

8. Размяна време-разходи (Time-cost trade off)

Много често в предприятието възниква следната ситуация: печалбата започва да спада поради ред причини като:

- Физическа амортизация на съществуващата техника и оборудване;
- Морална амортизация, неконкурентност на използваната в производството технология;
- Неадекватност на съществуващата организация на предприятието.

Тогава се налага кардинална промяна на техниката, технологията на производство или организацията на предприятието, например, внедряване на нова информационна система. Това обаче струва определени разходи. Тези разходи обикновено са много по-големи, ако това обновление се форсира във времето. Със скъсяването на развойния график на въвеждане на иновацията, следва да се изпълняват много задачи едновременно и така изпълнението на всяка задача бави изпълнението на другите задачи, има повече неуспешни стартове и неефективни дейности. Освен това, струпването на повече технически изпълнители при изпълнението на проекта води до понижаване на ефективността на всеки от тях. Ако се цели изпълнението на проекта за обновление в много кратък срок, вероятно ще се наложи и привличането на външни за фирмата, скъпо струващи специалисти. По такъв начин фирмата се изправя пред функцията на замяна на време с разходи и трябва да определи какъв е оптималния срок за въвеждане на иновацията, отчитайки и това, че с времето печалбата спада още повече. Отговорът зависи от зависимостта между brutната печалба (като функция на времето) и разходите по внедряване на иновацията (също зависещи от времето).

Нека $\Pi(t)$ е функцията на brutната печалба (без разходите по внедряване на иновацията) на фирмата. Предполага се, че това е намаляваща функция (в противен случай не се налага обновление), т.е.

$$\Pi'(t) < 0.$$

С $C(t)$ означаваме разходите по внедряване на иновацията. И за тази функция се предполага, че е намаляваща (поне до определен момент), т.е.

$$C'(t) < 0.$$

Тогава печалбата с приспаднати разходи по внедряване на обновлението ще бъде $\Pi(t) - C(t)$. Задачата за размяна време-разходи се свежда до следната оптимизационна задача

$$\Pi(t) - C(t) \rightarrow \max.$$

Условието от първи ред за тази задача за безусловен максимум предполага нулиране на първата производна:

$$\Pi'(t) - C'(t) = 0 \Leftrightarrow \Pi'(t) = C'(t).$$

От решаването на горното уравнение получаваме оптималното време за въвеждането на иновацията $t = t_0$, за което е изпълнено равенството $\Pi'(t_0) = C'(t_0)$. В този случай се казва, че оптималното време за въвеждане на иновацията трябва да изравни маргиналната печалба с маргиналният разход по въвеждане на иновацията. За да е изпълнено това, необходимо е за тази стойност $t = t_0$ да е валидно условието от втори ред

$$\Pi''(t_0) - C''(t_0) < 0 \Leftrightarrow \Pi''(t_0) < C''(t_0).$$

Пример 18. Дадена компания от химическата промишленост иска да въведе нова пластмаса, защото произвежданата от нея пластмаса става все по-неконкурентна на пазара и функцията на brutната печалба е

$$\Pi(t) = 480 - 20t.$$

Разходите по внедряване на производството на новата пластмаса са

$$C(t) = 500 - 100t + 5t^2.$$

(и в двата случая времето t се изменя в месеци). Да се определи за колко месеца трябва да бъде внедрено производството на новата пластмаса.

Решение:

Тъй като

$$C'(t) = -100 + 10t \Rightarrow C'(t) < 0 \text{ при } t < 10.$$

От друга страна, маргиналната печалба е

$$\Pi'(t) = -20.$$

От изравняването на маргиналната печалба с маргиналните разходи по внедряването на новата пластмаса в производство получаваме

$$\Pi'(t) = C'(t) \Leftrightarrow -20 = -100 + 10t \Leftrightarrow t = 8.$$

Условието от втори ред за тази задача е изпълнено за всяко t :

$$\Pi''(t) = 0 < 10 = C''(t).$$

Полученият максимум на брутната печалба с приспаднати разходи при внедряване за 8 месеца е

$$\Pi(8) - C(8) = (480 - 20 \cdot 8) - (500 - 100 \cdot 8 + 5 \cdot 8^2) = 320 - 20 = 300.$$

Забележка. В горният пример за функция на разходите по внедряването беше използвана функцията

$$C(t) = a - bt + ct^2,$$

където коефициентите a , b и c са положителни и $a \gg b \gg c$. Тъй като за първата производна имаме

$$C'(t) = -b + 2ct \Rightarrow C'(t) < 0 \text{ при } t < \frac{b}{2c},$$

то за тази функция е характерно, че от $t = 0$ (когато разходите възлизат на $C(0) = a$) до $t = \frac{b}{2c}$ разходите спадат, достигайки своя минимум

$$C\left(\frac{b}{2c}\right) = a - \frac{b^2}{4c},$$

а след това започват да нарастват.

Пример за функция на постоянно спадаци разходи е функцията

$$C(t) = C_0 + \frac{a}{t - t_0} \text{ при } t > t_0.$$

И наистина, за първата производна имаме

$$C'(t) = -\frac{a}{(t - t_0)^2} < 0, \text{ като}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = C_0,$$

т.е. правата $C = C_0$ играе ролята на хоризонтална асимптота за графиката на функцията $C = C(t)$, с други думи, минималните разходи $C = C_0$ никога не могат да бъдат достигнати.

Много често спадът на печалбата се счита за косвен разход (indirect cost) и се бележи с $IC(t)$. Тогава формулата за печалбата ще изглежда така

$$\Pi(t) = \Pi_0 - IC(t),$$

където Π_0 е достигнатото максимално ниво на печалба, преди тя да започне да спада (т.е. преди да се появи косвеният разход). Естествено, косвеният разход

расте с времето и той става причината за появата на прекия разход (direct cost) $DC(t)$, който всъщност е разхода по внедряването на иновацията, който преди означавахме с $C(t)$.

Тогава задачата за максимизиране на печалбата с приспаднати разходи по внедряване на иновацията ще се модифицира така

$$\Pi_0 - IC(t) - DC(t) = \Pi_0 - (IC(t) + DC(t)) \rightarrow \max,$$

което означава, че модифицираната оптимизационна задача е

$$IC(t) + DC(t) \rightarrow \min,$$

т.е., ще трябва да минимизираме сумата от преките и косвени разходи.

Условието от първи ред за тази оптимизационна задача е

$$IC'(t) + DC'(t) = 0.$$

Ако $t = t_0$ е решението на горното уравнение, то за него трябва да е изпълнено условието от втори ред

$$IC''(t) + DC''(t) > 0.$$

Пример 19. Очаква се, че печалбата ще започне да спада след 30 дена, като спадът ще бъде от 10000\$ дневно. Внедряването на новата технология може да започне най рано след 85 дни. Ако това стане за 15 дена (т.е. от $t = 85$ до $t = 100$) разходите за това ще възлизат на 1300000\$, а за 75 дена (от $t = 85$ до $t = 160$) – 700000\$. Предполага се, че функцията на преките разходи е от вида

$$DC(t) = C_0 + \frac{a}{t - t_0}.$$

Да се намери оптималното време за внедряване на новата технология.

Решение:

Ясно е, че косвените разходи се задават с формулата

$$IC(t) = -300 + 10t \quad \text{за } t \geq 30.$$

Сега трябва, използвайки данните да намерим функцията на преките разходи. Ясно е, че $t_0 = 85$, тогава за нея ще имаме

$$DC(t) = C_0 + \frac{a}{t - 85}$$

и тя ще бъде възстановена, ако намерим коефициентите C_0 и a . Заместваме данните за нея и получаваме

$$DC(100) = C_0 + \frac{a}{100 - 85} = 1300 \Rightarrow 15C_0 + a = 19500$$

$$DC(160) = C_0 + \frac{a}{160 - 85} = 700 \Rightarrow 75C_0 + a = 52500.$$

Изваждаме първото от второто уравнение и получаваме

$$60C_0 = 33000 \Rightarrow C_0 = 550.$$

Тогава за другия коефициент a намираме $a = 11250$ и окончателният вид на функцията на преките разходи ще бъде

$$DC(t) = 550 + \frac{11250}{t - 85}.$$

(Всички парични величини се измерват в хиляди \$).

Условието от първи ред за тази оптимизационна задача е

$$IC'(t) + DC'(t) = 0.$$

За съответните производни намираме

$$IC'(t) = 10,$$

$$DC'(t) = -\frac{11250}{(t - 85)^2}.$$

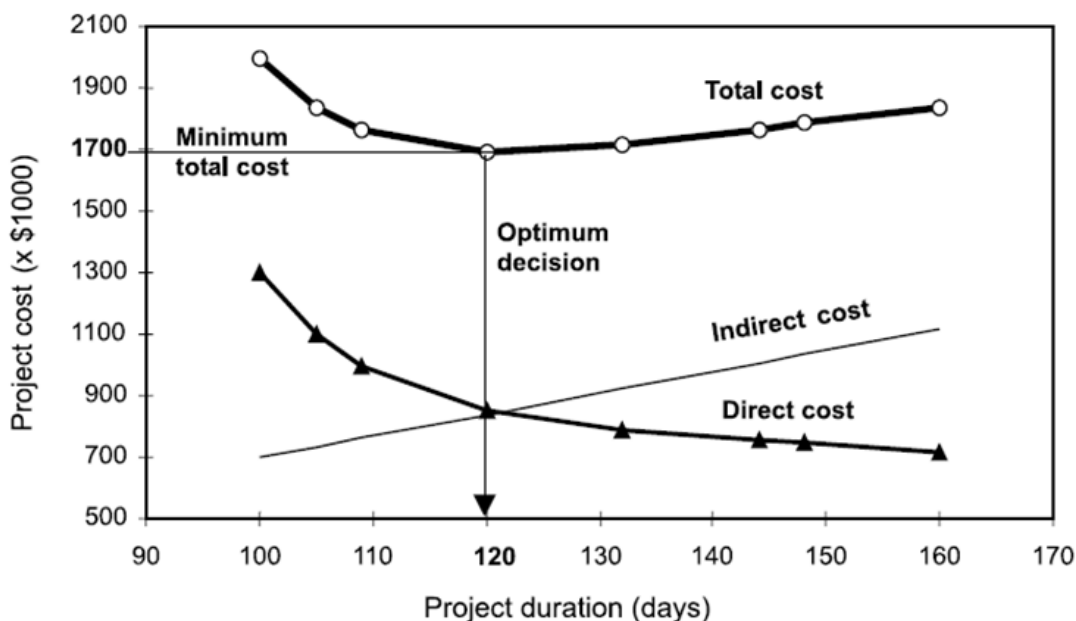
Като заместим в горното уравнение получаваме

$$\frac{11250}{(t - 85)^2} = 10 \Rightarrow (t - 85)^2 = 1125 \Rightarrow t - 85 = 35 \text{ и } t = 120.$$

Това е времето минимизиращо сумата от преките и косвени разходи. Тази минимална сума е

$$\{IC(t) + DC(t)\}_{min} = IC(120) + DC(120) = 900 + 900 = 1800.$$

На рис. 2 данните от примера са нанесени графично.



Source: Optimization of construction time - Cost trade-off analysis using genetic algorithms by Hegazy, and Ayed (1999). pp.682

Рис 2. Минимизиране на сумата от преките и косвени разходи - графика

9. Крива на опита (обучението) – разходен модел

Често в бизнеса (и не само там) възниква ситуация, при която трябва да се усвоява нова (за работника, служителя, фирмата) производствена операция. При такава ситуация прави впечатление, че производителността на труда нараства с всеки изминал период от време, но това нарастване става със забавящ се темп. Ако с $L(t)$ означим произведената продукция за t -тия период от време (час, ден, седмица), то ще имаме $L'(t) > 0$ но $L''(t) < 0$. Така например редът от производителности $L(1) = 10$, $L(2) = 16$, $L(3) = 21$, $L(4) = 25$ дава достоверна картина за изменението на производителността във времето. Да разгледаме общото произведено количество като функция на времето, с $x(t)$ означаваме произведеното количество за t -тия период от време и тези преди него. При такава бизнес ситуация се прави предположението, че финансирането на всеки период от времето е едно и също. Нека, например, това да са 100 парични единици. Нанасяме тези данни в таблица

t	$L(t)$	$x(t)$	$C(t)$	$AC(t)$
1	10	10	100	10,00
2	16	26	200	7,69
3	21	47	300	6,38
4	25	72	400	5,56

В последната колонка е нанесена себестойността (разхода за производството на единица продукция). Ако разглеждаме разходите като функция на количеството, т.е. $C = C(x)$, то прави впечатление, че и за тази функция е характерно, че е

растяща, но това нарастване се забавя с нарастването на количеството, т.е. $C'(x) > 0$ и $C''(x) < 0$. Най-прост математически пример за функция с такива свойства е степенната функция със степенен показател между 0 и 1., т.е. $C(x) = ax^\alpha, \alpha \in (0,1)$. Тогава за функцията на средните разходи ще имаме

$$AC(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{a}{x^{1-\alpha}}.$$

Възникват два вида предположения:

- производителността $L(t)$ може да нараства неограничено във времето или
- тя е ограничена от някаква пределна производителност L_{max} , т.е. $L(t) < L_{max}$ и даже $\lim_{t \rightarrow \infty} L(t) = L_{max}$.

Във вторият случай себестойността ще бъде ограничена отдолу от величината

$$c_0 = \frac{c}{L_{max}},$$

където c е разхода за един период от времето. Тъй като за себестойността е в сила неравенството

$$AC(x) > c_0,$$

тя може да бъде представена във вида

$$AC(x) = c_0 + \frac{a}{x^{1-\alpha}}$$

и следователно за функцията на разходите $C(x)$ ще имаме

$$C(x) = c_0x + ax^\alpha.$$

Пример 20. За организирането на един производствен цикъл във фирма (траещ една работна седмица) са необходими 6000 лв. Първата седмица са произведени 1000 изделия, а втората – 1560. Да се моделира функцията на разходите за производството на тези изделия и да се определи производството през третата седмица, при положение, че:

а) няма други ограничения;

б) смята се, че повече от 2400 изделия седмично не могат да се произведат.

И в двата случая да се определи количеството произведена продукция като функция на времето

$$x = x(t),$$

като x е количеството произведени изделия в хил. бр., а t са седмиците, през които това количество е произведено.

Решение:

а) При положение, че липсват допълнителни ограничения, предполагаме, че видът на разходната функция е

$$C(x) = ax^\alpha, \alpha \in (0,1),$$

като коефициентите на степенната функция a и α ще намерим от дадените условия. Това, че през първата седмица са произведени 1000 изделия означава, че $C(1) = 6$, защото разходите през първата седмица са 6000 лв. за 1000 произведени бройки. Тъй като $C(1) = a1^\alpha = 6$, то $a = 6$ и $C(x) = 6x^\alpha, \alpha \in (0,1)$. Остава да намерим α . Тъй като през втората седмица са произведени 1560 изделия, то през първата и втората седмица са произведени общо 2560 изделия, като за това са похарчени 12000 лв.; това означава, че $C(2,56) = 12$. Като заместим, получаваме $C(2,56) = 6 \cdot 2,56^\alpha = 12 \Rightarrow 2,56^\alpha = 2$. Логаритмувайки последното равенство, ще имаме

$$\alpha \ln 2,56 = \ln 2 \Rightarrow \alpha = \frac{\ln 2}{\ln 2,56} = \frac{0,69}{0,94} = 0,734.$$

Така окончателният вид на функцията на разходите е

$$C(x) = 6x^{0,734}.$$

За да отговорим на въпроса колко изделия са произведени през третата седмица, ще трябва да пресметнем производството през първите три седмици. Тъй като за седмица се правят по 6000 лв. разходи, то за първите три седмици разходите възлизат на 18000 лв., следователно ще имаме

$$C(x) = 6x^{0,734} = 18 \text{ или } x^{0,734} = 3.$$

Логаритмуваме последното равенство и получаваме

$$0,734 \ln x = \ln 3 \Rightarrow \ln x = \frac{\ln 3}{0,734} = \frac{1,1}{0,734} = 1,5.$$

След антилогаритмуване ще имаме

$$x = e^{1,5} = 4,48.$$

Доколкото през първите три седмици са произведени 4480 изделия, а през първите две – 2560, то през третата седмица произведените изделия са 1920.

Очевидно, разходите направени за t на брой седмици $6t$ хил. лв. Тогава връзката между x и t получаваме от уравнението

$$C(x) = 6x^{0,734} = 6t = C(t),$$

изравняващо разходите като функции на количеството и на времето.

