# ЗАДАЧИ

# по АНАЛИТИЧНА МИКРОИКОНОМИКА

## I. МНОГОПРОДУКТОВИ ФИРМИ

1. Конкурентна фирма произвежда два вида стоки по съответните технологии

$$1)\ q_1 = 20L_1 - {L_1}^2 \text{ и } q_2 = 10L_2 - {L_2}^2,\ 2)\ q_1 = 5\sqrt{L_1} \text{ и } q_2 = 20\sqrt{L_2},$$

където $q_1, q_2$ са количествата от стоките, а $L_1, L_2$ – обемите труд, вложен в производството им. Предполага се, че $p_1$ и $p_2$ са цените на стоките, а $w$ – цената на труда (работната заплата).

а) Да се намери зависимостта между величините $p_1, p_2, L_1, L_2$ осигуряваща оптималния производствен план на фирмата.

б) Ако $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 1$ и $w = 2$ да се определят оптималните стойности на $L_1, L_2, q_1, q_2$; приходите от продажби $R_1, R_2$; разходите за производство $C_1, C_2$ и печалбата $\pi$ на фирмата.

**Решение.** 1) а) Приходите на фирмата са

$$R(L_1, L_2) = p_1q_1 + p_2q_2 = p_1\left(20L_1 - {L_1}^2\right) + p_2\left(10L_2 - {L_2}^2\right),$$

а разходите

$$C(L_1, L_2) = C_1 + C_2 = wL_1 + wL_2.$$

Условието за оптимално поведение на фирмата на пазара (максимализиране на печалбата) налага изравняването на маргиналните приходи с маргиналните разходи по всеки вид труд. Така получаваме

$$\frac{\partial R}{\partial L_1} = \frac{\partial C}{\partial L_1} \Leftrightarrow (20 - 2L_1)p_1 = w,$$

$$\frac{\partial R}{\partial L_2} = \frac{\partial C}{\partial L_2} \Leftrightarrow (10 - 2L_2)p_2 = w.$$

Тъй като заплащането на двата вида труд (на базата на които се произвеждат двете различни стоки) е едно и също, то приравнявайки двата израза за $w$ получаваме тъждеството

$$(20 - 2L_1)p_1 = (10 - 2L_2)p_2.$$

б) Съгласно горните равенства ще имаме

$$L_1 = 10 - \frac{w}{2p_1},\ L_1 < 10 \text{ и } L_2 = 5 - \frac{w}{2p_2},\ L_2 < 5.$$

(Горните формули могат да се интерпретират като функции на търсене на труд). Съгласно последните формули получаваме

$$L_1 = 10 - \frac{2}{2 \cdot 0{,}2} = 5 \quad \text{и} \quad L_2 = 5 - \frac{2}{2 \cdot 1} = 4.$$

Тогава, като използваме производствените функции ще имаме

$$q_1 = 20L_1 - {L_1}^2 = 20 \cdot 5 - 5^2 = 75 \quad \text{и} \quad q_2 = 10L_2 - {L_2}^2 = 10 \cdot 4 - 4^2 = 24.$$

Тогава за приходите, разходите и печалбата получаваме

$$R = p_1 q_1 + p_2 q_2 = 0{,}2 \cdot 75 + 1 \cdot 24 = 39,$$

$$C = C_1 + C_2 = wL_1 + wL_2 = 2(5 + 4) = 18,$$

$$\Pi = R - C = 39 - 18 = 21.$$

2) а) Приходите на фирмата са

$$R(L_1, L_2) = p_1 q_1 + p_2 q_2 = 5p_1\sqrt{L_1} + 20p_2\sqrt{L_2},$$

а разходите

$$C(L_1, L_2) = C_1 + C_2 = wL_1 + wL_2.$$

Условието за оптимално поведение на фирмата на пазара налага изравняването на маргиналните приходи с маргиналните разходи по всеки вид труд. Така получаваме

$$\frac{\partial R}{\partial L_1} = \frac{\partial C}{\partial L_1} \Leftrightarrow \frac{5}{2\sqrt{L_1}} p_1 = w,$$

$$\frac{\partial R}{\partial L_2} = \frac{\partial C}{\partial L_2} \Leftrightarrow \frac{20}{2\sqrt{L_2}} p_2 = w.$$

