1. Въведение

Динамичните модели в икономиката се наричат моделите, описващи икономиката в развитие, т.е. моделите, описващи икономически процеси. Те са контрапункт на статичните модели, характеризиращи дадена икономическа система в определен момент, а не в развитие. В микроикономиката, занимаваща се поведението на отделните потребители и производители на пазарите на стоки (и услуги) и ресурси, основните модели са статични – те дават една „снимка“ на разглежданата икономическа система в определен момент.

Даден модел се явява динамичен, ако поне една икономическа променлива се отнася за период от време, различен от времето, към което са отнесени другите променливи. Всички променливи в динамичните модели са отнесени към времето (t), което играе ролята на независима променлива.

С помощта на динамичните модели се решават въпросите за планирането и прогнозирането на икономическите процеси.

Икономиката е практика и наука, обхващаща производството, разпределението и потреблението на стоки и услуги. Икономическата практика е предмет на изучаване от икономическата наука. Тя се подразделя на:

- микроикономика и макроикономика;
- теоретична и приложна икономика.

Микроикономиката изучава икономическите системи локално, тя моделира поведението на отделния потребител или производител на конкретен пазар. За разлика от нея, макроикономиката изучава икономическата система на една държава глобално, в нея присъстват четири икономически агента – секторите на домакинствата и фирмите, държавата и външния сектор (всички икономики, различни от дадената, разглеждани като едно цяло). Обект на изучаване в дисциплината „Бизнес динамика“ ще бъдат динамични микроикономически модели с отношение към дейността на фирмите.

Динамичните модели в бизнес икономиката могат да се разделят на следните групи:

- модели с непрекъснато време;
- модели с дискретно време;
- модели на случайни процеси.

Като контрапункт на последната група модели, наричащи се стохастични, първите две групи се отнасят към детерминираните модели.

Моделите с непрекъснато време обикновено се свеждат до решаването на обикновени диференциални уравнения, а моделите с дискретно време – до диференчни уравнения.

Диференциални уравнения се наричат уравнения, в които неизвестната величина е функция (в случая на времето t) и в тях освен неизвестната функция $y(t)$ участват и някои нейни производни $y'(t)$, $y''(t)$, $y'''(t)$,… и т.н. Най-високият ред участваща в обикновеното диференциално уравнение производна определя и реда на самото уравнение. Така разграничаваме обикновени диференциални уравнения от първи ред (в които се срещат $y(t)$ и $y'(t)$), от втори ред ($y(t)$, $y'(t)$ и $y''(t)$) и т.н.

Приложението на обикновените диференциални уравнения в икономиката се основава преди всичко на механичната интерпретация на производната. При нея

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

се интерпретира като скорост на изменение на икономическата величина $y(t)$.

Ако приемем, че времето е зададено дискретно (дни, седмици, месеци, години), то тогава икономическата величина $y(t)$ е определена само за $t = 0,1,2, \ldots$, следователно ще имат смисъл само стойностите

$$y(0), y(1), y(2), \ldots, y(t-1), y(t), y(t+1), \ldots$$

Всяка връзка, при която $y(t+1)$ зависи от предишните стойности на величината $y(t), y(t-1), y(t-2), y(t-3), \ldots$ се нарича диференчно уравнение. Ако $y(t+1)$ зависи само от $y(t)$ говорим за диференчно уравнение от първи ред, ако $y(t+1)$ зависи и от $y(t-1)$ – от втори ред и т.н.

Диференциалните уравнения могат винаги да се дазглеждат като гранични състояния на диференчните, а диференчните се получават често (но не винаги) от диференциалните чрез дискретизация на времето. Това става по следния начин:

$$\begin{aligned} y'(t) = \frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \approx \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t+1) - y(t)}{(t+1) - t} = \frac{y(t+1) - y(t)}{1} \\ = y(t+1) - y(t). \end{aligned}$$

Аналогично получаваме формулата

$$y''(t) \approx [y(t+2) - y(t+1)] - [y(t+1) - y(t)] = y(t+2) - 2y(t+1) + y(t)$$

Модел на Бернули на постоянния ръст. Да предположим, че една дискретно зададена величина се изменя с постоянен ръст. Това означава, че изменението става по закона

$$y(t+1) = (1+k)y(t),$$

където k е малко (от порядъка на стотни или хилядни). Тогава k ако е положително (отрицателно) се нарича ръст на нарастването (намаляването) на величината $y(t)$. Предполага се, че е зададено началното състояние на тази величина

$$y_0 = y(0).$$

Тогава ще имаме

$$y(1) = (1+k)y_0$$

$$y(2) = (1+k)y(1) = (1+k)^2 y_0$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$y(t) = (1+k)y(t-1) = (1+k)^t y_0.$$

Ако заменим $y(t+1)$ с $y'(t) + y(t)$ ще получим диференциалното уравнения на изменението с постоянен ръст:

$$y'(t) = ky(t).$$

Това уравнение за пръв път е било предложено от Якоб Бернули. Решението му е елементарно: умножаваме уравнението

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

с dt и делим на y, получаваме

$$\frac{dy}{y} = kdt,$$

след интегриране намираме общото решение

$$\ln y = kt + C \Longrightarrow y(t) = Ce^{kt}.$$

От началното условие намираме

$$C = y(0) = y_0.$$

Така окончателното решение е

$$y(t) = e^{kt} y_0.$$

Решението на диференциалното уравнение на постоянния ръст е граница на решението на съответното уравнение:

$$\lim_{k\to 0}(1+k)^t y_0 = y_0 \lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}kt} = y_0 \left[\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}\right]^{kt} = e^{kt} y_0.$$

За много малки стойности на k е валидна следната формула за приближено пресмятане

$$(1+k)^t \approx 1 + kt.$$

Тя се обосновава по следния начин. Нека k и m да са много малки величини, тогава

$$(1+k)(1+m) = 1 + k + m + km \approx 1 + k + m.$$

Това е така, защото ако k и m са от порядъка на стотни, то произведението km е от порядъка на десетохилядни (или най много хилядни) и може да бъде пренебрегнато. Тогава за $(1+k)^t$ получаваме

$$(1+k)^t = (1+k)(1+k)\dots(1+k) \approx 1 + k + k + \cdots + k = 1 + kt.$$

Така окончателно получаваме приблизителните равенства

$$e^{kt} \approx (1+k)^t \approx 1 + kt.$$

Забележка 1. Лесно можем да получим и формулата за приблизително деление

$$\frac{1+k}{1+m} \approx 1 + k - m.$$

Забележка 2. Ясно е, че редицата

$$1, e^k, e^{2k}, \dots, e^{kt}$$

се явява геометрична прогресия с частно $q = e^k$. Когато дадена величина нараства по такъв начин, казваме че тя има експоненциален ръст.

Правилото „70“. При величините, променящи се с постоянен темп, често възниква въпроса: след колко време те ще се удвоят (утроят). Нека една величина се изменя с постоянен темп от $p\%$. Тогава законът на нейното изменение ще бъде

$$y(t) = e^{\frac{pt}{100}} y_0.$$

Предполагаме, че след определено време тя се е удвоила. Тогава ще имаме

$$e^{\frac{pt}{100}} y_0 = 2y_0 \Rightarrow e^{\frac{pt}{100}} = 2.$$

Като логаритмуваме последното равенство, получаваме

$$\frac{pt}{100} = \ln 2 \Rightarrow t = \frac{100 \ln 2}{p} = \frac{100 \cdot 0{,}693}{p} \approx \frac{70}{p}.$$

За да определим след колко време една величина, нарастваща с постоянен темп от $p\%$, ще се удвои, трябва 70 да разделим с p.

Аналогично получаваме правилото „110“ за утрояване:

$$t = \frac{100 \ln 3}{p} = \frac{100 \cdot 1{,}099}{p} \approx \frac{110}{p}.$$

Пример 1. В банка са депозирани 1000 лв. при постоянна лихва от 2% годишно. Да се пресметнат сумите на депозита на всеки 5 години до 35 години по трите формули. След колко години приблизително сумата ще се удвои.

Решение:

Първо пресмятаме по формулата

$$y(t) = e^{\frac{pt}{100}} y_0 = 1000e^{0,02t}.$$

Ще имаме

$$y(5) = 1000e^{0,1} = 1105;\ y(10) = 1000e^{0,2} = 1221;\ y(15) = 1000e^{0,3} = 1350;\ y(20) = 1000e^{0,4} = 1492;\ y(25) = 1000e^{0,5} = 1649;\ y(30) = 1000e^{0,6} = 1822;\ y(35) = 1000e^{0,7} = 2014.$$

След това извършваме пресмятанията по формулата

$$y(t) = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t y_0 = 1,02^t \cdot 1000.$$

Получаваме

$$y(5) = 1,02^5 \cdot 1000 = 1104;\ y(10) = 1,02^{10} \cdot 1000 = 1219;\ y(15) = 1,02^{15} \cdot 1000 = 1346;\ y(20) = 1,02^{20} \cdot 1000 = 1486;\ y(25) = 1,02^{25} \cdot 1000 = 1641;\ y(30) = 1,02^{30} \cdot 1000 = 1811;\ y(35) = 1,02^{5} \cdot 1000 = 2000.$$

И накрая, пресмятаме по формулата

$$y(t) = \left(1 + \frac{pt}{100}\right) y_0 = (1 + 0,02t)y_0.$$

Пресметнатите стойности нанасяме в таблицата

	$1000e^{0,02t}$	$1,02^t \cdot 1000$	$(1 + 0,02t)y_0$
$t = 5$	1105	1104	1100
$t = 10$	1221	1219	1200
$t = 15$	1350	1346	1300
$t = 20$	1492	1486	1400
$t = 25$	1649	1641	1500
$t = 30$	1822	1811	1600
$t = 35$	2014	2000	1700

Вижда се, че резултатите от първите две колонки са много близки, а резултатите от третата колонка с времето се отдалечават все повече от тях. Всъщност, не е добра идеята да се приближава геометрична прогресия (колонки 1 и 2) с аритметична (колонка 3), освен ако не става дума за много малък темп на изменение и кратък период от време.

На базата на правилото „70“ получаваме че паричният депозит ще се удвои приблизително за 35 години.

Пример 2. Да се прогнозира населението на България за 2020, 2030, 2040, 2050, 2070 и 2100 год. на базата на следните данни и като се използва модела на постоянния ръст.

История на населението на България

година	население	Темп на нарастване
2008	7541012	-0,73%
2009	7486752	-0,72%
2010	7433677	-0,71%
2011	7381264	-0,71%
2012	7329486	-0,70%
2013	7278140	-0,70%
2014	7226924	-0,70%
2015	7175548	-0,71%
2016	7124817	-0,71%
2017	7074445	-0,71%

Кога населението на България ще намалее на половината от това, което е през 2017 год.

Решение:

На базата на резултатите от таблицата приемаме постоянен ръст от -0,70% (намаление с 0,70%) годишно. Ще извършим пресмятанията по първите две формули, като данните за последната 2017 год., закръглени до хиляди приемаме за начални, т.е.

$$y_0 = 7074.$$

Тогава, по първата формула получаваме

$$y(t) = e^{\frac{pt}{100}} y_0 = 7074 e^{-0{,}007t},$$

където

$$t = \text{дадената година} - 2017,$$

т.е. $t = 3$ за 2020 год., $t = 13$ за 2030 год., $t = 23$ за 2040 год., $t = 33$ за 2050 год., $t = 53$ за 2070 год. и $t = 83$ за 2100 год. Ще имаме

$$y(3) = 7074e^{-0{,}021} = 6927;\ y(13) = 7074e^{-0{,}091} = 6459;\ y(23) = 7074e^{-0{,}161} = 6022;\ y(33) = 7074e^{-0{,}231} = 5615;\ y(53) = 7074e^{-0{,}371} = 4881;\ y(83) = 7074e^{-0{,}581} = 3957.$$

Аналогични пресмятания извършваме по втората формула

$$y(t) = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t y_0 = 0{,}993^t \cdot 7074.$$

Получаваме

$$y(3) = 0{,}993^3 \cdot 7074 = 6926;\ y(13) = 0{,}993^{13} \cdot 7074 = 6457;\ y(23) = 0{,}993^{23} \cdot 7074 = 6019;\ y(33) = 0{,}993^{33} \cdot 7074 = 5610;\ y(53) = 0{,}993^{53} \cdot 7074 = 4875;\ y(83) = 0{,}993^{83} \cdot 7074 = 3949;$$

Всички получени резултати (прогнози) нанасяме в таблица

година	$7074e^{-0{,}007t}$	$7074 \cdot 0{,}993^t$
2017	7074	7074
2020	6927	6926
2030	6459	6457
2040	6022	6019
2050	5615	5610
2070	4881	4875
2100	3957	3949

По правилото „70“ намираме, че населението на България ще намалее двойно спрямо това от 2017 год. (т.е. ще възлиза на 3537 хил.) след 100 год. или през 2127 год.

Забележка. Горните пресмятания могат да се извършват или директно или чрез преминаване към логаритми. Нека например да пресметнем $y(13)$ чрез преминаване към логаритми. По първата формула ще имаме

$$y(13) = 7074e^{-0{,}091} \Longrightarrow \ln y(13) = \ln 7074 - 0{,}091 = 8{,}864 - 0{,}091 = 8{,}773 \Longrightarrow y(13) = e^{8{,}773} = 6458.$$

По втората:

$$y(13) = 0{,}993^{13} \cdot 7074 \Longrightarrow \ln y(13) = 13 \ln 0{,}993 + \ln 7074 = 13(-0{,}007) + 8{,}864 = 8{,}773 \Longrightarrow y(13) = e^{8{,}773} = 6458.$$

(грешките са от закръгляния)

2. Частично микроикономическо равновесие

Разглеждаме една стока, предназначена за крайно потребление. Означаваме с x количеството от тази стока, което потребителите, участващи в даден пазар на тази стока (национален, регионален или друг) биха желали да закупят от нея. Естествено е, че x ще зависи от много фактори (или на математически език $\boldsymbol{x}$ ще е функция на много променливи) – цените на други стоки (заместващи или допълващи потреблението на тази стока), потребителския доход, вкусове, предпочитания, модни тенденции и др. Пренебрегваме всички тези фактори, защото преди всичко количеството на потреблението на стоката x ще зависи от нейната цена p. Така получаваме функцията на пазарно потребителско търсене на тази стока $x = x(p)$. Трябва да отбележим, че всички, които биха купили стоката на цена p (с удоволствие) биха я купили и на цена по-ниска от p, следователно функцията $x(p)$ е монотонно намаляваща, значи $x'(p) < 0$.

Наличието на потребителско търсене на стоката формира (микроикономически) стоков пазар. Логично е на този пазар да се появят и тези, които ще предлагат стоката – нейните производители. (В микроикономиката под производител се разбира всеки, който предлага дадена стока). Означаваме с y количеството от стоката, което би било предложено от производителите на този пазар. Естествено е, че и y (подобно на x) ще зависи от много и разнородни фактори – цените на ресурсите на производство, технологията по която се произвежда стоката, политическата и икономическа конюнктура и други. Най-важният фактор обаче е (отново) цената на стоката p. Тази функция на една променлива $y = y(p)$ ще наричаме функция на пазарно предлагане на стоката. Тя е растяща функция на аргумента си: тези които продават стоката при цена p биха се радвали да я продават и по-скъпо. Така, че $y'(p) > 0$.

Така, на пазара на тази стока се срещат двете страни – потребители и производители, снабдени със своите функци $x(p)$ и $y(p)$ съответно. Те трябва „да се разберат“ за такава цена на стоката $p = p_E$, при която пазарното търсене и пазарното предлагане да се изравнят и по този начин производителите ще предложат точно това количество $q_E = x(p_E) = y(p_E)$, което потребителите търсят. Така се получава частичния равновесен модел. При всякакво отклонение от него се получават излишъци (при $p > p_E \Rightarrow y(p) > x(p)$) или дефицити (при $p < p_E \Rightarrow y(p) < x(p)$).

Говорим за **устойчивост** на динамичен модел, когато, в зависимост от началното състояние може да се достигне до равновесно състояние в модела и това състояние да се поддържа във времето.

Най-простите динамични модели, обосноваващи съществуването и единствеността на частичното пазарно равновесие са тези на Валрас и Маршал.

Модел на Валрас. Нека цената е $p_0 > p_E$. Тогава $y(p_0) > x(p_0)$, т.е. появява се **свръхпредлагане** (излишък на стоката) в размер на $y(p_0) - x(p_0)$. Тогава ще възникне конкуренция между производителите и за да привлекат купувачи те ще се принудят да свалят цената, дотогава докато се установи равновесие при цена p_E и количество q_E. Аналогични са разсъжденията при цена $p_0 < p_E$, тогава $x(p_0) > y(p_0)$, поражда се **свръхтърсене** (дефицит на стоката) в размер на $x(p_0) - y(p_0)$ и купувачите ще се съгласят на по-високи цени. Така, според Валрас

$$\frac{dp}{dt} = h[x(p) - y(p)], h > 0$$

Следователно, според Валрас комбинацията p_E, q_E представлява устойчиво пазарно равновесие.

Модел на Маршал. Ако цената е $p_0 > p_E$, то обемът на търсене ще се съкрати до $q_0 = x(p_0) < q_E$. Но такова количество от стоката търговците са съгласни да предлагат на цена $p_1 = p^S(q_0) < p_E$ ($p^S(q_0)$ е стойността на обратната функция на предлагане). Тъй като цената на търсене p_0 превишава цената на предлагане p_1, фирмите ще получат печалба, стимулираща ги да разширят производството, което ще доведе до увеличено предлагане, т.е. $y(t) \to q_E$, докато се изравнят обемите и цените на търсене и предлагане и се достигне до пазарното равновесие. В случай на количество, по-голямо от равновесното q_E цената на търсене ще се окаже под цената на предлагане, фирмите ще търпят загуби, което ще доведе до съкращаване на производството и отново $y(t) \to q_E$. Това може да се изрази така:

$$\frac{dq}{dt} = k[p^D(q) - p^S(q)], k > 0$$

, където с $p^D(q)$ и с $p^S(q)$ са означени обратните функции на търсене и предлагане.

Следователно, и според Маршал пресечната точка на линиите на търсене и предлагане представлява устойчиво пазарно равновесие.

Различието между двата модела е, че според Валрас цените са изключително гъвкави и моментално реагират на промяна в пазарната конюнктура. Според Маршал, това не е така и при диспропорция между търсене и предлагане обемите на пазарните сделки реагират по-бързо. Освен това Валрас приписва по-активна роля на потребителите, а според Маршал, движеща сила на пазара са предприемачите. Но и в двата случая $p(t) \to p_E$ и $q(t) \to q_E$ и бързо се достига до пазарно равновесие и то е устойчиво.

