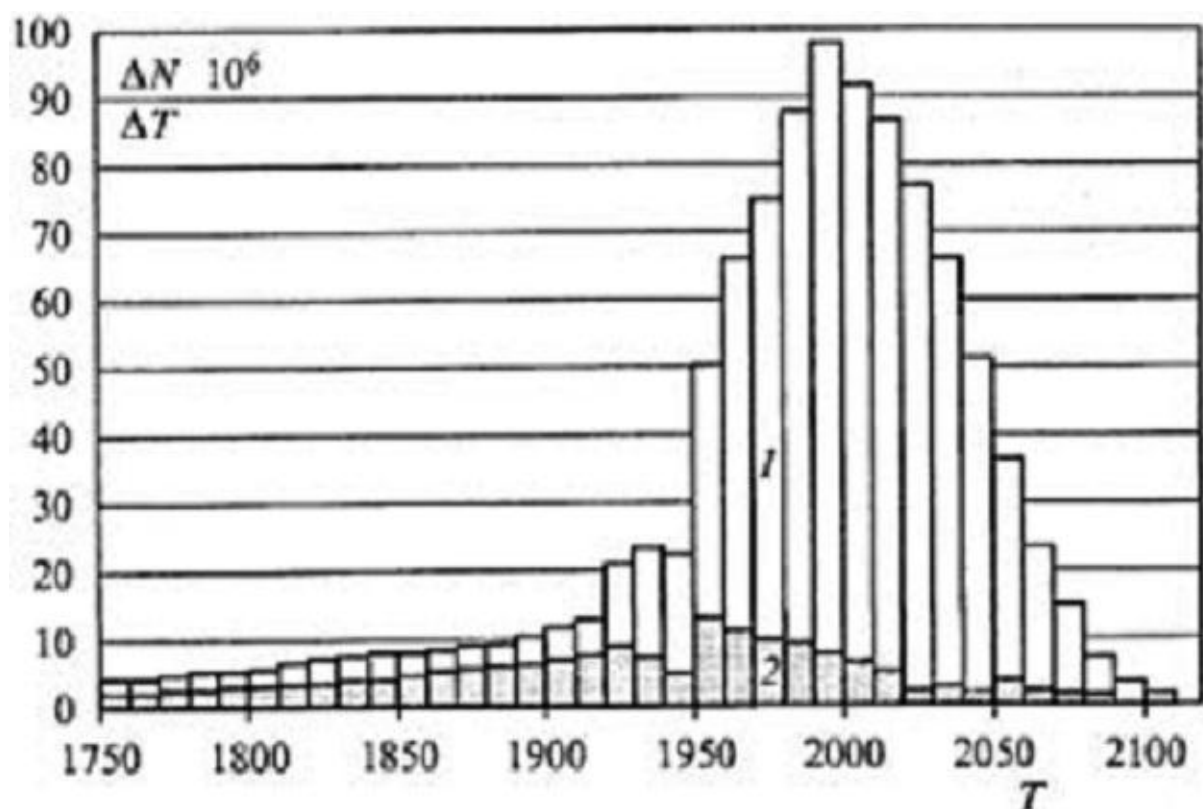


Рис. 14. Динамика на прираста на световното население по декади

Оказва се, че такава сложна динамика на световното население също може да се моделира с диференциални уравнения. Модел от този вид е разработен наскоро (през 1997 год.) от руския физик Сергей Капица. Капица (изучавайки динамиката на прираста на световното население по декади – рис. 14) предлага ръста на световното население да се опише чрез диференциалното уравнение

$$\frac{dN}{dt} = \frac{C}{(T_0 - t)^2 + \tau^2},$$

където C , T_0 и τ са подходящо избрани константи. Това диференциално уравнение разполага с точно решение:

$$N(t) = \frac{C}{\tau} \operatorname{arccotg} \frac{T_0 - t}{\tau}.$$

Тази функция описва забележително добре взривния ръст, както и последвалия

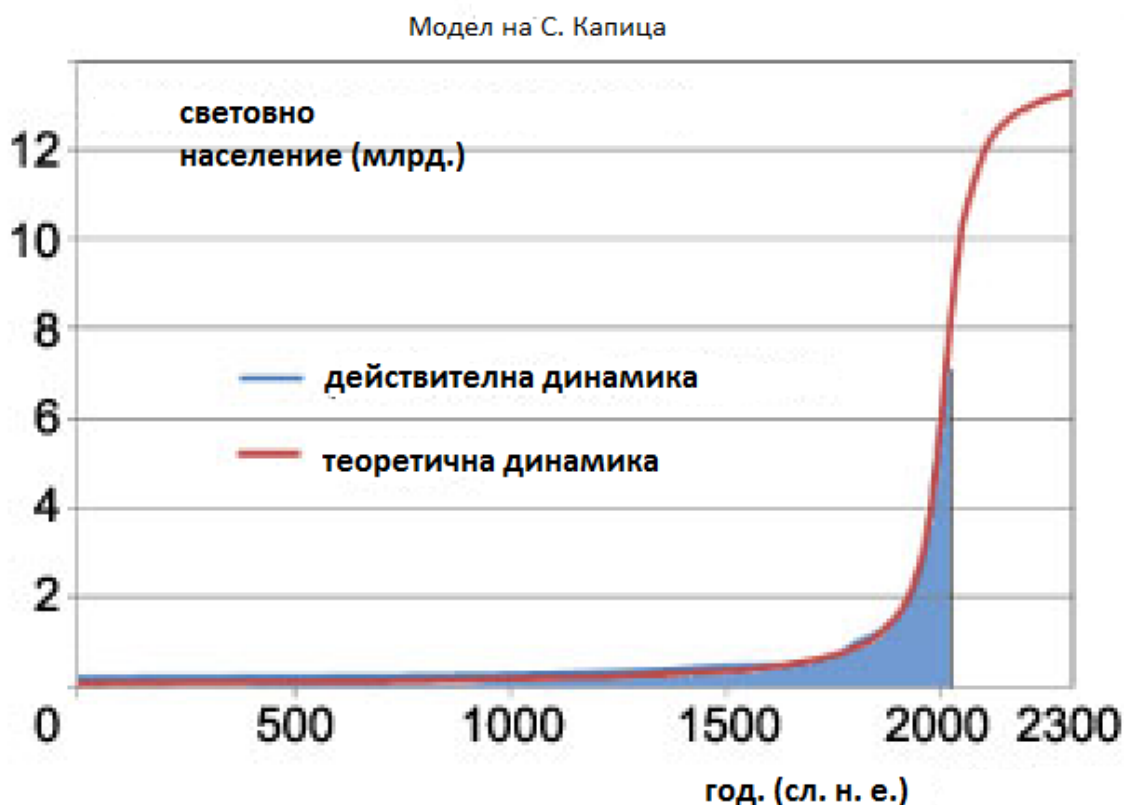


Рис. 15. Сравнение на действителния ръст на световното население с теоретичния ръст, според модела на С. Капица

демографски преход при следните стойности на параметрите на модела:

$$C = 1,86 \cdot 10^{11}, T_0 = 2007, \tau = 42.$$

Съгласно този модел (рис. 15) населението на Земята ще достигне максималното си население от 13-14 млрд. през 2200-2300 год.