Тъй като заплащането на двата вида труд е едно и също, то приравнявайки двата израза за $w$ получаваме тъждеството

$$\frac{5}{2\sqrt{L_1}} p_1 = \frac{20}{2\sqrt{L_2}} p_2 \quad \text{или} \quad {p_1}^2 L_2 = 16{p_2}^2 L_1.$$

б) Съгласно  горните равенства ще имаме

$$L_1 = \frac{25{p_1}^2}{4w^2} \quad \text{и} \quad L_2 = \frac{100{p_2}^2}{w^2}.$$

Съгласно последните формули получаваме

$$L_1 = \frac{25 \cdot 0{,}2^2}{4 \cdot 2^2} = \frac{1}{16} \quad \text{и} \quad L_2 = \frac{100 \cdot 1^2}{2^2} = 25.$$

Тогава, като използваме производствените функции ще имаме

$$q_1 = 5\sqrt{L_1} = 5\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{5}{4} \quad \text{и} \quad q_2 = 20\sqrt{L_2} = 20\sqrt{25} = 100.$$

Тогава за приходите, разходите и печалбата получаваме

$$R = p_1 q_1 + p_2 q_2 = 0{,}2 \cdot \frac{5}{4} + 1 \cdot 100 = 100{,}25,$$

$$C = C_1 + C_2 = wL_1 + wL_2 = 2\left(\frac{1}{16} + 25\right) = 50{,}125,$$

$$\Pi = R - C = 100{,}25 - 50{,}125 = 50{,}125.$$

2. Фирма с монополно положение на пазара предлага две различни хранителни добавки за спортисти - $A$ и $B$, като $A$ е от по-висок клас, предназначена за по-платежоспособни и/или претенциозни клиенти. Функциите на търсене на $A$ и $B$ са

$$q_A = 20 - \frac{p_A}{3} + \frac{p_B}{6} \quad \text{и} \quad q_B = 60 - 3p_B + p_A,$$

където $p_A$ и $p_B$ са съответните цени в лв. за брой, а $q_A$ и $q_B$ – количества в хил. бр. Функциите на разходите за производството на хранителните добавки са

$$C_A = 20 + 10q_A + {q_A}^2 \quad \text{и} \quad C_B = 5 + 5q_B + 0{,}25{q_B}^2.$$

Да се намерят цените, на които ще бъдат продавани добавките, количествата, приходите, разходите и печалбата на фирмата.

**Решение.** Максимализирането на печалбата на фирмата предполага изравняването на маргиналните разходи с маргиналните приходи (по $q_A$ и $q_B$). За приходите на фирмата ще имаме

$$R = p_A q_A + p_B q_B.$$

Тъй като фирмата е монопол, $p_A$ и $p_B$ ще бъдат обратните функции на търсене на стоките. Решаваме системата

$$q_A = 20 - \frac{p_A}{3} + \frac{p_B}{6} \quad \text{и} \quad q_B = 60 - 3p_B + p_A$$

относно $p_A$ и $p_B$ и получаваме

$$p_A = 84 - 3{,}6q_A - 0{,}2q_B \quad \text{и} \quad p_B = 48 - 1{,}2q_A - 0{,}4q_B.$$

Тогава за функцията на приходите ще имаме

$$R(q_A, q_B) = (84 - 3{,}6q_A - 0{,}2q_B)q_A + (48 - 1{,}2q_A - 0{,}4q_B)q_B$$
$$= 84q_A + 48q_B - 1{,}4q_Aq_B - 3{,}6{q_A}^2 - 0{,}4{q_B}^2.$$

Съответните маргинални приходи ще бъдат

$$\frac{\partial R}{\partial q_A} = 84 - 1{,}4q_B - 7{,}2q_A \quad \text{и} \quad \frac{\partial R}{\partial q_B} = 48 - 1{,}4q_A - 0{,}8q_B.$$

За разходите за производство ще имаме

$$C(q_A, q_B) = C_A + C_B = 25 + 10q_A + {q_A}^2 + 5q_B + 0{,}25{q_B}^2.$$

Тогава маргиналните разходи ще бъдат

$$\frac{\partial C}{\partial q_A} = 10 + 2q_A \quad \text{и} \quad \frac{\partial C}{\partial q_B} = 5 + 0{,}5q_B.$$

