ЗАДАЧИ по АНАЛИТИЧНА МИКРОИКОНОМИКА – II част

VI. ЦЕНОВА ДИСКРИМИНАЦИЯ НА МОНОПОЛА

19. **Модел на ценова дискриминация от първа степен.** На монополизиран пазар търсенето се представлява от функцията $q = 84 - p$, а функцията на общите разходи е $C = q^2$. Да се определи максималната печалба на фирмата-монополист при продажба на цялата продукция на една цена и при осъществяване на ценова дискриминация от първа степен.

Решение. При продажба на цялата продукция на една цена, равновесието на монопола се осъществява при изравняването на маргиналните разходи с маргиналните приходи:

$$R'(q) = C'(q).$$

Тъй като за приходите имаме $R(q) = p(q)q$, където $p(q) = 84 - q$ е обратната функция на търсене. Тогава $R(q) = 84q - q^2$ и $R'(q) = 84 - 2q$. Тогава ще имаме

$$R'(q) = C'(q) \Leftrightarrow 84 - 2q = 2q \quad \text{и} \quad q = 21.$$

Равновесната монополна цена p ще се определя от обратната функция на търсене:

$$p = p(21) = 84 - 21 = 63.$$

За приходите получаваме $R = pq = 63 \cdot 21 = 1323$, за разходите - $C = q^2 = 21^2 = 441$, а за печалбата - $\Pi = R - C = 1323 - 441 = 882$.

Сега да пресметнем същите пазарни показатели при осъществяване на ценова дискриминация от първа степен. Оптималното количество q_0 се получава както при съвършената конкуренция: при изравняване на функциите на обратно търсене и маргинални разходи:

$$p(q_0) = C'(q_0) \Leftrightarrow 84 - q_0 = 2q_0 \quad \text{и} \quad q_0 = 28,$$

а минималната цена p_0 от която започват продажбите – от обратната функция на търсене

$$p_0 = p(q_0) = 84 - 28 = 56.$$

Тогава приходите ще се изчисляват по формулата

$$R_0 = \int_0^{q_0} p(u)du = \int_0^{28} (84 - u)du.$$

В случай на линейна функция на търсене можем да пресмятаме приходите по формулата

$$R_0 = \frac{1}{2}(p_0 + p_{max})q_0.$$

(Ясно е, $(p_0 + p_{max})/2$ е средната цена на продажба на количеството q_0). В разглеждания случай ($p_0 = 56$, $p_{max} = 84$ и $q_0 = 28$) ще имаме

$$R_0 = \frac{1}{2}(56 + 84)28 = 1960.$$

Разходите ще възлизат на $C_0 = {q_0}^2 = 28^2 = 784$, а печалбата - $\Pi_0 = R_0 - C_0 = 1960 - 784 = 1176$.

20. **Модел на ценова дискриминация от втора степен.** Книгоиздателство обсъжда въпроса за издаване на книга на известен писател. Известно е, че постоянните разходи по издаването на книгата са 20 хил. лв., променливите – 2,5 лв. за брой, а хонорара на писателя е 40 хил. лв. Предполага се, че функцията на търсене на книгата е $q = 20 - p$ (q – хил. бр. от книгата, p – цена на брой в лв.). обсъждат се три пазарни стратегии:

а) Целият тираж да се продава на една и съща цена.

б) На половината от потенциалните купувачи да се предложи по-висока цена, а след изчерпването им книгата да се продава на по-ниска цена.

Решение:

Въпреки, че монопола има възможност сам да определя цената на продукцията си, която винаги е по-висока от цената, която би се получила при конкурентно предлагане на същата стока, той има допълнителни възможности за още по-голямо увеличаване на печалбата си. За да изчислим съответните цени, количества и печалби ще използваме функцията на разходите $C = 20 + 40 + 2{,}5q = 60 + 2{,}5q$ и обратната функция на търсене $p = 20 - q$.

а) Единна цена за целия тираж. В този случай максимализираме функцията на печалбата (от количеството): $\Pi = (20 - q)q - (60 - 2{,}5q) = -q^2 + 17{,}5q - 60$

$$\Pi' = -2q + 17{,}5$$

$$\Pi' = 0 \Leftrightarrow q = 8{,}75, \text{т. е } 8750 \text{ бр. тираж.}$$

При цена $p(8{,}75) = 20 - 8{,}75 = 11{,}25$ лв./бр.

$$\Pi(8{,}75) = \Pi\left(\frac{35}{4}\right) = -\frac{35^2}{4^2} + \frac{35}{2}.\frac{35}{4} - 60 =$$

$$= \frac{35^2}{4^2} - 60 = \frac{1225}{16} - 60 = \frac{1225 - 960}{16} = 16{,}5625 \text{ х. лв.}$$