Пример 30. Допускаме, че темпът на ръст на населението на Индия е линейна функция на времето, като през 1986 год. темпът е бил 2,26%, а през 2016 год. – 1,26%.

а) Да се намери формула на населението на Индия като функция от времето, ако през 1986 год. то е било 791 млн., да се сравни с данните

година	1990	1995	2000	2005	2010	2015	2016
население (млн.)	862	952	1044	1135	1223	1303	1320

и да се направи прогноза за 2020, 2025 и 2030 год.

б) Да се пресметне (според съставения модел) кога населението на Индия ще престане да нараства и какъв ще бъде неговия максимум.

Решение:

а) Темпът на нарастване ще бъде линейна функция на времето

$$k(t) = k_0 - at.$$

(Имаме " – " пред $a > 0$, защото според данните темпът е намаляваща функция от времето). Ако приемем, че $t = 0$ през 1986 год., то $k_0 = 2,26$. Според дадения темп за 2016 год. получаваме

$$k(30) = 2,26 - 30a = 1,26 \Rightarrow a = \frac{1}{30}.$$

Така за функцията $k(t)$ получаваме

$$k(t) = 2,26 - \frac{t}{30}.$$

Ако от проценти преминем към части от цялото, то ще имаме

$$k(t) = 0,0226 - \frac{t}{3000}.$$

В диференциалното уравнение на Бернули на постоянния темп

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

ще трябва да заменим постоянния темп k с променливия $k(t)$ и получаваме

$$\frac{dN}{dt} = \left(0,0226 - \frac{t}{3000}\right)N.$$

Решаваме това диференциално уравнение

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \left(0,0226 - \frac{t}{3000}\right)N \Rightarrow \frac{dN}{N} = \left(0,0226 - \frac{t}{3000}\right)dt \\ &\Rightarrow \int \frac{dN}{N} = \int \left(0,0226 - \frac{t}{3000}\right)dt \Rightarrow \ln N = 0,0226t - \frac{t^2}{6000} + \ln C, \end{aligned}$$

където с $\ln C$ сме означили интеграционната константа. При $t = 0$ ще имаме

$$\ln 791 = \ln C,$$

така получаваме

$$\ln N = 0,0226t - \frac{t^2}{6000} + \ln 791$$

или след антилогаритмуване

$$N = 791e^{0,0226t - \frac{t^2}{6000}}.$$

Заместваме t с 4 (1990 год.), с 9 (1995 год.), с 14 (2000 год.), с 19 (2005 год.), с 24 (2010 год.), с 29 (2015 год.), с 30 (2016 год.), с 34 (2020 год.), с 39 (2025 год.) и с 44 (2030 год.) и нанасяме в таблица

година	1990	1995	2000	2005	2010	2015	2016	2020	2025	2030
население (млн.)	862	952	1044	1135	1223	1303	1320	-	-	
население според модела	863	956	1050	1144	1236	1324	1341	1407	1482	1548

Вижда се от таблицата, че стойностите за населението на Индия, пресметнати въз основа на формулата се приближават изключително близко до реалните данни за периода 1990-2016 год.

б) Ясно е, че при $k(t) > 0$ населението на Индия ще нараства, а при $k(t) < 0$ – ще намалява, така че максимумът ще се достига при $k(t) = 0$. Но

$$k(t) = 0 \Leftrightarrow 2,26 - \frac{t}{30} \Leftrightarrow t = 67,8 \cong 68,$$

така че, съгласно модела, максималното население на Индия ще бъде през $1986+68=2054$ год. и то ще възлиза на

$$N_{max} = N(68) = 791e^{0,0226 \cdot 68 - \frac{68^2}{6000}} = 791e^{0,7661} = 791 \cdot 2,154 = 1701.$$

Така, че въз основа на този модел можем да заключим, че на селението на Индия ще нараства до средата на настоящия век и едва ли ще прехвърли 1,7 млрд.

Пример 31. Числеността на населението $y(t)$ на остров Свети Бенедикт удовлетворява диференциалното уравнение

$$y' = 0,05y(1 - 10^{-6}y),$$

където t е времето в години. След колко години населението на острова ще нарастне 10 пъти, ако в момента на острова живеят 10000 души.

Решение:

Тъй като населението на острова $N = y$ се изразява с формулата

$$N' = 0,05N(1 - 10^{-6}N) = 0,05N \left(1 - \frac{N}{10^6}\right),$$

то става дума за логистичен демографски модел с $M = 10^6 = 1$ млн. и $a = 0,05$. Ще измерваме населението в хиляди, тогава $M = 1000$ и $N_0 = 10$. Заместваме стойностите за M , N_0 и a от задачата във формулата

$$N(t) = \frac{M}{1 + \frac{M - N_0}{N_0} e^{-at}}$$

и получаваме

$$N(t) = \frac{1000}{1 + \frac{1000 - 10}{10} e^{-0,05t}} = \frac{1000}{1 + 99e^{-0,05t}}.$$

Трябва да се намери стойността на t , за която населението на острова става 100 хил., т.е. $N(t) = 100$. Това води до уравнението

$$\frac{1000}{1 + 99e^{-0,05t}} = 100 \Rightarrow 1 + 99e^{-0,05t} = 10 \Rightarrow e^{-0,05t} = \frac{1}{11}.$$

След логаритмуване получаваме

$$-0,05t = -\ln 11 \Rightarrow t = 20 \ln 11 = 20 \cdot 2,4 = 48.$$

Така че, въз основа на този логистичен демографски модел, можем да заключим, че населението на остров Свети Бенедикт ще нарасне десет пъти за 48 години.

15. Модел на жизнения цикъл

Оказва се, че различните продукти и технологии се подчиняват на общи закономерности – те се „раждат“, достигат до своята зрялост, остаряват и накрая „умират“. В това се състои модела на жизнения цикъл на продукта (технологията). Според различните изследователи, в рамките на жизнения цикъл, могат да се открият пет етапа:

- **разработка** – тоя е невидим за публиката, понякога продължава много дълго време и е свързан с високорискови инвестиции;

- **внедряване** - започва със самото появяване на продукта на пазара. Той е началото на жизнения цикъл на всеки продукт. През този период се формира пазарът на продукта. Тогава все още има загуби. Процедурата по въвеждане на продукта на пазара обикновено изисква време и реализацията през този период расте бавно.