Пример 3. Дадени са функциите на пазарно търсене $x(p) = 100 - p$ и предлагане $y(p) = 2p - 20$. При $p_0 = 60$ да се намерят динамичните функции на ефективни цена $p(t)$, количество $q(t)$ и количеството излишък (или недостиг), като се използва

а) модела на Валрас при $h = 1/6$;

б) модела на Маршал при $k = 1/3$.

В двата случая да се пресметнат пазарните величини за $t = 1,2,3$ и 10.

Решение:

От изравняването на пазарното търсене и предлагане

$$x(p) = 100 - p = 2p - 20 = y(p)$$

намираме равновесната цена и количество за този модел

$$p_E = 40 \quad \text{и} \quad q_E = 60.$$

а) При модела на Валрас се предполага, че началната цена ще бъде

$$p(0) = p_0 = 60,$$

т.е. по-висока от равновесната $p_E = 40$. При тази цена потребителите ще търсят количество

$$x(t = 0) = x(p = 60) = 40,$$

а производителите ще предлагат количество

$$y(t = 0) = y(p = 60) = 100.$$

Ефективното продадено количество ще възлиза на по-малкото от двете

$$q(0) = min\{x(t = 0), y(t = 0)\} = x(t = 0) = 40,$$

Следователно в началото ще има излишък

$$y(t = 0) - x(t = 0) = 100 - 40 = 60 -$$

продукция, която е произведена от производителите, но не се търси от потребителите на тази цена.

Диференциалното уравнение на този модел ще бъде

$$\frac{dp}{dt} = h[x(p) - y(p)] = \frac{1}{6}[(100 - p) - (2p - 20)] = 0{,}5(40 - p).$$

Умножаваме с dt и разделяме на $p - 40$, получаваме

$$\frac{dp}{p - 40} = -0{,}5dt.$$

След интегриране ще имаме

$$\ln(p - 40) = -0{,}5t + C \Longrightarrow p(t) = 40 + Ce^{-0{,}5t}.$$

За да определим интеграционната константа C използваме началното условие

$$p(0) = 40 + C = 60 \Longrightarrow C = 20$$

и окончателно динамичната функция на цената е

$$p(t) = 40 + 20e^{-0{,}5t}.$$

При такава цена ще имаме пазарно търсене и предлагане

$$x(t) = 100 - p(t) = 60 - 20e^{-0{,}5t}$$

$$y(t) = 2p(t) - 20 = 60 + 40e^{-0,5t}$$

съответно.

Тогава за динамичната функция на пазарното количество получаваме

$$q(t) = min\{x(t), y(t)\} = x(t) = 60 - 20e^{-0,5t},$$

а обемът на излишъка ще бъде

$$y(t) - x(t) = 60e^{-0,5t}.$$

Пресмятанията нанасяме в таблица

време t	$e^{-0,5t}$	ефективна цена $p(t)$	търсене $x(t)$	предлагане $y(t)$	ефективно количество $q(t)$	излишък $y(t) - x(t)$
0	1,000	60,00	40,00	100,0	40,00	60,00
1	0,607	52,14	47,86	84,28	47,86	36,42
2	0,368	47,36	52,64	74,72	52,64	22,08
3	0,223	44,46	55,54	68,92	55,54	13,38
10	0,007	40,14	59,86	60,28	59,66	0,42

б) При модела на Маршал при цена $p = p_0 = 60$ потребителите ще търсят количество $q_0 = x(p_0) = x(60) = 40$. Тъй като обратната функция на предлагане е

$$p^S(q) = 10 + 0,5q,$$

то производителите ще произведат количество $q = q_0 = 40$ и ще го предлагат на цена $p_1 = p^S(q_0) = p^S(40) = 30$. При тази цена потребителите ще търсят количество $x(30) = 70$, тогава началният дефицит от стоката ще възлиза на

$$x(30) - y(30) = 70 - 40 = 30.$$

Така величините на модела в началният момент ще имат стойности

$$p(0) = 30;\ q(0) = 40;\ x(t = 0) = 70;\ y(t = 0) = 40$$

$$q(0) = min\{x(t = 0), y(t = 0)\} = y(t = 0) = 40.$$

Обратната функция на търсене е

$$p^D(q) = 100 - q,$$

тогава диференциалното уравнение на модела ще бъде

$$\frac{dq}{dt} = k[p^D(q) - p^S(q)] = \frac{1}{3}[(100 - q) - (10 + 0,5q)] = 0,5(60 - q).$$

Умножаваме с dt и разделяме на $q - 60$, получаваме

$$\frac{dp}{q - 60} = -0{,}5dt.$$

След интегриране ще имаме

$$\ln(q - 60) = -0{,}5t + C \Longrightarrow q(t) = 60 + Ce^{-0{,}5t}.$$

За да определим интеграционната константа C използваме началното условие

$$q(0) = 60 + C = 40 \Longrightarrow C = -20$$

и окончателно динамичната функция на количеството е

$$q(t) = 60 - 20e^{-0{,}5t} = y(t).$$

При такова количество производителите ще предлагат при цена

$$p(t) = p^S\big(q(t)\big) = 40 - 10e^{-0{,}5t},$$

При тази цена потребителите ще търсят стоката в количество

$$x(t) = x\big(p(t)\big) = 60 + 10e^{-0{,}5t},$$

а обемът на дефицита ще бъде

$$x(t) - y(t) = 30e^{-0{,}5t}.$$

Пресмятанията нанасяме в таблица

време t	$e^{-0{,}5t}$	ефективна цена $p(t)$	търсене $x(t)$	предлагане $y(t)$	ефективно количество $q(t)$	дефицит $x(t) - y(t)$
0	1,000	30,00	70,00	40,00	40,00	30,00
1	0,607	33,97	66,07	47,86	47,86	18,21
2	0,368	36,32	63,68	52,64	52,64	11,04
3	0,223	37,77	62,24	55,54	55,54	6,70
10	0,007	39,93	60,07	59,86	58,60	0,21

Модел на Самуелсън. Предложен е от нобеловия лауреат Пол Самуалсън (1915-2009, получил нобелова награда по икономика през 1970 г.). В този модел изменението на цената в следващия момент от времето е свързан с величината на остатъчното търсене (свръхтърсене) в предишния момент чрез следната рекурентна зависимост

$$p_t = p_{t-1} + h[x(p_{t-1}) - y(p_{t-1})];\ h > 0.$$

Забелязваме, че това е диференчно уравнение, получаващо се от диференциалното уравнение на модела на Валрас (чрез замяната на $p'(t)$ с $p_t - p_{t-1}$).

Коефициентът h е параметър на управление на процеса на установяване на пазарното равновесие. Може това да си представим по следния начин: независим **арбитър** след края на работния ден пресмята остатъчното търсене (разликата между дневното търсене и предлагане) и на база на горната формула пресмята цената, на която ще се продава през следващия ден.

При много малки стойности на параметъра на управление h процесът на установяване на равновесната цена ще бъде много бавен, но ще има сходимост (и устойчивост). Обратно, при големи стойности на този параметър процесът ще бъде разходящ, което не предполага установяване на пазарно равновесие.

Пример 4. Да се намери формула за цената p_t, търсенето $x_t = x(p_t)$, предлагането $y_t = y(p_t)$ и продаденото количество q_t при произволни стойности на h и p_0, като се предполага, че функциите на търсене и предлагане са същите, като в пример 3. Да се изследва сходимостта на процеса в зависимост от стойностите на h. Да се пресметнат дневните стойности на величините 1, 2, 3, 5, 10 дни след стартиране на процеса при $h = 1/30, h = 1/2$ и $p_0 = 20$.

Решение:

Във формулата

$$p_t = p_{t-1} + h[x_{t-1} - y_{t-1}]$$

заместваме

$$x_{t-1} = x(p_{t-1}) = 100 - p_{t-1} \quad \text{и} \quad y_{t-1} = y(p_{t-1}) = 2p_{t-1} - 20$$

и получаваме

$$p_t = p_{t-1} + h(120 - 3p_{t-1}) = (1 - 3h)p_{t-1} + 120h.$$

От двете страни на горното равенство изваждаме равновесната цена $p_E = 40$. Получаваме

$$p_t - 40 = (1 - 3h)p_{t-1} + 120h - 40 = (1 - 3h)(p_{t-1} - 40).$$

Горната формула е формулата за общия член на геометричната прогресия $a_0 = p_0 - 40, a_1 = p_1 - 40, a_2 = p_2 - 40, \dots, a_t = p_t - 40, \dots$ с частно $q = 1 - 3h$. Процесът ще е сходящ при $|q| = |1 - 3h| < 1$, т.е $h < 2/3$, като за $h = 1/3$ равновесната цена ще се установи един ден след началото на процеса, независимо от началната цена p_0. В този случай формулата за общия член на геометричната прогресия ще бъде

$$a_t = p_t - 40 = (1 - 3h)^t(p_0 - 40) \Longrightarrow p_t = 40 + (1 - 3h)^t(p_0 - 40).$$

За дневните стойности на другите величини на модела получаваме

$$x_t = x(p_t) = 60 - (1 - 3h)^t (p_0 - 40)$$

$$y_t = y(p_t) = 60 + 2(1 - 3h)^t (p_0 - 40).$$

Дневното продадено количество q_t ще бъде по-малкото от количествата на търсене x_t (при излишък) или предлагане y_t (при недостиг).

При $p_0 = 20$ и $h = 1/30$ получаваме

$$p_t = 40 - 20 \cdot 0{,}9^t, \qquad x_t = 60 + 20 \cdot 0{,}9^t, \quad y_t = 60 - 40 \cdot 0{,}9^t.$$

Това ще бъде ситуация, при която търсенето превишава предлагането (дефицит в размер на $x_t - y_t = 60 \cdot 0{,}9^t$) и тогава продаденото количество q_t ще съвпада с предлагането y_t. Пресмятанията по дни за $t = 1,2,3,5,10$ на величините, свързани с модела са дадени в таблица.

t	p_t	x_t	y_t	q_t	дневен дефицит
0	20,00	80,00	20,00	20,00	60,00
1	22,00	78,00	24,00	24,00	54,00
2	23,80	76,20	27,60	27,60	48,60
3	25,42	74,58	30,84	30,84	43,74
5	28,19	71,81	36,38	36,38	35,43
10	33,03	66,97	46,05	46,05	20,92

Вижда се, че процесът е сходящ, но при тази стойност на h, сходимостта е много бавна.

3. Цикълът на паяжината

Това е пример за квазидинамичен модел, който, при определени условия може да бъде неравновесен. Разпространен е главно в селското стопанство, защото по времето, когато производителите вземат решения за производството си, те не могат да знаят пазарната цена, на която ще реализират продукцията си.

Нека, например да разгледаме пазара на яйца. Предполагаме, че обемът на предлагане на яйца през текущата година *t*, зависи от решенията, които са взели производителите на яйца предишната година *t-1*. Тези решения са взети на база цената p_{t-1} на яйцата от предишната година. Предполагаме, че функцията на предлагане на яйца $y_t(p_{t-1})$ е от най-прост вид

$$y_t = bp_{t-1}$$

Търсенето, обаче ще е съобразено с цената през настоящата година

$$x_t = \alpha - \beta p_t$$

Ако яйцата не могат да се съхраняват, цената p_t трябва да е такава, че да осигури изкупуването на цялото количество y_t. Тогава

$$\alpha - \beta p_t = b p_{t-1}$$

Така че цената през всяка година е свързана с цената от предишната година посредством **рекурентната зависимост**

$$p_t = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{b}{\beta} p_{t-1} \qquad (1)$$

Цената p_t, удовлетворяваща (1) за дадено p_{t-1} се нарича **пазарна клирингова цена**. Тя е различна от равновесната пазарна цена p^*, която за този модел ще се получи от $p_t = p_{t-1} = p^*$ и (1), така че

$$p^* = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{b}{\beta} p^* \qquad (2)$$

откъдето следва, че $p^* = \frac{\alpha}{b+\beta}$ и $q^* = \frac{b\alpha}{b+\beta}$. Ако извадим (2) от (1), ще се получи

$$p_t - p^* = -\frac{b}{\beta}(p_{t-1} - p^*)$$

Възможни са два случая:

1) $b < \beta$, тогава $|p_t - p^*| < |p_{t-1} - p^*|$ и редицата от цени $p_0, p_1, \dots, p_{t-1}, p_t, \dots$ ще е сходяща числова редица и $\lim_{t\to\infty} p_t = p^*$. Същото важи и за редицата от количества продадени яйца $q_0, q_1, \dots, q_{t-1}, q_t, \dots$, която ще има за граница q^*. В този случай разглежданият модел е равновесен.

2) $b > \beta$ и $|p_t - p^*| > |p_{t-1} - p^*|$ обуславя разходящи числови редици, както на клиринговите цени, така и на продаваните през годините количества яйца. Всяка година клиринговата цена ще се отдалечава все по-вече от равновесната цена, така че моделът не е равновесен.

Причината този модел да се нарича цикъл на паяжината се вижда от характерната за него графика на рис. 1: в случай на сходимост, точката на равновесие с координати (p^*, q^*) играе ролята на паяка и привлича към себе си (начупената линия $ABCE$ ...) точките с координати цените и количествата, които се получават през различни периоди от времето.

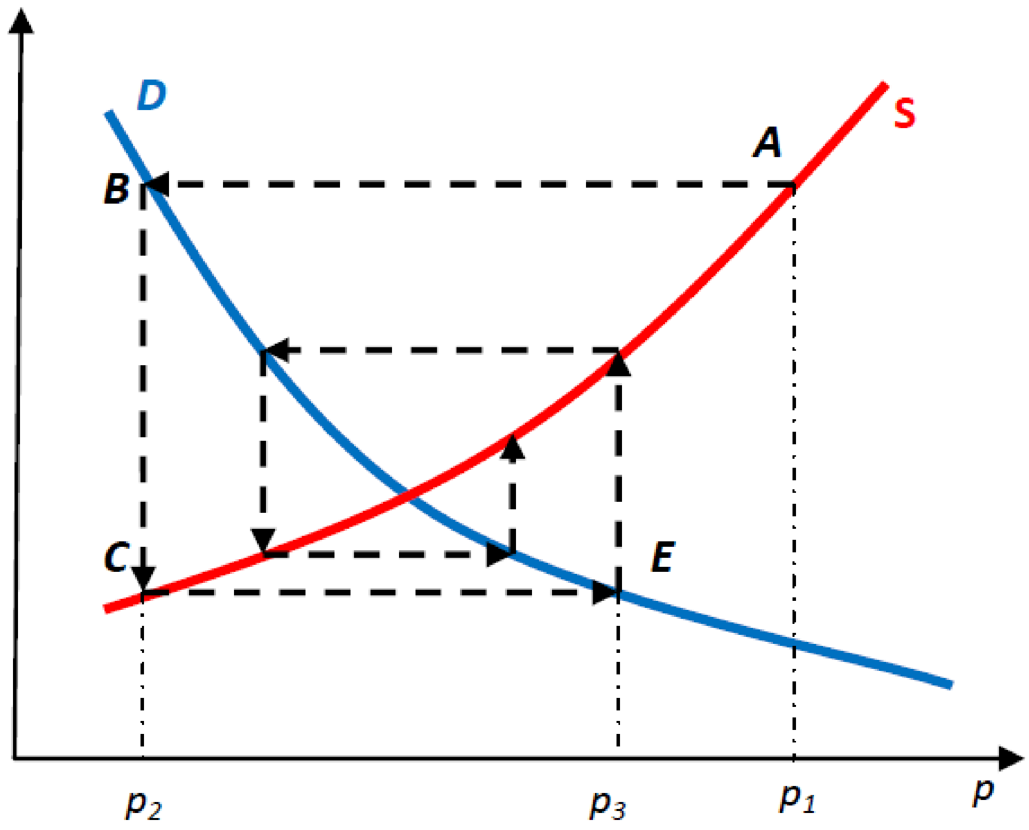

Рис.1. Характерна графика на цикъла на паяжината в случай на сходимост

Пример 5. На пазара на кромид функцията на предлагане на производителите е

$$y_t = p_{t-1} - 20,$$

а функцията на търсене от страна на потребителите –

$$x_t = 100 - 2p_t.$$

(предполага се, че цените се измерват в стотинки за килограм, а количествата – в хиляди тонове). Да се покаже, че моделът е сходящ за всяко p_0 и да се определят годишните цени и количества при $p_0 = 30$.

Решение:

Първо да определим равновесната цена p^*. Ще имаме

$$x_t(p^*) = 100 - 2p^* = p^* - 20 = y_t(p^*) \Longrightarrow p^* = 40.$$

Това ще бъде цената, граница на редицата от годишни цена, в случай че моделът е сходящ. За q^* (границата от редицата на годишни количества) получаваме

$$q^* = x_t(p^*) = y_t(p^*) = 20.$$

Сега от изравняването на $x_t(p_t)$ с $y_t(p_{t-1})$ ще получим рекурентната връзка между p_t и p_{t-1}:

$$100 - 2p_t = p_{t-1} - 20 \Longrightarrow p_t = 60 - 0{,}5p_{t-1}.$$

Изваждаме от двете страни равновесната цена $p^* = 40$ и получаваме

$$p_t - 40 = 20 - 0{,}5p_{t-1} = -0{,}5(p_{t-1} - 40).$$

Тъй като $|-0{,}5| < 1$, то редицата $a_t = p_t - 40$ е безкрайно намаляваща геометрична прогресия с частно $q = 0{,}5$ и следователно редицата от цените е сходяща числова редица с граница $p^* = 40$. От геометричната прогресия получаваме формулата за произволния член

$$p_t - 40 = (-0{,}5)^t(p_0 - 40).$$

Тъй като $p_0 = 30$, то окончателно за годишните цени ще имаме

$$p_t = 40 - 10(-0{,}5)^t.$$

Годишните търгувани количества q_t получаваме от

$$q_t = x_t(p_t) = 20 + 20(-0{,}5)^t.$$

Ориентирайки се по цената на кромида през нулевата година $p_0 = 30$, производителите ще предложат през първата година количество $y_1 = p_0 - 20 = 10$. Това количество обаче ще се търси от потребителите на цена, получаваща се от $x_1 = 100 - 2p_1 = 10$, т.е. $p_1 = 45$. Ориентирайки се по тази цена производителите ще предложат за следващата година количество $y_2 = p_1 - 20 = 25$, което ще се търси от потребителите на цена $p_2 = 37{,}5$ ($y_2 = 25 = x_2 = 100 - 2p_2 \Longrightarrow p_2 = 37{,}5$). Така всяка следваща година годишната цена ще е два пъти по-близка до равновесната цена, като редува положението си спрямо нея (по-малка, по-голяма).