б) Две партиди с различни цени. На половината от потенциалните купувачи предлагаме по-висока цена за бр. След изчерпване на количеството - намаляваме цената на книгата. За това ще използваме остатъчната функция на търсене. Тъй като $q = 20 - p$ е цялото първоначално търсене, то $q_1 = 10 - \frac{p_1}{2}$ е половината търсене, на което книгата ще се предлага по цена p_1 в количество q_1. Тогава за оборота на първата партида получаваме $R_1 = p_1 q_1 = (10 - \frac{p_1}{2})p_1$. Сега, на цена $p_2 < p_1$ ще задоволяваме остатъчното търсене ($q_2 = q - q_1$ е остатъчната функция на търсене). Ще имаме $q_2 = 20 - p_2 - \left(10 - \frac{p_1}{2}\right) = 10 - p_2 + \frac{p_1}{2}$, тогава за оборота на втората партида получаваме $R_2 = p_2 q_2 = (10 - p_2 + \frac{p_1}{2})p_2$. Образуваме и функцията на разходи от двете партиди общо:

$$C(q) = C(q_1 + q_2) = 60 + 2{,}5(q_1 + q_2) = 60 + 2{,}5\left(10 - \frac{p_1}{2} + 10 - p_2 + \frac{p_1}{2}\right) =$$

$$= 60 + 50 - 2{,}5p_2 = 110 - 2{,}5p_2$$

Сега трябва да представим печалбата като функция на p_1 и p_2. Ще имаме

$$\Pi = R_1 + R_2 - C = \left(10 - \frac{p_1}{2}\right)p_1 + \left(10 - p_2 + \frac{p_1}{2}\right)p_2 - (110 - 2{,}5p_2) =$$

$= 10p_1 - \frac{{p_1}^2}{2} + 10p_2 - \frac{{p_2}^2}{2} + \frac{p_1 p_2}{2} - 110 + 2{,}5p_2 = 10p_1 - \frac{{p_1}^2}{2} + 12{,}5p_2 - \frac{{p_2}^2}{2} + \frac{p_1 p_2}{2} - 110.$

За да максимализираме общата (от двете партиди) печалба Π ще трябва първо да намерим критичните точки, удовлетворяващи условията $\frac{\partial \Pi}{\partial p_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial p_2} = 0$. Ще имаме

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p_1} = 10 - p_1 + \frac{p_2}{2} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p_2} = 12{,}5 - 2p_2 + \frac{p_1}{2} = 0$$

От решаването на горната система получаваме $p_1 = 15$ и $p_2 = 10$. Тогава за съответните количества ще имаме $q_1 = 2{,}5$ и $q_2 = 7{,}5$, т.е първата партида ще бъде с 2500бр. тираж., а втората - 7500бр. тираж. Тогава за оборотите на партидите намираме $R_1 = 15.2{,}5 = 37{,}5$ и $R_2 = 10.7{,}5 = 75$, откъдето общия оборот е $R = R_1 + R_2 = 112{,}5$. Тъй като разходът е $C = C(10) = 60 + 2{,}5.10 = 85$, за печалбата при този вариант на издаване на книгата получаваме

$$\Pi = R - C = 112{,}5 - 85 = 27{,}5 \text{ х. лв.}$$

Ефекти от ценовата дискриминация:

1. Нарастване на печалбата на фирмата монополист (положителен ефект за фирмата)

$$\Pi = 16562{,}5 \to 27500$$

2. Нарастване на общия тираж (положителен ефект за потребителите)

$$q = 8750 \to 10000$$

3.Снижаване на ниската цена на стоката (положителен ефект за потребителите)

$$p_k = 11{,}25 \to 10$$

4.Повишаване на високата цена на стоката (отрицателен ефект за потребителите)

$$p_1 = 11{,}25 \to 15$$

Изводи: При тази фирма на ценова дискриминация се предполага ,че ∃ група от потребители (твърди фенове на стоката), които не жалят средства, за да я придобият. Фактически те финансират подобряването на положението на фирмата-монополист и на останалите потребители.

21. **Модел на ценова дискриминация от трета степен.** Фирма произвежда луканка с функция на разходи $C = 50 + 4q + 0{,}25q^2$. Продукцията се реализира в три търговски вериги, всяка с различна функция на търсене: $q_1 = 17{,}5 - 0{,}5p$, $q_2 = 11{,}5 - 0{,}5p$ и $q_3 = 18 - p$.

а) Да се състави функцията на сумарно търсене.

б) Да се намерят оптималните за фирмата количество, цена и печалба без прилагане на ценова дискриминация.

в) Да се намерят същите показатели като в б), но с прилагане на ценова дискриминация.

Решение.

а) и б) Функциите на търсене за трите различни търговски вериги се нулират при различни цени: $q_1 = 0$ при $p = 35$, $q_2 = 0$ при $p = 23$ и $q_3 = 0$ при $p = 18$. Това налага разбиването на ценовия интервал на три подинтервала. За функцията на съвкупно търсене получаваме

$$q = \begin{cases} q_1 + q_2 + q_3 = 47 - 2p; p \in (0{,}18) \Rightarrow q \in (11{,}47) \\ q_1 + q_2 = 29 - p; \quad p \in (18{,}23) \Rightarrow q \in (6{,}11) \\ q_1 = 17{,}5 - 0{,}5p; \quad p \in (23{,}35) \Rightarrow q \in (0{,}6) \\ 0; \qquad p > 35 \end{cases}$$

Тогава, за обратната функция на търсене ще имаме

$$p = \begin{cases} 35 - 2q;\ q \in (0{,}6) \\ 29 - q; \quad q \in (6{,}11) \\ 23{,}5 - 0{,}5q; q \in (11{,}47) \\ 0; \quad q > 47 \end{cases}$$

Така за функцията на приходите $R(q)$ и за функцията на маргиналните приходи $MR(q) = R'(q)$ получаваме

$$R(q) = \begin{cases} 35q - 2q^2;\ q \in (0,6) \\ 29q - q^2;\quad q \in (6,11) \\ 23{,}5q - 0{,}5q^2; q \in (11,47) \\ 0;\qquad q > 47 \end{cases}$$

$$MR(q) = R'(q) = \begin{cases} 35 - 4q;\ q \in (0,6) \\ 29 - 2q;\quad q \in (6,11) \\ 23{,}5 - q; q \in (11,47) \\ 0;\qquad q > 47 \end{cases}$$