Приравняването на маргиналните приходи по $q_A$ и $q_B$ със съответните маргинални разходи ни води до системата от две уравнения

$$84 - 1{,}4q_B - 7{,}2q_A = 10 + 2q_A \ \text{ и } \ 48 - 1{,}4q_A - 0{,}8q_B = 5 + 0{,}5q_B$$

или

$$9{,}2q_A + 1{,}4q_B = 74 \quad \text{и} \quad 1{,}4q_A + 1{,}3q_B = 43.$$

Решавайки горната система получаваме $q_A = 3{,}6$ и $q_B = 29{,}2$. За да получим цените на стоките заместваме намерените стойности за количествата в обратните функции на търсене. Получаваме

$$p_A = 84 - 3{,}6q_A - 0{,}2q_B = 84 - 3{,}6 \cdot 3{,}6 - 0{,}2 \cdot 29{,}2 = 65{,}2$$

$$p_B = 48 - 1{,}2q_A - 0{,}4q_B = 48 - 1{,}2 \cdot 3{,}6 - 0{,}4 \cdot 29{,}2 = 32.$$

При тези стойности на цените и количествата, за приходите ще имаме

$$R = p_Aq_A + p_Bq_B = 65{,}2 \cdot 3{,}6 + 32 \cdot 29{,}2 = 234{,}72 + 934{,}4 = 1169{,}12.$$

За производствените разходи получаваме

$$C_A = 20 + 10q_A + {q_A}^2 = 20 + 10 \cdot 3{,}6 + 3{,}6^2 = 68{,}96$$

$$C_B = 5 + 5q_B + 0{,}25{q_B}^2 = 5 + 5 \cdot 29{,}2 + 0{,}25 \cdot 29{,}2^2 = 365{,}16$$

$$C = C_A + C_B = 68{,}96 + 365{,}16 = 434{,}12.$$

Тогава печалбата на фирмата ще възлиза на

$$\Pi = R - C = 1169{,}12 - 434{,}12 = 735.$$

## II. МОДЕЛИ НА ПРЕДЛАГАНЕ НА ТРУД

3. Предпочитанията на един индивид се описват чрез функцията на полезност

1) $U = M^{0,5}F^{0,5}$, 2) $U = 3\ln M + \ln F$, 3) $U = M + \sqrt{F}$, 4) $U = F + \sqrt{M}$, 5) $U = 2\sqrt{F} + \sqrt{M}$

където $M = wL + m$ е общия дневен доход на индивида ($w$ – часова ставка за заплащане на труда, $L$ – часове положен труд, $m$ – дневен нетрудов доход), а $F$ – часовете свободно време, като $F + L = 16$.

а) Да се изведе функцията $L = L(w, m)$ на предлагане на труд от индивида;

б) Да се анализира предлагането на труд от страна на индивида при липса на нетрудов доход;

в) При какво условие той няма да работи, а ще се издържа само от нетрудовия си доход.

**Решение.** 1) а) Оптимизационната задача на индивида ще бъде

$$U(L) = (wL + m)^{0,5}(16 - L)^{0,5} \to max$$

Условието от първи ред (нулирането на първата производна) за тази задача е

$$\frac{0,5w(16 - L)^{0,5}}{(wL + m)^{0,5}} = \frac{0,5(wL + m)^{0,5}}{(16 - L)^{0,5}}$$

или

$$w(16 - L) = wL + m.$$

Изразявайки от горното равенство $L$ чрез $w$ и $m$ получаваме индивидуалната функция на предлагане

$$L = L(w, m) = 8 - \frac{m}{2w}.$$

б) Очевидно, при $m = 0$ (липса на нетрудов доход) $L = 8 = const.$, т.е. индивидът ще предлага фиксирано количество труд.

в) Тъй като $L = 0$ при $\frac{m}{2w} = 8$ или $m = 16w$, то при достатъчно голям доход $m \geq 16w$ индивидът няма да предлага своя труд.