Получаваме

$$x^{0,734} = t \Rightarrow x = t^{\frac{1}{0,734}} = t^{1,362}.$$

б) При предположението, че за седмица (с фиксирани разходи от 6000 лв.) могат да се произведат най-много 2400 изделия, би следвало да очакваме пределна себестойност от $6000/2400 = 2,5$ лв. за брой. Тогава функцията на средните разходи ще бъде

$$AC(x) = \frac{C(x)}{x} = 2,5 + \frac{a}{x^{1-\alpha}} \quad \text{за } \alpha \in (0,1),$$

следователно ще имаме функция на разходите от вида

$$C(x) = 2,5x + ax^{\alpha}.$$

Коефициентите на тази квазилинейно-степенна функция ще се определят от данните на задачата $C(1) = 6$ и $C(2,56) = 12$. От първото условие получаваме

$$C(1) = 2,5 \cdot 1 + a \cdot 1^{\alpha} = 6 \Rightarrow a = 3,5 \quad \text{и} \quad C(x) = 2,5x + 3,5x^{\alpha},$$

а от второто –

$$C(2,56) = 2,5 \cdot 2,56 + 3,5 \cdot 2,56^{\alpha} = 12 \Rightarrow 2,56^{\alpha} = \frac{12 - 6,4}{3,5} = 1,6.$$

Тъй като $1,6^2 = 2,56$, то $\alpha = 1/2$ и

$$C(x) = 2,5x + 3,5x^{0,5} = 2,5x + 3,5\sqrt{x}.$$

За да определим произведеното количество през третата седмица, ще трябва да решим уравнението

$$2,5x + 3,5\sqrt{x} = 18.$$

Ако положим $z = \sqrt{x}$ ще получим квадратното уравнение

$$2,5z^2 + 3,5z - 18 = 0$$

с положителен корен

$$z = \frac{-3,5 + \sqrt{3,5^2 + 180}}{5} = \frac{-3,5 + \sqrt{192,25}}{5} = \frac{-3,5 + 13,865}{5} = 2,073.$$

Тогава за количеството x получаваме

$$x = z^2 = 2,073^2 = 4,297.$$

С други думи, през първите три седмици са произведени 4297 изделия, а през първите две – 2560. Тогава през третата седмица ще се произведат $4297 - 2560 = 1737$ изделия.

Функционалната зависимост $x = x(t)$ на произведеното количество x (хил. бр.) за време t (седмици) определяме (както в а)), изравнявайки разходите като функции на количеството и на времето:

$$C(x) = 2,5x + 3,5\sqrt{x} = 6t = C(t).$$

Получаваме квадратното уравнение с неизвестно $\sqrt{x}$

$$2,5x + 3,5\sqrt{x} - 6t = 0,$$

откъдето

$$\sqrt{x} = -0,7 + \sqrt{0,49 + 2,4t}.$$

След вдигане на квадрат получаваме

$$x = 0,98 + 2,4t - 1,4\sqrt{0,49 + 2,4t}.$$

10. Крива на обучението – диференциален модел

Разглеждаме функцията на обучение $L(t)$. Тази функция може да описва, например, производителността на служителя. Нека L_{max} бъде максималната възможна стойност на $L(t)$. В много случаи е на лице правилото: скоростта на обучение е пропорционална на оставащия обем (все още не научен) материал. Математически, това е представено с уравнението:

$$\frac{dL}{dt} = k(L_{max} - L)$$

където k е коефициент на пропорционалност. Това диференциално уравнение е уравнение с разделени променливи и лесно може да бъде решено в общ вид:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} = k(L_{max} - L) &\Rightarrow \frac{dL}{(L_{max} - L)} = kdt \\ &\Rightarrow \int \frac{dL}{(L_{max} - L)} = \int kdt \Rightarrow -\int \frac{d(L_{max} - L)}{(L_{max} - L)} = kt + \ln C \\ &\Rightarrow -\ln(L_{max} - L) = kt + \ln C \Rightarrow \ln(L_{max} - L) \\ &= -kt + \ln C \Rightarrow \ln(L_{max} - L) = \ln e^{-kt} + \ln C. \end{aligned}$$

След като се отървем от логаритмите, ние получаваме общото решение на диференциалното уравнение:

$$(L_{max} - L) = Ce^{-kt}.$$

Константата C може да бъде определена от първоначалното състояние: $L(t = 0) = M$. Следователно, $C = L_{max} - M$, в резултат на това кривата на обучение е описана с формулата:

$$L(t) = L_{max} - (L_{max} - M)e^{-kt}$$

В последният израз параметърът M представлява първоначалното ниво на знания или умения. В най-простият случай, може да се предположи, че $M = 0$. Другият параметър k е "контрол" на скоростта на обучение. Криви на обучение за различните стойности на M и k са показани на Рис. 3 и Рис. 4.

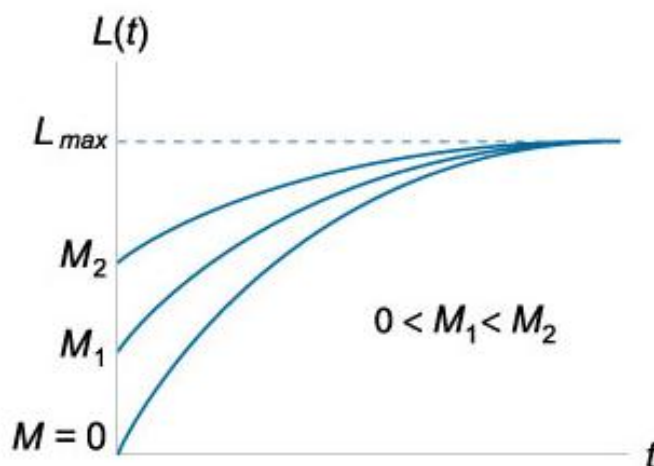


Рис. 3. Графики на криви на обучението при различни стойности на параметъра M

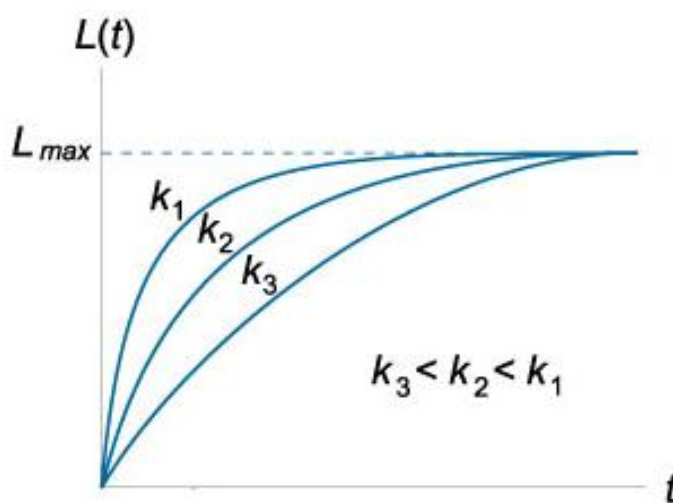


Рис. 4. Графики на кривата на обучението при различни стойности на параметъра k

Както може да се види, кривата на обучение L във всички случаи отбелязва по-бързо нарастване в началото на процеса, след това с доближаване до максималната стойност L_{max} се наблюдава намаляване скоростта на обучение. Разбира се, колкото по-голяма е стойността на параметъра k толкова по-стръмна е линията на обучението (в началото).

Да разгледаме дискретният вариант, т.е. диференчното уравнение, съответстващо на диференциалното уравнение, задаващо линията на опита. Тъй като

$$\frac{dL}{dt} \cong \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{L_{t+1} - L_t}{(t+1) - t} = L_{t+1} - L_t,$$

то получаваме

$$L_{t+1} - L_t = k(L_{max} - L_t) \quad \text{или} \quad \frac{L_{t+1} - L_t}{L_{max} - L_t} = k = \text{const.}$$

Преобразуваме малко диференчното уравнение и получаваме

$$L_{t+1} = (1 - k)L_t + kL_{max}.$$

Такава числова редица се нарича геометрико-аритметична прогресия. В общият случай тя се задава по следния начин

$$a_{n+1} = qa_n + d.$$

За a_1 получаваме

$$a_1 = qa_0 + d.$$

За a_2 ще имаме

$$a_2 = q(qa_0 + d) + d = q^2a_0 + qd + d = q^2a_0 + (1 + q)d = q^2a_0 + \frac{1 - q^2}{1 - q}d.$$

Индукционното допускане е, че общият член на тази числова редица има вида

$$a_n = q^n a_0 + \frac{1 - q^n}{1 - q}d.$$

Тогава за a_{n+1} ще имаме

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= q \left(q^n a_0 + \frac{1 - q^n}{1 - q}d \right) + d = q^{n+1}a_0 + \frac{1 - q^n}{1 - q}qd + d \\ &= q^{n+1}a_0 + \left(\frac{1 - q^n}{1 - q}q + 1 \right)d = q^{n+1}a_0 + \frac{q - q^{n+1} + 1 - q}{1 - q}d \\ &= q^{n+1}a_0 + \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}d. \end{aligned}$$

С това ние доказахме формулата по метода на математическата индукция.

В нашият случай ще имаме $a_0 = L_0 = M$, $q = 1 - k$ и $d = kL_{max}$. Заместваме в получената формула за общия член на геометрико-аритметичната прогресия и получаваме

$$\begin{aligned} L_t &= (1 - k)^t M + \frac{1 - (1 - k)^t}{1 - (1 - k)}kL_{max} = (1 - k)^t M + (1 - (1 - k)^t)L_{max} \\ &= L_{max} - (L_{max} - M)(1 - k)^t. \end{aligned}$$

Пример 21. Фармацевт в аптека трябва да провери 1000 рецепти на ден. Нов фармацевт след една седмица работа може да провери 100 рецепти на ден. Да се изчисли броят на рецептите, които фармацевта ще бъде в състояние да провери на ден след още една седмица работа.

Решение:

За простота, първоначалното ниво на умения, нека бъде нула: $M = 0$. Процесът на обучение може да бъде описан от следния закон:

$$L(t) = L_{max}(1 - e^{-kt}),$$

и тъй като по условие имаме $L_{max} = 1000$, то формулата за седмичната производителност на фармацевта ще бъде

$$L(t) = 1000(1 - e^{-kt}).$$

Ние ще определим параметъра k , знаейки, броят на рецептите, които са проверени след една седмица:

$$L(1) = 1000(1 - e^{-k}) = 100 \Rightarrow e^{-k} = 0,9$$

След логаритмуване получаваме

$$-k = \ln 0,9 \Rightarrow k = -\ln 0,9 = 0,105$$

Така намираме формулата за седмичната производителност на фармацевта

$$L(t) = 1000(1 - e^{-0,105t})$$

Сега може да се изчисли ефективността на новия фармацевт, две седмици след началото на работата:

$$L(2) = 1000(1 - e^{-0,105 \cdot 2}) = 1000(1 - e^{-0,21}) = 1000(1 - 0,811) = 189.$$

Пример 22. Да предположим, че новините, които се разпространяват в медиите са описани със закона на кривата на обучение. Какъв трябва да бъде процентът на "населението", което е наясно в самото начало с тази новина, така че през първата седмица нивото е 50%, а след четири седмици - 90%?

Решение.

Новината се разпространи по закона:

$$L(t) = L_{max} - (L_{max} - M)e^{-kt}$$

В горната формула времето t се изразява в седмици. Сега параметъра M представяме като rL_{max} , където r е в интервала $0 \leq r \leq 1$ и законът за разпространение добива вида

$$L(t) = L_{max}(1 - (1 - r)e^{-kt}).$$

Сега ще използваме данните за разпространение на новините – през първата седмица имаме $L(t) = 0,5L_{max}$ и през четвъртата - $L(4) = 0,9L_{max}$. Заместваме $t = 1$ и $t = 4$ във формулата за разпространение и получаваме

$$L(1) = L_{max}(1 - (1 - r)e^{-k}) = 0,5L_{max}$$

$$L(4) = L_{max}(1 - (1 - r)e^{-4k}) = 0,9L_{max}$$

Разделяме на L_{max} , ние получаваме система от уравнения с две неизвестни, които са r и k :

$$(1 - (1 - r)e^{-k}) = 0,5 \Rightarrow (1 - r)e^{-k} = 0,5$$

$$(1 - (1 - r)e^{-4k}) = 0,9 \Rightarrow (1 - r)e^{-4k} = 0,1$$

Логаритмуваме двете страни на всяко едно от уравненията:

$$\ln(1 - r) - k = \ln 0,5 = -0,693$$

$$\ln(1 - r) - 4k = \ln 0,1 = -2,303$$

Умножавам първото уравнение с (-4) и след това събирам двете уравнения:

$$\begin{aligned}-3 \ln(1-r) &= 4 \cdot 0,693 - 2,303 = 2,772 - 2,303 = 0,469 \Rightarrow \ln(1-r) \\ &= -0,156 \Rightarrow (1-r) = e^{-0,156} = 0,856 \Rightarrow r = 0,144\end{aligned}$$

В този случай, първоначалното ниво на разпространение на новината, трябва да бъде:

$$L(t) = M = rL_{max} = 0,144L_{max} = 14,4\% \text{от } L_{max}.$$

Пример 23. Да се определи функцията на производителност $L(t)$ и да се пресметне количеството, произведено през третата седмица при условията на пример 1 б).

Решение:

Допускаме, че производителността се задава чрез формулата

$$L(t) = L_{max} - (L_{max} - M)e^{-kt},$$

където $L(t)$ е количеството, произведено през t -тата седмица в хил. бр. тъй като (по условие) $L_{max} = 2,4$, то ще имаме

$$L(t) = 2,4 - (2,4 - M)e^{-kt}$$

Използваме, че през първата седмица (т.е. при $t = 1$) са произведени 1 хил. бр.:

$$L(1) = 2,4 - (2,4 - M)e^{-k} = 1,$$

а през втората седмица – 1,56 хил. бр.:

$$L(2) = 2,4 - (2,4 - M)e^{-2k} = 1,56.$$

Така получаваме следната система от две уравнения за неизвестните коефициенти M и k

$$(2,4 - M)e^{-k} = 1,4$$

$$(2,4 - M)e^{-2k} = 0,84.$$

Логаритмуваме горните уравнения и получаваме

$$\ln(2,4 - M) - k = \ln 1,4 = 0,336$$

$$\ln(2,4 - M) - 2k = \ln 0,84 = -0,174.$$

То извадим второто уравнение от първото, получаваме коефициента $k = 0,51$.
Тогава от първото уравнение ще имаме

$$\ln(2,4 - M) = 0,336 + 0,51 = 0,846.$$

След антилогаритмуване получаваме

$$(2,4 - M) = e^{0,846} = 2,33.$$

Тогава, окончателният вид на линията на опита ще бъде

$$L(t) = 2,4 - 2,33e^{-0,51t}.$$

За да получим количеството, произведено през третата седмица, необходимо е да намерим

$$L(3) = 2,4 - (2,33)e^{-1,53} = 1,895.$$

Забележка 1. При двата подхода – разходния и диференциалния се получават два различни резултата за количеството, което ще се произведе през третата седмица – 1737 бр. чрез разходния подход и 1895 бр. чрез диференциалния. Това е така, защото процесът на придобиване на опит (обучението) е моделиран чрез два съвсем различни модела. В случая, при втория модел, опитът се придобива по-бързо. Това е и фундаменталната разлика между чистата математика и приложната: в приложната отговорът не е еднозначен – резултатът зависи не само от първоначалните данни, но и от избрания математически модел.

Забележка 2. Не бива да се бърка количеството $x(t)$ от разходния модел с количеството $L(t)$ от диференциалния. Първото е количеството, произведено до момент t включително, а второто – количеството, произведено в момент t . Връзката между двете величини е

$$L(t) = x(t) - x(t - 1).$$

Разбира се, горното равенство е вярно, ако величините $x(t)$ и $L(t)$ са получени от един и същ модел.

11. Крива на обучението – обобщен диференциален модел

Законът за производителността в процеса на обучение (натрупване на опит) беше изведен на база на предположението, че скоростта на нарастване на производителността е пропорционална във всеки момент на разликата между пределната производителност и достигнатата към този момент производителност.