Тъй като функцията на разходите е (във всички количествени интервали) $C = 50 + 4q + 0{,}25q^2$, то за функцията на маргиналните разходи получаваме $MC(q) = C'(q) = 4 + 0{,}5q.$ Равновесието на монопола изисква маргиналните приходи да са равни на маргиналните разходи, затова трябва да приравним $MR(q)$ и $MC(q)$ и да вземем тези стойности на q които принадлежат на съответните интервали. Получаваме

За $q \in (0,6]$ $35 - 4q = 4 + 0{,}5q \Longrightarrow q = \frac{62}{9} \cong 6{,}89 \notin (0,6]$

За $q \in (6,11]$ $29 - 2q = 4 + 0{,}5q \Longrightarrow q = 10 \in (6,11]$

За $q \in (11,47]$ $23{,}5 - q = 4 + 0{,}5q \Longrightarrow q = 13 \in (11,47]$

За получените решения $q = 10$ и $q = 13$ трябва да пресметнем съответните печалби и да ги сравним. За $q = 10$ $p(10) = 19, R(10) = 190, C(10) = 115 \Longrightarrow \Pi(10) = R(10) - C(10) = 75.$ За $q = 13$ $p(13) = 17, R(13) = 221, C(13) = 144{,}25 \Longrightarrow \Pi(10) = R(10) - C(10) = 76{,}75.$ Така окончателно получаваме, че най-голяма печалба се постига при цена $p = 17$, количество $q = 13$ и тази печалба възлиза на $\Pi = 76{,}75$. Тъй като $q = 13$ е в подинтервала, за който $q = q_1 + q_2 + q_3$, поучаваме $q_1(17) = 9, q_2(17) = 3$ и $q_3(17) = 1$.

в) Сега предполагаме, че монопола извършва ценова дискриминация, продавайки на различни цени в различните търговски вериги, използвайки съответните обратни функции на търсене при максимализиране на печалбата си, оставайки верен на правилото $MR = MC$.

За първата търговска верига с функция на търсене $q_1 = 17{,}5 - 0{,}5p$ сметките се препокриват със случая $\in (0,6]$, затова $q_1 = \frac{62}{9} \cong 6{,}89$, $p_1 = \frac{191}{9} \cong 21{,}22$.

За втората търговска верига с функция на търсене $q_2 = 11{,}5 - 0{,}5p$ и обратна функция на търсене $p = 23 - 2q$ и $R = 23q - 2q^2$ имаме $MR = 23 - 4q$; условието $MR = MC(= 4 + 0{,}5q)$ ни дава решението $q_2 = \frac{38}{9} \cong 4{,}22$, следователно $p_2 = \frac{131}{9} \cong 14{,}56$.

За третата търговска верига с функция на търсене $q = 18 - p$ и обратна функция на търсене $p = 18 - q$ получаваме $R = 18q - q^2$; $MR = 18 - 2q$ и $MR = MC \Leftrightarrow 18 - 2q = 4 + 0{,}5q$, откъдето $q_3 = \frac{28}{5} = 5{,}6$. За цената получаваме $p_3 = \frac{62}{5} = 12{,}4$.

Общото количество при тази ценова дискриминация е

$$q = q_1 + q_2 + q_3 \cong 6{,}89 + 4{,}22 + 5{,}6 = 16{,}71$$

Общите постъпления са

$$\begin{aligned} R = R_1 + R_2 + R_3 = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 &\cong 21{,}22.6{,}89 + 14{,}56.4{,}22 + 12{,}4.5{,}6 \\ &= 146{,}21 + 61{,}44 + 69{,}44 = 277{,}09 \end{aligned}$$

Общите разходи са

$$C = C(16{,}71) = 50 + 66{,}84 + 69{,}81 = 186{,}65$$

Тогава, печалбата при този вариант на пазарно поведение ще възлиза на

$$\Pi = R - C = 277{,}09 - 186{,}65 = 90{,}44$$

Да пресметнем и средната (претеглена) цена

$$p = \frac{p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3}{q_1 + q_2 + q_3} = \frac{R}{q} = \frac{277{,}09}{16{,}71} = 16{,}58$$

Да нанесем получените икономически показатели при двата варианта на пазарно поведение на фирмата-монополист в таблица

показател\вариант	Без ценова дискриминация	С ценова дискриминация
q_1	9	6,89
q_2	3	4,22
q_3	1	5,6
q	13	16,71
p_1	17	21,22
p_2	17	14,56
p_3	17	12,4
p	17	16,58
П	76,75	90,44

Печеливщи от ценовата дискриминация са: първо – фирмата, защото увеличава печалбата си от 76,75 до 90,44; второ – потребителите като цяло, защото те сега купуват повече стока (от 13 количеството нараства на 16,72) на по-ниска средна цена (намаляла от 17 до 16,58); трето – потребителите от третата верига, при тях има драстично нарастване на продажбите (от 1 на 5,6) при голям спад на цената (от 17 до 12,4); и накрая – потребителите от втората верига, които увеличават покупките си (от 3 на 4,22) при по-ниска цена (от 17 на 14,56). Единствените губещи от тази ситуация (и то много) са потребителите на първата верига – те купуват много по-малко стока (от 9 до 6,89) на много по-висока цена (от 17 до 21,22).