2) а) За индивидуалната функция на полезност ще имаме

$$U(L) = 3\ln M + \ln F = 3\ln(wL + m) + \ln(16 - L) \to max.$$

Условието от първи ред за тази оптимизационна задача е

$$U' = \frac{3w}{wL+m} - \frac{1}{16-L} = 0 \iff 3w(16-L) = wL + m$$

Така получаваме функцията на предлагане на труд

$$L^S = 12 - \frac{m}{4w}$$

б) Ясно е , че ако индивидът не притежава допълнителен доход , т.е. $m = 0$, той ще предлага фиксирано време труд:

$$L^S = L_0 = 12$$

в) От друга страна, ако доходът му е по-голям от у $m_0 = 48w$, то той ще излезе от трудовия пазар ($L^S = 0$).

3) а) Оптимизационната задача на индивида при тази функция на полезност ще бъде

$$U(L) = M + \sqrt{F} = (wL + m) + \sqrt{16-L} \to max.$$

Използваме условието от първи ред

$$U' = w - \frac{1}{2\sqrt{16-L}} = 0 \Leftrightarrow 4w^2(16-L) = 1$$

за да получим функцията на предлагане на труд

$$L^S = 16 - \frac{1}{4w^2}$$

Вижда се, че в този случай количеството предложен труд от индивида не зависи от нетрудовия му доход.

в) при

$$w \le w_0 = \frac{1}{8}$$

индивидът ще излезе от пазара на труд ($L^S = 0$).

5) а) Задачата на индивида при тази функция на полезност ще бъде

$$U(L) = 2\sqrt{F} + \sqrt{M} = 2\sqrt{16-L} + \sqrt{wL+m} \to max.$$

От условието от първи ред

$$U'(L) = -\frac{1}{\sqrt{16-L}} + \frac{w}{\sqrt{wL+m}} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{16-L} = \frac{w^2}{wL+m}$$

получаваме функцията на предлагане на труд

$$L^S = \frac{16w}{(w+4)} - \frac{4m}{w(w+4)}$$

б) Ясно е , че ако индивидът не притежава допълнителен доход , т.е. $m = 0$ функцията на предлагане на труд ще бъде

$$L^S = \frac{16w}{(w+4)}$$

в) От друга страна при $m \geq 4w^2$ индивидът няма да предлага своя труд ($L^S = 0$).

4. Предпочитанията на един индивид се описват с функцията на полезност

$$U(x_1, x_2, F) = \ln x_1 + 2\ln x_2 + 9\ln F,$$

където $x_1$ и $x_2$ са количествата дневна консумация на две стоки с цени $p_1$ и $p_2$, $L$ – броя работни часове дневно, $F = 18 - L$ са часовете свободно време. Доходът му се получава от работа, за която той получава по $w$ лева на час и нетрудов доход - $m$ лева дневно.

а) Изведете функциите на търсене на стоките и функцията на предлагане на труд;

б) пресметнете количествата на дневно потребление на стоките $x_1$ и $x_2$ и броя работни часове $L$ при цени на стоките $p_1 = 1$ и $p_2 = 4$, тарифна почасова ставка $w = 9$ и нетрудов доход $m = 6$;

в) анализирайте ситуацията, когато нетрудовия му доход спре;

г) при какво условие той ще излезе от пазара на труда.

**Решение.** а) Индивидът ще трябва да решава следната оптимизационна задача

$$U(x_1, x_2, L) = \ln x_1 + 2\ln x_2 + 9\ln(18 - L) \rightarrow max,$$

като спазва бюджетното ограничение

$$p_1x_1 + p_2x_2 = wL + m.$$

(отляво в бюджетното равенство са разходите му за придобиване на стоките, а отдясно – приходите му – трудови и нетрудови). За да решим задачата за условен екстремум образуваме съответната ѝ функция на Лагранж

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, L; \lambda) = \ln x_1 + 2\ln x_2 + 9\ln(18 - L) + \lambda(wL + m - p_1x_1 - p_2x_2).$$

(в горния израз $\lambda$ е множителят на Лагранж). Условията от първи ред на тази задача са

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1} - \lambda p_1 = 0 \Leftrightarrow p_1 x_1 = \frac{1}{\lambda}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_2} = \frac{2}{x_2} - \lambda p_2 = 0 \Leftrightarrow p_2 x_2 = \frac{2}{\lambda}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial L} = -\frac{9}{(18-L)} + \lambda w = 0 \Leftrightarrow wL = 18w - \frac{9}{\lambda}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda} = wL + m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0.$$