В случай, че цикълът на паяжината е расходящ, има различни начини той да бъде превърнат в сходящ.

Въвеждане на данък от държавата. Ако държавата въведе данък от $100s\%$ върху цената на производителите, то тогава те ще получават по p_t парични единици за единица количество, а потребителите ще заплащат по $\pi_t = (1+s)p_t$ парични единици. Тогава функцията на предлагане (от p_{t-1}) ще бъде същата, но функцията на търсене (от p_t) ще се промени:

$$x_t = \alpha - \beta\pi_t = \alpha - \beta(1+s)p_t.$$

От изравняването на търсенето и предлагането получаваме рекурентна зависимост за клиринговите цени

$$x_t = \alpha - \beta(1+s)p_t = bp_{t-1} = y_t \Rightarrow p_t = \frac{\alpha}{\beta(1+s)} - \frac{b}{\beta(1+s)}p_{t-1}.$$

За пазарната равновесна цена p^* ще имаме

$$p^* = \frac{\alpha}{\beta(1+s)} - \frac{b}{\beta(1+s)}p^*.$$

Като извадим последното равенство от предпоследното получаваме

$$p_t - p^* = -\frac{b}{\beta(1+s)}(p_{t-1} - p^*).$$

Ясно е, че при $b > \beta$, когато моделът без данък е расходящ, при подходящ избор на данък s ще получим $b < \beta(1+s)$ и моделът с данък става сходящ.

Забележка. Същият ефект като при въвеждането на данък би се получил и ако производителите (в периодите от времето, когато това е необходимо) не реализират цялата си продукция на вътрешния пазар.

Цикъл на паяжината с управление. Това се получава, когато производителите имат възможност да реагират (освен на цената от предходния период) и на цената от настоящия период. Тогава (при запазване на функцията на търсене) във функцията на предлагане аргументът p_{t-1} се заменя с $kp_{t-1} + (1-k)p_t, k \in (0,1)$. Коефициентът k показва какви са теглата на цените от предходния и настоящ период и се явява параметър за управление на модела. При $k = 1$ имаме класическия цикъл на паяжината.

От изравняването на търсенето и предлагането през настоящия период получаваме рекурентната зависимост за клиринговите цени

$$x_t = \alpha - \beta p_t = b(kp_{t-1} + (1-k)p_t) = y_t \Rightarrow p_t = \frac{\alpha}{\beta + b(1-k)} - \frac{bk}{\beta + b(1-k)}p_{t-1}.$$

При граничен преход в горното равенство, замествайки клиринговите цени p_t и p_{t-1} с равновесната цена p^* получаваме

$$p^* = \frac{\alpha}{\beta + b(1-k)} - \frac{bk}{\beta + b(1-k)}p^*$$

Като извадим последното равенство от предпоследното получаваме

$$p_t - p^* = -\frac{bk}{\beta + b(1-k)}(p_{t-1} - p^*).$$

Ясно е, че при $b > \beta$, когато моделът без данък е расходящ, при подходящ избор на параметъра за управление k ще получим $bk < \beta + b(1-k)$ (т.е. $b(2k-1) < \beta$) и моделът с управление става сходящ.

Пример 6. Нека пазарът на жито се задава с квазидинамичните функции на предлагане и търсене $y_t = 60p_{t-1}$ и $x_t = 11000 - 50p_t$.

а) Да се пресметне пазарната равновесна цена на житото и да се покаже, че не съществува пазарно равновесие при $p_0 \neq 100$.

б) Да се пресметнат цените и количествата на продадено жито за всяка година, ако $p_0 = 90$.

в) Какъв данък върху пазарната цена на житото трябва да въведе държавата, за да регулира пазара на жито. Да се пресметнат цените и количествата на продадено жито за всяка година, ако $p_0 = 120$ при данък от 30%.

г) Ако производителите могат да реагират на цената от тази година и функцията на предлагане е от вида

$$y_t = 60(kp_{t-1} + (1-k)p_t), k \in (0,1),$$

да се намерят стойностите на k, за които моделът е сходящ. Да се пресметнат цените и количествата на продадено жито за всяка година, ако $p_0 = 120$ и $k = 0{,}8$.

Решение:

а) Изравняваме функциите на търсене и предлагане, за да намерим рекурентната зависимост за клиринговите цени:

$$x_t = 11000 - 50p_t = 60p_{t-1} = y_t \Longrightarrow p_t = 220 - 1{,}2p_{t-1}.$$

Заместваме в последното равенство p_{t-1} и p_t с равновесната цена p^* и получаваме

$$p^* = 220 - 1{,}2p^* \Longrightarrow p^* = 100.$$

(за равновесното количество намираме $q^* = y_t(p^*) = 6000$). Като извадим последното равенство от предпоследното получаваме

$$p_t - 100 = -1{,}2(p_{t-1} - 100).$$

За $p_0 = 100$ равновесието се постига веднага (и се запазва), а за $p_0 \neq 100$ модела е разходящ. За клиринговите цени получаваме

$$p_t = 100 + (-1{,}2)^t(p_0 - 100),$$

А за количеството, продадено през t-тата година

$$q_t = 6000 - 50(-1{,}2)^t(p_0 - 100).$$

б) При начална цена $p_0 = 90$ горните формули добиват вида

$$p_t = 100 - 10(-1{,}2)^t \quad \text{и} \quad q_t = 6000 + 500(-1{,}2)^t.$$

В таблицата по-долу са дадени цените и количествата през първите пет години

t	p_t	q_t
1	112	5400
2	85,6	6720
3	117,28	5136
4	79,26	7037
5	124,88	4756

Вижда се, че през всяка година с нечетен номер цената е по-висока от равновесната, а количеството – по-малко. За годините с четни номера е обратното, като разликите на годишните цени и количества с равновесните стават по-големи.

в) При въведен данък от $100s\%$ търговците ще предлагат зърното на цена p, а потребителите ще го търсят на цена $\pi = (1+s)p$. Тогава годишното изравняване на търсенето и предлагането ще се подсигурява от равенството

$$x_t = 11000 - 50\pi_t = 11000 - 50(1+s)p_t = 60p_{t-1}.$$

Тогава рекурентната зависимост за клиринговите цени ще бъде

$$p_t = \frac{220}{1+s} - \frac{1,2}{1+s}p_{t-1}.$$

За равновесната цена ще имаме

$$p^* = \frac{220}{1+s} - \frac{1,2}{1+s}p^*.$$

Като извадим последното равенство от предпоследното получаваме

$$p_t - p^* = -\frac{1,2}{1+s}(p_{t-1} - p^*).$$

При $1,2 < 1+s \Longrightarrow s > 0,2$ редиците от цени и количества ще бъдат сходящи. За равновесните цени и количества получаваме

$$p^* = \frac{220}{1+s} - \frac{1,2}{1+s}p^* \Longrightarrow p^* = \frac{220}{2,2+s}, q^* = y_t(p^*) = 60p^* = \frac{13200}{2,2+s}.$$

Като заместим p^* в израза за $p_t - p^*$ получаваме

$$p_t - \frac{220}{2,2+s} = -\frac{1,2}{1+s}\left(p_{t-1} - \frac{220}{2,2+s}\right).$$

За цената p_t ще имаме

$$p_t = \frac{220}{2,2+s} + \left(-\frac{1,2}{1+s}\right)^t \left(p_0 - \frac{220}{2,2+s}\right).$$

При данък от 30% ($s = 0,3$) и $p_0 = 120$ изразът за годишната клирингова цена добива вида

$$p_t = 88 + 32(-0,923)^t.$$

Тогава за годишното количество търгувано зърно ще имаме

$$\begin{aligned} q_t = x_t(p_t) &= 11000 - 50 \cdot 1,3p_t = 11000 - 65p_t \\ &= 11000 - 65(88 + 32(-0,923)^t) = 5280 - 2080(-0,923)^t. \end{aligned}$$

В таблицата по-долу са дадени цените и количествата през първите пет години

t	p_t	q_t
1	58,46	7200
2	115,26	3508
3	62,84	6916
4	111,23	3770
5	66,56	6673

Вижда се, че през всяка година с нечетен номер цената е по-ниска от равновесната, а количеството – по-голямо. За годините с четни номера е обратното, като разликите на годишните цени и количества с равновесните стават все по-малки (т.е приближават се към границите $p^* = 88$ и $q^* = 5280$).

За отбелязване е, че при $p_0 = 90$ (както при ситуацията от б)) поради близостта на началната цена до равновесната, още в началото равновесието ще бъде почти достигнато.

г) При модела с управление функцията на търсене ще бъде същата, както в класическия модел, а при функцията на предлагане ще трябва да заменим p_{t-1} с $kp_{t-1} + (1-k)p_t$. Тогава изравняването на търсене и предлагане ще се постига при

$$x_t = 11000 - 50p_t = 60(kp_{t-1} + (1-k)p_t) = y_t.$$

Тогава рекурентната зависимост за клиринговите цени ще бъде

$$p_t = \frac{11000}{110 - 60k} - \frac{60k}{110 - 60k} p_{t-1}.$$

За равновесната цена p^* ще е изпълнено

$$p^* = \frac{11000}{110 - 60k} - \frac{60k}{110 - 60k} p^*.$$

Като извадим последното равенство от предпоследното получаваме

$$p_t - p^* = -\frac{60k}{110 - 60k}(p_{t-1} - p^*).$$

Да намерим p^*. Ще имаме

$$\left(1 + \frac{60k}{110 - 60k}\right)p^* = \frac{11000}{110 - 60k} \Rightarrow p^* = 100.$$

Заместваме намерената p^* в израза за $p_t - p^*$ и получаваме

$$p_t - 100 = -\frac{60k}{110 - 60k}(p_{t-1} - 100)$$

Очевидно, моделът с управление ще е сходящ при $60k < 110 - 60k$, т.е. при $k < 11/12$.

При $k = 0{,}8 < 11/12$ ще имаме сходимост на модела. Като заместим k с 0,8 в последния израз получаваме

$$p_t - 100 = -0{,}774(p_{t-1} - 100).$$

При $p_0 = 120$ получаваме формула за годишната цена на зърното

$$p_t = 100 + 20(-0{,}774)^t$$

Формулата за годишното търгувано количество зърно ще бъде

$$q_t = x_t(p_t) = 11000 - 50(100 + 20(-0{,}774)^t) = 6000 - 1000(-0{,}774)^t.$$

В таблицата по-долу са дадени цените и количествата през първите пет години

t	p_t	q_t
1	84,52	6774
2	111,98	5401
3	90,73	6464
4	107,18	5641
5	94,44	6278

Вижда се, че през всяка година с нечетен номер цената е по-ниска от равновесната, а количеството – по-голямо. За годините с четни номера е обратното, като разликите на годишните цени и количества с равновесните стават все по-малки (т.е приближават се към границите $p^* = 100$ и $q^* = 6000$).

Забележка. При модела с управление равновесните цена и количество не се различават от тези при класическия модел. Това е така, защото границата на израза $kp_{t-1} + (1 - k)p_t$ е $kp^* + (1 - k)p^* = p^*$.

4. Динамизиране на статични модели

Много често, когато имаме работа със статични модели, чието решаване води до невъзможни или много трудни за решаване уравнения, успяваме да ги решим, свеждайки ги до динамични модели, подобни на цикъла на паяжината. Така например, ако при статичния модел на частично равновесие

$$q = x(p) = y(p)$$

уравнението, от което се определя равновесната цена $x(p) = y(p)$ не може да бъде решено ефективно, то можем да пробваме (например) да заменим аргумента на функцията на търсене с p_t, а аргумента на функцията на предлагане – с p_{t-1}. Тогава получаваме динамичния модел

$$q_t = x(p_t) = y(p_{t-1}),$$

който (евентуално) може да се реши чрез намиране на рекурентната зависимост

$$p_t = f(p_{t-1}).$$

Тогава (ако няма друг начин) може да намерим равновесната цена p_* чрез няколко итерации.

Пример 7. На пазара на резервни части за строителна техника функцията на пазарно търсене има вида

$$x(p) = \frac{10000}{\sqrt{p}},$$

а функцията на пазарно предлагане –

$$y(p) = \left(\frac{p - 350}{7,5}\right)^2.$$

Да се намерят равновесните величини на модела – цена и количество.

Решение:

Тъй като производната на функцията на търсене е

$$x'(p) = -\frac{5000}{p^{\frac{3}{2}}},$$

то $x'(p) < 0$ за $p \in (0, \infty)$. Производната на функцията на предлагане е

$$y'(p) = 2 \cdot \frac{p-350}{7,5} \cdot \frac{1}{7,5}$$

и $y'(p) > 0$ при $p \in (350, \infty)$.

Системата за определяне на равновесните величини на модела е

$$q = \frac{10000}{\sqrt{p}} = \left(\frac{p-350}{7,5}\right)^2.$$

Ако съществува равновесна цена, тя е единственото решение на горното уравнение в интервала $p \in (350, \infty)$. След коренуване получаваме уравнението

$$\frac{p-350}{7,5} = \frac{100}{\sqrt[4]{p}} \Rightarrow p = 350 + \frac{750}{\sqrt[4]{p}}$$

Това уравнение не можем да решим, защото след полагане $\sqrt[4]{p} = z$ получаваме алгебричното уравнение от пета степен

$$z^5 - 350z - 750 = 0.$$

За сметка на това, ние можем да заменим от едната страна на равенството p с p_{t+1}, а в другата - p с p_t. Така получаваме рекурентната зависимост

$$p_{t+1} = 350 + \frac{750}{\sqrt[4]{p_t}}$$

Стартираме итерациите с някакво произволно $p_0 > 350$, например $p_0 = 400$. В долната таблица са нанесени резултатите за първите пет итеративни пресмятания на цената, количествата на търсене и предлагане, абсолютните и относителни разлики между търсене и предлагане.

t	p_t	$x(p_t)$	$y(p_t)$	$\lvert x(p_t) - y(p_t)\rvert$	относителна разлика %
0	400,00	500,00	44,44		
1	517,71	439,50	500,03	60,53	12,10
2	507,23	444,01	439,49	0,52	0,11
3	508,04	443,66	444,03	0,37	0,08
4	507,97	443,69	443,64	0,05	0,01
5	507,98	443,69	443,69	0,00	0,00

Да отбележим, че под относителна разлика разбираме

$$\varepsilon_t = \frac{|x(p_t) - y(p_t)|}{max\{x(p_t), y(p_t)\}},$$

Очевидно е, че процесът на итерациите е много бързо сходящ към точното решение и лесно можем да заключим, че равновесните стойности на цената и количеството в този статичен модел са

$$p_* = 507{,}98 \text{ и } q_* = 443{,}69.$$

Пример 8. На даден пазар функцията на пазарно търсене има вида

$$x(p) = 20 - 2p^{\frac{3}{2}},$$

а функцията на пазарно предлагане –

$$y(p) = 4p^{\frac{5}{2}} - 10.$$

Да се намерят равновесните величини на модела – цена и количество.

Решение:

Първо ще намерим дефиниционните области на двете функции, изхождайки от това, че те трябва да са неотрицателни за неотрицателна стойност на аргумента и производните им трябва да са със съответния знак. За функцията на търсене ще имаме

$$x(p) = 20 - 2p^{\frac{3}{2}} \geq 0 \Leftrightarrow p^{\frac{3}{2}} \leq 10 \Leftrightarrow p \leq 10^{1{,}5} \cong 4{,}64.$$

Тъй като $x'(p) = -3p^{0{,}5} < 0$, то за тази функция остава ограничението $p \leq 4{,}64$. За функцията на предлагане получаваме

$$y(p) = 4p^{\frac{5}{2}} - 10 \geq 0 \Leftrightarrow p^{\frac{5}{2}} \geq 2{,}5 \Leftrightarrow p \geq 2{,}5^{2{,}5} \cong 1{,}44.$$

От производната $y'(p) = 10p^{1{,}5} > 0$ не получаваме допълнителни ограничения и за функцията на предлагане остава ограничението $p \geq 1{,}44$. Окончателно, в интервала $p \in [1{,}44; 4{,}64]$ (сечение на двете дефиниционни области) са дефинирани и двете функции.

От приравняването на функциите на търсене и предлагане получаваме последователно

$$20 - 2p^{\frac{3}{2}} = 4p^{\frac{5}{2}} - 10$$

$$30 - 2p^{\frac{3}{2}} = 4p^{\frac{5}{2}}$$

$$7{,}5 - 0{,}5p^{\frac{3}{2}} = p^{\frac{5}{2}}$$

$$p = (7{,}5 - 0{,}5p^{1{,}5})^{0{,}4}.$$

За отбелязване е, че горното уравнение след полагането $\sqrt{p} = z$ се преобразува в алгебричното уравнение

$$z^5 + 0{,}5z^3 - 7{,}5 = 0,$$

което не може да бъде решено.

Ако в лявата страна на уравнението $p = (7{,}5 - 0{,}5p^{1{,}5})^{0{,}4}$ заменим p с p_{t+1}, а в дясната - p с p_t, получаваме диференчното уравнение

$$p_{t+1} = (7{,}5 - 0{,}5{p_t}^{1{,}5})^{0{,}4}.$$

Стартираме итерационните пресмятания с някое $p_0 \in [1{,}44; 4{,}64]$, например $p_0 = 3$. В долната таблица са нанесени резултатите за първите пет итеративни пресмятания на цената, количествата на търсене и предлагане, абсолютните и относителни разлики между търсене и предлагане.

t	p_t	$x(p_t)$	$y(p_t)$	$\lvert x(p_t) - y(p_t)\rvert$	относителна разлика %
0	3,000	9,608	52,354		
1	1,889	14,807	9,617	5,200	35,12
2	2,075	14,022	14,809	0,797	5,31
3	2,048	14,138	14,010	0,128	0,91
4	2,052	14,121	14,127	0,006	0,04
5	2,052	14,121	14,127	0,006	0,04

Вижда се, че итерацията има много бърза сходимост и с точност до трети десетичен знак може да приемем, че

$$p_* = p_5 = 2{,}052 \quad \text{и} \quad q_* = 0{,}5\big(x(p_5) + y(p_5)\big) = 14{,}124.$$

Забележка. При динамизирането и на двата статични модела малко се отдалечихме от идеята на „цикъла на паяжината“ (в сходящия му вариант). Но ако директно във функцията на търсене заменим p с p_{t+1}, а във функцията на предлагане - p с p_t, то итерациите биха ни довели до абсолютно същите резултати.