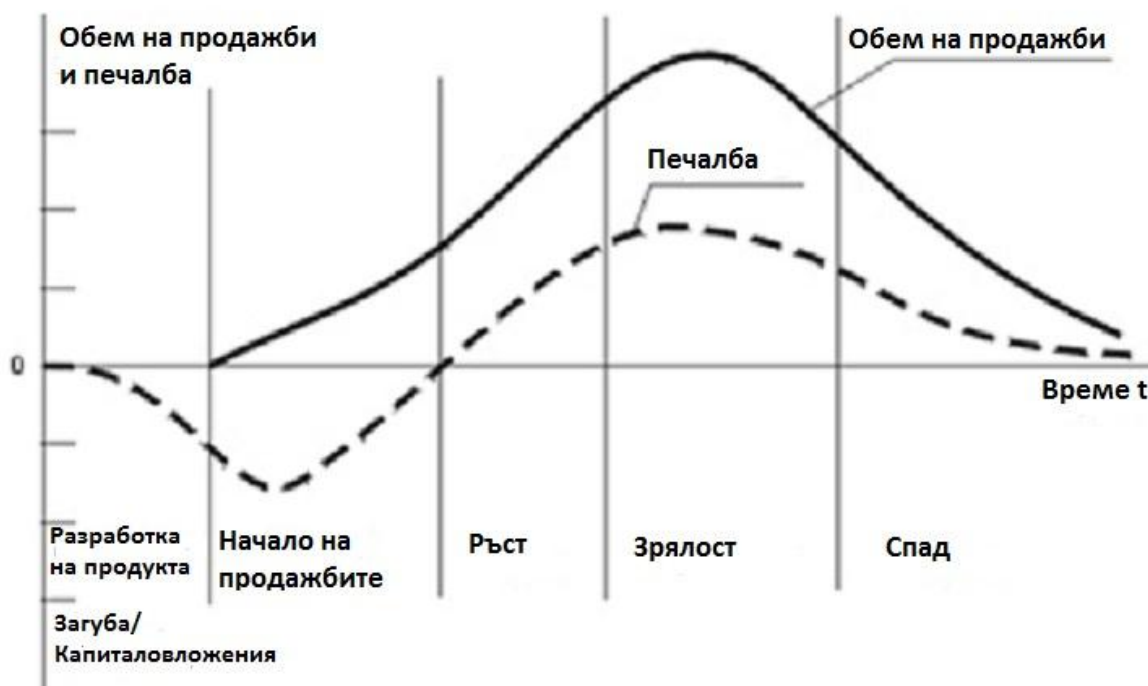


Рис. 16. Характерна графика на линията на жизнения цикъл на продукта - разпространение и печалба

- **растеж** - продажбите се увеличават бързо и печалбите достигат максималните си стойности. Този етап се характеризира с увеличаване на конкурентността на пазарите.
- **зрялост** - В този период продажбите са в максималните си обеми и започват бавно да намаляват. Типично за етапа е оформяне на жестока конкуренция, навлизат нови търговски марки на съществуващите пазари, конкурентите подчертават различията в качеството, цената и всички подобрения в своите варианти на продукта. Някои от по-слабите конкуренти отпадат.
- **спад** - в резултат на развитието на производството и научно-техническия прогрес на пазара непрекъснато се появяват продукти, които съпоставени с разглежданите от нас, са по-нови и често по-добри. Тогава разглежданата стока губи своите позиции, намаляват обемите и на продажба и цените.

На рис. 16 е показана една характерна графика на линията на жизнения цикъл на продукта (технологията) с линиите на продажбите и печалбата. Не всички стоки и услуги следват точно очертаните четири отчетливи стадия на *традиционната*

крива на жизнения цикъл. Видът на жизнения цикъл на стоките може да бъде различен, както по продължителност, така и по форма. По-известните модификации на кривата са:

- **Сензационна крива (крива „бум“)** описва изключително популярен продукт, който поддържа много висок обем продажби дълго време;
- **Крива на увлечението** се отнася до така наречените „стоки-фетиши“. Това са стоки, които бързо завоюват всеобщо внимание, възприемат се с голям ентузиазъм, достигат ясно изразен пик на популярност и с голяма бързина минават към стадий „Спад“;
- **Крива с повторен цикъл** е типична за стоки със сезонен характер;
- **Гребеновидна крива** е разновидност на повторният цикъл. Това последователно възобновяване на популярността се дължи обикновено на предлагането на нови характеристики на стоката, нови начини за нейното използване или просто на появата на нови потребители.
- **Крива на провала** описва стока, която никога не е завоювала всеобщо внимание и е претърпяла пазарен неуспех и провал.

Диференциално уравнение, подходящо за моделиране на линията на жизнения цикъл на продукта (по точно – линията на разпространението) е уравнението

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left(1 - \frac{t}{T}\right)(a + bN(t))(M - N(t)).$$

Това уравнение за ръста на разпространението се е получило като ръста на разпространението на иновациите е умножен с множител, наричан акселератор $k(t)$:

$$k(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)$$

В случая, това е линеен намаляващ акселератор. При $t = 0$ имаме $k(0) = 1$, следователно акселераторът запазва ръста на модела със смесено влияние. При $t = T$ получаваме $k(T) = 0$, следователно $N(t)$ не се променя, нито нагоре, нито надолу. За стойности $t \in (0, T)$ акселераторът отслабва растежа, характерен за смесеното влияние, а при $t > T$ акселераторът става отрицателен и $N(t)$ намалява. Фактически този акселератор играе ролята на „състаряващ“ фактор – стареенето започва още с раждането.

Преобразуваме диференциалното уравнение на жизнения цикъл

$$\int \frac{dN}{(a + bN)(M - N)} = \int \left(1 - \frac{t}{T}\right) dt.$$

Първият интеграл е същият, както при диференциалното уравнение за смесеното влияние, така че получаваме

$$\frac{1}{a + bM} \ln \frac{a + bN}{M - N} = t - \frac{t^2}{2T} + C$$

или окончателно общото решение ще бъде

$$N(t) = \frac{M - ae^{-(a+bM)\left(t - \frac{t^2}{2T} + C\right)}}{1 + be^{-(a+bM)\left(t - \frac{t^2}{2T} + C\right)}}$$

Интеграционната константа C намираме от началното условие $N(0) = 0$. Получаваме

$$\frac{M}{a} = e^{-(a+bM)C}.$$

Като заместим в израза за $N(t)$ в общото решение, ще получим окончателния вид на функцията на разпространение:

$$N(t) = \frac{M \left(1 - e^{-(a+bM)\left(t - \frac{t^2}{2T}\right)}\right)}{1 + \frac{bM}{a} e^{-(a+bM)\left(t - \frac{t^2}{2T}\right)}},$$

Следователно, като базов модел не може да се използва модел с вътрешно влияние, защото коефициента a трябва да бъде различен от нула.