Но не всички емпирични данни от реални процеси на обучение потвърждават това предположение. Така например, ако $L(1) = 10$, $L(2) = 16$, $L(3) = 21$, $L(4) = 25$ (примера в началото на параграф 9), то би следвало да е изпълнено

$$\frac{L(2) - L(1)}{L_{max} - L(1)} = \frac{L(3) - L(2)}{L_{max} - L(2)} = \frac{L(4) - L(3)}{L_{max} - L(3)},$$

Като всички тези пропорции трябва да са равни на k . От първото равенство ще имаме

$$\frac{16 - 10}{L_{max} - 10} = \frac{21 - 16}{L_{max} - 16} \Rightarrow 6(L_{max} - 16) = 5(L_{max} - 10) \Rightarrow L_{max} = 46 \text{ и}$$

$$\frac{L(2) - L(1)}{L_{max} - L(1)} = \frac{L(3) - L(2)}{L_{max} - L(2)} = \frac{1}{6}.$$

От второто равенство ще имаме

$$\frac{21 - 16}{L_{max} - 16} = \frac{25 - 21}{L_{max} - 21} \Rightarrow 5(L_{max} - 21) = 4(L_{max} - 16) \Rightarrow L_{max} = 41 \text{ и}$$

$$\frac{L(3) - L(2)}{L_{max} - L(2)} = \frac{L(4) - L(3)}{L_{max} - L(3)} = \frac{1}{5}.$$

Т.е. получават се две различни стойности за параметрите на модела L_{max} и k .

Това ни навежда на мисълта да направим обобщение на диференциалния модел на кривата на обучение, при който коефициентът на пропорция k може да се променя с времето, т.е. $k = k(t)$. Тогава диференциалното уравнение на модела ще бъде

$$\frac{dL}{dt} = k(t)(L_{max} - L),$$

По същият начин получаваме общото решение

$$(L_{max} - L) = C e^{-kt}.$$

$$L(t) = L_{max} - C e^{-\int k(t)dt}.$$

Пример 24. Предполага се, че за модел на обучение с променлива пропорция $k(t)$ е от вида

$$k(t) = \frac{k_0}{at + 1},$$

като $k(0) = 0,2$ и $k(50) = 0,1$. Ако допуснем, че $L(0) = M = 0$, то след колко време ще бъде достигната 90% от максималната производителност? А 99%?

Решение:

Да намерим общото решение за $L(t)$ при функция $k(t)$ от такъв вид. Първо ще трябва да интегрираме $k(t)$:

$$\int k(t)dt = \int \frac{k_0}{at+1} dt = \frac{k_0}{a} \int \frac{d(at+1)}{at+1} = \frac{k_0}{a} \ln(at+1).$$

Тогава за $e^{-\int k(t)dt}$ ще имаме

$$e^{-\int k(t)dt} = e^{-\frac{k_0}{a} \ln(at+1)} = \frac{1}{(at+1)^{\frac{k_0}{a}}}.$$

Окончателно, за общото решение получаваме

$$L(t) = L_{max} - \frac{C}{(at+1)^{\frac{k_0}{a}}}.$$

Заместваме $t = 0$ за да определим интеграционната константа C :

$$L(0) = L_{max} - \frac{C}{(a \cdot 0 + 1)^{\frac{k_0}{a}}} = L_{max} - C \Rightarrow C = L_{max} - L(0) = L_{max} - M.$$

Така получаваме окончателният вид на функцията на производителност $L(t)$ при променлив коефициент от такъв вид:

$$L(t) = L_{max} - \frac{L_{max} - M}{(at+1)^{\frac{k_0}{a}}}.$$

Тъй като допускаме, че $M = 0$, то за $L(t)$ получаваме

$$L(t) = L_{max} \left(1 - \frac{1}{(at+1)^{\frac{k_0}{a}}} \right).$$

Остава да определим параметрите k_0 и a на функцията $k(t)$ от условията на задачата. Ще имаме

$$k(0) = \frac{k_0}{a \cdot 0 + 1} = 0,2 \Rightarrow k_0 = 0,2 \text{ и } k(t) = \frac{0,2}{at+1}$$

$$k(50) = \frac{0,2}{a \cdot 50 + 1} = 0,1 \Rightarrow a \cdot 50 + 1 = 2 \Rightarrow a = 0,02 \text{ и } k(t) = \frac{0,2}{0,02t+1}.$$

Тогава за $L(t)$ получаваме

$$L(t) = L_{max} \left(1 - \frac{1}{(0,02t + 1)^{10}} \right).$$

Да направим сравнение с крива на обучение, получаваща се при $k = \text{const} = 0,2$ (в разглеждания случай $k(t)$ е намаляваща функция). Съгласно изводите от предишния параграф за $k = 0,2$ ($M = 0$ и произволно L_{max} ще имаме

$$L(t) = L_{max}(1 - e^{-0,2t}).$$

Сравнението между двата модела правим за $t = 1, 2, 3, 5, 10$ и $L_{max} = 100$.

t	$L(t)$ при $k = \text{const} = 0,2$	$L(t)$ при $k(t) = \frac{0,2}{0,02t+1}$
1	18,13	17,97
2	32,97	32,44
3	45,12	44,16
5	63,21	61,45
10	86,47	83,85

Вижда се, че при разглеждания модел има забавяне (увеличаващо се с течение на времето) в сравнение със стандартния модел.

Сега трябва да отговорим на въпроса: при каква стойност на t ще бъде достигната 90% от максималната производителност? Ще имаме

$$\begin{aligned} L_{max} \left(1 - \frac{1}{(0,02t + 1)^{10}} \right) &= 0,9L_{max} \Rightarrow \frac{1}{(0,02t + 1)^{10}} = 0,1 \Rightarrow (0,02t + 1)^{10} \\ &= 10 \Rightarrow 0,02t + 1 = 10^{0,1} \cong 1,26 \text{ и } t \cong 13. \end{aligned}$$

И наистина

$$L(13) = L_{max} \left(1 - \frac{1}{(0,02 \cdot 13 + 1)^{10}} \right) = 0,9008L_{max}.$$

Аналогични са пресмятанията за 99% от L_{max} :

$$\begin{aligned} L_{max} \left(1 - \frac{1}{(0,02t + 1)^{10}} \right) &= 0,99L_{max} \Rightarrow \frac{1}{(0,02t + 1)^{10}} = 0,01 \Rightarrow (0,02t + 1)^{10} \\ &= 100 \Rightarrow 0,02t + 1 = 100^{0,1} \cong 1,58 \text{ и } t \cong 29. \end{aligned}$$

$$L(29) = L_{max} \left(1 - \frac{1}{(0,02 \cdot 29 + 1)^{10}} \right) = 0,9897L_{max}.$$



Рис. 5. Иновациите преди и сега - стоманения плуг на Джон Дир (XIX в.) и Apple Watch

12. Базов модел на разпространение на иновациите

През последните 50-60 години са създадени много математически модели на разпространение на иновативни продукти на пазарите.

Да започнем с очевидната схема (показана на рис. 6) за разпространение на един иновативен продукт сред потребителите.

Нека

$T(t)$ – общ брой на индивидите на пазара в момент от времето t ;

$M(t)$ – общ брой на потенциалните потребители на иновативния продукт в момент от времето t ;

$N(t)$ – общ брой действителни потребители на иновативния продукт в момент от времето t ;

$m(t) = \frac{dM(t)}{dt}$ – брой на индивидите, преминаващи за безкрайно малко време dt от необхванатия пазар към потенциалния;

$n(t) = \frac{dN(t)}{dt}$ – **скорост на разпространение на иновацията** – брой на индивидите, преминаващи за безкрайно малко време dt от потенциалния пазар към действителния.



Рис. 6. Преместване на потребителите между сегментите на иновационния пазар

В теорията на иновациите под **дифузия на иновацията** се разбира решението

$$N = N(t)$$

на задачата на Коши за обикновеното диференциално уравнение

$$\frac{dN(t)}{dt} = f(t, N(t))$$

с начално условие

$$N(0) = N_0 ,$$

където $N(t)$ е обема на разпространение на иновацията към момент от времето t (който е равен или на броя продадени екземпляра от иновативния продукт или на броя на действителните потребители); $f(t, N(t))$ е функцията, определяща вида

на дифузионната крива, отразяваща предположението за начина на разпространение на иновацията. Предполагаме, че $N(t)$ е непрекъснато диференцируема функция, а $f(t, N(t))$ – унимодална.

Забележка. Унимодална функция в интервала $[a, b]$ се нарича функция, притежаваща единствен минимум (максимум) x^* в този интервал и монотонна от двете страни на x^*

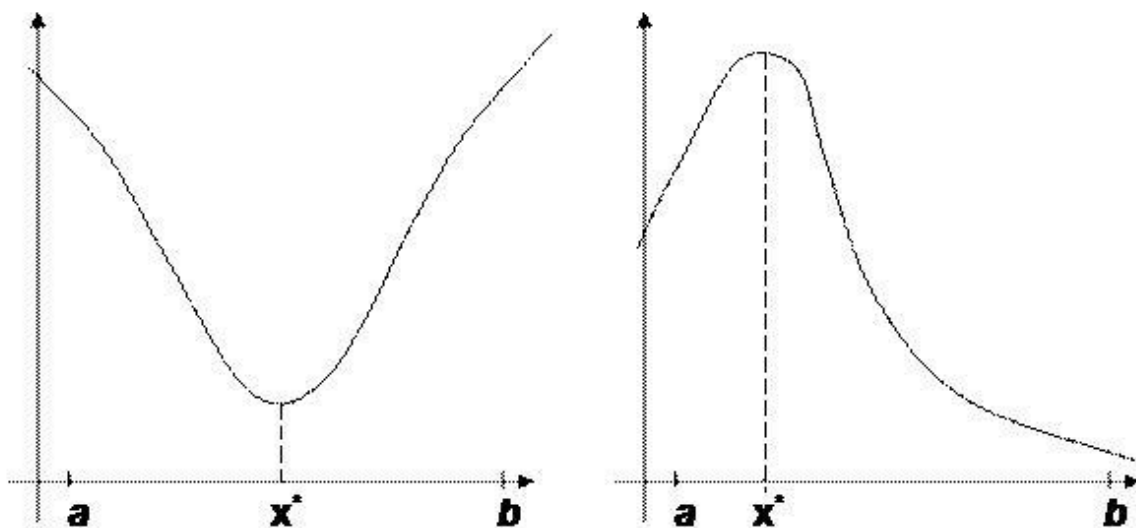


Рис. 7. Графики на унимодални функции

Базовият модел на разпространение на иновациите е

$$\frac{dN(t)}{dt} = g(t, N(t))(M - N(t))$$

В този модел се предполага, че общият брой на потенциални потребители M е постоянен във времето, а скоростта на разпространение на иновацията $\frac{dN(t)}{dt}$ във всеки момент е пропорционална на обема на потенциалния пазар $M - N(t)$. При увеличаването на действителните потребители на продукта $N(t)$ намаляват потенциалните потребители $M - N(t)$, което забавя скоростта на разпространение на иновацията.

13. Фундаментален модел на разпространение на иновациите

Общ фундаментален модел. Функцията $g(t, N(t))$ в израза на базовия модел се нарича **скорост на адаптацията** и обикновено се интерпретира като вероятност потенциалния потребител да закупи иновативния продукт в момент t . Във фундаменталния модел тази функция се приема за линейна функция на $N(t)$:

$$g(t, N(t)) = a + bN(t)$$

Като заместим скоростта на адаптация в базовия модел получаваме

$$\frac{dN(t)}{dt} = (a + bN(t))(M - N(t)),$$

което е обикновеното диференциално уравнение на фундаменталния модел за разпространение на иновациите. Параметрите a и b в този модел отразяват съответно външните и вътрешни влияния върху скоростта на адаптация. Смята се, че събираемостта $a(M - N)$, отразяващо външното влияние върху потребителя е вследствие от маркетингови и рекламни компании (внушаващи на потребителя, че иновативния продукт му е необходим). Вътрешното влияние, на което съответства събираемостта $bN(M - N)$ е резултат от комуникацията между действителните и потенциалните потребители (в резултат от което на потенциалните потребители се предава информация за иновативния продукт).

Модели с външно влияние. Първите модели за разпространение на иновациите са се основавали на предположението, че скоростта на разпространение на иновацията $\frac{dN(t)}{dt}$ зависи само от потенциалната възможност за насищане на пазара, с други думи, само от броя на потенциалните потребители $M - N(t)$, като коефициентът a отразява иновационността на потребителите (тяхната нужда от иновацията) и ефективността на стратегията на продавача (маркетинг и реклама). Такива модели на външно влияние са частни случаи на фундаменталния модел на разпространяване на иновациите и се получават при $b = 0$. Съответното обикновено диференциално уравнение добива вида

$$\frac{dN(t)}{dt} = a(M - N(t))$$

Разделяйки променливите получаваме

$$\int \frac{dN}{M - N} = \int a dt$$

След интегриране получаваме общото решение

$$\ln(M - N) = -at + C,$$

откъдето

$$N(t) = M - Ce^{-at}$$

Чрез началното условие на задачата на Коши $N(0) = N_0$ определяме $C = M - N_0$. Така окончателно ще имаме

$$N(t) = M - (M - N_0)e^{-at}$$

Графиката на решението на модела $N = N(t)$ е дадена на рис. 8

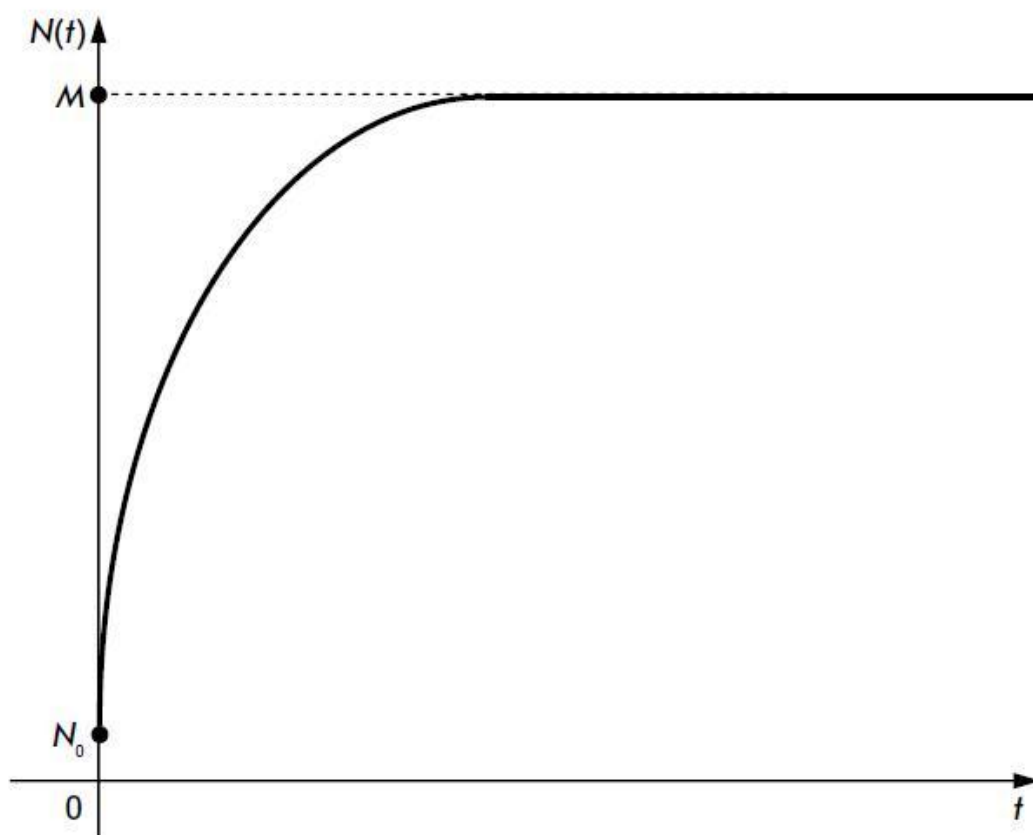


Рис. 8. Ръст на действителния пазар при модела с външно влияние

За първи път в теорията на иновациите функции от този вид се появяват през 1957 г. в изследванията на Дж. Колман, Е. Катц и Х. Менцел, които с тяхна помощ описват разпространението на новите лекарства сред лекарите. През 1960 г. Л. Форт и Дж. Уудлок прогнозираят чрез такива функции търсенето на някои видове стоки, а Р. Хемблин, Б. Джакобсън и Дж. Милър през 1973 г. построяват модел за разпространяване на стачките и политическите демонстрации.

Основните ограничения на модела с външно влияние се състои в това, че този модел не отчита взаимодействието между действителните и потенциалните потребители на иновациите. Поради това този модел може да се използва при описване процеса на разпространение на иновации, които са по-прости и с малка социална значимост.

Забележка. Моделът на разпространение на иновациите с външно влияние съвпада с модела на придобиване на опит (обучение).