5. Динамично частично равновесие

Нека за дадена стока, в определен момент от времето да са се формирали функции на пазарно търсене и предлагане $x = x_0(p)$ и $y = y_0(p)$ и на базата на тях – равновесна цена p_0 и равновесно количество q_0, т.е.

$$q_0 = x_0(p_0) = y_0(p_0)$$

В друг момент от времето, под въздействие на различни пазарни сили, функциите на търсене и предлагане ще бъдат други - $x = x_1(p)$ и $y = y_1(p)$. Те ще формират и други равновесни стойности p_1 и q_1, така че

$$q_1 = x_1(p_1) = y_1(p_1)$$

Можем да си представим следната опростена картина – всяка от тези функции или се запазва или се променя по посока на разширяване или на свиване. Какво става във всички от тези случаи с равновесните цена и количество.

пазарно търсене	**пазарно предлагане**	**равновесна цена**	**равновесно количество**
$\boldsymbol{x_1 = x_0}$	$\boldsymbol{y_1 = y_0}$	$\boldsymbol{p_1 = p_0}$	$\boldsymbol{q_1 = q_0}$
$\boldsymbol{x_1 = x_0}$	$\boldsymbol{y_1 > y_0}$	$\boldsymbol{p_1 < p_0}$	$\boldsymbol{q_1 > q_0}$
$\boldsymbol{x_1 = x_0}$	$\boldsymbol{y_1 < y_0}$	$\boldsymbol{p_1 > p_0}$	$\boldsymbol{q_1 < q_0}$
$\boldsymbol{x_1 > x_0}$	$\boldsymbol{y_1 = y_0}$	$\boldsymbol{p_1 > p_0}$	$\boldsymbol{q_1 > q_0}$
$\boldsymbol{x_1 > x_0}$	$\boldsymbol{y_1 > y_0}$	**не е ясно**	$\boldsymbol{q_1 > q_0}$
$\boldsymbol{x_1 > x_0}$	$\boldsymbol{y_1 < y_0}$	$\boldsymbol{p_1 > p_0}$	**не е ясно**
$\boldsymbol{x_1 < x_0}$	$\boldsymbol{y_1 = y_0}$	$\boldsymbol{p_1 < p_0}$	$\boldsymbol{q_1 < q_0}$
$\boldsymbol{x_1 < x_0}$	$\boldsymbol{y_1 > y_0}$	$\boldsymbol{p_1 < p_0}$	**не е ясно**
$\boldsymbol{x_1 < x_0}$	$\boldsymbol{y_1 < y_0}$	**не е ясно**	$\boldsymbol{q_1 < q_0}$

Тези изводи могат да бъдат направени лесно на базата на съответните D-линии и S-линии.

Забележка. Понякога използването на изразите растящо/намаляващо търсене/предлагане може да доведе до объркване. Така например твърдението „през последните две години цените на недвижимите имоти в Пловдив се вдигат с 15%, като същевременно се забелязва увеличено търсене – броят на сделките се е покачил с 12%“ може да изглежда противоречиво от микроикономическа гледна точка, ако не се отчита динамиката. Цените са по-високи с 15%, което съответства на по-малко търсене, доколкото функцията на търсене е намаляваща. Фактически вярното тълкуване е, че за две години имаме друга функция на търсене $x_1(p)$ и $x_1(p) > x_0(p)$, ако $x_0(p)$ е пазарната функция на търсене преди две години.

За да изучим по-добре изменението на частичното микроикономическо равновесие, по-точно – изменението на равновесните цена и количество, ще въведем динамични функции на търсене и предлагане

$$x = x(p,t) \quad \text{и} \quad y = y(p,t),$$

като времето t може да се изменя дискретно или непрекъснато. Във всеки конкретен момент от времето $t = t_0$ функциите $x(p) = x(p,t_0)$ и $y(p) = y(p,t_0)$ са обикновените (статични) функции на търсене и предлагане.

Определение. Ще казваме, че търсенето нараства (намалява) с времето, ако

$$x(p,t_1) < x(p,t_2) \quad \text{при} \quad t_1 < t_2 \; (x(p,t_1) > x(p,t_2) \quad \text{при} \quad t_1 < t_2)$$

за всяка допустима цена p. Ако съществуват както цени, за които търсенето нараства, така и такива, при които то намалява, търсенето се изменя неопределено във времето.

Абсолютно същото казано по-горе важи и за предлагането.

Нека във всеки момент от времето t да имаме налице частично пазарно равновесие, т.е. изравняване на търсенето и предлагането. Тогава системата, задаваща това равновесие ще бъде

$$q = x(p,t) = y(p,t).$$

Поради динамичния характер на функциите на търсене и предлагане, ние може да очакваме, че величините на това равновесие – цената p и количеството q ще се променят във времето, т.е. ще бъдат функции от времето $p = p(t)$ и $q = q(t)$, така че ще можем да запишем

$$q(t) = x(p(t),t) = y(p(t),t).$$

Диференцираме последното равенство по t, получаваме

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial x}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial y}{\partial t}.$$

От второто равенство намираме производната на цената по времето

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial p} - \frac{\partial y}{\partial p}},$$

а след като я заместим получаваме производната на количеството по времето

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial p}}{\frac{\partial x}{\partial p} - \frac{\partial y}{\partial p}}.$$

Горните уравнения показват как реагират равновесните цена и количество на изменение на времето в зависимост от реакциите на търсенето и предлагането на цената и времето. Така например, цената остава постоянна във времето, ако

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t}$$

търсенето и предлагането реагират по един и същ начин на времето. Ако при това е изпълнено

$$\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{\partial y}{\partial p},$$

т.е. търсенето и предлагането реагират по един и същ начин на цената, то и равновесното количество остава неизменно във времето.

За да запишем горните равенства в еластичен вид, ще трябва да дефинираме важното за икономиката понятие ценова еластичност.

Определение. Нека икономическата функция z (функция на търсене, на предлагане или друга) да е функция на цената p, т.е. $z = z(p)$. Тогава под ценова еластичност на z ще разбираме израза

$$E(z) = \frac{dz}{dp}\frac{p}{z}.$$

Тъй като

$$E(z) = \frac{dz}{dp}\frac{p}{z} = \frac{\frac{dz}{z}}{\frac{dp}{p}} \cong \frac{\frac{\Delta z}{z}}{\frac{\Delta p}{p}} = \frac{\%\text{изменение на } z}{\%\text{изменение на } p},$$

то ценовата еластичност показва с какъв % се изменя z при изменението на p с 1%.

Аналогично можем да определим понятието темп на изменение.

Определение. Нека икономическата функция z (функция на търсене, на предлагане или друга) да е функция на времето t, т.е. $z = z(t)$. Тогава под темп на изменение на z ще разбираме израза

$$T(z) = \frac{dz}{dt}\frac{1}{z}.$$

Ще имаме

$$T(z) = \frac{dz}{dt}\frac{1}{z} = \frac{\frac{dz}{z}}{\frac{dt}{1}} \cong \frac{\frac{\Delta z}{z}}{\frac{\Delta t}{1}} = [\Delta t = (t+1) - t = 1] = \frac{\Delta z}{z} = \%\text{изменение на } z.$$

Следователно темпът на изменение показва с какъв % се изменя z при изменението на времето от един момент до следващия (достатъчно близък) момент.

За да получим уравнението на реакцията на цената на времето в еластично-темпов вид умножаваме числителя и знаменателя на израза за $\frac{dp}{dt}$ с $\frac{p}{q}$. Получаваме

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial p} - \frac{\partial y}{\partial p}} = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t}\right)\frac{p}{q}}{\left(\frac{\partial x}{\partial p} - \frac{\partial y}{\partial p}\right)\frac{p}{q}}.$$

Тъй като предполагаме частично равновесие, то $q = x = y$. така ще имаме

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial t}\frac{1}{y} - \frac{\partial x}{\partial t}\frac{1}{x}\right)p}{\frac{\partial x}{\partial p}\frac{p}{x} - \frac{\partial y}{\partial p}\frac{p}{y}} = \frac{T(y) - T(x)}{E(x) - E(y)}p.$$

Делим последното равенство на p и окончателно получаваме

$$T(p) = \frac{dp}{dt}\frac{1}{p} = \frac{T(y) - T(x)}{E(x) - E(y)}.$$

Сега да направим същото за уравнението на реакцията на количеството от времето. За целта умножаваме числителя и знаменателя на дясната страна на израза за $\frac{dq}{dt}$ с $\frac{p}{q}$. Получаваме

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial p}}{\frac{\partial x}{\partial p} - \frac{\partial y}{\partial p}} = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial p}\right)\frac{p}{q}}{\left(\frac{\partial x}{\partial p} - \frac{\partial y}{\partial p}\right)\frac{p}{q}} = \frac{\frac{\partial x}{\partial p}\frac{p}{x}\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial p}\frac{p}{y}}{\frac{\partial x}{\partial p}\frac{p}{x} - \frac{\partial y}{\partial p}\frac{p}{y}}$$
$$= \frac{E(x)\frac{\partial y}{\partial t} - E(y)\frac{\partial x}{\partial t}}{E(x) - E(y)}$$

Ако умножим двете страни на последното равенство с $\frac{1}{q}$ (отчитайки, че $q = x = y$) получаваме

$$T(q) = \frac{dq}{dt}\frac{1}{q} = \frac{E(x)T(y) - E(y)T(x)}{E(x) - E(y)}.$$

Доколкото функцията на търсене (предлагане) е функция на две независими променливи – цената p и времето t $x = x(p,t)$ $(y = y(p,t))$, то за да я определим ще трябва да зададем реакцията ѝ на тези променливи:

а) по отношение на цената p или приемаме, че е зададена големината на реакцията

$$\frac{\partial x}{\partial p} = -a_x = const \ \left(\frac{\partial y}{\partial p} = a_y = const\right)$$

или ценовата еластичност

$$\frac{\partial x}{\partial p}\frac{p}{x} = E(x) = -\alpha_x = const \ \left(\frac{\partial y}{\partial p}\frac{p}{y} = E(y) = \alpha_y = const\right);$$

б) по отношение на времето t се задава или като големина на реакцията

$$\frac{\partial x}{\partial t} = b_x = const \ \left(\frac{\partial y}{\partial t} = b_y = const\right)$$

или темпа на изменение

$$\frac{\partial x}{\partial t}\frac{1}{x} = T(x) = \beta_x = const \ \left(\frac{\partial y}{\partial t}\frac{1}{y} = T(y) = \beta_y = const\right).$$

Предполага се, че коефициентите, свързани с цената (a_x, a_y, α_x и α_y) са положителни, а тези, свързани с времето (b_x, b_y, β_x и β_y) – положителни (при растящо във времето търсене и предлагане) или отрицателни (при намаляващо във времето търсене и предлагане).

Така разглежданията ни се свеждат до общо четири случая:

1) количествените функции (на търсене и предлагане) са зададени с еластичност (от цената) и темп (от времето), т.е. дадени са

$$\frac{\partial x}{\partial p}\frac{p}{x} = E(x) = -\alpha_x, \frac{\partial y}{\partial p}\frac{p}{y} = E(y) = \alpha_y, \frac{\partial x}{\partial t}\frac{1}{x} = T(x) = \beta_x, \frac{\partial y}{\partial t}\frac{1}{y} = T(y) = \beta_y.$$

Тогава за реакцията на цената получаваме

$$T(p) = \frac{dp}{dt}\frac{1}{p} = \frac{T(y) - T(x)}{E(x) - E(y)} = \frac{\beta_x - \beta_y}{\alpha_x + \alpha_y},$$

а за реакцията на количеството –

$$T(q) = \frac{dq}{dt}\frac{1}{q} = \frac{E(x)T(y) - E(y)T(x)}{E(x) - E(y)} = \frac{\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x}{\alpha_x + \alpha_y},$$

следователно в този случай равновесните цена и количество се изменят с постоянни темпове.

2) количествените функции са зададени с еластичност (от цената) и големина на реакцията (от времето)

$$\frac{\partial x}{\partial p}\frac{p}{x} = E(x) = -\alpha_x, \frac{\partial y}{\partial p}\frac{p}{y} = E(y) = \alpha_y, \frac{\partial x}{\partial t} = b_x, \frac{\partial y}{\partial t} = b_y.$$

Тогава за реакцията на цената и количеството получаваме

$$\frac{dp}{dt} = \frac{b_x - b_y}{\alpha_x + \alpha_y}\frac{p}{q}$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{E(x)\frac{\partial y}{\partial t} - E(y)\frac{\partial x}{\partial t}}{E(x) - E(y)} = \frac{\alpha_x b_y + \alpha_y b_x}{\alpha_x + \alpha_y}.$$

3) количествените функции са зададени с големина на реакцията (от цената) и темп на изменение (от времето)

$$\frac{\partial x}{\partial p} = -a_x, \frac{\partial y}{\partial p} = a_y, \frac{\partial x}{\partial t}\frac{1}{x} = T(x) = \beta_x, \frac{\partial y}{\partial t}\frac{1}{y} = T(y) = \beta_y.$$

Тогава за реакциите на цената и количеството ще имаме

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial p} - \frac{\partial y}{\partial p}} = \frac{\beta_y y - \beta_x x}{-a_x - a_y} = \frac{\beta_x - \beta_y}{\alpha_x + \alpha_y} q$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial p}}{\frac{\partial x}{\partial p} - \frac{\partial y}{\partial p}} = \frac{-a_x\beta_y y - a_y\beta_x x}{-a_x - a_y} = \frac{a_x\beta_y + a_y\beta_x}{a_x + a_y} q \Rightarrow T(q) = \frac{dq}{dt}\frac{1}{q}$$
$$= \frac{a_x\beta_y + a_y\beta_x}{a_x + a_y},$$

т.е. в този случай само количеството се изменя с постоянен темп.

4) количествените функции са зададени с големините на реакциите им по отношение на цената и времето

$$\frac{\partial x}{\partial p} = -a_x, \frac{\partial y}{\partial p} = a_y, \frac{\partial x}{\partial t} = b_x, \frac{\partial y}{\partial t} = b_y.$$

Тогава за реакциите на цената и количеството получаваме

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial t} - \dfrac{\partial x}{\partial t}}{\dfrac{\partial x}{\partial p} - \dfrac{\partial y}{\partial p}} = \frac{b_y - b_x}{-a_x - a_y} = \frac{b_x - b_y}{a_x + a_y},$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\dfrac{\partial x}{\partial p}\dfrac{\partial y}{\partial t} - \dfrac{\partial x}{\partial t}\dfrac{\partial y}{\partial p}}{\dfrac{\partial x}{\partial p} - \dfrac{\partial y}{\partial p}} = \frac{-a_x b_y - b_x a_y}{-a_x - a_y} = \frac{a_x b_y + b_x a_y}{a_x + a_y},$$

т.е. в този случай цената и количеството са с постоянна големина на реакцията на изменението на времето.

Пример 9. Дадени са следните стойности на търсенето и предлагането в зависимост от цената и времето

t	p	$x = x(p,t)$	$y = y(p,t)$
0	10	100	100
0	9	108	88
1	10	106	96

Тъй като в момент от времето $t = 0$ съществува пазарно равновесие за $p = 10$ и

$$q = 100 = x(10{,}0) = y(10{,}0)$$

да се намерят равновесните стойности на цената и количеството p' и q' в следващия момент от времето $t = 1$, т.е.

$$q' = x(p', 1) = y(p', 1)$$

като се използва допускането

а) че търсенето и предлагането се изменят с постоянни еластичности и темпове;

б) че търсенето и предлагането се изменят с постоянни големини на реакциите по отношение на цената и времето.

Решение:

Първо да пресметнем всички коефициенти, характеризиращи реакциите на търсенето и предлагането по отношение на цената и времето. Ще имаме

$$\frac{\partial x}{\partial p}(t = 0) \cong \frac{\Delta x}{\Delta p} = \frac{108 - 100}{9 - 10} = -8 \Rightarrow a_x = 8$$

$$E(x)(t = 0) = \frac{\partial x}{\partial p}(t = 0)\frac{p}{x} = (-8)\frac{10}{100} = -0{,}8 \Rightarrow \alpha_x = 0{,}8$$

$$\frac{\partial y}{\partial p}(t=0) \cong \frac{\Delta y}{\Delta p} = \frac{88-100}{9-10} = 12 \Longrightarrow a_y = 12$$

$$E(y)(t=0) = \frac{\partial y}{\partial p}(t=0)\frac{p}{y} = (12)\frac{10}{100} = 1{,}2 \Longrightarrow \alpha_y = 1{,}2$$

$$\frac{\partial x}{\partial t}(p=10) \cong \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{106-100}{1} = 6 \Longrightarrow b_x = 6$$

$$T(x)(p=10) = \frac{\partial x}{\partial t}(p=10)\frac{1}{x} = 6\frac{1}{100} = 0{,}06 \Longrightarrow \beta_x = 0{,}06$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(p=10) \cong \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{96-100}{1} = -4 \Longrightarrow b_y = -4$$

$$T(y)(p=10) = \frac{\partial y}{\partial t}(p=10)\frac{1}{y} = (-4)\frac{1}{100} = -0{,}04 \Longrightarrow \beta_y = -0{,}04$$

а) Заместваме във формулите за случая, в който количествените функции се изменят с фиксирана еластичност по цената и с фиксиран темп по времето. За темпа на цената получаваме

$$T(p) = \frac{dp}{dt}\frac{1}{p} = \frac{T(y)-T(x)}{E(x)-E(y)} = \frac{\beta_x - \beta_y}{\alpha_x + \alpha_y} = \frac{0{,}06-(-0{,}04)}{0{,}8+1{,}2} = 0{,}05$$

Но тъй като

$$T(p) = \frac{dp}{dt}\frac{1}{p} \cong \frac{\Delta p}{\Delta t}\frac{1}{p} = \frac{\Delta p}{p} \Longrightarrow \Delta p \cong T(p)p = 0{,}05 \cdot 10 = 0{,}5$$

Тогава, за новата равновесна цена p' (за $t=1$)получаваме $p' = p + \Delta p = 10 + 0{,}5 = 10{,}5$.