Като заместим $t = 2T$ получаваме

$$N(2T) = 0,$$

следователно, дължината на жизнения цикъл е $2T$.

Съгласно казаното по-горе, при $t = T$ функцията на разпространение $N(t)$ ще достига своя максимум, който е

$$N_{max} = N(T) = \frac{M \left(1 - e^{-(a+bM)\frac{T}{2}}\right)}{1 + \frac{bM}{a} e^{-(a+bM)\frac{T}{2}}} < M.$$

Този максимум ще е много по-малък от потенциала на пазара M при малки стойности на T , а при големи стойности на T – ще се приближи до M .

От друга страна, графиката на линията на жизнен цикъл е симетрична относно вертикалната $t = T$. И наистина, имаме

$$N(t) = \frac{M(1 - e^{-(a+bM)x(t)})}{1 + \frac{bM}{a} e^{-(a+bM)x(t)}}$$

за

$$x(t) = t - \frac{t^2}{2T}.$$

Нека $t_1 \in (0, T)$. Тогава за $x(2T - t_1)$ ще имаме

$$\begin{aligned} x(2T - t_1) &= 2T - t_1 - \frac{(2T - t_1)^2}{2T} = 2T - t_1 - \frac{4T^2 - 4Tt_1 + t_1^2}{2T} \\ &= 2T - t_1 - 2T + 2t_1 - \frac{t_1^2}{2T} = t_1 - \frac{t_1^2}{2T} = x(t_1). \end{aligned}$$

От това следва, че $N(t_1) = N(2T - t_1)$.

Пример 32. Да се състави формулата за разпространение $N(t)$ и да се пресметне $N(t)$ за всички цели стойности на t от 1 до 10 включително, ако $M = 100$, а

а) $a = 0,2$; $bM = 0,4$ и $T = 10$;

б) $a = 0,02$; $bM = 0,4$ и $T = 10$;

Решение:

а) Заместваме $M = 100$, $a = 0,2$, $bM = 0,4$ и $T = 10$ във формулата за $N(t)$ и получаваме

$$N(t) = \frac{M \left(1 - e^{-(a+bM)\left(t-\frac{t^2}{2T}\right)} \right)}{1 + \frac{bM}{a} e^{-(a+bM)\left(t-\frac{t^2}{2T}\right)}} = \frac{1 - e^{-0,6\left(t-\frac{t^2}{20}\right)}}{1 + 2e^{-0,6\left(t-\frac{t^2}{20}\right)}} 100.$$

Пресмятаме

$$N(1) = \frac{1 - e^{-0,57}}{1 + 2e^{-0,57}} 100 = \frac{43,45}{2,13} = 20,40; \quad N(2) = \frac{1 - e^{-1,08}}{1 + 2e^{-1,08}} 100 = \frac{66,04}{1,68} = 39,31;$$

$$N(3) = \frac{1 - e^{-1,53}}{1 + 2e^{-1,53}} 100 = \frac{78,35}{1,43} = 54,79; N(4) = \frac{1 - e^{-1,92}}{1 + 2e^{-1,92}} 100 = \frac{85,34}{1,29} = 65,16;$$

$$N(5) = \frac{1 - e^{-2,25}}{1 + 2e^{-2,25}} 100 = \frac{89,46}{1,21} = 73,93; N(6) = \frac{1 - e^{-2,52}}{1 + 2e^{-2,52}} 100 = \frac{91,95}{1,16} = 79,27;$$

$$N(7) = \frac{1 - e^{-2,73}}{1 + 2e^{-2,73}} 100 = \frac{93,48}{1,13} = 82,73; N(8) = \frac{1 - e^{-2,88}}{1 + 2e^{-2,88}} 100 = \frac{94,39}{1,11} = 84,23;$$

$$N(9) = \frac{1 - e^{-2,97}}{1 + 2e^{-2,97}} 100 = \frac{94,87}{1,10} = 86,25; N(10) = \frac{1 - e^{-3}}{1 + 2e^{-3}} 100 = \frac{95,02}{1,10} = 86,38;$$

б) Заместваме $M = 100$, $a = 0,02$, $bM = 0,4$ и $T = 10$ във формулата за $N(t)$ и получаваме

$$N(t) = \frac{M \left(1 - e^{-(a+bM)\left(t-\frac{t^2}{2T}\right)} \right)}{1 + \frac{bM}{a} e^{-(a+bM)\left(t-\frac{t^2}{2T}\right)}} = \frac{1 - e^{-0,42\left(t-\frac{t^2}{20}\right)}}{1 + 20e^{-0,42\left(t-\frac{t^2}{20}\right)}} 100.$$

Пресмятаме

$$N(1) = \frac{1 - e^{-0,399}}{1 + 20e^{-0,399}} 100 = \frac{32,9}{14,42} = 2,28; N(2) = \frac{1 - e^{-0,756}}{1 + 20e^{-0,756}} 100 = \frac{53,05}{10,39} = 5,11;$$

$$N(3) = \frac{1 - e^{-1,071}}{1 + 20e^{-1,071}} 100 = \frac{65,73}{7,85} = 8,37; N(4) = \frac{1 - e^{-1,344}}{1 + 20e^{-1,344}} 100 = \frac{73,92}{6,22} = 11,88;$$

$$N(5) = \frac{1 - e^{-1,575}}{1 + 20e^{-1,575}} 100 = \frac{79,3}{5,14} = 15,43; N(6) = \frac{1 - e^{-1,764}}{1 + 20e^{-1,764}} 100 = \frac{82,86}{4,43} = 18,7;$$

$$N(7) = \frac{1 - e^{-1,911}}{1 + 20e^{-1,911}} 100 = \frac{85,21}{3,96} = 21,52; N(8) = \frac{1 - e^{-2,016}}{1 + 20e^{-2,016}} 100 = \frac{86,7}{3,66} = 23,68;$$

$$N(9) = \frac{1 - e^{-2,079}}{1 + 20e^{-2,079}} 100 = \frac{87,49}{3,50} = 25; N(10) = \frac{1 - e^{-2,1}}{1 + 20e^{-2,1}} 100 = \frac{87,75}{3,45} = 25,43;$$