VII. ОЛИГОПОЛЕН КАРТЕЛ

22. На пазар на хомогенна стока съществуват два олигопола. Предполага се, че обратната функция на търсене на стоката има вида $p = a - bq$, а функцията на разходите е $C(q) = cq + d$. Фирмите решават да сключат картелно съглашение, при което, запазвайки юридическа и финансова самостоятелност, действат на пазара като една фирма – монополист, разделяйки пазара поравно. Каква ще бъде цената на стоката, продадените количества и печалбите, ако фирмите спазват картелното съглашение? А какви биха били същите показатели, ако едната или двете фирми не спазят съглашението с презумпцията, че другата го спазва?

Решение.

1) Честно спазване на картелното споразумение. При картелното споразумение фирмите-олигополисти се уговарят занапред да се държат на пазара като една фирма-монополист, максимизиращ общата печалба, т.е.:

$$\Pi(q) = (a - bq)q - cq - d \longrightarrow \max, q = q_1 + q_2$$

Условието от първи ред за тази оптимизационна задача е

$$\Pi'(q) = 0 \Leftrightarrow a - 2bq - c = 0 \quad \text{и} \quad q = \frac{a - c}{2b}.$$

Цената намираме от обратната функция на търсене:

$$p = p\left(\frac{a - c}{2b}\right) = a - b\frac{a - c}{2b} = \frac{a + c}{2}.$$

Всички възможности да се раздели общото количество за разположени върху множеството:

$$W = \alpha\left(\frac{a - c}{2b}, 0\right) + (1 - \alpha)\left(0, \frac{a - c}{2b}\right); 0 < \alpha < 1$$

Геометрично, това е отсечка, съединяваща монополните точки $\left(\frac{a-c}{2b}, 0\right)$и $\left(0, \frac{a-c}{2b}\right)$. Ако те изберат $\alpha = \frac{1}{2} \Longrightarrow q_1 = q_2 = \frac{a-c}{4b}$; $\Pi_1 = \Pi_2 = \frac{(a-c)^2}{8b} - d$.

2) Едностранно нарушаване на картелното споразумение. Нека B честно спазва споразумението, тогава $q_B = \frac{a-c}{4b}$. Тогава, ако A реши да го нарушава, тя ще използва функцията на остатъчно търсене на базата на известното q_B :

$$\Pi_A(q_A) = \left[a - b\left(q_A + \frac{a-c}{4b}\right)\right] q_A - cq_A - d \underset{q_A}{\rightarrow} max$$

Условието от първи ред за тази оптимизационна задача е

$$\Pi_A{}'(q_A) = 0 \Leftrightarrow a - 2bq_A - \frac{a-c}{4} - c = 0 \text{ и } q_A = \frac{3(a-c)}{8b}.$$

Тогава общото произведено количество ще бъде

$$q = q_A + q_B = \frac{3(a-c)}{8b} + \frac{a-c}{4b} = \frac{5(a-c)}{8b}.$$

При такова количество, въз основа на обратната функция на търсене, получаваме

$$p = p\left(\frac{5(a-c)}{8b}\right) = a - b\frac{5(a-c)}{8b} = \frac{3a+5c}{8}$$

Тази пазарна цена е по-ниска от монополната цена от предишния случай ($\frac{a+c}{2} - \frac{3a+5c}{8} = \frac{a-c}{8} > 0$). При това положение печалбата на A се увеличава до $\Pi_A = \frac{9(a-c)^2}{64b} - d$, а печалбата на B се намалява до $\Pi_B = \frac{3(a-c)^2}{32b} - d$.

3) Двустранно нарушаване на картелното споразумение. Приемаме, че всеки нарушава споразумението, като смята, че другият го спазва. Тогава B ще решава същата оптимизационна задача и $q_B = \frac{3(a-c)}{8b}$. Тогава общото произведено количество ще бъде

$$q = q_A + q_B = \frac{3(a-c)}{8b} + \frac{3(a-c)}{8b} = \frac{3(a-c)}{4b}$$

Това количество ще се срине цената до

$$p = p\left(\frac{3(a-c)}{4b}\right) = a - b\frac{3(a-c)}{4b} = \frac{a+3c}{4}$$

а печалбата съответно $\Pi_A = \Pi_B = \frac{3(a-c)^2}{32b} - d$.

В долната таблица са нанесени основните икономически показатели при $a = 30$, $b = 2$, $c = 6$ и $d = 0$.

	q_A	q_B	q	p	Π_A	Π_B
двете фирми спазват	3	3	6	18	36	36
B спазва, A не спазва	4,5	3	7,5	15	40,5	27
двете фирми не спазват	4,5	4,5	9	12	27	27

VIII. ОЛИГОПОЛИЯ НА КУРНО – СТАКЕЛБЕРГ

Нека на даден пазар да функционират две фирми-олигополисти. Предполага се, че функцията на търсене е линейна, т.е.

$$p(q_1, q_2) = a - b(q_1 + q_2)$$

и че имат една и съща функция на разходите, т.е.

$$c_1(q_1) = cq_1 + d \text{ и } c_2(q_2) = cq_2 + d\ ;$$

Да отбележим, че при тези предположения ще имаме :