Модели с вътрешно влияние. Те представляват частен случай на фундаменталния модел на разпространение на иновациите при $a = 0$. Тогава диференциалното уравнение на модела изглежда така

$$\frac{dN(t)}{dt} = bN(t)(M - N(t))$$

Основното предположение, лежащо в основата на този модел се състои в допускането, че скоростта на разпространение на иновацията $\frac{dN(t)}{dt}$ е пропорционална както на потенциалната възможност за насищане на пазара $M - N(t)$, така и на достигнатото ниво на разпространение $N(t)$. При това се предполага, че външните влияния (нуждата на индивида от иновацията и общата информация за продукта, получена не по пътя на лични контакти между действителните и потенциалните потребители) не оказва въздействие върху процеса на вземане на решение за придобиване на продукта. В този модел се счита, че потребителят взема това решение само под въздействие на контактите си с действителни ползватели на иновативния продукт. Коефициентът b в горното уравнение е пропорционален на вероятността за среща на двама случайно избрани индивиди, единият от които ползва продукта, а другия – още не.

Горното диференциално уравнение е с разделени променливи. Ще имаме

$$\int \frac{dN}{N(M - N)} = \int b dt$$

За да интегрираме лявата страна представяме израза $\frac{1}{N(M - N)}$ като сума на две дроби с неопределени коефициенти

$$\frac{1}{N(M - N)} = \frac{A}{N} + \frac{B}{M - N} = \frac{AM - AN + BN}{N(M - N)}$$

От системата $B - A = 0, AM = 1$ намираме $A = B = \frac{1}{M}$ и

$$\frac{1}{N(M - N)} = \frac{1}{M} \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{M - N} \right)$$

Тогава ще имаме

$$\int \frac{dN}{N} + \int \frac{dN}{M - N} = bMt + C$$

или

$$\ln \frac{N}{M-N} = bMt + C \Leftrightarrow \frac{N}{M-N} = C_1 e^{bMt}$$

за $C_1 = e^C$. Окончателно получаваме

$$N(t) = \frac{C_1 M e^{bMt}}{1 + C_1 e^{bMt}} = \frac{M}{1 + C_2 e^{-bMt}}$$

за $C_2 = C_1^{-1}$. Това е общото решение на диференциалното уравнение. За определяне на интеграционната константа C_2 ще използваме началното условие на задачата на Коши. Имаме

$$N(0) = \frac{M}{1 + C_2} = N_0 \Rightarrow C_2 = \frac{M - N_0}{N_0}$$

Така достигаме до окончателното решение на модела

$$N(t) = \frac{M}{1 + \frac{M - N_0}{N_0} e^{-bMt}}$$

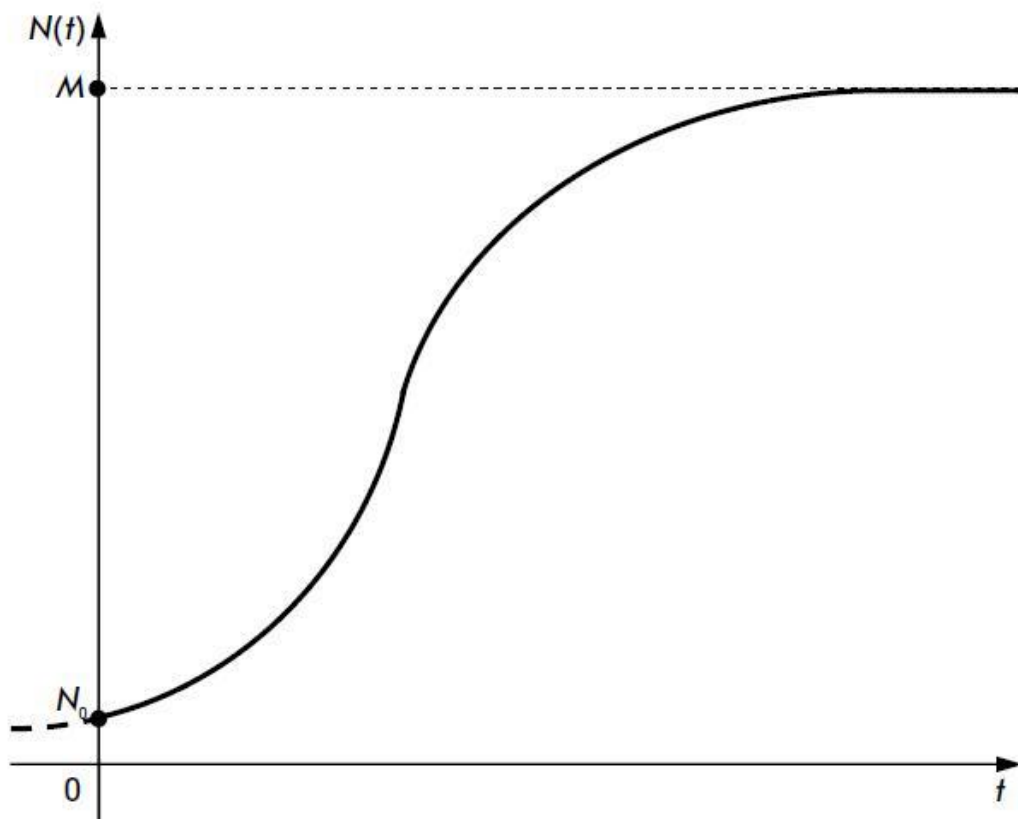


Рис. 9. Ръст на действителния пазар при модел с вътрешно влияние

Функцията $N = N(t)$, описваща разпространението на иновация в случай на вътрешно влияние се нарича *S- линия* или **логистична линия**. Нейната графика е представена на рис. 9.

Първите модели с вътрешно влияние са предложени от Ц. Грилехес през 1957 г. и Е. Менсфийлд през 1961 г. Ц. Грилехес е изучавал разпространението на хибридни сортове царевица сред фермерите от различни региони на САЩ, а Е. Менсфийлд – факторите, влияещи на разпространението на иновациите в различни отрасли на икономиката на САЩ.

Модели със смесено влияние. Най-разпространените модели на разпространение на иновациите са тези, при които и двата коефициента a и b са различни от нула – моделите със смесено влияние. Те се основават на така наречената **комуникационна хипотеза**, формулирана от П. Лазарсфелд, Б. Берелсон и Х. Гаудет през 1948 г. Тази хипотеза се състои в предположението, че съобщенията за продукта в средствата за масово осведомяване не оказват влияние върху основната част от потенциалните потребители, но достигат до определена малка група, която след това влияе на останалите потребители.

Моделите със смесено влияние предполагат, че на процеса на вземане на решение за придобиване на иновативния продукт оказват влияние и външните фактори – нуждата на индивида от продукта и съобщенията за него в средствата за масово осведомяване и вътрешните фактори – личните контакти на действителните ползватели с потенциалните.

Диференциалното уравнение на модела със смесено влияние е

$$\frac{dN(t)}{dt} = (a + bN(t))(M - N(t))$$

или

$$\int \frac{dN}{(a + bN)(M - N)} = \int dt$$

Разлагаме дробта $\frac{1}{(a+bN)(M-N)}$ по метода на неопределените коефициенти. Имаме

$$\frac{1}{(a + bN)(M - N)} = \frac{A}{a + bN} + \frac{B}{M - N} = \frac{AM - AN + Ba + BbN}{N(M - N)}$$

От системата $Bb - A = 0, AM + Ba = 1$ получаваме $B = \frac{1}{a+bM}$ и $A = \frac{b}{a+bM}$. Тогава ще имаме

$$\frac{1}{a + bM} \left(\int \frac{bdN}{a + bN} + \int \frac{dN}{M - N} \right) = t + C$$

или

$$\frac{1}{a + bM} \ln \frac{a + bN}{M - N} = t + C$$

откъдето

$$\frac{a + bN}{M - N} = e^{(a+bM)(t+C)}$$

Окончателно получаваме общото решение на модела

$$N(t) = \frac{M - ae^{-(a+bM)(t+C)}}{1 + be^{-(a+bM)(t+C)}}$$

Сега остава да определим интеграционната константа C от началното условие на задачата на Коши. Имаме

$$N(0) = \frac{M - ae^{-(a+bM)C}}{1 + be^{-(a+bM)C}} = N_0 \Rightarrow e^{-(a+bM)C} = \frac{M - N_0}{a + bN_0}$$

Така достигаме до окончателното решение на модела

$$N(t) = \frac{M - a \frac{M - N_0}{a + bN_0} e^{-(a+bM)t}}{1 + b \frac{M - N_0}{a + bN_0} e^{-(a+bM)t}}$$

или

$$N(t) = \frac{M(a + bN_0) - a(M - N_0)e^{-(a+bM)t}}{(a + bN_0) + b(M - N_0)e^{-(a+bM)t}}$$

И наистина, при $b = 0$ получаваме

$$N(t) = M - (M - N_0)e^{-at}$$

което е решението на модела с външно влияние, а при $a = 0$

$$N(t) = \frac{M}{1 + \frac{M - N_0}{N_0} e^{-bMt}}$$

решението на модела с вътрешно влияние.

Графиката на функцията $N = N(t)$, показана на рис. 10 се нарича **обобщена логистична линия**.

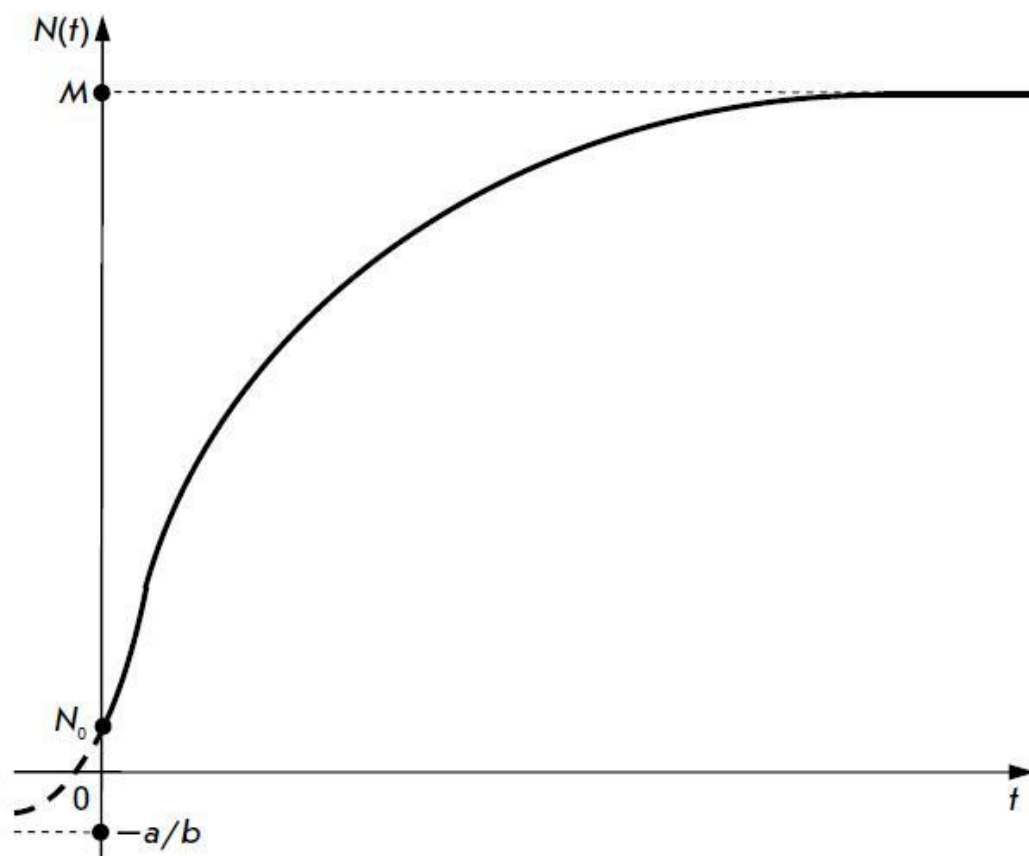


Рис. 10. Ръст на действителния пазар при модел със смесено влияние

Пример 25. Нека търговска компания реализира някакъв иновативен продукт, за който в момента $t = 0$ от реклама в средствата за масова информация са получили информация 1% от общия брой M на потенциалните потребители. По-нататък тази информация се разпространява чрез общуване на хората помежду си. Известно е, че разпространение на информацията се извършва съобразно модела с вътрешно влияние, като $bM = 0,2$. За какво време броя на потребителите, осведомени за продукта ще достигнат до 80% от общия брой M на потенциалните потребители.

Решение:

Тъй като модела на разпространение на иновациите е с вътрешно влияние, то трябва да използваме формулата

$$N(t) = \frac{M}{1 + \frac{M - N_0}{N_0} e^{-bMt}}$$

Тъй като $N_0 = 1\%$ от $M = 0,01M$ и $bM = 0,2$, то като заместим във формулата, получаваме

$$N(t) = \frac{M}{1 + \frac{M - 0,01M}{0,01M} e^{-0,2t}} = \frac{M}{1 + 99e^{-0,2t}}.$$

За да определим времето, след което ще бъдат обхванати 80% от общия брой M на потенциалните потребители, трябва да решим уравнението

$$\frac{M}{1 + 99e^{-0,2t}} = 0,8M.$$

Последователно получаваме

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + 99e^{-0,2t}} = 0,8 &\Rightarrow 1 + 99e^{-0,2t} = 1,25 \Rightarrow 99e^{-0,2t} = 0,25 \Rightarrow e^{-0,2t} = \frac{0,25}{99} \\ &= 0,002525 \Rightarrow -0,2t = \ln 0,002525 \cong -5,98 \text{ и } t \cong 30. \end{aligned}$$

И наистина, при $t = 30$ ще имаме

$$N(30) = \frac{M}{1 + 99e^{-0,2 \cdot 30}} = \frac{M}{1 + 99e^{-6}} = 0,797M$$

Пример 26. Известно е, че разпространението на даден иновативен продукт се реализира посредством закона

$$N'(t) = 0,4N(t) - 0,002N^2(t),$$

като при $t = 0$ са обхванати 10% от потенциалните потребители на продукта. След колко единици време скоростта на нарастване на потребителите от растяща ще стане намаляваща.

Решение:

Преобразуваме закона за разпространение

$$N'(t) = 0,4N(t) - 0,002N^2(t) = 0,002N(t)(200 - N(t)),$$

следователно става дума за разпространение на иновациите с вътрешно влияние с параметри $b = 0,002$, $M = 200$ и $N_0 = 10\%$ от $M = 0,1 \cdot 200 = 20$. Заместваме тези стойности във формулата

$$N(t) = \frac{M}{1 + \frac{M - N_0}{N_0} e^{-bMt}}$$

и получаваме

$$N(t) = \frac{200}{1 + \frac{200 - 20}{20} e^{-0,002 \cdot 200t}} = \frac{200}{1 + 9e^{-0,4t}}.$$

Диференцираме закона за разпространение повторно и получаваме

$$N''(t) = 0,4N'(t) - 0,004N(t)N'(t) = 0,004N'(t)(100 - N(t))$$

Тъй като $N'(t) > 0$, то ще следва че

при $100 - N(t) > 0$, т. е. $N(t) < 100$ ще имаме $N''(t) > 0$

при $100 - N(t) < 0$, т. е. $N(t) > 100$ ще имаме $N''(t) < 0$.

Тогава, при $N(t) = 100$ ще става смяна на характера на разпространение - скоростта на нарастване на потребителите от растяща ще стане намаляваща. Така задачата се свежда до намирането на това t , при което се получава $N(t) = 100$. Ще имаме

$$\begin{aligned} N(t) = \frac{200}{1 + 9e^{-0,4t}} = 100 &\Rightarrow 1 + 9e^{-0,4t} = 2 \Rightarrow 9e^{-0,4t} = 1 \Rightarrow e^{-0,4t} = \frac{1}{9} \\ &\Rightarrow -0,4t = \ln \frac{1}{9} \cong -2,2 \Rightarrow t = 5,5. \end{aligned}$$

Пример 27. За процеса на разпространение на иновация със смесено влияние е известно, че:

- при $t = 0$ са обхванати 10% от потенциалните потребители;
- при $t = 4,2$ са обхванати 30% от потенциалните потребители и тогава скоростта на нарастване на потребителите от растяща става намаляваща.

Да се намери закона за разпространение на продукта. След колко единици време половината от потенциалните потребители са станали действителни.

Решение:

Първото условие означава, че $N_0 = 10\%$ от $M = 0,1M$.