Изводи: В а) съотношението $\frac{bM}{a} = 2$, което води до това, че през цялото време $t < T = 10$ разпространението $N(t)$ нараства със забавящ се темп, сякаш липсва фаза на внедряване и линията на разпространение прилича на обърната парабола. За сметка на това, обаче, максималното разпространение $N(10) = 86,38$ е много близко до максимално възможното разпространение $M = 100$. В б) има открояна фаза на внедряване, когато разпространението нараства с растящ темп: $N(1) - N(0) = 2,28 < N(2) - N(1) = 2,83 < N(3) - N(2) = 3,26 < N(4) - N(3) = 3,51 < N(5) - N(4) = 3,55$. След това нарастването на $N(t)$ се забавя: $N(5) - N(4) = 3,55 > N(6) - N(5) = 3,27 > N(7) - N(6) = 2,82 > N(8) - N(7) =$

$2,16 > N(9) - N(8) = 1,32 > N(10) - N(9) = 0,43$. Такъв темп на растеж е характерен за първата част от фазата на зрялост (до достигането на максимума). Това е така, защото в б) имаме $\frac{bM}{a} = 20$. Изводът е следния: външно влияние трябва да има ($a \neq 0$), но само при $a \ll bM$ се достига до характерната линия на жизнен цикъл.

Това, което е характерно за предложения модел е симетричния вид на линията на жизнения цикъл (от „раждането“ на продукта до пълната му пазарна зрялост времето е толкова, колкото от пълната зрялост до „смъртта“). Ако искаме да избягаме от това свойство, можем да използваме нелинейни акселератори, например от вида

$$k(t) = 1 - \left(\frac{t}{T}\right)^{\alpha}.$$

При тези акселератори, независимо от α максималното разпространение ще се получава при $t = T$, но при $\alpha > 1$ жизнения цикъл ще е по-къс от $2T$, а при $\alpha < 1$ – по-дълъг.

16. Моделиране на рекламна кампания

Представяме си, че някои компании са разработили нов продукт или услуга. Маркетинговата стратегия на компанията включва агресивна реклама. За да създадем прост математически модел, ще се въведат две променливи:

- Величината $q(t)$ представлява рекламната дейност, която описва скоростта на потока на рекламния бюджет, например, сума в определена валута, която компанията харчи за реклама за t -тата седмица (период от време);
- Величина $A(t)$ описваща информираността на целевата група на потенциалните купувачи на новия продукт или услуга.

По този начин, ние считаме, пазарна ниша като черна кутия (Рис. 17). Рекламната дейност $q(t)$ играе роля на входен параметър, докато информираността на потребителите $A(t)$ е променлива изход - измерваща реакцията на системата на въздействието на рекламата.



Рис. 17. Входно-изходен модел на рекламна кампания

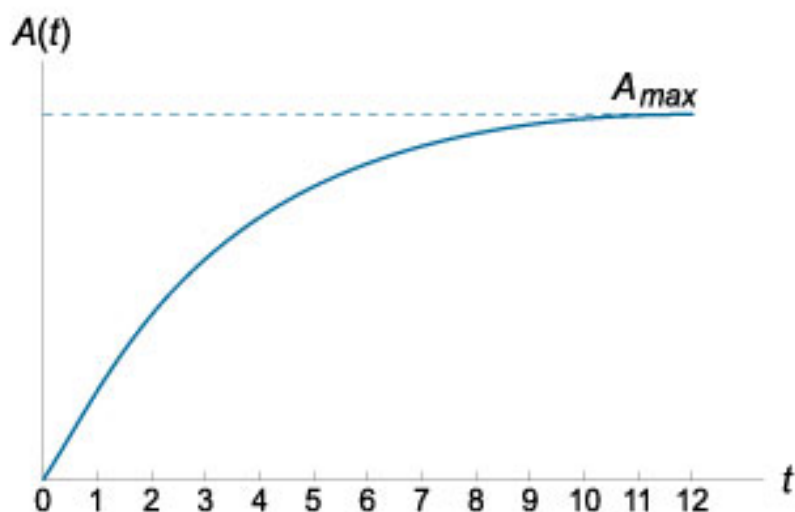


Рис. 18. Графика на функцията на информираност на потребителите $A(t)$

Моделът, който ще разгледаме е бил предложен през 1962 година от американските икономисти Nerlove (Марк Нерлов) и Arrow (Кенет Ароу) и е наречен на тях модел Nerlove – Arrow (на кратко N – A модел). Този модел свързва двете входни променливи: разходите за рекламната дейност $q(t)$ и осведомеността на потребителите $A(t)$ и се описва със следното диференциално уравнение:

$$\frac{dA}{dt} = bq(t) - kA,$$

където b е константа, описваща ефективността на рекламата, k - константа, съответстваща на скоростта на "забравяне".

Това уравнение включва два члена от дясната страна. Първият е $bq(t)$, който осигурява увеличение на потребителите в резултат на въздействието на рекламата, а kA описва обратния процес – забравяне за рекламирания продукт. Можем да направим извода, че скоростта на забравяне е пропорционална на сегашното ниво на информираност A .

Полученото уравнение е обикновено диференциално уравнение от първия ред. То е по-удобно да се запише в следния вид:

$$\frac{dA}{dt} + kA = bq(t).$$

Това е обикновено линейно диференциално уравнение от първи ред, в случая – нехомогенно. Ще го решим като първо се намери общото решение на съответното хомогенно уравнение

$$\frac{dA}{dt} + kA = 0.$$

Ще имаме

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} + kA = 0 &\Rightarrow \frac{dA}{dt} = -kA \Rightarrow \frac{dA}{A} = -kdt \\ &\Rightarrow \int \frac{dA}{A} = \int -kdt \Rightarrow \ln A = -kt + \ln C \Rightarrow A(t) = Ce^{-kt}. \end{aligned}$$

В получения израз за $A(t)$ C е интеграционната константа. Сега се връщаме към нехомогенното уравнение, което ще решим по метода на вариране на константата, който се състои в следното: търсим решение на нехомогенното уравнение, което се получава от решението на хомогенното, като константата C е заместена от функцията $C(t)$:

$$A(t) = C(t)e^{-kt}.$$

Неизвестната функция $C(t)$ намираме от условието $A(t)$ да е решение на нехомогенното уравнение. Диференцираме

$$A'(t) = C'(t)e^{-kt} - kC(t)e^{-kt}$$

и заместваме $A'(t)$ и $A(t)$ в нехомогенното уравнение. Получаваме

$$\begin{aligned} C'(t)e^{-kt} - kC(t)e^{-kt} + kC(t)e^{-kt} &= bq(t) \Rightarrow C'(t) = bq(t)e^{kt} \Rightarrow C(t) \\ &= \int bq(t)e^{kt} dt + C. \end{aligned}$$

След като намерихме функцията $C(t)$ заместваме в израза за $A(t)$ и получаваме

$$A(t) = \left(\int bq(t)e^{kt} dt + C \right) e^{-kt}$$

Интеграционната константа C се определя от началното условие $A(t_0) = A_0$. В примерите по-долу ще проучим как информираността на потребителите $A(t)$ зависи от начина на рекламиране.