1) При съвършена конкуренция:
   $p = MC = c'(q) = c$ и $q = \frac{a-c}{b}$, $(a > c), \Pi = 0$
2) При монопол: $\Pi = (a - bq)q - cd - d = (a - c)q - bd^2 - d$
   $\Pi' = 0 \Leftrightarrow (a - c) = 2bq \Rightarrow q = \frac{a-c}{2b}$ и $p = \frac{a+c}{2}; \Pi = \frac{(a-c)^2}{4b} - d$

При тези предположения за функциите на печалбата ще имаме:

$$\Pi_1(q_1) = [a - b(q_1 + q_2)]q_1 - cq_1 - d$$

$$\Pi_2(q_2) = [a - b(q_1 + q_2)]q_2 - cq_2 - d$$

Нека $q_2 = q_2(q_1)$ е предположението на първата фирма за реакцията на втората фирма, а $q_1 = q_1(q_2)$ – предположението на втората фирма. Тогава:

$$\Pi_1(q_1) = [a - b(q_1 + q_2(q_1))]q_1 - cq_1 - d$$

$$\Pi_2(q_2) = [a - b(q_1(q_2) + q_2)]q_2 - cq_2 - d$$

Тогава оптималните количества за двете фирми ще се достигат при :

$$\Pi_1{}'(q_1) = [a - b(q_1 + q_2(q_1))] - bq_1 - bq_1 q_2'(q_1) - c = 0$$

$$\Pi_2{}'(q_2) = [a - b(q_1(q_2) + q_2)] - bq_2 - bq_2 q_1'(q_2) - c = 0$$

Където $q_2{}'(q_1)$ и $q_1{}'(q_2)$ се наричат вариации на предположенията.

Ако, например първият дуополист, чиято функция на печалбата е

$$\Pi_1(q_1) = [a - b(q_1 + q_2(q_1))]q_1 - cq_1 - d,$$

където $q_2(q_1)$ е неговото предположение относно реакцията на другия олигополист. Тогава (тъй като той има властта да определи своето оптимално количество q_1) условието от първи ред за максимализиране на печалбата му ще бъде

$$\Pi_1{}'(q_1) = a - 2bq_1 - bq_2{}'q_1 - bq_2 - c = 0$$

Ако той смята, че другия изобщо няма да се съобразява с неговото количество, значи $q_2{}' = 0$, тогава от горното тъждество ще получим неговата истинска реакция

$$q_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{a-c}{b} - q_2\right)$$

Такъв дуополист ще наричаме дуополист на Курно. За неговата истинска реакция ще имаме $q_1{}' = -\frac{1}{2}$. Ако, обаче първият дуополист смята, че втория е дуополист на Курно и в своето оптимизационно условие замести $q_2{}'$ не с 0, а с $-\frac{1}{2}$, тогава истинската му реакция ще бъде

$$q_1 = \frac{2}{3}\left(\frac{a-c}{b} - q_2\right)$$

и $q_1{}' = -\frac{2}{3}$. Това е реакцията на дуополиста на Стакелберг. Позицията на Курно е аутсайдерска, а тази на Стакелберг – лидерска.

23. На пазар на хомогенна стока съществуват два олигопола. Предполага се, че обратната функция на търсене на стоката има вида $p = a - bq$, а функцията на разходите е $C(q) = cq + d.$ Един олигопол ще наричаме олигопол на Курно (аутсайдер), ако взема решения за обема на продажбите си, считайки че решенията на другия не зависят от неговия обем на продажби. Един олигопол ще наричаме олигопол на Стакелберг (лидер), ако взема решения за обема на продажбите си, считайки че другия е олигопол на Курно. Каква ще бъде цената на стоката, продадените количества и печалбите, ако на пазара има: а) два олигопола на Курно; б) един олигопол на Стакелберг и един на Курно; в) два олигопола на Стакелберг?

Решение. а) В случай на два олигопола на Курно, системата осигуряваща равновесието на модела ще бъде

$$\left| \begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{a-c}{b} - q_2\right) \\ q_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{a-c}{b} - q_1\right) \end{aligned} \right. .$$

Решението на горната система е

$$q_1 = q_2 = \frac{a-c}{3b}.$$

Тогава, за общото количество получаваме

$$q = q_1 + q_2 = \frac{2(a-c)}{3b}$$

и съгласно обратната функция на търсене цената ще бъде

$$p = p\left(\frac{2(a-c)}{3b}\right) = a - b\,\frac{2(a-c)}{3b} = \frac{a+2c}{3}.$$

Тогава за печалбите на фирмите получаваме

$$\Pi_1 = \Pi_2 = \frac{(a-c)^2}{9b} - d.$$

б) Приемаме, че първият олигополист е олигополист на Стакелберг (лидер), а вторият – на Курно (аутсайдер). Тогава системата, определяща равновесието на модела ще бъде

$$\left| \begin{aligned} q_1 &= \frac{2}{3}\left(\frac{a-c}{b} - q_2\right) \\ q_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{a-c}{b} - q_1\right) \end{aligned} \right. .$$

Решенията на тази система са

$$q_1 = \frac{a-c}{2b} \quad \text{и} \quad q_2 = \frac{a-c}{4b}.$$

Тогава, за общото количество получаваме

$$q = q_1 + q_2 = \frac{3(a-c)}{4b}$$

и съгласно обратната функция на търсене цената ще бъде

$$p = p\left(\frac{4(a-c)}{4b}\right) = a - b\frac{3(a-c)}{4b} = \frac{a+3c}{4}.$$

Тогава за печалбите на фирмите получаваме

$$\Pi_1 = \frac{(a-c)^2}{8b} - d \quad \text{и} \quad \Pi_2 = \frac{(a-c)^2}{16b} - d.$$