Аналогично се намира новото равновесно количество q' (в момент от времето $t = 1$):

$$T(q) = \frac{dq}{dt}\frac{1}{q} = \frac{E(x)T(y)-E(y)T(x)}{E(x)-E(y)} = \frac{\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x}{\alpha_x+\alpha_y} = \frac{0{,}8(-0{,}04)+1{,}2\cdot 0{,}06}{0{,}8+1{,}2}$$
$$= 0{,}02;\ \Delta q \cong T(q)q = 0{,}02 \cdot 100 = 2;\ q' = q + \Delta q = 100 + 2 = 102.$$

б) Сега заместваме във формулите за случая, в който количествените функции се изменят с фиксирани големини на реакциите по цената и времето. Получаваме

$$\frac{dp}{dt} = \frac{b_x - b_y}{a_x + a_y} = \frac{6-(-4)}{8+12} = 0{,}5$$

Но тъй като

$$\frac{dp}{dt} \cong \frac{\Delta p}{\Delta t} = \Delta p \Longrightarrow \Delta p = 0{,}5 \text{ и } p' = p + \Delta p = 10 + 0{,}5 = 10{,}5.$$

Аналогично

$$\frac{dq}{dt} = \frac{a_x b_y + b_x a_y}{a_x + a_y} = \frac{8(-4) + 6 \cdot 12}{8 + 12} = 2$$

$$\frac{dq}{dt} \cong \frac{\Delta q}{\Delta t} = \Delta q \Longrightarrow \Delta q = 2 \text{ и } q' = q + \Delta q = 100 + 2 = 102.$$

Вижда се, че и при двете хипотези за реакциите на количествените функции по отношение на цената и времето, прогнозните резултати за равновесните стойности на цената и количеството в един следващ времеви момент съвпадат. Те биха били същите, ако изчисленията бяха направени и въз основа на формулите за другите два случая. Това е така, защото:

- формулите за реакциите в четирите случаи са изведени от основните формули за реакциите (в диференциален и в еластично-темпов вид);
- прави се преход от един момент от времето $t = 0$ към следващия момент $t = 1$.

Гореизложеният метод е много добър за прогнозиране на величините на микроикономическото равновесие в краткосрочен план. Ако искаме да направим дългосрочна прогноза трябва да получим вида на функциите $p = p(t)$ и $q = q(t)$ в зависимост от предположенията, направени за количествените функции.

Нека да допуснем, че функциите на търсене и предлагане $x = x(p, t)$ и $y = y(p, t)$ са с постоянна еластичност по цената и с постоянен темп по времето, т.е.

$$E(x) = \frac{\partial x}{\partial p}\frac{p}{x} = -\alpha_x = const, \quad E(y) = \frac{\partial y}{\partial p}\frac{p}{y} = -\alpha_y = const;$$

$$T(x) = \frac{\partial x}{\partial t}\frac{1}{x} = \beta_x = const, \quad T(y) = \frac{\partial y}{\partial t}\frac{1}{y} = \beta_y = const.$$

Да намерим при това предположение вида на тези функции. Например, за функцията на търсене (ако я разглеждаме като функция на само една променлива – цената p) ще имаме

$$\frac{dx}{dp}\frac{p}{x} = -\alpha_x \Longrightarrow \frac{dx}{x} = -\alpha_x \frac{dp}{p}.$$

След интегриране получаваме

$$\ln x = -\alpha_x \ln p + \ln C \Rightarrow x = Cp^{-\alpha_x},$$

където C е интеграционната константа. За различните стойности на другата променлива – времето t тази константа ще бъде различна, следователно тя ще бъде функция на t: $C = C(t)$ и

$$x = x(p,t) = C(t)p^{-\alpha_x}.$$

Диференцираме по t и получаваме

$$\frac{\partial x}{\partial t} = C'(t)p^{-\alpha_x}.$$

Тогава за темпа на x ще имаме

$$T(x) = \frac{\partial x}{\partial t}\frac{1}{x} = C'(t)p^{-\alpha_x}\frac{1}{C(t)p^{-\alpha_x}} = \frac{C'(t)}{C(t)} = \frac{dC}{dt}\frac{1}{C} = T(C),$$

т.е. темпът на $C(t)$ съвпада с темпа на $x(p,t)$ и

$$T(C) = \frac{dC}{dt}\frac{1}{C} = T(x) = \beta_x \Rightarrow C(t) = C_0 e^{\beta_x t},$$

където C_0 е интеграционната константа. Тогава окончателно за функцията на търсене на две променливи получаваме

$$x = x(p,t) = C_0 e^{\beta_x t} p^{-\alpha_x}.$$

Аналогично, функцията на предлагане ще има вида

$$y = y(p,t) = C_0 e^{\beta_y t} p^{\alpha_y}.$$

С аналогични пресмятания, за количествени функции с постоянна еластичност по цената и линейност по времето

$$E(x) = \frac{\partial x}{\partial p}\frac{p}{x} = -\alpha_x = const,\ \ E(y) = \frac{\partial y}{\partial p}\frac{p}{y} = -\alpha_y = const;$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = b_x = const,\ \ \frac{\partial y}{\partial t} = b_y = const$$

получаваме

$$x = x(p,t) = b_x t + C_0 p^{-\alpha_x} \ \text{ и } \ y = y(p,t) = b_y t + C_0 p^{\alpha_y}.$$

За функции на търсене и предлагане с постоянен темпо времето и линейни по цената

$$T(x) = \frac{\partial x}{\partial t}\frac{1}{x} = \beta_x = const, \quad T(y) = \frac{\partial y}{\partial t}\frac{1}{y} = \beta_y = const.$$

$$\frac{\partial x}{\partial p} = -a_x = const, \quad \frac{\partial y}{\partial p} = a_y = const$$

ще имаме

$$x = x(p,t) = -a_x p + C_0 e^{\beta_x t} \quad \text{и} \quad y = y(p,t) = a_y p + C_0 e^{\beta_y t}.$$

И накрая, за количествени функции с постоянни големини на реакциите по цената и времето

$$\frac{\partial x}{\partial p} = -a_x = const, \quad \frac{\partial y}{\partial p} = a_y = const$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = b_x = const, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = b_y = const$$

получаваме

$$x = x(p,t) = -a_x p + b_x t + C_0 \quad \text{и} \quad y = y(p,t) = a_y p + b_y t + C_0.$$

Пример 10. Да се намерят функциите на търсене и предлагане (при същите данни като в пример 9), да се изразят равновесните цена и количество като функции от времето и да се направи прогноза при $t = 1,2,3,5,10$ като се използва допускането

а) че търсенето и предлагането се изменят с постоянни еластичности и темпове;

б) че търсенето и предлагането се изменят с постоянни големини на реакциите по отношение на цената и времето.

Решение:

а) Ще търсим функцията на търсене във вида

$$x = x(p,t) = C_0 e^{\beta_x t} p^{-\alpha_x}.$$

Тъй като сме пресметнали $\alpha_x = 0{,}8$ и $\beta_x = 0{,}06$, като заместим в горния израз, получаваме

$$x = x(p,t) = C_0 e^{0{,}06t} p^{-0{,}8}.$$

След логаритмуване ще имаме

$$\ln x = \ln C_0 + 0{,}06t - 0{,}8 \ln p.$$

Константата $\ln C_0$ получаваме от условието $x(10,0) = 100$:

$$\ln 100 = \ln C_0 - 0{,}8 \ln 10 \Rightarrow \ln C_0 = \ln 100 + 0{,}8 \ln 10 = 4{,}605 + 0{,}8 \cdot 2{,}303 = 6{,}447,$$

откъдето окончателният вид на функцията на търсене (в логаритмичен вид) е

$$\ln x = 6{,}447 + 0{,}06t - 0{,}8 \ln p.$$

Аналогично, за функцията на предлагане от вида

$$y = y(p,t) = C_0 e^{\beta_y t} p^{\alpha_y}$$

след заместване на пресметнатите в пример 9 $\alpha_y = 1{,}2$ и $\beta_y = -0{,}04$ и след логаритмуване получаваме

$$\ln y = \ln C_0 - 0{,}04t + 1{,}2 \ln p.$$

От $y(10,0) = 100$ определяме константата:

$$\ln 100 = \ln C_0 + 1{,}2 \ln 10 \Rightarrow \ln C_0 = \ln 100 - 1{,}2 \ln 10 = 4{,}605 - 1{,}2 \cdot 2{,}303 = 1{,}841$$

И окончателният логаритмичен вид на функцията на предлагане е

$$\ln y = 1{,}841 - 0{,}04t + 1{,}2 \ln p.$$

Вече можем да запишем условието за динамично равновесие в логаритмичен вид

$$\ln q = 6{,}447 + 0{,}06t - 0{,}8 \ln p = 1{,}841 - 0{,}04t + 1{,}2 \ln p.$$

От това условие получаваме

$$\ln p = 2{,}303 + 0{,}05t \quad \text{и} \quad \ln q = 4{,}605 + 0{,}02t.$$

Можем след антилогаритмуване да намерим

$$p(t) = e^{2{,}303} e^{0{,}05t} = 10e^{0{,}05t} \quad \text{и} \quad q(t) = e^{4{,}605} e^{0{,}02t} = 100e^{0{,}02t}.$$

На базата на горните формули можем да направим прогноза за равновесните цена и количество при $t = 1,2,3,5,10$

t	$p(t)$	$q(t)$
1	10,51	102,0
2	11,05	104,1
3	11,62	106,2
5	12,84	110,5
10	16,49	122,1

Забележка 1. В този случай можем да определим функциите $p(t)$ и $q(t)$ директно (като имаме пред вид, че ако функциите на търсене и предлагане са с постоянна ценова еластичност и постоянен темп, то $p(t)$ и $q(t)$ са с постоянен темп). Ще имаме

$$p(t) = p_0 e^{T(p)t} \quad \text{и} \quad q(t) = q_0 e^{T(q)t}$$

където $p_0 = p(0)$, $q_0 = q(0)$, а с $T(p)$ и $T(q)$ са означени постоянните темпове на $p(t)$ и $q(t)$. Тъй като $p_0 = 10$, $q_0 = 100$, $T(p) = 0{,}05$ и $T(q) = 0{,}02$ (изчислени са в решението на пример 9 а)), то получаваме

$$p(t) = 10e^{0{,}05t} \quad \text{и} \quad q(t) = 100e^{0{,}02t}$$

Забележка 2. Ако първото от горните две равенства вдигнем на степен 0,4, получаваме

$$p^{0{,}4} = 10^{0{,}4}e^{0{,}02t} \Rightarrow e^{0{,}02t} = \left(\frac{p}{10}\right)^{0{,}4} = \frac{q}{100} \Rightarrow q = 10^{1{,}6}p^{0{,}4} = 39{,}81p^{0{,}4},$$

т.е. изключвайки t от формулите за $p(t)$ и $q(t)$, ние получаваме връзка между равновесните стойности на количеството и цената през цялото време. В този случай се вижда, че функцията $q = 39{,}81p^{0{,}4}$ е с постоянна ценова еластичност

$$E(q) = 0{,}4 = \frac{0{,}02}{0{,}05} = \frac{T(q)}{T(p)}.$$

б) Ще търсим функциите на търсене и предлагане във вида

$$x = x(p,t) = -a_x p + b_x t + C_0 \quad \text{и} \quad y = y(p,t) = a_y p + b_y t + C_0$$

т.е. линейни по отношение на двете си променливи. Тъй като в решението на пример 9 сме пресметнали $a_x = 8, b_x = 6, a_y = 12, b_y = -4$, то като заместим в горните изрази, получаваме

$$x(p,t) = -8p + 6t + C_0 \quad \text{и} \quad y(p,t) = 12p - 4t + C_0$$

Интеграционните константи C_0 (те са различни за двете функции) намираме от началното условие

$$x(10,0) = -8 \cdot 10 + C_0 = 100 \Longrightarrow C_0 = 180 \quad \text{и} \quad x(p,t) = 180 - 8p + 6t$$

$$y(10,0) = 12 \cdot 10 + C_0 = 100 \Longrightarrow C_0 = -20 \quad \text{и} \quad y(p,t) = 12p - 4t - 20.$$

Тогава динамичното условие за частично равновесие ще бъде

$$q = 180 - 8p + 6t = 12p - 4t - 20,$$

откъдето получаваме

$$p = 10 + 0{,}5t \quad \text{и} \quad q = 100 + 2t.$$

Нанасяме прогнозните равновесни цени и количества при $t = 1,2,3,5,10$ в таблица

t	$p(t)$	$q(t)$
1	10,50	102
2	11,00	104
3	11,50	106
5	12,50	110
10	15,00	120

Ясно е, че след изключването на t от горните формули, получаваме следната линейна връзка между равновесното количество q и равновесната цена p:

$$q = 60 + 4p.$$

Накрая ще отбележим, че в случай а) (когато функциите са с постоянни ценови еластичности и постоянни темпове) функциите $p(t)$ и $q(t)$ са с постоянни темпове и последователните стойности $p(0), p(1), p(2), \ldots$ и $q(0), q(1), q(2), \ldots$ образуват геометрични прогресии (първата – с частно $e^{T(p)}$, а втората – с частно $e^{T(q)}$). В този случай казваме, че има експоненциално изменение. В случай б) (когато функциите на търсене и предлагане са линейни по двата си аргумента) функциите $p(t)$ и $q(t)$ са линейни и $p(0), p(1), p(2), \ldots$; $q(0), q(1), q(2), \ldots$ образуват аритметични прогресии. Тогава се говори за линейно изменение.

6. Билинейни динамични функции на търсене и предлагане

Определение. Динамична функция от вида

$$x(p,t) = a - bp + \alpha t + \beta pt,$$

където a и b са положителни константи, а α и β могат да бъдат както положителни, така и отрицателни, ще наричаме **билинейна функция на търсене.**

Ясно е, че ако фиксираме всяка от променливите, то билинейната функция на търсене е линейна спрямо другата променлива.

Една линейна функция на търсене, зависеща само от цената се определя от две константи:

$$x(p) = A - Bp.$$

Тя пресича координатните оси в две точки, имащи важно икономическо значение. Пресечната точка с количествената ос $x(0) = A$ съответства на търсене на стоката при цена $p = 0$. То е максималното възможно количество на търсене и показва какъв е пазарния капацитет. Означаваме

$$\text{пазарен капацитет} = q_0 = x(0) = A.$$

Точката на пресичане с ценовата ос, съответства на цена p_0, при която стоката престава да се търси. Тя е най-високата възможна цена на търсене и очевидно

$$x(p_0) = A - Bp_0 = 0 \Longrightarrow p_0 = \frac{A}{B}.$$

Ще наричаме тази цена p_0 гранична цена. Тогава ще имаме

$$x(p) = A\left(1 - \frac{B}{A}p\right) = q_0\left(1 - \frac{p}{p_0}\right).$$

Да се върнем към билинейната функция на търсене. За нея ще имаме

$$x(p,t) = (a + \alpha t)\left(1 - \frac{b - \beta t}{a + \alpha t}p\right).$$

Тогава за динамичния пазарен капацитет $q_0(t)$ и динамичната гранична цена $p_0(t)$ получаваме

$$q_0(t) = a + \alpha t \quad \text{и} \quad p_0(t) = \frac{a + \alpha t}{b - \beta t}$$

Ясно е, че при $\alpha > 0$ функцията $q_0(t)$ ще е растяща, а при $\alpha < 0$ – намаляваща. Във вторият случай, обаче трябва $|\alpha| \ll a$ (модул от α много по-малко от a), защото в противен случай при малки стойности на t ще се получава $q_0(t) = 0$ и билинейната функция на търсене няма да може да се използва за икономическо прогнозиране.

Аналогична е ситуацията, когато $\beta > 0$. Тогава е необходимо $\beta \ll b$, защото в противен случай знаменателят на израза за $p_0(t)$ ще се нулира за малки стойности на t. За да продължим анализа на функцията $p_0(t)$ ще трябва да пресметнем първата ѝ производна:

$$p_0{}'(t) = \frac{\alpha(b - \beta t) + \beta(a + \alpha t)}{(b - \beta t)^2} = \frac{\alpha b + \beta a}{(b - \beta t)^2}.$$

От израза за производната се вижда, че при $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ $p_0{}'(t) > 0$ и функцията $p_0(t)$ е растяща, а при $\alpha < 0$ и $\beta < 0$ $p_0{}'(t) < 0$ и функцията $p_0(t)$ е намаляваща. Ако α и β са с различни знаци, ще можем да преценим поведението на $p_0(t)$ само след пресмятането на числителя $\alpha b + \beta a$ на производната $p_0{}'(t)$.

Ясно е, че ако пазарният капацитет и граничната цена едновременно нарастват с течение на времето, то и търсенето ще нараства, ако те намаляват, ще намалява и търсенето. В случай, че една от тези величини расте, а другата намалява, ще имаме неопределено търсене, растящо при едни цени и намаляващо при други.

Пример 11. Билинейната функция на търсене е зададена чрез своите коефициенти

	a	b	α	β
а)	10	5	0,5	0,2
б)	10	5	0,5	2,5
в)	10	5	0,5	-0,2
г)	10	5	-0,5	-0,2
д)	10	5	-5	-0,2
е)	10	5	0,5	-0,3
ж)	10	5	-0,5	0,3

Да се определи в кои от случаите функцията може да бъде използвана за икономическо прогнозиране. В кои от случаите тя моделира растящо, намаляващо или неопределено търсене. В последният случай, да се определи при кои цени търсенето расте и при кои – намалява.

Решение:

а) При $\alpha = 0{,}5 > 0$ и $\beta = 0{,}2 > 0$ двете функции $q_0(t)$ и $p_0(t)$ ще растат едновременно. Знаменателят на $p_0(t)$ $b - \beta t = 5 - 0{,}2t$ ще се нулира за $t = 25$, така че билинейната функция с тези коефициенти ще може да моделира растящо търсене, например за $t \leq 10$.

б) Тъй като $\beta = 2{,}5$ знаменателят на $p_0(t)$ $b - \beta t = 5 - 2{,}5t$ ще се нулира за $t = 2$, така че тази билинейна функция не може да се използва за моделиране на динамично търсене.

в) При $\alpha = 0{,}5 > 0$ пазарният капацитет $q_0(t)$ расте. Тъй като α и β са с различни знаци, то за да определим поведението на граничната цена $p_0(t)$ ще трябва да пресметнем числителя на нейната производна $\alpha b + \beta a = 0{,}5 \cdot 5 - 0{,}2 \cdot 10 =$

$0{,}5 > 0$. Тогава ще имаме $p_0'(t) > 0$, следователно $p_0(t)$ е растяща функция. Тогава билинейната функция ще може да моделира растящо търсене.