След като разпространението на иновацията е със смесено влияние, то закона за разпространение на иновацията ще бъде

$$N'(t) = (a + bN(t))(M - N(t)).$$

Диференцираме повторно и получаваме

$$\begin{aligned} N''(t) &= bN'(t)(M - N(t)) - (a + bN(t))N'(t) \\ &= N'(t)(bM - bN(t) - a - bN(t)) = N'(t)(bM - a - 2bN(t)). \end{aligned}$$

Знакът на втората производна $N''(t)$ ще се определя от знака на израза $bM - a - 2bN(t)$, тъй като $N'(t) > 0$. Този израз се нулира при

$$N(t) = \frac{bM - a}{2b} = \frac{M}{2} - \frac{a}{2b},$$

значи тогава ще става смяната на характера на разпространение. От друга страна, в условието на задачата е дадено, че характера на разпространение се сменя при $N(t) = 0,3M$. Приравняваме двете условия и получаваме

$$\frac{M}{2} - \frac{a}{2b} = 0,3M \Rightarrow \frac{a}{2b} = 0,2M \Rightarrow a = 0,4bM.$$

Във формулата за $N(t)$ при разпространение на иновацията със смесено влияние

$$N(t) = \frac{M - a \frac{M - N_0}{a + bN_0} e^{-(a+bM)t}}{1 + b \frac{M - N_0}{a + bN_0} e^{-(a+bM)t}}$$

заместваме N_0 с $0,1M$ и a с $0,4bM$ и получаваме

$$N(t) = \frac{M - 0,4bM \frac{M - 0,1M}{0,4bM + 0,1bM} e^{-(0,4bM+bM)t}}{1 + b \frac{M - 0,1M}{0,4bM + 0,1bM} e^{-(0,4bM+bM)t}} = \frac{1 - 0,72e^{-1,4bMt}}{1 + 1,8e^{-1,4bMt}} M.$$

Сега ще използваме, че $N(4,2) = 0,3M$. Това води до уравнението

$$\begin{aligned} \frac{1 - 0,72e^{-5,88bM}}{1 + 1,8e^{-5,88bM}} &= 0,3 \Rightarrow 1 - 0,72e^{-5,88bM} = 0,3 + 0,54e^{-5,88bM} \Rightarrow 0,7 \\ &= 1,26e^{-5,88bM} \Rightarrow e^{-5,88bM} = \frac{0,7}{1,26} = \frac{5}{9} \Rightarrow -5,88bM \\ &= \ln \frac{5}{9} \cong -0,588 \Rightarrow bM = 0,1. \end{aligned}$$

Така окончателно, за $N(t)$ получаваме

$$N(t) = \frac{1 - 0,72e^{-0,14t}}{1 + 1,8e^{-0,14t}} M.$$

За да намерим кога иновацията, разпространявайки се по този начин, ще обхване 50% от потенциалните потребители, ще трябва да решим уравнението $N(t) = 0,5M$ или

$$\begin{aligned}
N(t) &= \frac{1 - 0,72e^{-0,14t}}{1 + 1,8e^{-0,14t}} M = 0,5M \Rightarrow 1 - 0,72e^{-0,14t} = 0,5 + 0,9e^{-0,14t} \Rightarrow 0,5 \\
&= 1,62e^{-0,14t} \Rightarrow e^{-0,14t} = \frac{0,5}{1,62} = \frac{25}{81} \Rightarrow -0,14t \\
&= \ln \frac{25}{81} \cong -1,176 \Rightarrow t \cong 8,4.
\end{aligned}$$

Пример 28. Предполага се, че дадена иновативна стока се разпространява само чрез вътрешно влияние. Известни са $N_0 = 10$, $N_1 = N(1) = 13,5$ и $N_2 = N(2) = 18$. Да се намерят параметрите на модела и формулата на разпространението, да се пресметнат N_1 , N_2 (за проверка), N_3 , N_5 и N_{10} .

Решение:

Тъй като $N_0 = 10$, то като заместим във формулата за $N(t)$ в случай на разпространение с вътрешно влияние, получаваме

$$N(t) = \frac{M}{1 + \frac{M - 10}{10} e^{-bMt}} = \frac{M}{1 + (0,1M - 1)e^{-bMt}}.$$

Като използваме, че $N(1) = 13,5$ и $N(2) = 18$ ще имаме

$$N(1) = \frac{M}{1 + (0,1M - 1)e^{-bM}} = 13,5 \Rightarrow M = 13,5 + (1,35M - 13,5)e^{-bM}$$

$$N(2) = \frac{M}{1 + (0,1M - 1)e^{-2bM}} = 18 \Rightarrow M = 18 + (1,8M - 18)e^{-2bM}.$$

Тъй като $e^{-2bM} = (e^{-bM})^2$, то горната система може да се разглежда като система от две уравнения за две неизвестни. След полагането $M = x$ и $e^{-bM} = y$, тази система добива вида

$$x - 13,5 - 1,35xy + 13,5y = 0$$

$$x - 18 - 1,8xy^2 + 18y^2 = 0$$

От всяко от тези уравнения изразяваме неизвестното x :

$$x = \frac{13,5(1 - y)}{1 - 1,35y} \quad \text{и} \quad x = \frac{18(1 - y^2)}{1 - 1,8y^2}.$$

Така можем да получим уравнение за y :

$$\frac{13,5(1 - y)}{1 - 1,35y} = \frac{18(1 - y^2)}{1 - 1,8y^2} = \frac{18(1 - y)(1 + y)}{1 - 1,8y^2}$$

или

$$\frac{13,5}{1 - 1,35y} = \frac{18(1 + y)}{1 - 1,8y^2}.$$

След преобразуване на горното уравнение, получаваме следното уравнение за неизвестното y :

$$13,5 - 24,3y^2 = 18 - 24,3y + 18y - 24,3y^2 \Rightarrow 6,3y = 4,5 \Rightarrow y = \frac{5}{7}.$$

Като заместим в един от изразите за x намираме

$$x = \frac{13,5(1 - y)}{1 - 1,35y} = \frac{13,5\left(1 - \frac{5}{7}\right)}{1 - 1,35 \cdot \frac{5}{7}} = \frac{\frac{27}{7}}{\frac{7 - 1,35 \cdot 5}{7}} = \frac{27}{0,25} = 108.$$

Тъй като сме положили $M = x$, то получаваме $M = 108$. За $e^{-bM} = y$ ще имаме

$$e^{-bM} = \frac{5}{7} \Rightarrow bM = -\ln \frac{5}{7} = \ln \frac{7}{5} = \ln 1,4 \cong 0,336.$$

Като заместим намерените параметри в израза за $N(t)$ получаваме окончателно

$$N(t) = \frac{M}{1 + (0,1M - 1)e^{-bMt}} = \frac{108}{1 + 9,8e^{-0,336t}}.$$

Като използваме горната формула, можем да извършим пресмятанията

$$N(1) = \frac{108}{1 + 9,8e^{-0,336}} = \frac{108}{1 + 9,8 \cdot 0,7146} = \frac{108}{8} = 13,5$$

$$N(2) = \frac{108}{1 + 9,8e^{-0,672}} = \frac{108}{1 + 9,8 \cdot 0,5107} = \frac{108}{6} = 18$$

$$N(3) = \frac{108}{1 + 9,8e^{-1,008}} = \frac{108}{1 + 9,8 \cdot 0,3649} = \frac{108}{4,576} = 23,6$$

$$N(5) = \frac{108}{1 + 9,8e^{-1,68}} = \frac{108}{1 + 9,8 \cdot 0,1864} = \frac{108}{2,826} = 38,2$$

$$N(10) = \frac{108}{1 + 9,8e^{-3,36}} = \frac{108}{1 + 9,8 \cdot 0,0347} = \frac{108}{1,34} = 80,6$$

14. Демографски модели

Ръстът на населението (в света, в една отделна държава или регион) е динамичен процес, който ефективно може да се опише с подходящи диференциални (или диференчни) уравнения. По-долу ще разгледаме някои основни математически демографски модели, предложени от икономисти, математици и физици.

Малтусиански модел на демографския ръст

Най-простият модел за ръста на населението е бил предложен още през 1798 год. от британския учен Томас Робърт Малтус. Този модел се основава на предположението, че ръстът на населението е експоненциален и се подчинява на диференциалното уравнение

$$\frac{dN}{dt} = aN,$$

където a е константа на постоянния ръст (малтусиански параметър). Това фактически е диференциалното уравнение за постоянния ръст на Бернули. Неговото решение е експоненциалната функция:

$$N(t) = N_0 e^{at},$$

където N_0 съответства на първоначалния размер на популацията.

Даденият прост модел, изглежда, описва коректно началната фаза на растежа на населението. Обаче точността на експоненциалния модел в последствие се влошава, в резултат на насищане и други нелинейни ефекти (рис. 11).



Рис. 11. Разлика между реалния и експоненциален ръст след първоначалната фаза

Логистичен модел

Този клас демографски модели за пръв път е бил предложен от френския математик Пиер Франсоа Фергелстом през 1838 год. Този модел се нарича логистичен и е еквивалентен на модела на разпространение на иновациите с вътрешно влияние, следователно, диференциалното уравнение, което го описва е

$$\frac{dN}{dt} = bN(M - N) = bMN \left(1 - \frac{N}{M}\right) = aN \left(1 - \frac{N}{M}\right),$$

където с M е означен максималния възможен размер на популацията. Ако представим диференциалното уравнение във вида

$$\frac{dN}{dt} = aN - \frac{aN^2}{M},$$

то първото събираемо съответства на ръста на населението (малтусианско събираемо), а второто ограничава този ръст поради отсъствието на ресурси или други причини. Както знаем (от предишния параграф) логистичното уравнение разполага с точно решение

$$N(t) = \frac{M}{1 + \frac{M - N_0}{N_0} e^{-at}}$$

Графиките на логистичните линии изглеждат много добре. На рис. 12 са показани няколко такива линии при различни стойности на N_0 , а на рис. 13 е показано как формата на логистичната линия зависи от постоянния ръст a .

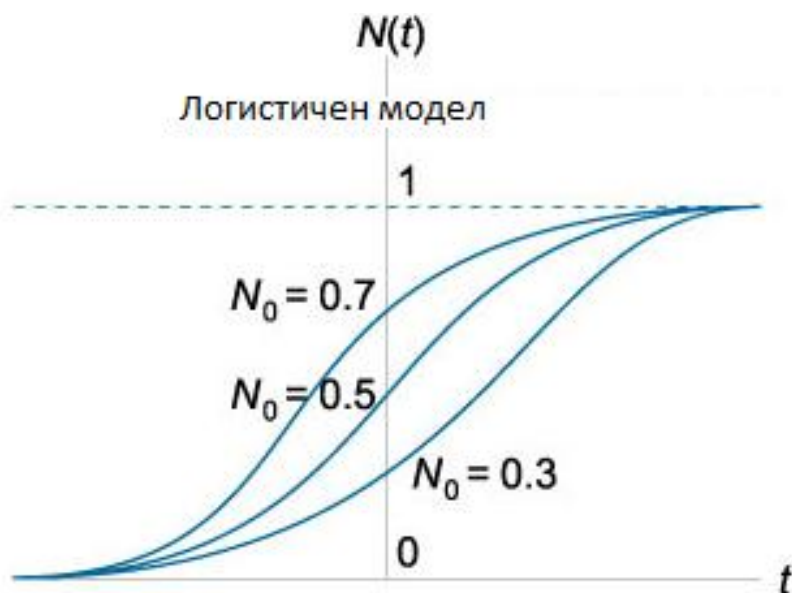


Рис. 12. Логистични линии при различни стойности на началния размер на популацията

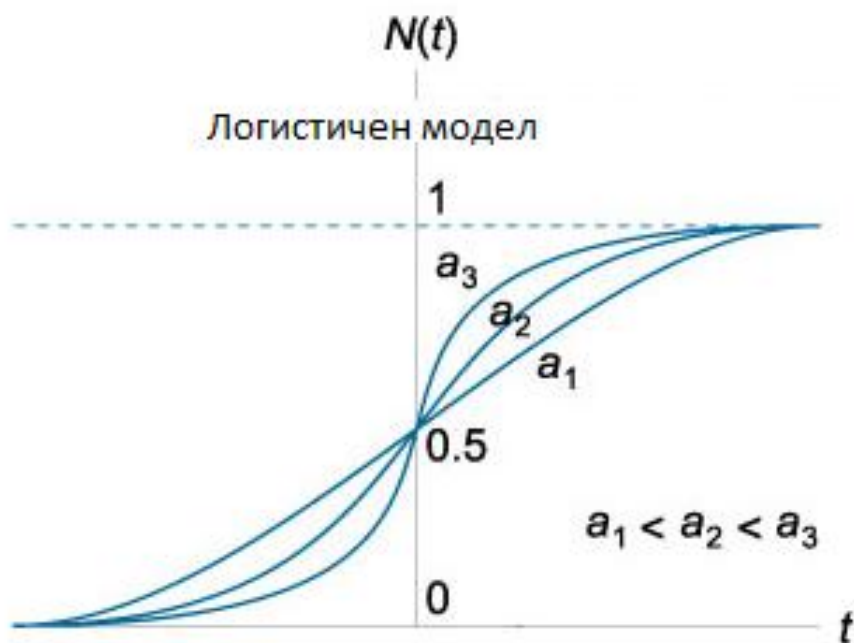


Рис. 13. Логистични линии при различни стойности на коефициента на постоянен ръст

Хиперболични модели

Разгледаните по-горе модели са полезни при анализа на демографските процеси в рамките на столетия. Ако, обаче, се разглежда изменението на световното население в рамките на няколко хилядолетия, то добре се вижда, че основният прираст на населението на Земята от 2 до 7 милиарда души се е случил през последните 70 години (оценката за световното население 3000 год. пр. н. е. – 25 млн., 2000 год. пр. н. е. – 35 млн., 1000 год. пр. н. е. – 50 млн., 1 год. от н. е. – 200 млн., 1000 год. – 400 млн., 1500 год. – 460 млн., 1700 год. – 680 млн., 1800 год. – 980 млн., 1900 год. – 1650 млн., 1950 год. – 2525 млн., 2000 год. – 6125 млн., 2016 год. – 7400 млн.). Такъв тип зависимост напомня за хиперболична линия. Прост хиперболичен модел за ръста на земното население е бил предложен от няколко изследователи (Форстер (1960), Хостер (1975), Шкловски (1980)), описващи световното население с израза

$$N(t) = \frac{C}{T_1 - t} = \frac{200}{2025 - t} (\text{млрд}).$$

По тази формула получаваме 1700 год. – 615 млн., 1800 год. – 890 млн., 1900 год. – 1600 млн., 1950 год. – 2667 млн., 2000 год. – 8 млрд. от тази формула следва, че населението на Земята се стреми към безкрайност с приближаването на 2025 год.

Реална динамика на световното население, обаче, демонстрира така наречения демографски преход, който следва след фазата на демографския взрив. Това ново

състояние се характеризира с понижаване на раждаемостта и смъртността едновременно. Такъв преход вече е обхванал всички развити страни. В резултат на този демографски преход, нарастването на населението се прекратява и то даже може да намалява. Глобалното население на Земята встъпва в демографския преход в началото на ХХІ век.