в) Нека сега и двамата олигополисти да са олигополисти на Стакелберг (лидери). Тогава системата, определяща равновесието на модела ще бъде

$$\left| \begin{aligned} q_1 &= \frac{2}{3}\left(\frac{a-c}{b} - q_2\right) \\ q_2 &= \frac{2}{3}\left(\frac{a-c}{b} - q_1\right) \end{aligned} \right. .$$

Решението на горната система е

$$q_1 = q_2 = \frac{2(a-c)}{5b}.$$

Тогава, за общото количество получаваме

$$q = q_1 + q_2 = \frac{4(a-c)}{5b}$$

и съгласно обратната функция на търсене цената ще бъде

$$p = p\left(\frac{4(a-c)}{5b}\right) = a - b\frac{4(a-c)}{5b} = \frac{a+4c}{5}.$$

Тогава за печалбите на фирмите получаваме

$$\Pi_1 = \Pi_2 = \frac{2(a-c)^2}{25b} - d.$$

В долната таблица са нанесени основните икономически показатели при $a = 30$, $b = 2$, $c = 6$ и $d = 0$.

	q_1	q_2	q	p	Π_1	Π_2
Курно - Курно	4	4	8	14	32	32
Стакелберг - Курно	6	3	9	12	36	18
Стакелберг - Стакелберг	4,8	4,8	9,6	10,8	23,04	23,04

IX. МОНОПОЛИСТИЧНА КОНКУРЕНЦИЯ

24. На пазар на монополистична конкуренция функционира фирма с функция на разходите $C(q) = q^3 - aq^2 + 91q$. Функцията на пазарно търсене е $q = 84 - 2p$. Да се определи при каква стойност на параметъра a фирмата ще се намира в положение на равновесие в дългосрочен план. Да се определят равновесните цена и количество и да се сравнят със стойностите на тези величини, които биха се получили при съвършена конкуренция.

Решение. Равновесието в дългосрочен план за монополистичния конкурент се установява при едновременното изпълнение на условията

$$p = p(q) = AC(q) \quad \text{и} \quad MR(q) = MC(q),$$

където $p = p(q)$ е обратната функция на търсене.

За дадената разходна функция ще имаме

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = q^2 - aq + 91 \quad \text{и} \quad MC(q) = C'(q) = 3q^2 - 2aq + 91.$$

За функцията на търсене $q = 84 - 2p$ обратната функция е $p = 42 - 0{,}5q$, тогава функцията на приходите ще бъде $R(q) = p(q)q = (42 - 0{,}5q)q = 42q - 0{,}5q^2$, а функцията на маргиналните приходи - $MR(q) = R'(q) = 42 - q$.

Тогава от горните равновесни условия получаваме системата

$$\begin{vmatrix} 42 - 0{,}5q = q^2 - aq + 91 \\ 42 - q = 3q^2 - 2aq + 91. \end{vmatrix}$$

Записваме горната система във вида

$$\begin{vmatrix} q^2 - aq + 0{,}5q + 49 = 0 \\ 3q^2 - 2aq + q + 49 = 0, \end{vmatrix}$$

Умножаваме първото уравнение с (-2), прибавяме го към първото и получаваме

$$q^2 - 49 = 0 \quad \text{или} \quad q = 7.$$

Тогава (от което и да е от двете уравнения) получаваме $a = 14{,}5$. За цената, която ще се достигне в дългосрочен план, ще имаме $p = p(7) = 42 - 0{,}5 \cdot 7 = 38{,}5$ (от обратната функция на търсене).

В случай на съвършена конкуренция в отрасъла (в дългосрочен план) цената е равна на минималните средни разходи. Тъй като (при $a = 14{,}5$) функцията на средни разходи има вида

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = q^2 - 14{,}5q + 91,$$

за да пресметнем минимума приравняваме първата производна на нула:

$$AC'(q) = 0 \Leftrightarrow 2q - 14{,}5 = 0 \text{ или } q = 7{,}25.$$

Тогава ще имаме

$$p = AC_{min} = AC(7{,}25) = 7{,}25^2 - 14{,}5 \cdot 7{,}25 + 91 = 38{,}44.$$

Равновесното количество за отрасъл на се определя от функцията на търсене:

$$q = q(38{,}44) = 84 - 2 \cdot 38{,}44 = 7{,}12.$$

25. Известно е, маргиналните приходи на фирма – монополистичен конкурент възлизат на $MR(q) = 23 - 2{,}5q$, а маргиналните разходи са $MC(q) = 2q + 5$, като минималните средни разходи са 17. Да се намерят равновесните стойности на цената и количеството в дългосрочен план и да се сравнят със съответните показатели на съвършено конкурентен отрасъл при едни и същи функции на търсене и разходи.