г) При $\alpha = -0{,}5 < 0$ и $\beta = -0{,}2 < 0$ двете функции $q_0(t)$ и $p_0(t)$ ще намаляват едновременно, така че билинейната функция може да моделира спадащо търсене за достатъчно малки стойности на t, например $t \leq 10$. Това е така, защото $q_0(t) = a + \alpha t = 10 - 0{,}5t$ се нулира за $t = 20$.

д) Тази функция не може да се използва за моделиране на динамично търсене, защото за пазарния капацитет имаме $q_0(t) = a + \alpha t = 10 - 5t$ и той се нулира при $t = 2$.

е) В този случай $\alpha = 0{,}5 > 0$ пазарният капацитет $q_0(t)$ расте. Тъй като α и β са с различни знаци, то за да определим поведението на граничната цена $p_0(t)$ ще трябва да пресметнем числителя на нейната производна $\alpha b + \beta a = 0{,}5 \cdot 5 - 0{,}3 \cdot 10 = -0{,}5 < 0$. Тогава ще имаме $p_0'(t) < 0$, следователно $p_0(t)$ е намаляваща функция. Тогава билинейната функция ще може да моделира неопределено търсене.

За да определим при кои цени търсенето ще расте с времето и при кои ще намалява, трябва да пресметнем частната производна на билинейната функция по времето. Ще имаме

$$x(p,t) = 10 - 5p + 0{,}5t - 0{,}3pt \Longrightarrow \frac{\partial x}{\partial t} = 0{,}5 - 0{,}3p \Longrightarrow \frac{\partial x}{\partial t} = 0 \text{ за } p = \frac{5}{3}.$$

Тъй като за граничната цена имаме

$$p_0(t) = \frac{10 + 0{,}5t}{5 + 0{,}3t} > \frac{5}{3} \text{ за всяко } t,$$

то окончателно получаваме, че

$$\text{при } p \in \left(0, \frac{5}{3}\right) \frac{\partial x}{\partial t} > 0 \text{ и търсенето расте с времето}$$

$$\text{при } p \in \left(\frac{5}{3}, \frac{10 + 0{,}5t}{5 + 0{,}3t}\right) \frac{\partial x}{\partial t} < 0 \text{ и търсенето намалява с времето.}$$

ж) В този случай $\alpha = -0{,}5 < 0$ пазарният капацитет $q_0(t)$ намалява. Тъй като α и β са с различни знаци, то за да определим поведението на граничната цена $p_0(t)$ ще трябва да пресметнем числителя на нейната производна $\alpha b + \beta a = -0{,}5 \cdot 5 + 0{,}3 \cdot 10 = 0{,}5 > 0$. Тогава ще имаме $p_0'(t) > 0$, следователно $p_0(t)$ е растяща функция. Тогава билинейната функция ще може да моделира неопределено търсене.

За да определим при кои цени търсенето ще расте с времето и при кои ще намалява, трябва да пресметнем частната производна на билинейната функция по времето. Ще имаме

$$x(p,t) = 10 - 5p - 0{,}5t + 0{,}3pt \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial t} = -0{,}5 + 0{,}3p \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial t} = 0 \text{ за } p = \frac{5}{3}.$$

Тъй като за граничната цена имаме

$$p_0(t) = \frac{10 - 0{,}5t}{5 - 0{,}3t} > \frac{5}{3} \text{ за всяко } t,$$

то окончателно получаваме, че

$$\text{при } p \in \left(0, \frac{5}{3}\right) \frac{\partial x}{\partial t} < 0 \text{ и търсенето намалява с времето}$$

$$\text{при } p \in \left(\frac{5}{3}, \frac{10 + 0{,}5t}{5 + 0{,}3t}\right) \frac{\partial x}{\partial t} < 0 \text{ и търсенето расте с времето.}$$

Пример 12. За динамична функция на търсене е дадено, че пазарният капацитет в началото е $q_0(0) = 100$ при начална гранична цена $p_0(0) = 100$. Да се моделира търсенето чрез билинейна функция, ако

а) $q_0(1) = 98$ и $p_0(1) = 105$;

б) $q_0(1) = 98$ и $p_0(1) = 97$;

в) $q_0(1) = 104$ и $p_0(1) = 105$;

а) $q_0(1) = 104$ и $p_0(1) = 97$.

Решение:

Ще използваме формулите

$$q_0(t) = a + \alpha t \quad \text{и} \quad p_0(t) = \frac{a + \alpha t}{b - \beta t}.$$

При $t = 0$ имаме

$$q_0(0) = a = 100$$

$$p_0(t) = \frac{100}{b} = 100 \Rightarrow b = 1.$$

а) ще имаме

$$q_0(1) = 100 + \alpha = 98 \Rightarrow \alpha = -2$$

$$p_0(1) = \frac{100 - 2}{1 - \beta} = 105 \Rightarrow 105 - 105\beta = 98 \text{ и } \beta = \frac{1}{15}.$$

Така окончателно, за билинейната функция на търсене получаваме

$$x(p, t) = 100 - p - 2t + \frac{1}{15}pt.$$

Ясно е, че търсенето е неопределено, защото пазарният капацитет намалява, а граничната цена нараства. Трябва да определим цените, при които търсенето нараства с времето и цените при които то намалява. За целта пресмятаме частната производна на билинейната функция по времето:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -2 + \frac{p}{15} \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial t} = 0 \text{ при } p = 30,$$

при $p < 30$ търсенето намалява с времето и при $p > 30$ – нараства.

б) Аналогично получаваме

$$\alpha = -2;\ p_0(1) = \frac{100 - 2}{1 - \beta} = 97 \Rightarrow 97 - 97\beta = 98 \text{ и } \beta = -\frac{1}{97};$$

$$x(p, t) = 100 - p - 2t - \frac{1}{97}pt.$$

Това е билинейна функция на търсене, моделираща намаляващо с времето търсене (защото има спад както на пазарния капацитет, така и на граничната цена).

в) Ще имаме

$$q_0(1) = 100 + \alpha = 104 \Rightarrow \alpha = 4$$

$$p_0(1) = \frac{100 + 4}{1 - \beta} = 105 \Rightarrow 105 - 105\beta = 104 \text{ и } \beta = \frac{1}{105};$$

$$x(p, t) = 100 - p + 4t + \frac{1}{105}pt.$$

Това е билинейна функция на нарастващо с времето търсене.

г) В този случай получаваме

$$\alpha = 4;\ p_0(1) = \frac{100 + 4}{1 - \beta} = 97 \Rightarrow 97 - 97\beta = 104 \text{ и } \beta = -\frac{7}{97};$$

$$x(p,t) = 100 - p + 4t - \frac{7}{97}pt.$$

Както в случай б) и тук става дума за неопределено изменящо се с времето търсене. Тъй като

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 4 - \frac{7p}{97} \Longrightarrow \frac{\partial x}{\partial t} = 0 \text{ при } p = \frac{97 \cdot 4}{7} \cong 55{,}43,$$

то при $p < 55{,}43$ търсенето нараства с времето и при $p > 55{,}43$ – намалява.

Определение. Динамична функция от вида

$$y(p,t) = -a + bp + \alpha t + \beta pt,$$

където a и b са положителни константи, а α и β могат да бъдат както положителни, така и отрицателни, ще наричаме **билинейна функция на предлагане.**

Ако фиксираме всяка от променливите, то билинейната функция на предлагане е линейна спрямо другата променлива.

Една линейна функция на предлагане, зависеща само от цената се определя от две константи:

$$y(p) = -A + Bp = B\left(p - \frac{A}{B}\right).$$

Ясно е, че тази функция се нулира при цена p_0, така че

$$y(p_0) = 0 \Leftrightarrow p_0 = \frac{A}{B}.$$

Тази цена p_0 е най-ниската възможна цена на предлагане и ще я наричаме гранична цена на предлагане. Означаваме с k наклона на линията на предлагане към ценовата ос, тогава ще можем да запишем

$$y(p) = k(p - p_0).$$

Да се върнем към билинейната функция на предлагане. Ще имаме

$$y(p,t) = (b + \beta t)\left(p - \frac{a - \alpha t}{b + \beta t}\right).$$

Тогава, за динамичните функции на наклона $k = k(t)$ и граничната цена на предлагане $p_0 = p_0(t)$ получаваме

$$k(t) = b + \beta t \quad \text{и} \quad p_0(t) = \frac{a - \alpha t}{b + \beta t}.$$

Ясно е, че при $\beta > 0$ наклонът на линията на предлагане ще нараства, а при $\beta < 0$ – ще намалява. Във вторият случай трябва да е изпълнено неравенството $|\beta| \ll b$, защото в противен случай ще имаме $k(t) = 0$ за много малки стойности на t и такава функция не може да моделира динамичното предлагане.

Аналогична е ситуацията с параметъра α: когато $\alpha > 0$ ще трябва да е изпълнено неравенството $\alpha \ll a$. Ако не е така, числителят на $p_0(t)$, а от там и самата $p_0(t)$ ще се нулират при малки стойности на t (което не е фатално) и с нарастването на t ще стават отрицателни.

За да продължим анализа на функцията $p_0(t)$ ще трябва да пресметнем първата ѝ производна:

$$p_0{}'(t) = \frac{-\alpha(b + \beta t) - \beta(a - \alpha t)}{(b + \beta t)^2} = -\frac{\alpha b + \beta a}{(b + \beta t)^2}.$$

От израза за производната се вижда, че при $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ $p_0{}'(t) < 0$ и функцията $p_0(t)$ е намаляваща, а при $\alpha < 0$ и $\beta < 0$ $p_0{}'(t) > 0$ и функцията $p_0(t)$ е растяща. Ако α и β са с различни знаци, ще можем да преценим поведението на $p_0(t)$ само след пресмятането на числителя $\alpha b + \beta a$ на производната $p_0{}'(t)$.

Ясно е, че ако едновременно наклонът нараства с течение на времето, а граничната цена намалява, то и предлагането ще нараства. При намаляване на наклона и нарастване на граничната цена, предлагането намалява, а при едновременно нарастване или намаляване на двата показателя на предлагането, то ще бъде неопределено. В последният случай, ще имаме растящо предлагане при едно цени и намаляващо при други.

Забележка. Тъй като за функцията на търсене на една променлива имаме

$$x(p) = A - Bp = -B\left(p - \frac{A}{B}\right) = -k(p - p_0),$$

то и търсенето може да бъде определено чрез наклона на линията на търсене към ценовата ос и граничната цена.

Пример 13. Билинейната функция на предлагане е зададена чрез своите коефициенти

	a	b	α	β
а)	10	5	0,5	0,2
б)	10	5	0,5	-0,2
в)	10	5	0,5	-2
г)	10	5	5	0,2
д)	10	5	-0,5	-0,2
е)	10	5	-0,5	0,2

Да се определи в кои от случаите функцията може да бъде използвана за икономическо прогнозиране. В кои от случаите тя моделира растящо, намаляващо или неопределено предлагане. В последният случай, да се определи при кои цени предлагането расте и при кои – намалява.

Решение:

а) При $\beta = 0{,}2 > 0$ динамичната функция $k(t)$ е растяща. Тъй като $\alpha = 0{,}5 > 0$, то $p_0{}'(t) < 0$ и динамичната функция $p_0(t)$ е намаляваща. В този случай коефициентът α не крие заплаха, защото числителят на $p_0(t)$ $a - \alpha t = 10 - 0{,}5t$ се нулира за $t = 20$ и билинейна функция с такива коефициенти може да се използва за моделиране на предлагане, което расте с времето.

б) При $\beta = -0{,}2 < 0$ динамичната функция $k(t)$ е намаляваща. При $\alpha = 0{,}5$ ще имаме $p_0{}'(t) < 0$ и динамичната функция $p_0(t)$ е намаляваща. В този случай търсенето е неопределено. За да намерим цените, при които предлагането ще расте и тези, при които ще намалява, трябва да пресметнем частната производна по времето. Ще имаме

$$y(p,t) = -10 + 5p + 0{,}5t - 0{,}2pt \Longrightarrow \frac{\partial y}{\partial t} = 0{,}5 - 0{,}2p.$$

Тъй като

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow p = 2{,}5 \text{ и за } p < 2{,}5 \ \ \frac{\partial y}{\partial t} > 0, \text{а за } p > 2{,}5 \ \ \frac{\partial y}{\partial t} < 0,$$

а от друга страна

$$p_0(t) = \frac{10 - 0{,}5t}{5 - 0{,}2t} < 2{,}5,$$

то в интервала $p \in (p_0(t); 2{,}5)$ предлагането ще нараства с времето, а при $p \in (2{,}5; \infty)$ - ще спада.

в) При $\beta = -2 < 0$ изразът за динамичната функция на наклона е $k(t) = 5 - 2t$ и $k(t)$ става отрицателен (а това е невъзможно при функцията на предлагане) при

$t > 2{,}5$, така че функция с такива коефициенти не може да се използва за моделиране на динамично предлагане.

г) При $\alpha = 5 > 0$ числителят на динамичната функция $p_0(t)$ става $10 - 5t$ и за $t = 2$ той се нулира. Това показва, че при тези коефициенти функцията не може да се използва за моделиране на предлагането.

д) При $\beta = -0{,}2 < 0$ динамичната функция $k(t)$ е намаляваща. Тъй като $\alpha = -0{,}5 < 0$, то $p_0{}'(t) > 0$ и динамичната функция $p_0(t)$ е растяща. В този случай билинейна функция с такива коефициенти може да се използва за моделиране на предлагане, което намалява с времето.

е) При $\beta = 0{,}2 > 0$ динамичната функция $k(t)$ е растяща. При $\alpha = -0{,}5$ ще имаме $p_0{}'(t) > 0$ и динамичната функция $p_0(t)$ е растяща. В този случай търсенето е неопределено. За да намерим цените, при които предлагането ще расте и тези, при които ще намалява, трябва да пресметнем частната производна по времето. Ще имаме

$$y(p,t) = -10 + 5p - 0{,}5t + 0{,}2pt \Longrightarrow \frac{\partial y}{\partial t} = -0{,}5 + 0{,}2p.$$

Тъй като

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow p = 2{,}5 \text{ и за } p < 2{,}5 \ \ \frac{\partial y}{\partial t} < 0, \text{а за } p > 2{,}5 \ \ \frac{\partial y}{\partial t} > 0,$$

а от друга страна

$$p_0(t) = \frac{10 + 0{,}5t}{5 + 0{,}2t} < 2{,}5,$$

то в интервала $p \in (p_0(t); 2{,}5)$ предлагането ще намалява с времето, а при $p \in (2{,}5; \infty)$ - ще нараства.

Пример 14. За динамична функция на предлагане е дадено, че наклонът на линията на предлагане в началото е $k(0) = 1$ при начална гранична цена $p_0(0) = 40$. Да се моделира предлагането чрез билинейна функция, ако

а) $k(1) = 1{,}03$ и $p_0(1) = 41$;

б) $k(1) = 1{,}03$ и $p_0(1) = 39$;

в) $k(1) = 0{,}98$ и $p_0(1) = 41$;

г) $k(1) = 0{,}98$ и $p_0(1) = 39$.

Решение:

Ще използваме формулите

$$k(t) = b + \beta t \quad \text{и} \quad p_0(t) = \frac{a - \alpha t}{b + \beta t}.$$

Тъй като

$$k(0) = b = 1 \quad \text{и} \qquad p_0(0) = \frac{a}{b} = \frac{a}{1} = a = 40,$$

то условията при $t = 1$ остава да определим коефициентите α и β.

а) Ще имаме

$$k(1) = 1 + \beta = 1{,}03 \Longrightarrow \beta = 0{,}03;$$

$$p_0(1) = \frac{40 - \alpha}{1 + 0{,}03} = 41 \Longrightarrow \alpha = -2{,}23$$

и видът на билинейната функция на предлагане ще бъде

$$y(p, t) = -40 + p - 2{,}23t + 0{,}03pt.$$

Тъй като от $t = 0$ до $t = 1$ наклонът нараства (което свидетелства за повишено предлагане) и граничната цена нараства (свидетелстващо за обратното), то става дума за неопределено изменящо се във времето предлагане. За да намерим цените, при които предлагането ще расте и тези, при които ще намалява, трябва да пресметнем частната производна по времето. Ще имаме

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -2{,}23 + 0{,}03p \Longrightarrow \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow p = \frac{223}{3} \cong 74{,}33.$$

Така получаваме, че

$$\text{при } p \in (p_0(t); 74{,}33) \; \frac{\partial y}{\partial t} < 0 \text{ и предлагането намалява с времето}$$

$$\text{при } p \in (74{,}33; \infty) \; \frac{\partial y}{\partial t} > 0 \text{ и предлагането расте с времето.}$$

б) Тъй като и в този случай $k(1) = 1{,}03$, то $\beta = 0{,}03$. Да определим коефициента α от условието за $p_0(1)$:

$$p_0(1) = \frac{40 - \alpha}{1 + 0{,}03} = 39 \Longrightarrow \alpha = -0{,}17$$

и видът на билинейната функция на предлагане е

$$y(p,t) = -40 + p - 0{,}17t + 0{,}03pt.$$

Тъй като от $t = 0$ до $t = 1$ изменението на наклона и изменението на граничната цена на предлагане свидетелстват за растящо предлагане, то става дума за растящо във времето предлагане.

в) Ще имаме

$$k(1) = 1 + \beta = 0{,}98 \Rightarrow \beta = -0{,}02;$$

$$p_0(1) = \frac{40 - \alpha}{1 - 0{,}02} = 41 \Rightarrow \alpha = -0{,}18$$

и видът на билинейната функция на предлагане ще бъде

$$y(p,t) = -40 + p - 0{,}18t - 0{,}02pt.$$

Това е функция, моделираща спадащо с времето предлагане.

г) Тъй като и в този случай $k(1) = 0{,}98$, то $\beta = -0{,}02$. Да определим коефициента α от условието за $p_0(1)$:

$$p_0(1) = \frac{40 - \alpha}{1 - 0{,}02} = 39 \Rightarrow \alpha = 1{,}78$$

и видът на билинейната функция на предлагане е

$$y(p,t) = -40 + p + 1{,}78t - 0{,}02pt.$$

Измененията на наклона на линията на предлагане и граничната цена на предлагане дават разнопосочни сигнали за поведението на предлагането във времето, така че става дума за неопределено предлагане. За да намерим цените, при които предлагането ще расте и тези, при които ще намалява, трябва да пресметнем частната производна по времето. Ще имаме

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 1{,}78 - 0{,}02p \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow p = \frac{178}{2} = 89.$$

Така получаваме, че

$$\text{при } p \in (p_0(t); 89)\ \frac{\partial y}{\partial t} > 0 \text{ и предлагането нараства с времето}$$

$$\text{при } p \in (89; \infty)\ \frac{\partial y}{\partial t} < 0 \text{ и предлагането спада с времето.}$$

Пример 15. Да се определят динамичните функции на равновесните цена и количество $p = p(t)$, $q = q(t)$, ако динамичното търсене $x(p, t)$ и динамичното предлагане $y(p, t)$ са зададени както в:

а) 12 в) и 14 б);

б) 12 в) и 14 в);

в) 12 а) и 14 а);

г) 12 г) и 14 г).