Пример 33. Ръководството на компанията решава да рекламира с постоянна интензивност нов продукт в рамките на една година. Бюджетът на рекламата е 12 000 \$. Коефициентите са съответно равни на $k = 1/4$, $b = 25$.

Да се запише и реши диференциалното уравнение, описващо броят на хората $A(t)$, запознати с продукта. Да се пресметнат всички месечни стойности $A(t)$; $t = 1, 2, \dots, 12$ и да се изчисли средния брой на хората, запознати с продукта.

Решение:

Ние приемаме, че времето t е в месеци. Според примера, рекламните разходи са постоянни през цялата година. Тогава месечно разходи за реклама са както следва:

$$q_0 = \frac{12000 \$}{12 \text{ мес.}} = 1000 \frac{\$}{\text{мес.}}$$

Нека да намерим решението в общия случай – при произволни k , b и q_0 . Заместваме във формулата за $A(t)$ и получаваме

$$A(t) = \left(\int b q_0 e^{kt} dt + C \right) e^{-kt} = \left(\frac{b q_0}{k} e^{kt} + C \right) e^{-kt} = \frac{b q_0}{k} + C e^{-kt}.$$

Интеграционната константа C определяме от началното условие $A(t = 0) = 0$ (да не забравяме, че продуктът е нов).

$$A(0) = \frac{b q_0}{k} + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{b q_0}{k}.$$

Като заместим в общото решение, получаваме

$$A(t) = \frac{b q_0}{k} (1 - e^{-kt}).$$

Така получихме израз за ефекта от постоянната реклама с интензивност $q(t) = q_0 = \text{const.}$ Очевидно, покритието на такава рекламна кампания при неограничено нарастване на времето ще се стреми към

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{b q_0}{k} (1 - e^{-kt}) \right) = \frac{b q_0}{k} \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - e^{-kt}) = \frac{b q_0}{k}.$$

Сега заместваме с данните от задачата

$$b = 25, k = \frac{1}{4} \text{ и } q_0 = 1000$$

и получаваме

$$A(t) = 100000(1 - e^{-0,25t}).$$

Ако тази рекламна кампания продължи неопределено дълго, тя ще информира за този продукт 100000 потенциални потребители.

Сега да пресметнем рекламното покритие по месеци. Резултатите от изчисленията нанасяме в таблица

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$A(t)$	22,1	39,3	52,8	63,2	71,3	77,7	82,6	86,5	89,5	91,8	93,6	95,0

Въз основа на тези резултати можем да пресметнем средното месечно покритие на тази рекламна кампания

$$\bar{A} = \frac{1}{12} \sum_{t=1}^{12} A(t) = 72117.$$

Този показател за ефекта на рекламната кампания е най-важен, защото показва какъв е броя на потенциалните (информирани) потребители, на които фирмата може да разчита през цялото време. Освен това, чрез средната стойност ще можем да сравняваме ефектите на рекламни кампании с различни интензивности.

Забележка. Прави впечатление, че модела на рекламна кампания с постоянни разходи математически е идентичен с модела на линията на обучение и с модела на разпространение на иновациите с външно влияние. И наистина, при $q(t) = q_0$ диференциалното уравнение на модела добива вида

$$\frac{dA}{dt} + kA = bq_0 \Rightarrow \frac{dA}{dt} = k \left(\frac{bq_0}{k} - A \right).$$

Но тъй като

$$\frac{bq_0}{k} = A_{max},$$

то диференциалното уравнение ще бъде

$$\frac{dA}{dt} = k(A_{max} - A),$$

което е същото, като при линията на опита (и разпространението на иновациите с външно влияние).

Пример 34. При условията от пример 33 да се определи месечния брой на потенциалните купувачи до края на годината, ако целият бюджет за реклама се разпредели равномерно през първите шест месеца. Да се изчисли средния брой на хората, запознати с продукта и да се направи сравнение с рекламната кампания от пример 33.

Решение. В този случай, рекламата засилва своя характер – тя е по-агресивна, в сравнение с предишната. Схематично, рекламните разходи са показани по-долу на Рис. 19. Ние трябва да проучим как се променят информираността $A(t)$ на потребителите в сравнение със случая, разглеждан в пример 31, когато рекламните разходи са едни и същи през цялата година.

Процесът се разделя на два етапа. До края на шестия месец, стойността на A лесно се изчислява по формулата:

$$A(t) = \frac{bq_0}{k} (1 - e^{-kt}),$$

получена в пример 31, коефициентите имат следните стойности: $k = 1/4$, $b = 25$ и $q_0 = 2000$, следователно

$$A(t) = 200000(1 - e^{-0,25t}).$$

Изчисляваме $A(t)$ за $t = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ (това означава на практика, да удвоим резултатите за $A(t)$ при $t \leq 6$ от пример 31) и нанасяме в таблица

t	1	2	3	4	5	6
$A(t)$	44,2	78,6	105,6	126,4	142,6	155,4

В момент $t = 6$, броят на купувачите на запознаване с продукта е $A(6) = 15540$.

Във втората фаза - от седми до дванадесети месец включително, рекламата напълно отсъства. Тогава ще имаме $q(t) = 0$ за $t = 6, 7, \dots, 12$ и като заместим във формулата за $A(t)$ получаваме

$$A(t) = Ce^{-0,25(t-6)}.$$

Константата C се определя от първоначалното състояние за втората фаза:

$$A(t = 6) = Ce^0 = 155400 \Rightarrow C = 155400.$$

Така, законът на изменението $A(t)$ за втората половина добива следния вид:

$$A(t) = 155400e^{-0,25(t-6)}.$$

Пресмятаме $A(t)$ за $t = 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ и нанасяме резултатите в таблица

t	6	7	8	9	10	11	12
$A(t)$	155,4	121,0	94,3	73,4	57,2	44,5	34,7

Окончателно, получаваме пълното решение:

$$A(t) = \begin{cases} 200000(1 - e^{-0,25t}) & \text{за } 0 \leq t \leq 6 \\ 155400e^{-0,25(t-6)} & \text{за } 6 \leq t \leq 12. \end{cases}$$

Графиката на функцията $A(t)$ е представена на Рис. 20.