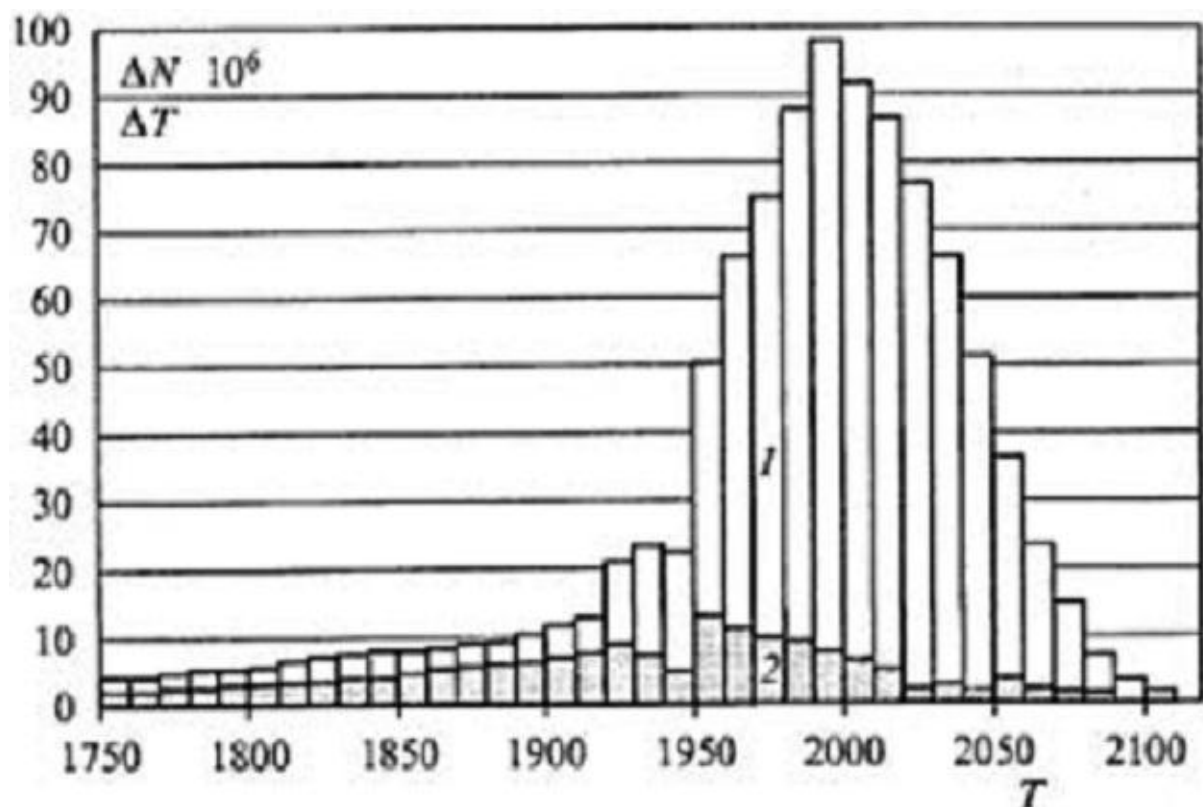


Рис. 14. Динамика на прираста на световното население по декади

Оказва се, че такава сложна динамика на световното население също може да се моделира с диференциални уравнения. Модел от този вид е разработен наскоро (през 1997 год.) от руския физик Сергей Капица. Капица (изучавайки динамиката на прираста на световното население по декади – рис. 14) предлага ръста на световното население да се опише чрез диференциалното уравнение

$$\frac{dN}{dt} = \frac{C}{(T_0 - t)^2 + \tau^2},$$

където C , T_0 и τ са подходящо избрани константи. Това диференциално уравнение разполага с точно решение:

$$N(t) = \frac{C}{\tau} \operatorname{arccotg} \frac{T_0 - t}{\tau}.$$

Тази функция описва забележително добре взривния ръст, както и последвалия

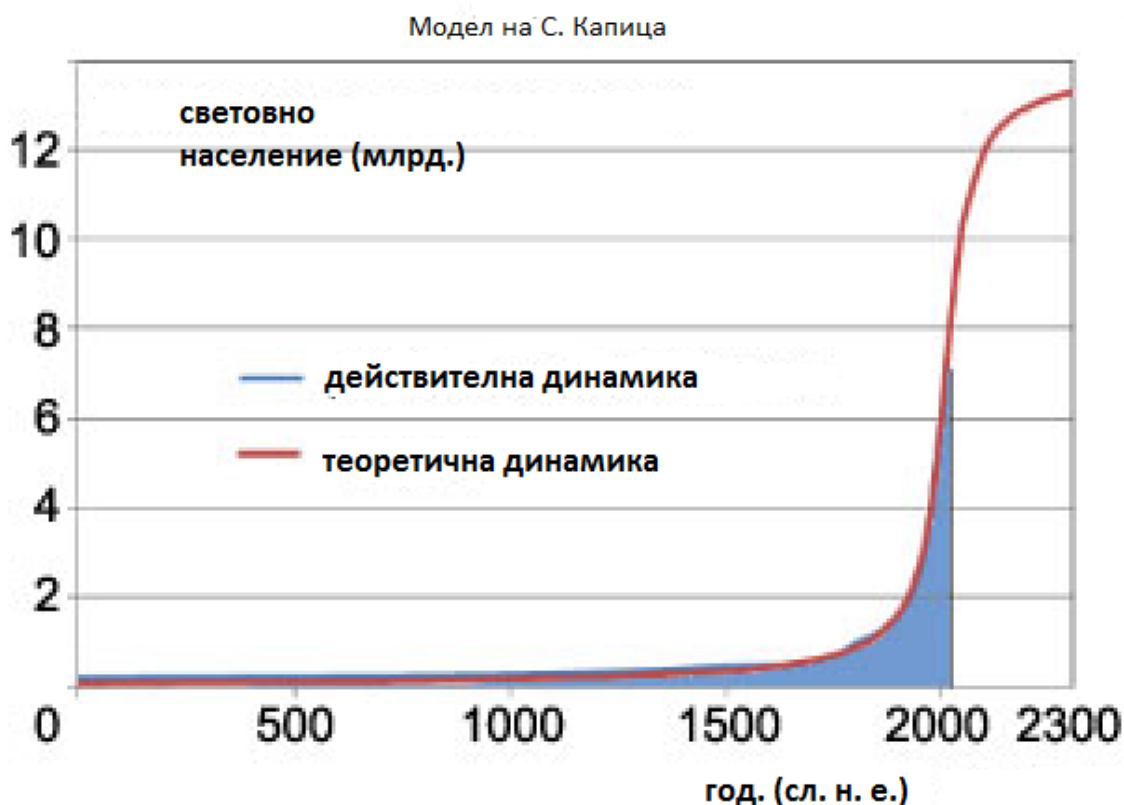


Рис. 15. Сравнение на действителния ръст на световното население с теоретичния ръст, според модела на С. Капица

демографски преход при следните стойности на параметрите на модела:

$$C = 1,86 \cdot 10^{11}, T_0 = 2007, \tau = 42.$$

Съгласно този модел (рис. 15) населението на Земята ще достигне максималното си население от 13-14 млрд. през 2200-2300 год.

Пример 30. Допускаме, че темпът на ръст на населението на Индия е линейна функция на времето, като през 1986 год. темпът е бил 2,26%, а през 2016 год. – 1,26%.

а) Да се намери формула на населението на Индия като функция от времето, ако през 1986 год. то е било 791 млн., да се сравни с данните

година	1990	1995	2000	2005	2010	2015	2016
население (млн.)	862	952	1044	1135	1223	1303	1320

и да се направи прогноза за 2020, 2025 и 2030 год.

б) Да се пресметне (според съставения модел) кога населението на Индия ще престане да нараства и какъв ще бъде неговия максимум.

Решение:

а) Темпът на нарастване ще бъде линейна функция на времето

$$k(t) = k_0 - at.$$

(Имаме " – " пред $a > 0$, защото според данните темпът е намаляваща функция от времето). Ако приемем, че $t = 0$ през 1986 год., то $k_0 = 2,26$. Според дадения темп за 2016 год. получаваме

$$k(30) = 2,26 - 30a = 1,26 \Rightarrow a = \frac{1}{30}.$$

Така за функцията $k(t)$ получаваме

$$k(t) = 2,26 - \frac{t}{30}.$$

Ако от проценти преминем към части от цялото, то ще имаме

$$k(t) = 0,0226 - \frac{t}{3000}.$$

В диференциалното уравнение на Бернули на постоянния темп

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

ще трябва да заменим постоянния темп k с променливия $k(t)$ и получаваме

$$\frac{dN}{dt} = \left(0,0226 - \frac{t}{3000}\right)N.$$

Решаваме това диференциално уравнение

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \left(0,0226 - \frac{t}{3000}\right)N \Rightarrow \frac{dN}{N} = \left(0,0226 - \frac{t}{3000}\right)dt \\ &\Rightarrow \int \frac{dN}{N} = \int \left(0,0226 - \frac{t}{3000}\right)dt \Rightarrow \ln N = 0,0226t - \frac{t^2}{6000} + \ln C, \end{aligned}$$

където с $\ln C$ сме означили интеграционната константа. При $t = 0$ ще имаме

$$\ln 791 = \ln C,$$

така получаваме

$$\ln N = 0,0226t - \frac{t^2}{6000} + \ln 791$$

или след антилогаритмуване

$$N = 791e^{0,0226t - \frac{t^2}{6000}}.$$

Заместваме t с 4 (1990 год.), с 9 (1995 год.), с 14 (2000 год.), с 19 (2005 год.), с 24 (2010 год.), с 29 (2015 год.), с 30 (2016 год.), с 34 (2020 год.), с 39 (2025 год.) и с 44 (2030 год.) и нанасяме в таблица

година	1990	1995	2000	2005	2010	2015	2016	2020	2025	2030
население (млн.)	862	952	1044	1135	1223	1303	1320	-	-	
население според модела	863	956	1050	1144	1236	1324	1341	1407	1482	1548

Вижда се от таблицата, че стойностите за населението на Индия, пресметнати въз основа на формулата се приближават изключително близко до реалните данни за периода 1990-2016 год.

б) Ясно е, че при $k(t) > 0$ населението на Индия ще нараства, а при $k(t) < 0$ – ще намалява, така че максимумът ще се достига при $k(t) = 0$. Но

$$k(t) = 0 \Leftrightarrow 2,26 - \frac{t}{30} \Leftrightarrow t = 67,8 \cong 68,$$

така че, съгласно модела, максималното население на Индия ще бъде през $1986+68=2054$ год. и то ще възлиза на

$$N_{max} = N(68) = 791e^{0,0226 \cdot 68 - \frac{68^2}{6000}} = 791e^{0,7661} = 791 \cdot 2,154 = 1701.$$

Така, че въз основа на този модел можем да заключим, че на селението на Индия ще нараства до средата на настоящия век и едва ли ще прехвърли 1,7 млрд.

Пример 31. Числеността на населението $y(t)$ на остров Свети Бенедикт удовлетворява диференциалното уравнение

$$y' = 0,05y(1 - 10^{-6}y),$$

където t е времето в години. След колко години населението на острова ще нарастне 10 пъти, ако в момента на острова живеят 10000 души.

Решение:

Тъй като населението на острова $N = y$ се изразява с формулата

$$N' = 0,05N(1 - 10^{-6}N) = 0,05N\left(1 - \frac{N}{10^6}\right),$$

то става дума за логистичен демографски модел с $M = 10^6 = 1$ млн. и $a = 0,05$. Ще измерваме населението в хиляди, тогава $M = 1000$ и $N_0 = 10$. Заместваме стойностите за M , N_0 и a от задачата във формулата

$$N(t) = \frac{M}{1 + \frac{M - N_0}{N_0} e^{-at}}$$

и получаваме

$$N(t) = \frac{1000}{1 + \frac{1000 - 10}{10} e^{-0,05t}} = \frac{1000}{1 + 99e^{-0,05t}}.$$

Трябва да се намери стойността на t , за която населението на острова става 100 хил., т.е. $N(t) = 100$. Това води до уравнението

$$\frac{1000}{1 + 99e^{-0,05t}} = 100 \Rightarrow 1 + 99e^{-0,05t} = 10 \Rightarrow e^{-0,05t} = \frac{1}{11}.$$

След логаритмуване получаваме

$$-0,05t = -\ln 11 \Rightarrow t = 20 \ln 11 = 20 \cdot 2,4 = 48.$$

Така че, въз основа на този логистичен демографски модел, можем да заключим, че населението на остров Свети Бенедикт ще нарасне десет пъти за 48 години.

15. Модел на жизнения цикъл

Оказва се, че различните продукти и технологии се подчиняват на общи закономерности – те се „раждат“, достигат до своята зрялост, остаряват и накрая „умират“. В това се състои модела на жизнения цикъл на продукта (технологията). Според различните изследователи, в рамките на жизнения цикъл, могат да се открият пет етапа:

- **разработка** – тоя е невидим за публиката, понякога продължава много дълго време и е свързан с високорискови инвестиции;

- **внедряване** - започва със самото появяване на продукта на пазара. Той е началото на жизнения цикъл на всеки продукт. През този период се формира пазарът на продукта. Тогава все още има загуби. Процедурата по въвеждане на продукта на пазара обикновено изисква време и реализацията през този период расте бавно.

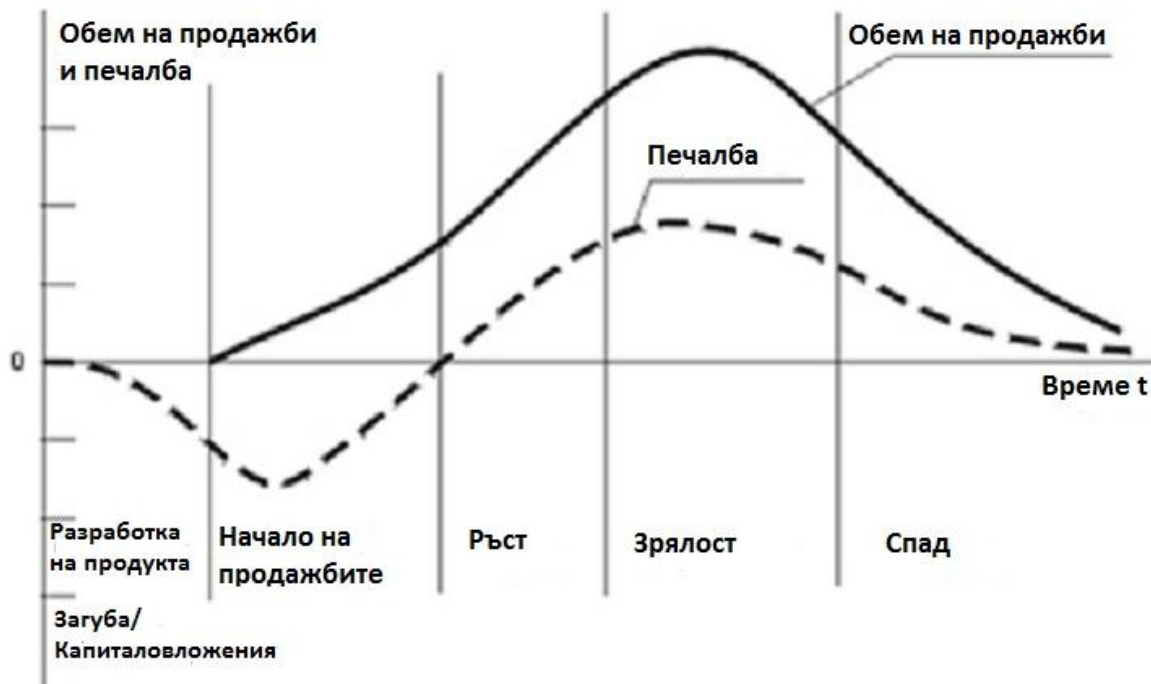


Рис. 16. Характерна графика на линията на жизнения цикъл на продукта - разпространение и печалба

- **растеж** - продажбите се увеличават бързо и печалбите достигат максималните си стойности. Този етап се характеризира с увеличаване на конкурентността на пазарите.
- **зрялост** - В този период продажбите са в максималните си обеми и започват бавно да намаляват. Типично за етапа е оформяне на жестока конкуренция, навлизат нови търговски марки на съществуващите пазари, конкурентите подчертават различията в качеството, цената и всички подобрения в своите варианти на продукта. Някои от по-слабите конкуренти отпадат.
- **спад** - в резултат на развитието на производството и научно-техническия прогрес на пазара непрекъснато се появяват продукти, които съпоставени с разглежданите от нас, са по-нови и често по-добри. Тогава разглежданата стока губи своите позиции, намаляват обемите и на продажба и цените.

На рис. 16 е показана една характерна графика на линията на жизнения цикъл на продукта (технологията) с линиите на продажбите и печалбата. Не всички стоки и услуги следват точно очертаните четири отчетливи стадия на *традиционната*

крива на жизнения цикъл. Видът на жизнения цикъл на стоките може да бъде различен, както по продължителност, така и по форма. По-известните модификации на кривата са:

- **Сензационна крива (крива „бум“)** описва изключително популярен продукт, който поддържа много висок обем продажби дълго време;
- **Крива на увлечението** се отнася до така наречените „стоки-фетиши“. Това са стоки, които бързо завоюват всеобщо внимание, възприемат се с голям ентузиазъм, достигат ясно изразен пик на популярност и с голяма бързина минават към стадий „Спад“;
- **Крива с повторен цикъл** е типична за стоки със сезонен характер;
- **Гребеновидна крива** е разновидност на повторният цикъл. Това последователно възобновяване на популярността се дължи обикновено на предлагането на нови характеристики на стоката, нови начини за нейното използване или просто на появата на нови потребители.
- **Крива на провала** описва стока, която никога не е завоювала всеобщо внимание и е претърпяла пазарен неуспех и провал.