Да се направи прогноза при $t = 1, 2, 3, 5, 10$.

Решение:

Динамичното равновесие се постига при изпълнението на равенствата

$$q(t) = x(p(t), t) = y(p(t), t).$$

а) В този случай имаме нарастване както на търсенето, така и на предлагането, което води до сигурен растеж на равновесното количество и неопределеност при изменението на равновесната цена. Прилагаме условието за динамично равновесие:

$$q(t) = 100 - p(t) + 4t + 0{,}095p(t)t = -40 + p(t) - 0{,}17t + 0{,}03p(t)t.$$

От второто равенство получаваме

$$p(t) = \frac{140 + 4{,}17t}{2 + 0{,}0205t}.$$

Като заместим намерената функция $p(t)$ в единия от изразите за търсенето и предлагането (например в израза за предлагането), получаваме

$$q(t) = -(40 + 0{,}17t) + (1 + 0{,}03t)\frac{140 + 4{,}17t}{2 + 0{,}0205t} = \frac{60 + 7{,}21t + 0{,}1216t^2}{2 + 0{,}0205t}.$$

За да определим изменението на динамичната равновесна цена, диференцираме и получаваме

$$p'(t) = \frac{4{,}17(2 + 0{,}0205t) - (140 + 4{,}17t)0{,}0205}{(2 + 0{,}0205t)^2} = \frac{5{,}47}{(2 + 0{,}0205t)^2},$$

така че при тези конкретни данни равновесната цена ще нараства с времето. Прогнозните резултати за $t = 1, 2, 3, 5, 10$ нанасяме в таблица

t	$p(t)$	$q(t)$
0	70,00	30,00
1	71,35	33,32
2	72,68	36,70
3	73,98	40,13
5	76,50	47,13
10	82,40	65,42

Вижда се, че равновесната цена расте със забавяне, а равновесното количество – с ускорение.

б) В този случай имаме нарастване както на търсенето при спад на предлагането, което води до сигурно нарастване на равновесната цена и неопределеност при изменението на равновесното количество. Прилагаме условието за динамично равновесие:

$$q(t) = 100 - p(t) + 4t + 0{,}0095p(t)t = -40 + p(t) - 0{,}18t - 0{,}02p(t)t.$$

От второто равенство получаваме

$$p(t) = \frac{140 + 4{,}18t}{2 - 0{,}0295t}.$$

Като заместим намерената функция $p(t)$ в единия от изразите за търсенето и предлагането (например в израза за предлагането), получаваме

$$q(t) = -(40 + 0{,}18t) + (1 - 0{,}02t)\frac{140 + 4{,}18t}{2 - 0{,}0295t} = \frac{60 + 2{,}2t - 0{,}0783t^2}{2 - 0{,}0295t}.$$

За да определим характера на изменение на равновесното количество диференцираме и получаваме

$$q'(t) = \frac{(2{,}2 - 0{,}1566t)(2 - 0{,}0295t) + (60 + 2{,}2t - 0{,}0783t^2)0{,}0295}{(2 - 0{,}0295t)^2}$$
$$= \frac{6{,}17 - 0{,}3132t + 0{,}0023t^2}{(2 - 0{,}0295t)^2}.$$

Установяваме, че корените на числителя са $t_1 \cong 23$ и $t_2 \cong 113$ и тъй като $q'(t) > 0$ за $(0, t_1) \cup (t_2, \infty)$ (знаменателят е положителен, то за интервала на прогнозиране $t \leq 10$ равновесното количество ще нараства.

Прогнозните резултати за $t = 1, 2, 3, 5, 10$ нанасяме в таблица

t	$p(t)$	$q(t)$
0	70,00	30,00
1	73,17	31,53
2	76,43	33,02
3	79,80	34,47
5	86,86	37,27
10	106,63	43,50

Вижда се, че равновесната цена расте с ускорение, а равновесното количество – със забавяне.

в) В този случай имаме неопределено изменение във времето както на търсенето, така и на предлагането. Прилагаме условието за динамично равновесие:

$$q(t) = 100 - p(t) + 4t + 0{,}0667p(t)t = -40 + p(t) - 2{,}23t + 0{,}03p(t)t.$$

От второто равенство получаваме

$$p(t) = \frac{140 + 0{,}23t}{2 - 0{,}0367t}.$$

Като заместим намерената функция $p(t)$ в единия от изразите за търсенето и предлагането (например в израза за предлагането), получаваме

$$q(t) = -(40 + 2{,}23t) + (1 + 0{,}03t)\frac{140 + 0{,}23t}{2 - 0{,}0367t} = \frac{60 + 1{,}438t + 0{,}0887t^2}{2 - 0{,}0367t}.$$

В този случай е очевидно, че с времето има растеж както на цената, така и на количеството – с нарастване на t числителите на изразите за $p(t)$ и $q(t)$ растат, а знаменателите – намаляват.

Прогнозните резултати за $t = 1, 2, 3, 5, 10$ нанасяме в таблица

t	$p(t)$	$q(t)$
0	70,00	30,00
1	71,43	31,34
2	72,91	32,82
3	74,44	34,45
5	77,70	38,21
10	87,14	50,88

Вижда се, че равновесните цена и количество растат с ускорение, като при количеството това е по-силно изразено.

г) В този случай имаме неопределено изменение във времето както на търсенето, така и на предлагането. Прилагаме условието за динамично равновесие:

$$q(t) = 100 - p(t) + 4t - 0{,}0722p(t)t = -40 + p(t) + 1{,}78t - 0{,}02p(t)t.$$

От второто равенство получаваме

$$p(t) = \frac{140 + 2{,}22t}{2 + 0{,}0522t}.$$

Като заместим намерената функция $p(t)$ в единия от изразите за търсенето и предлагането (например в израза за предлагането), получаваме

$$q(t) = -(40 - 1{,}78t) + (1 - 0{,}02t)\frac{140 + 2{,}22t}{2 + 0{,}0522t} = \frac{60 + 0{,}892t + 0{,}0485t^2}{2 + 0{,}0522t}.$$

В този случай, тъй като и числителите и знаменателите на изразите за $p(t)$ и $q(t)$ растат, за да преценим характерите на изменение на динамичните функции $p(t)$ и $q(t)$ ще трябва да пресметнем първите производни.

За функцията $p(t)$ ще имаме

$$p'(t) = \frac{2{,}22(2 + 0{,}0522t) - (140 + 2{,}22t)0{,}0522}{(2 + 0{,}0522t)^2} = -\frac{2{,}868}{(2 + 0{,}0205t)^2},$$

така че при тези конкретни данни равновесната цена ще намалява с времето.

Аналогично, за функцията $q(t)$ получаваме

$$q'(t) = \frac{(0{,}892 - 0{,}097t)(2 + 0{,}0522t) - (60 + 0{,}892t + 0{,}0485t^2)0{,}0522}{(2 - 0{,}0295t)^2}$$
$$= \frac{-1{,}348 + 0{,}194t + 0{,}0026t^2}{(2 + 0{,}0522t)^2}.$$

Установяваме, че корените на числителя са $t_1 \cong -81$ и $t_2 \cong 6{,}4$ и тъй като $q'(t) < 0$ за $t = 1{,}2,\dots,6$ и равновесното количество ще намалява, а $q'(t) > 0$ за $t = 7{,}8,\dots,10$ и равновесното количество ще нараства.

Прогнозните резултати за $t = 1, 2, 3, 5, 10$ нанасяме в таблица

t	$p(t)$	$q(t)$
0	70,00	30,00
1	69,30	29,70
2	68,64	29,45
3	68,01	29,26
5	66,83	29,05
10	64,31	29,25

Вижда се, че равновесните цена намалява със забавен темп. Равновесното количество намаля до $t = 6$: $q(6) = 29{,}01$ и след това нараства от $t = 7$: $q(7) = 29{,}01$.

7. Някои специални динамични функции на търсене и предлагане

За линейната функция на търсене ще имаме

$$x = A - Bp = -B\left(p - \frac{A}{B}\right) = -k^D(p - p_0^D).$$

Горното равенство ни позволява да дефинираме една функция на търсене чрез две величини – коефициента на наклона на линията на търсене към ценовата ос k^D и граничната цена на търсене p_0^D. Фактически за пазарния капацитет ще имаме $q_0 = k^D p_0^D$.

Аналогично, за линейната функция на предлагане получаваме

$$y = -A + Bp = B\left(p - \frac{A}{B}\right) = k^S(p - p_0^S),$$

като k^S е коефициент на наклона на линията на предлагане към ценовата ос, а p_0^S – граничната цена на предлагане.

За да има частично пазарно равновесие между търсене и предлагане, зададени по този начин е достатъчно да е изпълнено условието $p_0^D > p_0^S$, тогава равновесието ще се определя от

$$q = -k^D(p - p_0^D) = k^S(p - p_0^S).$$

Решавайки горната система получаваме

$$p = \frac{k^D p_0^D + k^S p_0^S}{k^D + k^S}$$

за равновесната цена и

$$q = \frac{k^D k^S (p_0^D - p_0^S)}{k^D + k^S}.$$

Ако сега предположим, че k^D, p_0^D, k^S и p_0^S са функции на времето t, т.е имаме $k^D = k^D(t), p_0^D = p_0^D(t), k^S = k^S(t), p_0^S = p_0^S(t)$, то на базата на горните формули ще можем да определим динамичните функции на равновесните цена и количество $p(t)$ и $q(t)$:

$$p(t) = \frac{k^D(t)p_0^D(t) + k^S(t)p_0^S(t)}{k^D(t) + k^S(t)}$$

$$q(t) = \frac{k^D(t)k^S(t)\left(p_0^D(t) - p_0^S(t)\right)}{k^D(t) + k^S(t)}.$$

Най-лесно това може да бъде направено, ако са зададени линейните функции на търсене и предлагане в два последователни момента от времето $t = 0$ и $t = 1$, което ни позволява да възстановим динамичните функции $k^D = k^D(t), p_0^D = p_0^D(t), k^S = k^S(t), p_0^S = p_0^S(t)$ в два важни случая – ако предположим, че

а) те са линейни функции на времето (изменят се в аритметични прогресии);

б) те се изменят с постоянни темпове (в геометрични прогресии).

Пример 16. Да се определят динамичните функции на равновесните цена и количество $p = p(t)$, $q = q(t)$, при предположение, че функциите $k^D = k^D(t), p_0^D = p_0^D(t), k^S = k^S(t), p_0^S = p_0^S(t)$ се изменят по закона на аритметичната прогресия и данните са както в пример 15. Да се направи прогноза при $t = 1, 2, 3, 5, 10$.

Решение:

Тъй като

$$k^D = \frac{q_0}{p_0^D}$$

и за всички функции на търсене от пример 12 $q_0(0) = 100$ и $p_0^D(0) = 100$, то получаваме, че $k^D(0) = 1$.

а) Определяме $k^D(1)$ от условията за функцията на търсене в пример 12 в):

$$k^D(1) = \frac{q_0(1)}{p_0^D(1)} = \frac{104}{105} \cong 0{,}99.$$

Ако $k^D(0) = 1$ и $k^D(1) = 0{,}99$ са първите два члена на една аритметична прогресия, то общият член ще се задава с формулата

$$k^D(t) = 1 - 0{,}01t.$$

Аналогично, за общия член на аритметична прогресия, чиито първи два члена са $p_0^D(0) = 100$ и $p_0^D(1) = 105$ получаваме

$$p_0^D(t) = 100 + 5t.$$

За коефициентите, определящи функцията на предлагане ще имаме съответно

$$k^S(0) = 1 \text{ и } k^S(1) = 1{,}03 \Rightarrow k^S(t) = 1 + 0{,}03t$$

$$p_0^S(0) = 40 \text{ и } p_0^S(1) = 39 \Rightarrow p_0^S(t) = 40 - t.$$

Сега можем да заместим получените динамични функции $k^D = k^D(t), p_0^D = p_0^D(t), k^S = k^S(t), p_0^S = p_0^S(t)$ във формулата за динамичната равновесна цена, получаваме

$$p(t) = \frac{k^D(t)p_0^D(t) + k^S(t)p_0^S(t)}{k^D(t) + k^S(t)} = \frac{(1 - 0{,}01t)(100 + 5t) + (1 + 0{,}03t)(40 - t)}{(1 - 0{,}01t) + (1 + 0{,}03t)}$$
$$= \frac{140 + 4{,}2t - 0{,}08t^2}{2 + 0{,}02t}.$$

Заместваме същите функции и във формулата за динамичното равновесно количество:

$$q(t) = \frac{k^D(t)k^S(t)\left(p_0^D(t) - p_0^S(t)\right)}{k^D(t) + k^S(t)}$$
$$= \frac{(1 - 0{,}01t)(1 + 0{,}03t)\left((100 + 5t) - (40 - t)\right)}{(1 - 0{,}01t) + (1 + 0{,}03t)}$$
$$= \frac{60 + 7{,}2t + 0{,}102t^2 - 0{,}0018t^3}{2 + 0{,}02t}.$$

В този случай има неяснота относно поведението на $p(t)$ ($q(t)$ расте с времето). Тази неяснота можем да изясним с помощта на първата производна:

$$p'(t) = \frac{(4{,}2 - 0{,}16t)(2 + 0{,}02t) - (140 + 4{,}2t - 0{,}08t^2)0{,}02}{(2 + 0{,}02t)^2}$$
$$= \frac{5{,}6 - 0{,}32t - 0{,}0016t^2}{(2 + 0{,}02t)^2}.$$

Установяваме, че корените на числителя са $t_1 \cong -216$ и $t_2 \cong 16$ и тъй като $p'(0) > 0$, то за интервала на прогнозиране $t \leq 10$ равновесната цена ще нараства.

Прогнозните резултати за $t = 1, 2, 3, 5, 10$ нанасяме в таблица

t	$p(t)$	$q(t)$
0	70,00	30,00
1	71,35	33,32
2	72,59	36,66
3	73,73	40,03
5	75,71	46,82
10	79,09	63,82

б) Тъй като началните условия за динамичното търсене са същите, както в а), то функциите $k^D(t) = 1 - 0{,}01t$ и $p_0^D(t) = 100 + 5t$.

За коефициентите, определящи функцията на предлагане ще имаме съответно

$$k^S(0) = 1 \text{ и } k^S(1) = 0{,}98 \Longrightarrow k^S(t) = 1 - 0{,}02t$$

$$p_0^S(0) = 40 \text{ и } p_0^S(1) = 41 \Longrightarrow p_0^S(t) = 40 + t.$$

Сега можем да заместим получените динамични функции $k^D = k^D(t), p_0^D = p_0^D(t), k^S = k^S(t), p_0^S = p_0^S(t)$ във формулата за динамичната равновесна цена, получаваме

$$p(t) = \frac{k^D(t)p_0^D(t) + k^S(t)p_0^S(t)}{k^D(t) + k^S(t)} = \frac{(1 - 0{,}01t)(100 + 5t) + (1 - 0{,}02t)(40 + t)}{(1 - 0{,}01t) + (1 - 0{,}02t)}$$
$$= \frac{140 + 4{,}2t - 0{,}07t^2}{2 - 0{,}03t}.$$

Заместваме същите функции и във формулата за динамичното равновесно количество:

$$q(t) = \frac{k^D(t)k^S(t)\left(p_0^D(t) - p_0^S(t)\right)}{k^D(t) + k^S(t)}$$
$$= \frac{(1 - 0{,}01t)(1 - 0{,}02t)\left((100 + 5t) - (40 + t)\right)}{(1 - 0{,}01t) + (1 - 0{,}02t)}$$
$$= \frac{60 + 2{,}2t - 0{,}108t^2 + 0{,}0008t^3}{2 - 0{,}03t}.$$

Прогнозните резултати за $t = 1, 2, 3, 5, 10$ нанасяме в таблица

t	$p(t)$	$q(t)$
0	70,00	30,00
1	73,16	31,52
2	76,35	32,98
3	79,57	34,37
5	86,08	36,97
10	102,94	42,35

в) Определяме $k^D(1)$ от условията за функцията на търсене в пример 12 а):

$$k^D(1) = \frac{q_0(1)}{p_0^D(1)} = \frac{98}{105} \cong 0{,}933.$$

Ако $k^D(0) = 1$ и $k^D(1) = 0{,}933$ са първите два члена на една аритметична прогресия, то общият член ще се задава с формулата

$$k^D(t) = 1 - 0{,}067t.$$

Аналогично, за общия член на аритметична прогресия, чиито първи два члена са $p_0^D(0) = 100$ и $p_0^D(1) = 105$ получаваме

$$p_0^D(t) = 100 + 5t.$$

За коефициентите, определящи функцията на предлагане ще имаме съответно

$$k^S(0) = 1 \text{ и } k^S(1) = 0{,}98 \Rightarrow k^S(t) = 1 - 0{,}02t$$

$$p_0^S(0) = 40 \text{ и } p_0^S(1) = 41 \Rightarrow p_0^S(t) = 40 + t.$$

Сега можем да заместим получените динамични функции $k^D = k^D(t), p_0^D = p_0^D(t), k^S = k^S(t), p_0^S = p_0^S(t)$ във формулата за динамичната равновесна цена, получаваме

$$p(t) = \frac{k^D(t)p_0^D(t) + k^S(t)p_0^S(t)}{k^D(t) + k^S(t)} = \frac{(1 - 0{,}067t)(100 + 5t) + (1 - 0{,}02t)(40 + t)}{(1 - 0{,}067t) + (1 - 0{,}02t)}$$
$$= \frac{140 - 1{,}5t - 0{,}355t^2}{2 + 0{,}087t}.$$

Заместваме същите функции и във формулата за динамичното равновесно количество:

$$q(t) = \frac{k^D(t)k^S(t)\big(p_0^D(t) - p_0^S(t)\big)}{k^D(t) + k^S(t)}$$
$$= \frac{(1 - 0{,}067t)(1 - 0{,}02t)\big((100 + 5t) - (40 + t)\big)}{(1 - 0{,}067t) + (1 - 0{,}02t)}$$
$$= \frac{60 - 1{,}22t - 0{,}27t^2 + 0{,}0052t^3}{2 - 0{,}087t}.$$

Прогнозните резултати за $t = 1, 2, 3, 5, 10$ нанасяме в таблица

t	$p(t)$	$q(t)$
0	70,00	30,00
1	72,21	30,59
2	74,25	30,95
3	76,08	31,08
5	78,99	30,54
10	79,20	23,01

В този случай има неяснота относно поведението и на двете динамични функции $p(t)$ и $q(t)$. Тази неяснота можем да изясним с помощта на първата производна, за $p'(t)$ получаваме

$$p'(t) = \frac{(-1{,}5 - 0{,}71t)(2 - 0{,}087t) + (140 - 1{,}5t - 0{,}355t^2)0{,}087}{(2 - 0{,}087t)^2}$$
$$= \frac{9{,}18 - 1{,}42t + 0{,}031t^2}{(2 - 0{,}087t)^2}.$$

Установяваме, че корените на числителя са $t_1 \cong 7{,}8$ и $t_2 \cong 38$ и тъй като $p'(0) > 0$, то за интервала $t \in (0, t_1)$ ще има нарастване на равновесната цена, а при $t > t_1$ – спад. Пресмятаме $p(7) = 80{,}59$ и $p(8) = 80{,}74$ и се уверяваме, че най-високата равновесна цена се постига при $t = 8$.