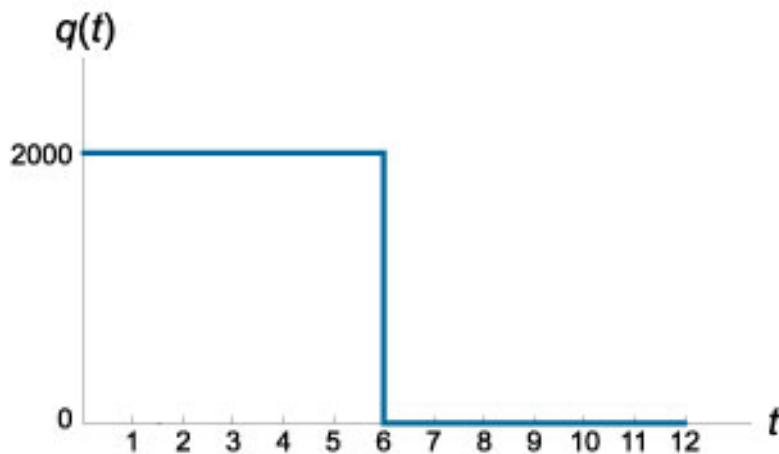


Рис. 19. График на функцията на интензивност на рекламната кампания $q(t)$ за пример 32

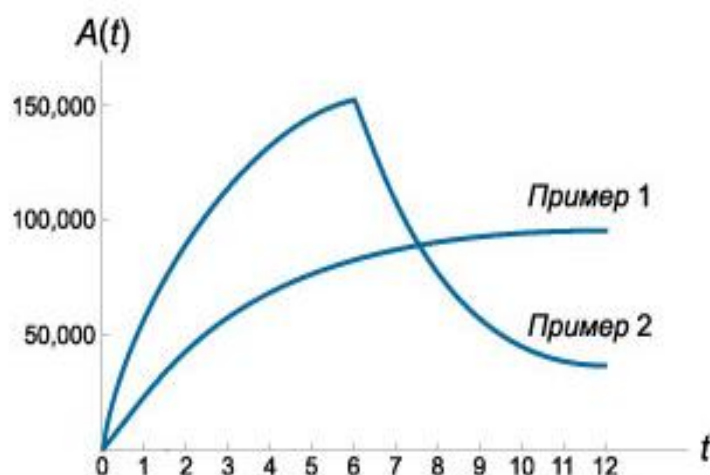


Рис. 20. Графики на функциите на информиране на потребителите вследствие на рекламните кампании $A(t)$ за примери 33 и 34

Графиката показва сравнение на кривата $A(t)$ с тази от предходния пример. Може да се види, че във втория случай информираността на клиентите ще бъде по-ниска в края на годината, отколкото при постоянна реклама. Сега можем да изчислим и средната стойност на покритието при тази рекламна кампания:

$$\bar{A} = \frac{1}{12} \sum_{t=1}^{12} A(t) = 89825.$$

Ако предположим, че обемът на продажбите е пропорционален на средната информираност на клиентите на новия продукт, то че агресивната реклама (при един и същи бюджет) е по-изгодна.

Пример 35. За да се изследва динамиката на $A(t)$ в случай на линейно изменяща се рекламна активност $q(t)$ като се използват същите данни, като в пример 33.

Решение:

В даденият пример, маркетинговият модел е усложнен. Предполагаме, че бюджетът за реклама се изразходва през годината чрез линеен закон:

$$q(t) = q_0 + \alpha t$$

Функцията $q(t)$ може да бъде или растяща или намаляваща (Рис. 21).

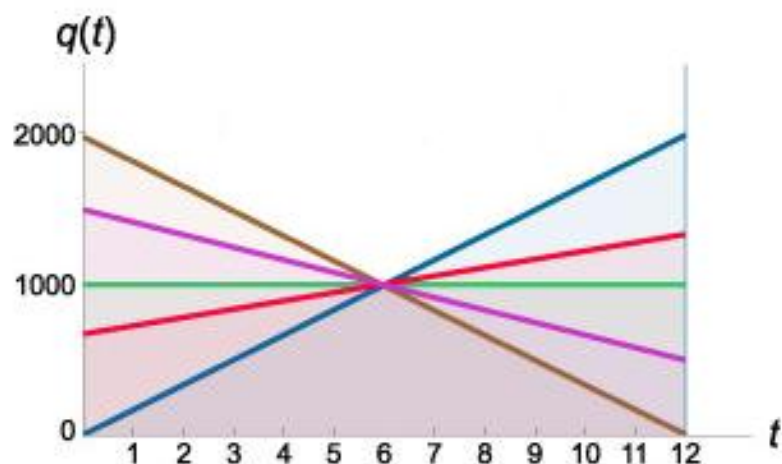


Рис. 21. Различни варианти за графиката на функцията на интензивност на рекламната кампания $q(t)$, изменяща се чрез линеен закон

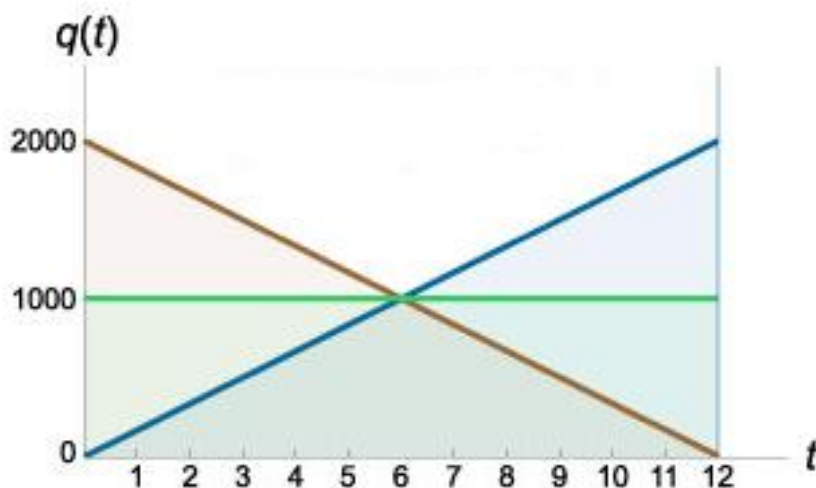


Рис. 22. Бюджетите на различните варианти на рекламна кампания с интензивност, изменяща се по линеен закон, са равни по между си

Във всеки случай, общият годишен бюджет за реклама остава непроменен (в случая 12000\$). Графично, това означава, че общата площ на трапеците (или триъгълници в случаите, когато $q_0 = 0$ или $q_0 = 2000$), показани на Рис. 22, са равни.