Като заместим $p_1 x_1$, $p_2 x_2$ и $wL$ от първите три равенства в четвъртото, получаваме

$$18w - \frac{9}{\lambda} + m - \frac{1}{\lambda} - \frac{2}{\lambda} = 0,$$

откъдето намираме

$$\lambda = \frac{12}{18w + m}.$$

Като заместим намерения израз за множителя на Лагранж $\lambda$ в изразите за $p_1 x_1$, $p_2 x_2$ и $wL$ получаваме функциите на търсене на стоките

$$x_1 = \frac{18w + m}{12 p_1} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{18w + m}{6 p_2}$$

и функцията на предлагане на труд от страна на индивида

$$L = 4{,}5 - \frac{3m}{4w}.$$

б) Замествайки $p_1 = 1$, $p_2 = 4$, $w = 9$ и $m = 6$ в гореполучените изрази за $x_1$, $x_2$ и $L$ получаваме

$$x_1 = \frac{18 \cdot 9 + 6}{12 \cdot 1} = \frac{168}{12} = 14, x_2 = \frac{18 \cdot 9 + 6}{6 \cdot 4} = \frac{168}{24} = 7, L = 4{,}5 - \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 9}$$
$$= 4{,}5 - 0{,}5 = 4.$$

в) При липса на нетрудов доход от страна на индивида $(m = 0)$ функциите на търсене на стоките добиват вида

$$x_1 = \frac{1{,}5w}{p_1} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{3w}{p_2}$$

а предлагането на труд е фиксирано: $L = 4{,}5$.

г) Условието за излизане на индивида от пазара на труд $L = 0$ е изпълнено когато $m = 6w$. Тогава функциите на търсене на стоките ще бъдат

$$x_1 = \frac{m}{3p_1} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{2m}{3p_2}$$

5. В даден отрасъл има предлагане на труд от 100 работника с една и съща функция на полезност

$$U = (M + 9)^{0,5}(16,5 - L)^{0,25},$$

където $w$ е часова ставка за заплащане на труда, $L$ – часове труд, а $M = wL$ е общия доход на един работник от труд. Двадесет фирми търсят труд, като технологиите по които работят се задават с една и съща производствена функция $q = 4L^{0,5}$. Пазарната цена на стоката, която произвеждат фирмите е 6 лв.

а) Да се намери функцията на съвкупно предлагане на труд за отрасъла;

б) да се намери функцията на съвкупно търсене на труд за отрасъла;

в) каква цена на труда ще се наложи в отрасъла при условия на конкуренция и колко часа ще работи всеки от работниците;

г) какво количество продукция и каква печалба ще реализира всяка от фирмите в отрасъла.

**Решение.** а) Всеки от индивидите ще трябва да решава оптимизационната задача

$$U(L) = (wL + 9)^{0,5}(16,5 - L)^{0,25} \to max,$$

чието условие от първи ред е

$$U'(L) = \frac{0,5w(16,5 - L)^{0,25}}{(wL + 9)^{0,5}} - \frac{0,25(wL + 9)^{0,5}}{(16,5 - L)^{0,75}} = 0.$$

От горното уравнение получаваме

$$2w(16,5 - L) = wL + 9,$$

откъдето намираме индивидуалната функция на предлагане на труд

$$l^S = 11 - \frac{3}{w}.$$

Тъй като има 100 (потенциални) работници с една и съща функция на полезност (и следователно с една и съща индивидуална функция на предлагане на труд), то за функцията на пазарно предлагане на труд получаваме

$$L^S = 100l^S = 100\left(11 - \frac{3}{w}\right) = 1100 - \frac{300}{w}.$$

б) Всяка от фирмите на пазара ще трябва да решава оптимизационната задача

$$\Pi(L) = pq - wL = 6 \cdot 4L^{0,5} - wL \to max$$

с условие от първи ред

$$\Pi'(L) = \frac{12}{L^{0,5}} - w = 0 \Leftrightarrow \frac{144}{L} = w^2,$$

откъдето намираме индивидуалната функция на търсене на труд

$$l^D = \frac{144}{w^2}.$$

Тъй като на пазара има 20 фирми с еднакви производствени функции (и поради това – с еднакви индивидуални функции на търсене на труд), то за функцията на пазарно търсене на труд получаваме