Решение. Определяме равновесното количество за монополистичния конкурент от изравняването на маргиналните приходи и разходи:

$$MR(q) = MC(q) \Leftrightarrow 23 - 2{,}5q = 2q + 5 \quad \text{или} \quad q = 4.$$

Равновесната цена ще се получи като заместим тази стойност за q във обратната функция на търсене. Първо трябва да намерим тази функция. Тъй като маргиналните приходи са $MR(q) = 23 - 2{,}5q = R'(q)$, то след интегриране получаваме

$$R(q) = \int R'(q)dq = \int (23 - 2{,}5q)dq = C + 23q - 1{,}25q^2.$$

От друга страна имаме

$$R(q) = p(q)q,$$

където $p(q)$ е обратната функция на търсене, така че $C = 0$, $R(q) = 23q - 1{,}25q^2 = (23 - 1{,}25q)q$ и $p(q) = 23 - 1{,}25q$. Така за равновесната цена получаваме

$$p = p(4) = 23 - 1{,}25 \cdot 4 = 18.$$

Ако отрасълът е отрасъл на съвършена конкуренция в дългосрочен план, то цената е равна на минималните средни разходи, т.е. $p = AC_{min} = 17$. Равновесното количество получаваме от обратната функция на търсене:

$$17 = 23 - 1{,}25q \Longrightarrow q = 4{,}8.$$

Забележка. За отбелязване е, че успяхме да решим задачата без да възстановим функцията на разходите. Това може да бъде направено по следния начин. Тъй като $MC(q) = 2q + 5 = C'(q)$, то след интегриране получаваме

$$C(q) = \int C'(q)dq = \int (2q + 5)dq = q^2 + 5q + C,$$

където C е интеграционна константа. Тогава за функцията на средните разходи ще имаме

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{q^2 + 5q + C}{q} = q + 5 + \frac{C}{q}.$$

За да намерим минималните средни разходи ще трябва да нулираме първата производна:

$$AC'(q) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{C}{q^2} = 0 \quad \text{или} \quad q = \sqrt{C}.$$

Тогава

$$AC_{min} = AC\left(\sqrt{C}\right) = \sqrt{C} + 5 + \frac{C}{\sqrt{C}} = 5 + 2\sqrt{C}.$$

От друга страна, по условие

$$AC_{min} = 17 \quad \text{или} \quad 5 + 2\sqrt{C} = 17 \quad \text{и} \quad C = 36.$$

Така окончателно получаваме вида на функцията на разходи

$$C(q) = q^2 + 5q + 36.$$

26. Известни са функцията на търсене на монополистичния конкурент A - $q_A = 30 - 5p_A + 2p_B$ (p_B е цената на стоката на конкурентната фирма B) и функцията на разходите $C(q_A) = 24 + 3q_A$. Да се намерят стойностите на величините q_A, p_A и p_B при условие на равновесие на пазара на монополистична конкуренция в дългосрочен план.

Решение. За да се постигне равновесие на пазара на монополистична конкуренция в дългосрочен план на пазара на стоката A е необходимо и достатъчно да са изпълнени условията

$$p_A(q_A) = AC_A(q_A) \quad \text{и} \quad MR_A(q_A) = MC_A(q_A).$$

Тъй като $p_A(q_A)$ е обратната функция на търсене на стоката A (гледаме на p_B като на параметър), то ще имаме

$$p_A(q_A) = 6 + 0{,}4p_B - 0{,}2q_A.$$

За функцията на средните разходи получаваме

$$AC_A(q_A) = \frac{C_A(q_A)}{q_A} = \frac{24 + 3q_A}{q_A} = \frac{24}{q_A} + 3.$$

Намираме функцията на приходите за стоката A:

$$R_A(q_A) = p_A(q_A)q_A = (6 + 0{,}4p_B - 0{,}2q_A)q_A = 6q_A + 0{,}4p_Bq_A - 0{,}2{q_A}^2$$

и функцията на маргиналните приходи

$$MR_A(q_A) = {R_A}'(q_A) = 6 + 0{,}4p_B - 0{,}4q_A.$$

Тогава (тъй като маргиналните разходи са $MC_A(q_A) = {C_A}'(q_A) = 3$) получаваме системата

$$\left|\begin{aligned} 6 + 0{,}4p_B - 0{,}2q_A &= \frac{24}{q_A} + 3 \\ 6 + 0{,}4p_B - 0{,}4q_A &= 3 \end{aligned}\right.$$

Изваждайки второто уравнение на горната система от първото, получаваме

$$0{,}2q_A = \frac{24}{q_A} \Leftrightarrow {q_A}^2 = 120 \quad \text{и} \quad q_A = 2\sqrt{30}.$$

След заместване на получения резултат за q_A в което и да било от уравненията на системата, намираме $p_B = 2\sqrt{30} - 7{,}5$. Накрая намираме равновесната стойност за $p_A = 6 + 0{,}4\big(2\sqrt{30} - 7{,}5\big) - 0{,}2 \cdot 2\sqrt{30} = 3 + 0{,}4\sqrt{30}$. Ако смятаме, че $\sqrt{30} =$

5,48, то за равновесните стойности на разглежданите икономически величини получаваме $q_A = 10{,}96$, $p_B = 3{,}46$ и $p_A = 5{,}19$.

X. МОНОПСОНИЯ

27. Дадена е производствената функция на фирмата $q = 4\sqrt{L}$. Да се определи обема на търсене на труд от фирмата, ако тя е:

а) съвършен конкурент на стоковия пазар при цена на стоката $p = 9$ и съвършен конкурент на трудовия пазар при цена на труда $w = 6$;

б) монополист на стоковия пазар при функция на търсене на стоката ѝ $q = 24 - p$ и съвършен конкурент на трудовия пазар при цена на труда $w = 6$;

в) съвършен конкурент на стоковия пазар при цена на стоката $p = 9$ и единствен купувач на пазара на труд, като функцията на предлагане на труд е $L = w - 2$;

г) монополист на стоковия пазар при функция на търсене на стоката ѝ $q = 24 - p$ и единствен купувач на пазара на труд, като функцията на предлагане на труд е $L = w - 2$.