Диференциално уравнение, подходящо за моделиране на линията на жизнения цикъл на продукта (по точно – линията на разпространението) е уравнението

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left(1 - \frac{t}{T}\right)(a + bN(t))(M - N(t)).$$

Това уравнение за ръста на разпространението се е получило като ръста на разпространението на иновациите е умножен с множител, наричан акселератор $k(t)$:

$$k(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)$$

В случая, това е линеен намаляващ акселератор. При $t = 0$ имаме $k(0) = 1$, следователно акселераторът запазва ръста на модела със смесено влияние. При $t = T$ получаваме $k(T) = 0$, следователно $N(t)$ не се променя, нито нагоре, нито надолу. За стойности $t \in (0, T)$ акселераторът отслабва растежа, характерен за смесеното влияние, а при $t > T$ акселераторът става отрицателен и $N(t)$ намалява. Фактически този акселератор играе ролята на „състаряващ“ фактор – стареенето започва още с раждането.

Преобразуваме диференциалното уравнение на жизнения цикъл

$$\int \frac{dN}{(a + bN)(M - N)} = \int \left(1 - \frac{t}{T}\right) dt.$$

Първият интеграл е същият, както при диференциалното уравнение за смесеното влияние, така че получаваме

$$\frac{1}{a + bM} \ln \frac{a + bN}{M - N} = t - \frac{t^2}{2T} + C$$

или окончателно общото решение ще бъде

$$N(t) = \frac{M - ae^{-(a+bM)\left(t - \frac{t^2}{2T} + C\right)}}{1 + be^{-(a+bM)\left(t - \frac{t^2}{2T} + C\right)}}$$

Интеграционната константа C намираме от началното условие $N(0) = 0$. Получаваме

$$\frac{M}{a} = e^{-(a+bM)C}.$$

Като заместим в израза за $N(t)$ в общото решение, ще получим окончателния вид на функцията на разпространение:

$$N(t) = \frac{M \left(1 - e^{-(a+bM)\left(t - \frac{t^2}{2T}\right)}\right)}{1 + \frac{bM}{a} e^{-(a+bM)\left(t - \frac{t^2}{2T}\right)}},$$

Следователно, като базов модел не може да се използва модел с вътрешно влияние, защото коефициента a трябва да бъде различен от нула.

Като заместим $t = 2T$ получаваме

$$N(2T) = 0,$$

следователно, дължината на жизнения цикъл е $2T$.

Съгласно казаното по-горе, при $t = T$ функцията на разпространение $N(t)$ ще достига своя максимум, който е

$$N_{max} = N(T) = \frac{M \left(1 - e^{-(a+bM)\frac{T}{2}}\right)}{1 + \frac{bM}{a} e^{-(a+bM)\frac{T}{2}}} < M.$$

Този максимум ще е много по-малък от потенциала на пазара M при малки стойности на T , а при големи стойности на T – ще се приближи до M .

От друга страна, графиката на линията на жизнен цикъл е симетрична относно вертикалата $t = T$. И наистина, имаме

$$N(t) = \frac{M(1 - e^{-(a+bM)x(t)})}{1 + \frac{bM}{a} e^{-(a+bM)x(t)}}$$

за

$$x(t) = t - \frac{t^2}{2T}.$$

Нека $t_1 \in (0, T)$. Тогава за $x(2T - t_1)$ ще имаме

$$\begin{aligned} x(2T - t_1) &= 2T - t_1 - \frac{(2T - t_1)^2}{2T} = 2T - t_1 - \frac{4T^2 - 4Tt_1 + t_1^2}{2T} \\ &= 2T - t_1 - 2T + 2t_1 - \frac{t_1^2}{2T} = t_1 - \frac{t_1^2}{2T} = x(t_1). \end{aligned}$$

От това следва, че $N(t_1) = N(2T - t_1)$.

Пример 32. Да се състави формулата за разпространение $N(t)$ и да се пресметне $N(t)$ за всички цели стойности на t от 1 до 10 включително, ако $M = 100$, а

а) $a = 0,2$; $bM = 0,4$ и $T = 10$;

б) $a = 0,02$; $bM = 0,4$ и $T = 10$;

Решение:

а) Заместваме $M = 100$, $a = 0,2$, $bM = 0,4$ и $T = 10$ във формулата за $N(t)$ и получаваме

$$N(t) = \frac{M \left(1 - e^{-(a+bM)\left(t-\frac{t^2}{2T}\right)} \right)}{1 + \frac{bM}{a} e^{-(a+bM)\left(t-\frac{t^2}{2T}\right)}} = \frac{1 - e^{-0,6\left(t-\frac{t^2}{20}\right)}}{1 + 2e^{-0,6\left(t-\frac{t^2}{20}\right)}} 100.$$

Пресмятаме

$$N(1) = \frac{1 - e^{-0,57}}{1 + 2e^{-0,57}} 100 = \frac{43,45}{2,13} = 20,40; \quad N(2) = \frac{1 - e^{-1,08}}{1 + 2e^{-1,08}} 100 = \frac{66,04}{1,68} = 39,31;$$

$$N(3) = \frac{1 - e^{-1,53}}{1 + 2e^{-1,53}} 100 = \frac{78,35}{1,43} = 54,79; N(4) = \frac{1 - e^{-1,92}}{1 + 2e^{-1,92}} 100 = \frac{85,34}{1,29} = 65,16;$$

$$N(5) = \frac{1 - e^{-2,25}}{1 + 2e^{-2,25}} 100 = \frac{89,46}{1,21} = 73,93; N(6) = \frac{1 - e^{-2,52}}{1 + 2e^{-2,52}} 100 = \frac{91,95}{1,16} = 79,27;$$

$$N(7) = \frac{1 - e^{-2,73}}{1 + 2e^{-2,73}} 100 = \frac{93,48}{1,13} = 82,73; N(8) = \frac{1 - e^{-2,88}}{1 + 2e^{-2,88}} 100 = \frac{94,39}{1,11} = 84,23;$$

$$N(9) = \frac{1 - e^{-2,97}}{1 + 2e^{-2,97}} 100 = \frac{94,87}{1,10} = 86,25; N(10) = \frac{1 - e^{-3}}{1 + 2e^{-3}} 100 = \frac{95,02}{1,10} = 86,38;$$

б) Заместваме $M = 100$, $a = 0,02$, $bM = 0,4$ и $T = 10$ във формулата за $N(t)$ и получаваме

$$N(t) = \frac{M \left(1 - e^{-(a+bM)\left(t-\frac{t^2}{2T}\right)} \right)}{1 + \frac{bM}{a} e^{-(a+bM)\left(t-\frac{t^2}{2T}\right)}} = \frac{1 - e^{-0,42\left(t-\frac{t^2}{20}\right)}}{1 + 20e^{-0,42\left(t-\frac{t^2}{20}\right)}} 100.$$

Пресмятаме

$$N(1) = \frac{1 - e^{-0,399}}{1 + 20e^{-0,399}} 100 = \frac{32,9}{14,42} = 2,28; N(2) = \frac{1 - e^{-0,756}}{1 + 20e^{-0,756}} 100 = \frac{53,05}{10,39} = 5,11;$$

$$N(3) = \frac{1 - e^{-1,071}}{1 + 20e^{-1,071}} 100 = \frac{65,73}{7,85} = 8,37; N(4) = \frac{1 - e^{-1,344}}{1 + 20e^{-1,344}} 100 = \frac{73,92}{6,22} = 11,88;$$

$$N(5) = \frac{1 - e^{-1,575}}{1 + 20e^{-1,575}} 100 = \frac{79,3}{5,14} = 15,43; N(6) = \frac{1 - e^{-1,764}}{1 + 20e^{-1,764}} 100 = \frac{82,86}{4,43} = 18,7;$$

$$N(7) = \frac{1 - e^{-1,911}}{1 + 20e^{-1,911}} 100 = \frac{85,21}{3,96} = 21,52; N(8) = \frac{1 - e^{-2,016}}{1 + 20e^{-2,016}} 100 = \frac{86,7}{3,66} = 23,68;$$

$$N(9) = \frac{1 - e^{-2,079}}{1 + 20e^{-2,079}} 100 = \frac{87,49}{3,50} = 25; N(10) = \frac{1 - e^{-2,1}}{1 + 20e^{-2,1}} 100 = \frac{87,75}{3,45} = 25,43;$$

Изводи: В а) съотношението $\frac{bM}{a} = 2$, което води до това, че през цялото време $t < T = 10$ разпространението $N(t)$ нараства със забавящ се темп, сякаш липсва фаза на внедряване и линията на разпространение прилича на обърната парабола. За сметка на това, обаче, максималното разпространение $N(10) = 86,38$ е много близко до максимално възможното разпространение $M = 100$. В б) има открояна фаза на внедряване, когато разпространението нараства с растящ темп: $N(1) - N(0) = 2,28 < N(2) - N(1) = 2,83 < N(3) - N(2) = 3,26 < N(4) - N(3) = 3,51 < N(5) - N(4) = 3,55$. След това нарастването на $N(t)$ се забавя: $N(5) - N(4) = 3,55 > N(6) - N(5) = 3,27 > N(7) - N(6) = 2,82 > N(8) - N(7) =$

$2,16 > N(9) - N(8) = 1,32 > N(10) - N(9) = 0,43$. Такъв темп на растеж е характерен за първата част от фазата на зрялост (до достигането на максимума). Това е така, защото в б) имаме $\frac{bM}{a} = 20$. Изводът е следния: външно влияние трябва да има ($a \neq 0$), но само при $a \ll bM$ се достига до характерната линия на жизнен цикъл.

Това, което е характерно за предложения модел е симетричния вид на линията на жизнения цикъл (от „раждането“ на продукта до пълната му пазарна зрялост времето е толкова, колкото от пълната зрялост до „смъртта“). Ако искаме да избягаме от това свойство, можем да използваме нелинейни акселератори, например от вида

$$k(t) = 1 - \left(\frac{t}{T}\right)^{\alpha}.$$

При тези акселератори, независимо от α максималното разпространение ще се получава при $t = T$, но при $\alpha > 1$ жизнения цикъл ще е по-къс от $2T$, а при $\alpha < 1$ – по-дълъг.

16. Моделиране на рекламна кампания

Представяме си, че някои компании са разработили нов продукт или услуга. Маркетинговата стратегия на компанията включва агресивна реклама. За да създадем прост математически модел, ще се въведат две променливи:

- Величината $q(t)$ представлява рекламната дейност, която описва скоростта на потока на рекламния бюджет, например, сума в определена валута, която компанията харчи за реклама за t -тата седмица (период от време);
- Величина $A(t)$ описваща информираността на целевата група на потенциалните купувачи на новия продукт или услуга.

По този начин, ние считаме, пазарна ниша като черна кутия (Рис. 17). Рекламната дейност $q(t)$ играе роля на входен параметър, докато информираността на потребителите $A(t)$ е променлива изход - измерваща реакцията на системата на въздействието на рекламата.



Рис. 17. Входно-изходен модел на рекламна кампания

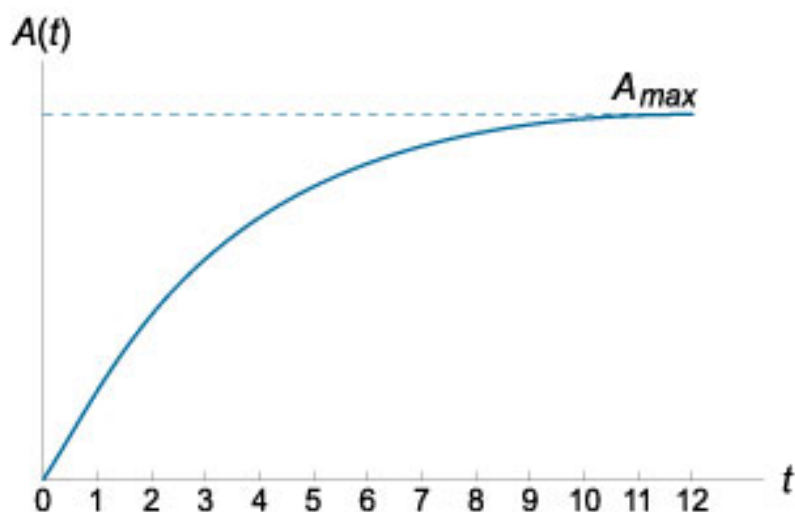


Рис. 18. Графика на функцията на информираност на потребителите $A(t)$

Моделът, който ще разгледаме е бил предложен през 1962 година от американските икономисти Nerlove (Марк Нерлов) и Arrow (Кенет Ароу) и е наречен на тях модел Nerlove – Arrow (на кратко N – A модел). Този модел свързва двете входни променливи: разходите за рекламната дейност $q(t)$ и осведомеността на потребителите $A(t)$ и се описва със следното диференциално уравнение:

$$\frac{dA}{dt} = bq(t) - kA,$$

където b е константа, описваща ефективността на рекламата, k - константа, съответстваща на скоростта на "забравяне".

Това уравнение включва два члена от дясната страна. Първият е $bq(t)$, който осигурява увеличение на потребителите в резултат на въздействието на рекламата, а kA описва обратния процес – забравяне за рекламирания продукт. Можем да направим извода, че скоростта на забравяне е пропорционална на сегашното ниво на информираност A .

Полученото уравнение е обикновено диференциално уравнение от първия ред. То е по-удобно да се запише в следния вид:

$$\frac{dA}{dt} + kA = bq(t).$$

Това е обикновено линейно диференциално уравнение от първи ред, в случая – нехомогенно. Ще го решим като първо се намери общото решение на съответното хомогенно уравнение

$$\frac{dA}{dt} + kA = 0.$$

Ще имаме

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} + kA = 0 &\Rightarrow \frac{dA}{dt} = -kA \Rightarrow \frac{dA}{A} = -kdt \\ &\Rightarrow \int \frac{dA}{A} = \int -kdt \Rightarrow \ln A = -kt + \ln C \Rightarrow A(t) = Ce^{-kt}. \end{aligned}$$

В получения израз за $A(t)$ C е интеграционната константа. Сега се връщаме към нехомогенното уравнение, което ще решим по метода на вариране на константата, който се състои в следното: търсим решение на нехомогенното уравнение, което се получава от решението на хомогенното, като константата C е заместена от функцията $C(t)$:

$$A(t) = C(t)e^{-kt}.$$

Неизвестната функция $C(t)$ намираме от условието $A(t)$ да е решение на нехомогенното уравнение. Диференцираме

$$A'(t) = C'(t)e^{-kt} - kC(t)e^{-kt}$$

и заместваме $A'(t)$ и $A(t)$ в нехомогенното уравнение. Получаваме

$$\begin{aligned} C'(t)e^{-kt} - kC(t)e^{-kt} + kC(t)e^{-kt} &= bq(t) \Rightarrow C'(t) = bq(t)e^{kt} \Rightarrow C(t) \\ &= \int bq(t)e^{kt} dt + C. \end{aligned}$$

След като намерихме функцията $C(t)$ заместваме в израза за $A(t)$ и получаваме

$$A(t) = \left(\int bq(t)e^{kt} dt + C \right) e^{-kt}$$

Интеграционната константа C се определя от началното условие $A(t_0) = A_0$. В примерите по-долу ще проучим как информираността на потребителите $A(t)$ зависи от начина на рекламиране.

Пример 33. Ръководството на компанията решава да рекламира с постоянна интензивност нов продукт в рамките на една година. Бюджетът на рекламата е 12 000 \$. Коефициентите са съответно равни на $k = 1/4$, $b = 25$.

Да се запише и реши диференциалното уравнение, описващо броят на хората $A(t)$, запознати с продукта. Да се пресметнат всички месечни стойности $A(t)$; $t = 1, 2, \dots, 12$ и да се изчисли средния брой на хората, запознати с продукта.

Решение:

Ние приемаме, че времето t е в месеци. Според примера, рекламните разходи са постоянни през цялата година. Тогава месечно разходи за реклама са както следва:

$$q_0 = \frac{12000 \$}{12 \text{ мес.}} = 1000 \frac{\$}{\text{мес.}}$$

Нека да намерим решението в общия случай – при произволни k , b и q_0 . Заместваме във формулата за $A(t)$ и получаваме

$$A(t) = \left(\int b q_0 e^{kt} dt + C \right) e^{-kt} = \left(\frac{b q_0}{k} e^{kt} + C \right) e^{-kt} = \frac{b q_0}{k} + C e^{-kt}.$$

Интеграционната константа C определяме от началното условие $A(t = 0) = 0$ (да не забравяме, че продуктът е нов).

$$A(0) = \frac{b q_0}{k} + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{b q_0}{k}.$$

Като заместим в общото решение, получаваме

$$A(t) = \frac{b q_0}{k} (1 - e^{-kt}).$$

Така получихме израз за ефекта от постоянната реклама с интензивност $q(t) = q_0 = \text{const.}$ Очевидно, покритието на такава рекламна кампания при неограничено нарастване на времето ще се стреми към

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{b q_0}{k} (1 - e^{-kt}) \right) = \frac{b q_0}{k} \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - e^{-kt}) = \frac{b q_0}{k}.$$

Сега заместваме с данните от задачата

$$b = 25, k = \frac{1}{4} \text{ и } q_0 = 1000$$

и получаваме

$$A(t) = 100000(1 - e^{-0,25t}).$$

Ако тази рекламна кампания продължи неопределено дълго, тя ще информира за този продукт 100000 потенциални потребители.