$$L^D = 20l^D = 20\frac{144}{w^2} = \frac{2880}{w^2}.$$

в) Равновесието на трудовия пазар предполага изравняването на пазарните функции на търсене и предлагане на труд:

$$L^D = L^S \Leftrightarrow \frac{2880}{w^2} = 1100 - \frac{300}{w}.$$

Това води до „излъчване" на равновесна ставка на работната заплата, която ще бъде положителния корен на квадратното уравнение

$$1100w^2 - 300w - 2880 = 0 \quad \text{или} \quad 55w^2 - 15w - 144 = 0.$$

Ще имаме

$$w = \frac{15 + \sqrt{15^2 + 4 \cdot 55 \cdot 144}}{110} = \frac{15 + \sqrt{31905}}{110} = \frac{15 + 178,6}{110} = 1,76.$$

Така получената равновесна ставка на работната заплата ще определи и равновесното количество труд:

$$L = L^D(1,76) = L^S(1,76) = 1100 - \frac{300}{1,76} = 1100 - 170,45 = 929,55.$$

Сега това равновесно количество труд ще трябва да се разпредели между 100-те работници, предлагащи труд. Получава се

$$l = \frac{L}{100} \approx 9,3.$$

г) Аналогично, същото количество труд се разпределя между 20-те фирми, ползващи този труд. На всяка от тях се пада по 46,48 единици труд. Въз основа на това отделната фирма ще произведе $q = 4\sqrt{46,48} = 27,27$ единици продукция, ще има приходи $R = pq = 6 \cdot 27,27 = 163,62$ парични единици, разходи (за труд)

$C = wL = 1{,}76 \cdot 46{,}48 = 81{,}80$ парични единици и печалба в размер на $\Pi = R - C = 163{,}62 - 81{,}80 = 81{,}82$ парични единици.

## III. ОБЩО МИКРОИКОНОМИЧЕСКО РАВНОВЕСИЕ

6. В икономика, състояща се от два отрасъла търсенето и предлагането са представени от следните функции:

$$1)\ q_A^D = 32 - 3p_A + 2p_B;\ q_A^S = -10 + 2p_A - p_B$$

$$q_B^D = 43 - 2p_B + p_A;\ q_B^S = -5 + p_B - 0{,}5p_A$$

$$2)\ q_A^D = 8 - 2p_A + 3p_B;\ q_A^S = 10 + p_A - 2p_B$$

$$q_B^D = 14 - p_B + 2p_A;\ q_B^S = 17 + 0{,}5p_B - p_A$$

Възможно ли е общо икономическо равновесие и ако да, какви са стойностите на равновесните цени и количества? Устойчиво ли е това равновесие?

Решение. 1) Равновесието на пазара на стоката $A$ ($q_A^D = q_A^S$) се подсигурява от изпълнението на равенството

$$5p_A - 3p_B = 42,$$

а равновесието на пазара на стоката $B$ – от

$$3p_B - 1{,}5p_A = 48.$$

Решаваме системата от две уравнения с неизвестни цените $p_A$ и $p_B$ и получаваме

$$p_A = \frac{180}{7} \approx 25{,}71 \quad \text{и} \quad p_B = \frac{202}{7} \approx 28{,}86.$$

За равновесните количества намираме

$$q_A = q_A^D = 32 - 3\frac{180}{7} + 2\frac{202}{7} = \frac{224 - 540 + 404}{7} = \frac{88}{7} \approx 12{,}57,$$

$$q_B = q_B^D = 43 - 2\frac{202}{7} + \frac{180}{7} = \frac{301 - 404 + 180}{7} = \frac{77}{7} = 11.$$

Така, че общото икономическо равновесие съществува, остава да проверим дали то е устойчиво. За целта преобразуваме уравненията за $p_A$ и $p_B$ така

$$p_A = 8{,}4 + 0{,}6p_B \quad \text{и} \quad p_B = 16 + 0{,}5p_A.$$

Сега даваме стойност на $p_B$ близка, но различна от равновесната, например $p_{B_1} = 28$. На база на първата формула пресмятаме $p_{A_1} = 8{,}4 + 0{,}6p_{B_1} = 25{,}2$. От втората формула получаваме $p_{B_2} = 16 + 0{,}5p_{A_1} = 28{,}6$, а от първата - $p_{A_2} = 8{,}4 +$