За производната $q'(t)$ получаваме

$$q'(t)$$
$$= \frac{(-1{,}22 - 0{,}54t + 0{,}0156t^2)(2 - 0{,}087t) + (60 - 1{,}22t - 0{,}27t^2 + 0{,}0052t^3)0{,}087}{(2 - 0{,}0877t)^2}$$
$$= \frac{2{,}78 - 1{,}08t + 0{,}0547t^2 - 0{,}0009t^3}{(2 - 0{,}0877t)^2}$$

За да преценим знака на производната, трябва да нулираме числителя. Тъй като коефициента пред t^3 е много малък, то като го пренебрегнем получаваме квадратното уравнение

$$2{,}78 - 1{,}08t + 0{,}0547t^2 = 0$$

с корени $t_1 \cong 3$ и $t_2 \cong 17$ и тъй като $q'(0) > 0$, то за интервала $t \in (0, t_1)$ ще има нарастване на равновесното количество, а при $t > t_1$ – спад. Пресмятаме $q(4) = 30{,}95$ и се убеждаваме, че най-голямото количество се постига при $t = 3$.

г) Определяме $k^D(1)$ от условията за функцията на търсене в пример 12 а):

$$k^D(1) = \frac{q_0(1)}{p_0^D(1)} = \frac{104}{97} \cong 1{,}072.$$

Ако $k^D(0) = 1$ и $k^D(1) = 1{,}072$ са първите два члена на една аритметична прогресия, то общият член ще се задава с формулата

$$k^D(t) = 1 + 0{,}072t.$$

Аналогично, за общия член на аритметична прогресия, чиито първи два члена са $p_0^D(0) = 100$ и $p_0^D(1) = 97$ получаваме

$$p_0^D(t) = 100 - 3t.$$

За коефициентите, определящи функцията на предлагане ще имаме съответно

$$k^S(0) = 1 \text{ и } k^S(1) = 0{,}98 \Longrightarrow k^S(t) = 1 - 0{,}02t$$

$$p_0^S(0) = 40 \text{ и } p_0^S(1) = 39 \Longrightarrow p_0^S(t) = 40 - t.$$

Сега можем да заместим получените динамични функции $k^D = k^D(t), p_0^D = p_0^D(t), k^S = k^S(t), p_0^S = p_0^S(t)$ във формулата за динамичната равновесна цена, получаваме

$$p(t) = \frac{k^D(t)p_0^D(t) + k^S(t)p_0^S(t)}{k^D(t) + k^S(t)} = \frac{(1 + 0{,}072t)(100 - 3t) + (1 - 0{,}02t)(40 - t)}{(1 + 0{,}072t) + (1 - 0{,}02t)}$$
$$= \frac{140 + 2{,}4t - 0{,}196t^2}{2 + 0{,}052t}.$$

Заместваме същите функции и във формулата за динамичното равновесно количество:

$$q(t) = \frac{k^D(t)k^S(t)\left(p_0^D(t) - p_0^S(t)\right)}{k^D(t) + k^S(t)}$$
$$= \frac{(1 + 0{,}072t)(1 - 0{,}02t)\left((100 - 3t) - (40 - t)\right)}{(1 - 0{,}067t) + (1 - 0{,}02t)}$$
$$= \frac{60 + 1{,}12t - 0{,}188t^2 + 0{,}0028t^3}{2 - 0{,}087t}.$$

В този случай има неяснота относно поведението и на двете динамични функции $p(t)$ и $q(t)$. Тази неяснота можем да изясним с помощта на първата производна, за $p'(t)$ получаваме

$$p'(t) = \frac{(2{,}4 - 0{,}392t)(2 + 0{,}052t) - (140 + 2{,}4t - 0{,}196t^2)0{,}052}{(2 + 0{,}052t)^2}$$
$$= \frac{-2{,}48 - 0{,}684t - 0{,}0102t^2}{(2 + 0{,}052t)^2} < 0.$$

Това показва, че равновесната цена намалява с времето.

За производната $q'(t)$ получаваме

$$q'(t)$$
$$= \frac{(1{,}12 - 0{,}376t + 0{,}0084t^2)(2 + 0{,}052t) - (60 + 1{,}12t - 0{,}188t^2 + 0{,}0028t^3)0{,}052}{(2 + 0{,}052t)^2}$$
$$= \frac{-0{,}88 - 0{,}752t - 0{,}01t^2 + 0{,}0003t^3}{(2 + 0{,}052t)^2}$$

Тъй като коефициента пред t^3 е много малък, то можем да го пренебрегнем и получаваме, че $q'(t) < 0$, т.е. равновесното количество също намалява с времето.

Прогнозните резултати за $t = 1, 2, 3, 5, 10$ нанасяме в таблица

t	$p(t)$	$q(t)$
0	70,00	30,00
1	69,30	29,70
2	68,45	29,23
3	67,46	28,64
5	65,09	27,10
10	57,30	21,90

Вижда се, че и при двете величини има спад с нарастващ темп.

Пример 17. Да се определят динамичните функции на равновесните цена и количество $p = p(t)$, $q = q(t)$, при предположение, че функциите $k^D = k^D(t), p_0^D = p_0^D(t), k^S = k^S(t), p_0^S = p_0^S(t)$ се изменят по закона на геометричната прогресия и данните са както в пример 15. Да се направи прогноза при $t = 1, 2, 3, 5, 10$.

Решение:

Ако $z_0, z_1, z_2, \dots, z_t, \dots$ е динамична редица, подчинена на закона на геометричната прогресия, то очевидно за общия член ще имаме

$$z_t = \left(\frac{z_1}{z_0}\right)^t z_0$$

В решението на тази задача ще използваме модифициран вариант на формулата за равновесната цена

$$p(t) = \frac{k^D(t)p_0^D(t) + k^S(t)p_0^S(t)}{k^D(t) + k^S(t)} = \frac{p_0^D(t) + \frac{k^S(t)}{k^D(t)}p_0^S(t)}{1 + \frac{k^S(t)}{k^D(t)}}$$

а) В този случай имаме $k^D(0) = 1$ и $k^D(1) = 0{,}99$, следователно за динамичната функция $k^D(t)$ получаваме

$$k^D(t) = 0{,}99^t.$$

При $p_0^D(0) = 100$ и $p_0^D(1) = 105$ ще имаме

$$p_0^D(t) = 1{,}05^t \cdot 100.$$

Аналогично, за функцията на предлагане получаваме

$$k^S(0) = 1 \text{ и } k^S(1) = 1{,}03 \Rightarrow k^S(t) = 1{,}03^t$$

$$p_0^S(0) = 40 \text{ и } p_0^S(1) = 39 \Longrightarrow p_0^S(t) = \left(\frac{39}{40}\right)^t 40 = 0{,}975^t \cdot 40.$$

Заместваме намерените динамични функции $k^D(t)$, $p_0^D(t)$, $k^S(t)$ и $p_0^S(t)$ във формулата за динамичната равновесна цена и получаваме

$$p(t) = \frac{p_0^D(t) + \frac{k^S(t)}{k^D(t)} p_0^S(t)}{1 + \frac{k^S(t)}{k^D(t)}} = \frac{1{,}05^t \cdot 100 + \frac{1{,}03^t}{0{,}99^t} 0{,}975^t \cdot 40}{1 + \frac{1{,}03^t}{0{,}99^t}}$$

$$= \frac{1{,}05^t 100 + \left(\frac{1{,}03 \cdot 0{,}975}{0{,}99}\right)^t 40}{1 + \left(\frac{1{,}03}{0{,}99}\right)^t} = \frac{1{,}05^t \cdot 100 + 1{,}014^t \cdot 40}{1 + 1{,}04^t}.$$

По същия начин пресмятаме динамичното равновесно количество

$$q(t) = \frac{k^D(t) k^S(t)\left(p_0^D(t) - p_0^S(t)\right)}{k^D(t) + k^S(t)} = \frac{k^S(t)\left(p_0^D(t) - p_0^S(t)\right)}{1 + \frac{k^S(t)}{k^D(t)}}$$

$$= \frac{1{,}03^t(1{,}05^t \cdot 100 - 0{,}975^t \cdot 40)}{1 + \frac{1{,}03^t}{0{,}99^t}}$$

$$= \frac{(1{,}03 \cdot 1{,}05)^t 100 - (1{,}03 \cdot 0{,}975)^t 40}{1 + \left(\frac{1{,}03}{0{,}99}\right)^t} = \frac{1{,}082^t \cdot 100 - 1{,}004^t \cdot 40}{1 + 1{,}04^t}.$$

Прогнозните резултати за $t = 1, 2, 3, 5, 10$ нанасяме в таблица

t	$p(t)$	$q(t)$
0	70,00	30,00
1	71,35	33,35
2	72,72	36,87
3	74,11	40,56
5	76,93	48,49
10	84,22	71,89

б) В този случай функцията на търсене е същата, като в а), така че

$$k^D(t) = 0{,}99^t \quad \text{и} \quad p_0^D(t) = 1{,}05^t \cdot 100.$$

За функцията на предлагане получаваме

$$k^S(0) = 1 \text{ и } k^S(1) = 0{,}98 \Longrightarrow k^S(t) = 0{,}98^t$$

$$p_0^S(0) = 40 \text{ и } p_0^S(1) = 41 \Longrightarrow p_0^S(t) = \left(\frac{41}{40}\right)^t 40 = 1{,}025^t \cdot 40.$$

Заместваме намерените динамични функции $k^D(t)$, $p_0^D(t)$, $k^S(t)$ и $p_0^S(t)$ във формулата за динамичната равновесна цена и получаваме

$$p(t)=\frac{p_0^D(t)+\frac{k^S(t)}{k^D(t)}p_0^S(t)}{1+\frac{k^S(t)}{k^D(t)}}=\frac{1{,}05^t\cdot 100+\frac{0{,}98^t}{0{,}99^t}1{,}025^t\cdot 40}{1+\frac{0{,}98^t}{0{,}99^t}}$$

$$=\frac{1{,}05^t\cdot 100+\left(\frac{0{,}98\cdot 1{,}025}{0{,}99}\right)^t\cdot 40}{1+\left(\frac{0{,}98}{0{,}99}\right)^t}=\frac{1{,}05^t\cdot 100+1{,}0146^t\cdot 40}{1+0{,}99^t}.$$

По същия начин пресмятаме динамичното равновесно количество

$$q(t)=\frac{k^D(t)k^S(t)\left(p_0^D(t)-p_0^S(t)\right)}{k^D(t)+k^S(t)}=\frac{k^S(t)\left(p_0^D(t)-p_0^S(t)\right)}{1+\frac{k^S(t)}{k^D(t)}}$$

$$=\frac{0{,}98^t(1{,}05^t\cdot 100-1{,}025^t\cdot 40)}{1+\frac{0{,}98^t}{0{,}99^t}}$$

$$=\frac{(0{,}98\cdot 1{,}05)^t 100-(0{,}98\cdot 1{,}025)^t 40}{1+\left(\frac{0{,}98}{0{,}99}\right)^t}$$

$$=\frac{1{,}029^t\cdot 100-1{,}0045^t\cdot 40}{1+0{,}99^t}.$$

Прогнозните резултати за $t=1,2,3,5,10$ нанасяме в таблица

t	$p(t)$	$q(t)$
0	70,00	30,00
1	73,16	31,52
2	76,47	33,09
3	79,96	34,72
5	87,46	38,16
10	109,81	47,92

в) за коефициентите, определящи функцията на търсене ще имаме

$$k^D(0)=1 \text{ и } k^D(1)=0{,}933 \Longrightarrow k^D(t)=0{,}933^t.$$

$$p_0^D(0)=100 \text{ и } p_0^D(1)=105 \Longrightarrow p_0^D(t)=1{,}05^t\cdot 100.$$

За коефициентите, определящи функцията на предлагане ще имаме съответно

$$k^S(0)=1 \text{ и } k^S(1)=0{,}98 \Longrightarrow k^S(t)=0{,}98^t.$$

$$p_0^S(0) = 40 \text{ и } p_0^S(1) = 41 \Longrightarrow p_0^S(t) = 1{,}025^t \cdot 40.$$

Сега можем да заместим получените динамични функции $k^D = k^D(t), p_0^D = p_0^D(t), k^S = k^S(t), p_0^S = p_0^S(t)$ във формулата за динамичната равновесна цена, получаваме

$$p(t) = \frac{p_0^D(t) + \frac{k^S(t)}{k^D(t)} p_0^S(t)}{1 + \frac{k^S(t)}{k^D(t)}} = \frac{1{,}05^t \cdot 100 + \frac{0{,}98^t}{0{,}933^t} 1{,}025^t \cdot 40}{1 + \frac{0{,}98^t}{0{,}933^t}}$$

$$= \frac{1{,}05^t \cdot 100 + \left(\frac{0{,}98 \cdot 1{,}025}{0{,}933}\right)^t \cdot 40}{1 + \left(\frac{0{,}98}{0{,}933}\right)^t} = \frac{1{,}05^t \cdot 100 + 1{,}0766^t \cdot 40}{1 + 1{,}05^t}.$$

Аналогично, за динамичната функция на равновесно количество ще имаме

$$q(t) = \frac{k^D(t)k^S(t)\left(p_0^D(t) - p_0^S(t)\right)}{k^D(t) + k^S(t)} = \frac{k^S(t)\left(p_0^D(t) - p_0^S(t)\right)}{1 + \frac{k^S(t)}{k^D(t)}}$$

$$= \frac{0{,}98^t(1{,}05^t \cdot 100 - 1{,}025^t \cdot 40)}{1 + \frac{0{,}98^t}{0{,}933^t}}$$

$$= \frac{(0{,}98 \cdot 1{,}05)^t 100 - (0{,}98 \cdot 1{,}025)^t 40}{1 + \left(\frac{0{,}98}{0{,}933}\right)^t}$$

$$= \frac{1{,}029^t \cdot 100 - 1{,}0045^t \cdot 40}{1 + 1{,}05^t}.$$

Прогнозните резултати за $t = 1, 2, 3, 5, 10$ нанасяме в таблица

t	$p(t)$	$q(t)$
0	70,00	30,00
1	72,22	30,60
2	74,49	31,16
3	76,79	31,71
5	81,48	32,71
10	93,79	34,71

г) За коефициентите, определящи функцията на търсене ще имаме

$$k^D(0) = 1 \text{ и } k^D(1) = 1{,}072 \Longrightarrow k^D(t) = 1{,}072^t.$$

$$p_0^D(0) = 100 \text{ и } p_0^D(1) = 97 \Longrightarrow p_0^D(t) = 0{,}97^t \cdot 100.$$

За коефициентите, определящи функцията на предлагане ще имаме съответно

$$k^S(0) = 1 \text{ и } k^S(1) = 0{,}98 \Rightarrow k^S(t) = k^S(t) = 0{,}98^t.$$

$$p_0^S(0) = 40 \text{ и } p_0^S(1) = 39 \Rightarrow p_0^S(t) = k^S(t) = 0{,}975^t \cdot 40.$$

Сега можем да заместим получените динамични функции $k^D = k^D(t), p_0^D = p_0^D(t), k^S = k^S(t), p_0^S = p_0^S(t)$ във формулата за динамичната равновесна цена, получаваме

$$p(t) = \frac{p_0^D(t) + \frac{k^S(t)}{k^D(t)} p_0^S(t)}{1 + \frac{k^S(t)}{k^D(t)}} = \frac{0{,}97^t \cdot 100 + \frac{0{,}98^t}{1{,}072^t} 0{,}975^t \cdot 40}{1 + \frac{0{,}98^t}{1{,}072^t}}$$

$$= \frac{0{,}97^t \cdot 100 + \left(\frac{0{,}98 \cdot 0{,}975}{1{,}072}\right)^t \cdot 40}{1 + \left(\frac{0{,}98}{1{,}072}\right)^t} = \frac{0{,}97^t \cdot 100 + 0{,}891^t \cdot 40}{1 + 0{,}914^t}.$$

Аналогично, за динамичната функция на равновесно количество ще имаме

$$q(t) = \frac{k^D(t) k^S(t) \big(p_0^D(t) - p_0^S(t)\big)}{k^D(t) + k^S(t)} = \frac{k^S(t) \big(p_0^D(t) - p_0^S(t)\big)}{1 + \frac{k^S(t)}{k^D(t)}}$$

$$= \frac{0{,}98^t (0{,}97^t \cdot 100 - 0{,}975^t \cdot 40)}{1 + \frac{0{,}98^t}{1{,}072^t}}$$

$$= \frac{(0{,}98 \cdot 0{,}97)^t \cdot 100 - (0{,}98 \cdot 0{,}975)^t \cdot 40}{1 + \left(\frac{0{,}98}{1{,}072}\right)^t}$$

$$= \frac{0{,}9506^t \cdot 100 - 0{,}9555^t \cdot 40}{1 + 0{,}914^t}.$$

Прогнозните резултати за $t = 1, 2, 3, 5, 10$ нанасяме в таблица

t	$p(t)$	$q(t)$
0	70,00	30,00
1	69,30	29,70
2	68,57	29,34
3	67,80	28,92
5	66,14	27,94
10	61,38	24,89