Решение.

При всички случаи равновесието на фирмата се постига при изравняването на маргиналните приходи с маргиналните разходи, като приходите и разходите са представени като функции на количеството вложен в производството труд. Разликите произтичат от начините по които се представят тези функции, в зависимост от положението на фирмата на стоковите и трудови пазари.

$$R(L) = \begin{cases} pq(L), \text{ако фирмата е конкурент на стоковия пазар} \\ p\big(q(L)\big)q(L), \text{ако фирмата е монополист на стоковия пазар} \end{cases}$$

$$C(L) = \begin{cases} wL, \text{ако фирмата е конкурент на трудовия пазар} \\ w(L)L, \text{ако фирмата е монопсонист на трудовия пазар} \end{cases}$$

В горните изрази $p(q)$ е обратната функция на търсене на стоката, $q(L)$ – производствената функция, а $w(L)$ – обратната функция на предлагане на труд.

а) В този случай ще имаме

$$R(L) = pq(L) = 9 \cdot 4\sqrt{L} = 36\sqrt{L} \quad \text{и} \quad R'(L) = \frac{18}{\sqrt{L}},$$

$$C(L) = wL = 6L \quad \text{и} \quad C'(L) = 6.$$

Тогава равновесието се постига при

$$R'(L) = C'(L) \Leftrightarrow \frac{18}{\sqrt{L}} = 6 \quad \text{и} \quad L = 9.$$

б) Обратната функция на търсене на стоката е $p(q) = 24 - q$, тогава получаваме

$$R(L) = (24 - q)q = 24q - q^2 = 24 \cdot 4\sqrt{L} - \left(4\sqrt{L}\right)^2 = 96\sqrt{L} - 16L \text{ и } R'(L) = \frac{48}{\sqrt{L}} - 16.$$

Тъй като функцията на разходите е същата, както в а), то равновесието се постига при

$$R'(L) = C'(L) \Leftrightarrow \frac{48}{\sqrt{L}} - 16 = 6 \text{ и } L = \left(\frac{24}{11}\right)^2 = \frac{576}{121} \approx 4{,}76.$$

в) В този случай функцията на приходите е същата, както в а), обратната функция на предлагане на труд е $w = L + 2$, следователно функцията на разходите е

$$C(L) = w(L)L = (L + 2)L = L^2 + 2L \quad \text{и} \quad C'(L) = 2L + 2.$$

Тогава равновесието на фирмата ще се постига при

$$R'(L) = C'(L) \Leftrightarrow \frac{18}{\sqrt{L}} = 2L + 2.$$

Ако извършим полагането $\sqrt{L} = z$, то горното уравнение се свежда до уравнението от трета степен

$$z^3 + z - 9 = 0,$$

което се решава по формулата на Кардано, валидна за кубичното уравнение $z^3 + pz + q = 0$. В случая $p = 1$, $q = -9$, пресмятаме

$$Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(-\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{1}{27} + \frac{81}{4} = \frac{2191}{108} \approx 20{,}287 \text{ и } \sqrt{Q} \approx 4{,}504,$$

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} = \sqrt[3]{4{,}5 + 4{,}504} = \sqrt[3]{9{,}004} = 2{,}08$$

$$\beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} = \sqrt[3]{4{,}5 - 4{,}504} = \sqrt[3]{-0{,}004} = -0{,}16.$$

Тогава за корена z на уравнението получаваме

$$z = \alpha + \beta = 2{,}08 - 0{,}16 = 1{,}92.$$

Връщаме се към полагането и намираме количеството вложен в производството труд L:

$$L = z^2 = 1{,}92^2 = 3{,}69.$$

г) В случай, че фирмата е единствен продавач на стоковия пазар, функцията ѝ на приходи е както в б), а тъй като е единствен купувач на пазара на труд, функцията ѝ на разходи е както във в). тогава равновесието ще се постига при

$$R'(L) = C'(L) \Leftrightarrow \frac{48}{\sqrt{L}} - 16 = 2L + 2.$$

Ако извършим полагането $\sqrt{L} = z$, то горното уравнение се свежда до уравнението от трета степен

$$z^3 + 9z - 24 = 0,$$

което се решава по формулата на Кардано, валидна за кубичното уравнение $z^3 + pz + q = 0$. В случая $p = 9$, $q = -24$, пресмятаме

$$Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \left(\frac{9}{3}\right)^3 + \left(-\frac{24}{2}\right)^2 = 27 + 144 = 171 \text{ и } \sqrt{Q} \approx 13{,}077,$$

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} = \sqrt[3]{12 + 13{,}077} = \sqrt[3]{9{,}004} = 2{,}927$$

$$\beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} = \sqrt[3]{12 - 13{,}077} = \sqrt[3]{-1{,}077} = -1{,}025.$$

Тогава за корена z на уравнението получаваме

$$z = \alpha + \beta = 2{,}927 - 1{,}025 = 1{,}9.$$

Връщаме се към полагането и намираме количеството вложен в производството труд L:

$$L = z^2 = 1{,}9^2 = 3{,}61.$$

Ясно е, че в случай на монопол (или монопсония) количеството вложен в производството труд, както и количеството произведена продукция е по-малко отколкото при конкуренция и на двата пазара. При съчетанието на монопол с монопсония се получава възможно най-малкото количество. Състоянията, при които фирмата е с изключително положение в само един от пазарите, са несравними помежду си.