Сега да пресметнем рекламното покритие по месеци. Резултатите от изчисленията нанасяме в таблица

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$A(t)$	22,1	39,3	52,8	63,2	71,3	77,7	82,6	86,5	89,5	91,8	93,6	95,0

Въз основа на тези резултати можем да пресметнем средното месечно покритие на тази рекламна кампания

$$\bar{A} = \frac{1}{12} \sum_{t=1}^{12} A(t) = 72117.$$

Този показател за ефекта на рекламната кампания е най-важен, защото показва какъв е броя на потенциалните (информирани) потребители, на които фирмата може да разчита през цялото време. Освен това, чрез средната стойност ще можем да сравняваме ефектите на рекламни кампании с различни интензивности.

Забележка. Прави впечатление, че модела на рекламна кампания с постоянни разходи математически е идентичен с модела на линията на обучение и с модела на разпространение на иновациите с външно влияние. И наистина, при $q(t) = q_0$ диференциалното уравнение на модела добива вида

$$\frac{dA}{dt} + kA = bq_0 \Rightarrow \frac{dA}{dt} = k \left(\frac{bq_0}{k} - A \right).$$

Но тъй като

$$\frac{bq_0}{k} = A_{max},$$

то диференциалното уравнение ще бъде

$$\frac{dA}{dt} = k(A_{max} - A),$$

което е същото, като при линията на опита (и разпространението на иновациите с външно влияние).

Пример 34. При условията от пример 33 да се определи месечния брой на потенциалните купувачи до края на годината, ако целият бюджет за реклама се разпредели равномерно през първите шест месеца. Да се изчисли средния брой на хората, запознати с продукта и да се направи сравнение с рекламната кампания от пример 33.

Решение. В този случай, рекламата засилва своя характер – тя е по-агресивна, в сравнение с предишната. Схематично, рекламните разходи са показани по-долу на Рис. 19. Ние трябва да проучим как се променят информираността $A(t)$ на потребителите в сравнение със случая, разглеждан в пример 31, когато рекламните разходи са едни и същи през цялата година.

Процесът се разделя на два етапа. До края на шестия месец, стойността на A лесно се изчислява по формулата:

$$A(t) = \frac{bq_0}{k} (1 - e^{-kt}),$$

получена в пример 31, коефициентите имат следните стойности: $k = 1/4$, $b = 25$ и $q_0 = 2000$, следователно

$$A(t) = 200000(1 - e^{-0,25t}).$$

Изчисляваме $A(t)$ за $t = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ (това означава на практика, да удвоим резултатите за $A(t)$ при $t \leq 6$ от пример 31) и нанасяме в таблица

t	1	2	3	4	5	6
$A(t)$	44,2	78,6	105,6	126,4	142,6	155,4

В момент $t = 6$, броят на купувачите на запознаване с продукта е $A(6) = 15540$.

Във втората фаза - от седми до дванадесети месец включително, рекламата напълно отсъства. Тогава ще имаме $q(t) = 0$ за $t = 6, 7, \dots, 12$ и като заместим във формулата за $A(t)$ получаваме

$$A(t) = Ce^{-0,25(t-6)}.$$

Константата C се определя от първоначалното състояние за втората фаза:

$$A(t = 6) = Ce^0 = 155400 \Rightarrow C = 155400.$$

Така, законът на изменението $A(t)$ за втората половина добива следния вид:

$$A(t) = 155400e^{-0,25(t-6)}.$$

Пресмятаме $A(t)$ за $t = 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ и нанасяме резултатите в таблица

t	6	7	8	9	10	11	12
$A(t)$	155,4	121,0	94,3	73,4	57,2	44,5	34,7

Окончателно, получаваме пълното решение:

$$A(t) = \begin{cases} 200000(1 - e^{-0,25t}) & \text{за } 0 \leq t \leq 6 \\ 155400e^{-0,25(t-6)} & \text{за } 6 \leq t \leq 12. \end{cases}$$

Графиката на функцията $A(t)$ е представена на Рис. 20.

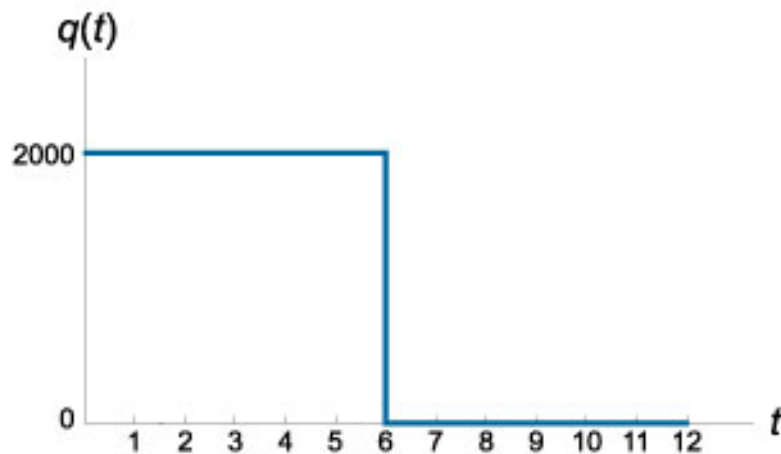


Рис. 19. Графика на функцията на интензивност на рекламната кампания $q(t)$ за пример 32

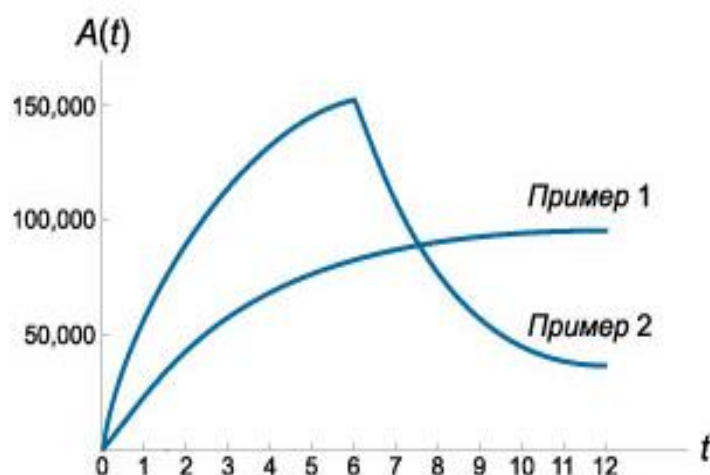


Рис. 20. Графики на функциите на информиране на потребителите вследствие на рекламните кампании $A(t)$ за примери 33 и 34

Графиката показва сравнение на кривата $A(t)$ с тази от предходния пример. Може да се види, че във втория случай информираността на клиентите ще бъде по-ниска в края на годината, отколкото при постоянна реклама. Сега можем да изчислим и средната стойност на покритието при тази рекламна кампания:

$$\bar{A} = \frac{1}{12} \sum_{t=1}^{12} A(t) = 89825.$$

Ако предположим, че обемът на продажбите е пропорционален на средната информираност на клиентите на новия продукт, то че агресивната реклама (при един и същи бюджет) е по-изгодна.

Пример 35. За да се изследва динамиката на $A(t)$ в случай на линейно изменяща се рекламна активност $q(t)$ като се използват същите данни, като в пример 33.

Решение:

В даденият пример, маркетинговият модел е усложнен. Предполагаме, че бюджетът за реклама се изразходва през годината чрез линеен закон:

$$q(t) = q_0 + \alpha t$$

Функцията $q(t)$ може да бъде или растяща или намаляваща (Рис. 21).

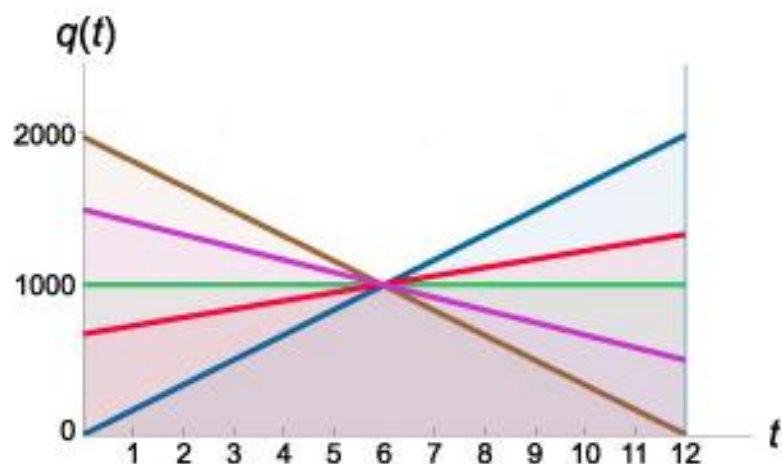


Рис. 21. Различни варианти за графиката на функцията на интензивност на рекламната кампания $q(t)$, изменяща се чрез линеен закон

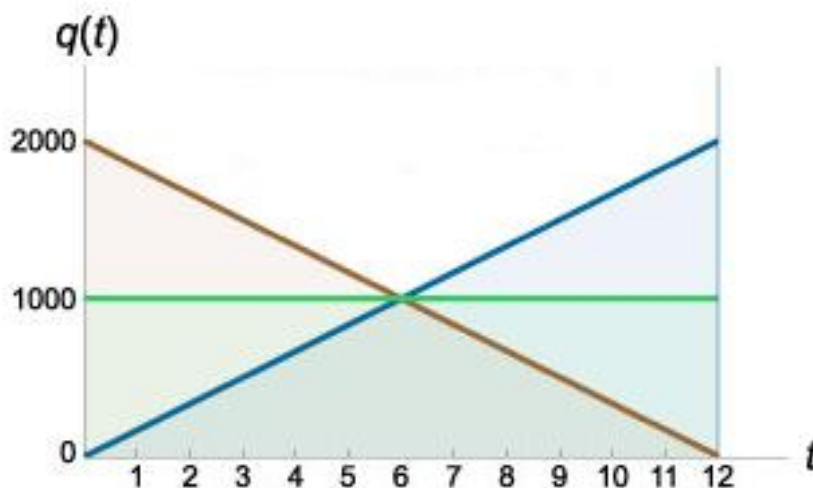


Рис. 22. Бюджетите на различните варианти на рекламна кампания с интензивност, изменяща се по линеен закон, са равни по между си

Във всеки случай, общият годишен бюджет за реклама остава непроменен (в случая 12000\$). Графично, това означава, че общата площ на трапеците (или триъгълници в случаите, когато $q_0 = 0$ или $q_0 = 2000$), показани на Рис. 22, са равни.

Ясно е, че параметрите, α и q_0 са свързани, както следва:

$$12(q_0 + 6\alpha) = 12000$$

Лявата част на тази формула съответства на лицето на трапеца. Следователно, коефициента α е изразен чрез q_0 , както следва:

$$\alpha = \frac{1000 - q_0}{6}.$$

Зависимостта на разходите за реклама са описани по следния начин:

$$q(t) = q_0 + \frac{1000 - q_0}{6} t,$$

откъдето общото решение е:

$$\begin{aligned} A(t) &= \left[b \int \left(q_0 + \frac{1000 - q_0}{6} t \right) e^{kt} dt + C \right] e^{-kt} \\ &= \left(bq_0 \int e^{kt} dt + b \frac{1000 - q_0}{6} \int t e^{kt} dt + C \right) e^{-kt}. \end{aligned}$$

Интеграла $\int t e^{kt} dt$, решаваме, като използваме метода за интегриране по части:

$$\begin{aligned} \int t e^{kt} dt &= \frac{1}{k} \int t e^{kt} dkt = \frac{1}{k} \int t d e^{kt} = \frac{1}{k} \left(t e^{kt} - \int e^{kt} dt \right) = \frac{1}{k} \left(t e^{kt} - \frac{1}{k} e^{kt} \right) \\ &= \frac{1}{k} t e^{kt} - \frac{1}{k^2} e^{kt}. \end{aligned}$$

В резултат получавам следния израз за $A(t)$:

$$\begin{aligned} A(t) &= \left(\frac{bq_0}{k} e^{kt} + b \frac{1000 - q_0}{6} \left(\frac{1}{k} t e^{kt} - \frac{1}{k^2} e^{kt} \right) + C \right) e^{-kt} \\ &= \frac{bq_0}{k} + \frac{b(1000 - q_0)}{6k} \left(t - \frac{1}{k} \right) + C e^{-kt}. \end{aligned}$$

Константата C определям от началното условие $A(t = 0) = 0$

$$\frac{bq_0}{k} - \frac{b(1000 - q_0)}{6k^2} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{b}{k} \left(\frac{1000 - q_0}{6k} - q_0 \right)$$

Замествам C в уравнението за $A(t)$ и получаваме

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{bq_0}{k} - \frac{b(1000 - q_0)}{6k} \left(t - \frac{1}{k} \right) + \frac{b}{k} \left(\frac{1000 - q_0}{6k} - q_0 \right) e^{-kt} \\ &= \frac{b}{k} \left[\left(q_0 - \frac{1000 - q_0}{6k} \right) (1 - e^{-kt}) + \frac{1000 - q_0}{6} t \right] \end{aligned}$$

Накрая, заместям известните величини: $k = 1/4, b = 25$ и получаваме

$$A(t) = 100 \left[\left(q_0 - \frac{1000 - q_0}{1,5} \right) (1 - e^{-0,25t}) + \frac{1000 - q_0}{6} t \right]$$

При $q_0 = 1000$ (режим на постоянната равномерна реклама, обсъдени в пример 31, ние получаваме вече установената по-горе формула:

$$A(t) = 100 \cdot 1000(1 - e^{-0,25t}) = 100000(1 - e^{-0,25t})$$

Като се използва общото решение на уравнението на $A(t)$, правим сравнение на следните случаи (виж Рис. 20 по-горе).

- Сценарий 1: Рекламните разходи се повишават 0-2000;
- Сценарий 2: Рекламните разходи намаляват 2000-0;
- Сценарий 3: Рекламните разходи са постоянни през годината.

При сценарий 1 имаме $q_0 = 0$, заместяме в общата формула за $A(t)$ и получаваме

$$A(t) = \frac{100000}{6}t - \frac{100000}{1,5}(1 - e^{-0,25t}).$$

Аналогично, при сценарий 2 ($q_0 = 2000$) получаваме

$$A(t) = \frac{400000}{1,5}(1 - e^{-0,25t}) - \frac{100000}{6}t.$$

Резултатите от изчисленията са представени на Рис. 23.

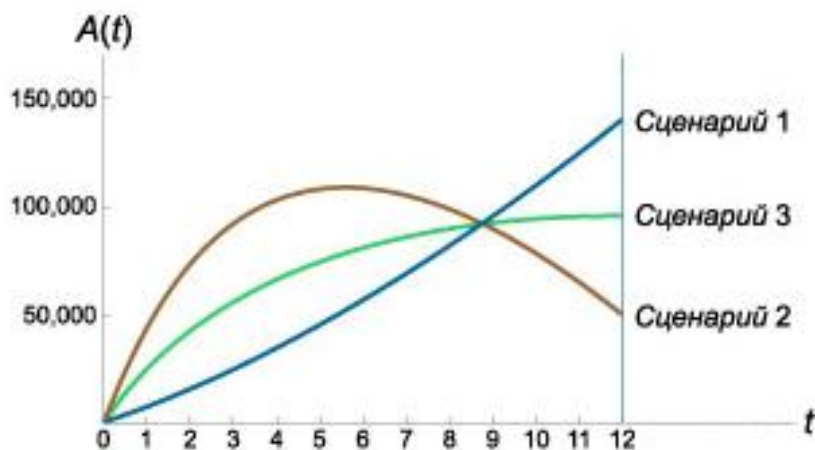


Рис. 23. Графики на функциите на потребителска осведоменост в следствие от рекламната кампания при различните сценарии

Сценарий	1	2	3
Средна годишна стойност на $A(t)$	60253	83988	72117

Средните стойности на $A(t)$ през годината за тези сценарии са дадени в таблицата. Както се вижда, най-агресивен сценарий 2 може да доведе до увеличаване на продажбите, въпреки че сценарият 1 има предимство благодарение на дългосрочния ефект. В реалния бизнес динамиката на $A(t)$ може да има далеч по-сложен характер.