Ясно е, че параметрите, α и q_0 са свързани, както следва:

$$12(q_0 + 6\alpha) = 12000$$

Лявата част на тази формула съответства на лицето на трапеца. Следователно, коефициента α е изразен чрез q_0 , както следва:

$$\alpha = \frac{1000 - q_0}{6}.$$

Зависимостта на разходите за реклама са описани по следния начин:

$$q(t) = q_0 + \frac{1000 - q_0}{6} t,$$

откъдето общото решение е:

$$\begin{aligned} A(t) &= \left[b \int \left(q_0 + \frac{1000 - q_0}{6} t \right) e^{kt} dt + C \right] e^{-kt} \\ &= \left(bq_0 \int e^{kt} dt + b \frac{1000 - q_0}{6} \int t e^{kt} dt + C \right) e^{-kt}. \end{aligned}$$

Интеграла $\int t e^{kt} dt$, решаваме, като използваме метода за интегриране по части:

$$\begin{aligned} \int t e^{kt} dt &= \frac{1}{k} \int t e^{kt} dkt = \frac{1}{k} \int t de^{kt} = \frac{1}{k} \left(t e^{kt} - \int e^{kt} dt \right) = \frac{1}{k} \left(t e^{kt} - \frac{1}{k} e^{kt} \right) \\ &= \frac{1}{k} t e^{kt} - \frac{1}{k^2} e^{kt}. \end{aligned}$$

В резултат получавам следния израз за $A(t)$:

$$\begin{aligned} A(t) &= \left(\frac{bq_0}{k} e^{kt} + b \frac{1000 - q_0}{6} \left(\frac{1}{k} t e^{kt} - \frac{1}{k^2} e^{kt} \right) + C \right) e^{-kt} \\ &= \frac{bq_0}{k} + \frac{b(1000 - q_0)}{6k} \left(t - \frac{1}{k} \right) + C e^{-kt}. \end{aligned}$$

Константата C определям от началното условие $A(t = 0) = 0$

$$\frac{bq_0}{k} - \frac{b(1000 - q_0)}{6k^2} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{b}{k} \left(\frac{1000 - q_0}{6k} - q_0 \right)$$

Замествам C в уравнението за $A(t)$ и получаваме

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{bq_0}{k} - \frac{b(1000 - q_0)}{6k} \left(t - \frac{1}{k} \right) + \frac{b}{k} \left(\frac{1000 - q_0}{6k} - q_0 \right) e^{-kt} \\ &= \frac{b}{k} \left[\left(q_0 - \frac{1000 - q_0}{6k} \right) (1 - e^{-kt}) + \frac{1000 - q_0}{6} t \right] \end{aligned}$$

Накрая, заместям известните величини: $k = 1/4, b = 25$ и получаваме

$$A(t) = 100 \left[\left(q_0 - \frac{1000 - q_0}{1,5} \right) (1 - e^{-0,25t}) + \frac{1000 - q_0}{6} t \right]$$

При $q_0 = 1000$ (режим на постоянната равномерна реклама, обсъдени в пример 31, ние получаваме вече установената по-горе формула:

$$A(t) = 100 \cdot 1000(1 - e^{-0,25t}) = 100000(1 - e^{-0,25t})$$

Като се използва общото решение на уравнението на $A(t)$, правим сравнение на следните случаи (виж Рис. 20 по-горе).

- Сценарий 1: Рекламните разходи се повишават 0-2000;
- Сценарий 2: Рекламните разходи намаляват 2000-0;
- Сценарий 3: Рекламните разходи са постоянни през годината.

При сценарий 1 имаме $q_0 = 0$, заместяме в общата формула за $A(t)$ и получаваме

$$A(t) = \frac{100000}{6}t - \frac{100000}{1,5}(1 - e^{-0,25t}).$$

Аналогично, при сценарий 2 ($q_0 = 2000$) получаваме

$$A(t) = \frac{400000}{1,5}(1 - e^{-0,25t}) - \frac{100000}{6}t.$$

Резултатите от изчисленията са представени на Рис. 23.

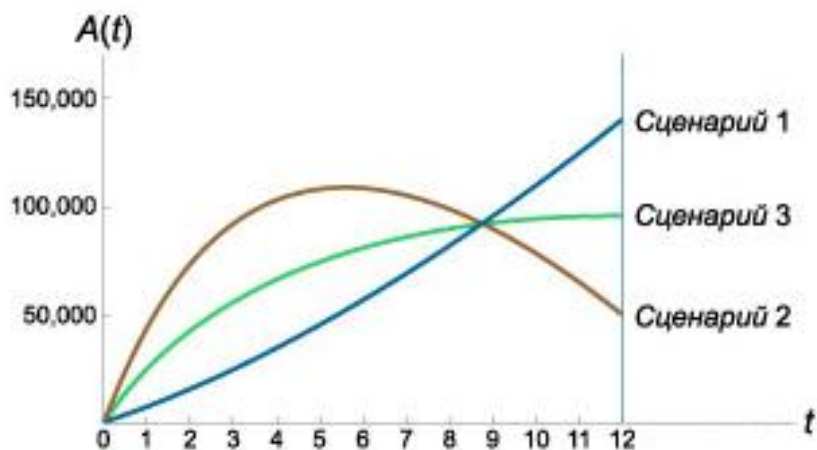


Рис. 23. Графики на функциите на потребителска осведоменост в следствие от рекламната кампания при различните сценарии

Сценарий	1	2	3
Средна годишна стойност на $A(t)$	60253	83988	72117

Средните стойности на $A(t)$ през годината за тези сценарии са дадени в таблицата. Както се вижда, най-агресивен сценарий 2 може да доведе до увеличаване на продажбите, въпреки че сценарият 1 има предимство благодарение на дългосрочния ефект. В реалния бизнес динамиката на $A(t)$ може да има далеч по-сложен характер.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аласдър Смит, Математическо въведение в икономиката, Университетско издателство „Св. Климент Охридски“, София, 2000, ISBN 954-07-1405-2.
2. А. М. Ахтямов, Математические модели экономических процессов, Уфа, РИЦБашГУ, 2009.
3. Асен Христов, Математическа Икономика - цикъл учебни дисциплини, <http://www.fmi-plovdiv.org/manev/Asen/index.htm>.
4. Чеканский А.Н., Фролова Н.Л., Микроэкономика. Промежуточный уровень: Учеб. пособие. Москва, изд. МГУ, ИНФРА-М, 2008, ISBN 978-5-16-002018-1.
5. Michel Ph. Cours de Mathematiques pour economistes, Paris: Economica, 1989.