$0{,}6p_{B_2} = 25{,}56.$ Виждаме, че с всяка итерационна стъпка цените се приближават до равновесните, защото $p_B - p_{B_1} = 28{,}86 - 28 = 0{,}86 > p_B - p_{B_2} = 28{,}86 - 28{,}6 = 0{,}26$ и $p_A - p_{A_1} = 25{,}71 - 25{,}2 = 0{,}51 > p_A - p_{A_2} = 25{,}71 - 25{,}56 = 0{,}15$. Това ни дава основание да заключим, че общото микроикономическо равновесие е устойчиво.

2) Равновесието на пазара на стоката $A$ ($q_A^D = q_A^S$) е изпълнено точно тогава, когато е налице равенството

$$3p_A - 5p_B = -2,$$

а равновесието на пазара на стока $B$ ($q_B^D = q_B^S$) – когато е изпълнено равенството

$$1{,}5p_B - 3p_A = -3.$$

Решаваме системата от две уравнения с неизвестни цените $p_A$ и $p_B$ и получаваме

$$p_A = \frac{12}{7} \approx 1{,}71 \quad \text{и} \quad p_B = \frac{10}{7} \approx 1{,}43.$$

За равновесните количества намираме

$$q_A = q_A^D = 8 - 2\frac{12}{7} + 3\frac{10}{7} = \frac{56 - 24 + 30}{7} = \frac{62}{7} \approx 8{,}86,$$

$$q_B = q_B^D = 14 - \frac{10}{7} + 2\frac{12}{7} = \frac{98 - 10 + 24}{7} = \frac{112}{7} = 16.$$

Така, че общото икономическо равновесие съществува, остава да проверим дали то е устойчиво. За целта преобразуваме уравненията за $p_A$ и $p_B$ така

$$p_A = -\frac{2}{3} + \frac{5}{3}p_B \quad \text{и} \quad p_B = -2 + 2p_A.$$

Сега даваме стойност на $p_B$ близка, но различна от равновесната, например $p_{B_1} = 9/7$. На база на първата формула пресмятаме $p_{A_1} = -2/3 + 5/3\,p_{B_1} = 31/21$. От втората формула получаваме $p_{B_2} = -2 + 2p_{A_1} = 20/21$, а от първата - $p_{A_2} = -2/3 + 5/3\,p_{B_2} = 58/63.$ Виждаме, че с всяка итерационна стъпка цените се отдалечават от равновесните, защото $p_B - p_{B_1} = 10/7 - 9/7 = 1/7 < p_B - p_{B_2} = 10/7 - 20/21 = 10/21$ и $p_A - p_{A_1} = 12/7 - 31/21 = 5/21 < p_A - p_{A_2} = 12/7 - 58/63 = 50/63$. Това ни дава основание да заключим, че общото микроикономическо равновесие е неустойчиво.

7. Разглеждаме двама потребителя на две стоки, които в условия на свободна размяна на тези две стоки имат съответните функции на потребителска полезност

$$U^1 = (x_1^1)^{\frac{1}{2}}(x_2^1)^{\frac{1}{2}} \quad \text{и} \quad U^2 = (x_1^2)^{\frac{1}{3}}(x_2^2)^{\frac{2}{3}},$$

като с $x_i^k$ е означено потреблението на $k$-тия потребител на $i$-тата стока. Предполага се, че потребителите разполагат с някакви първоначални количества от стоките (фондове) преди осъществяването на размяната, а именно: за първия потребител – 10 единици от първата и 20 единици от втората; за втория потребител – 30 единици от първата и 15 единици от втората. За какво съотношение на цените на двете стоки биха се разбрали потребителите и какви количества от стоките ще притежават те след размяната. Какво е съотношението на техните имущества?

**Решение.** 1. Оптимизационната задача на първия потребител е

$$U^1 = (x_1^1)^{\frac{1}{2}}(x_2^1)^{\frac{1}{2}} \to max$$

с бюджетно ограничение

$$p_1x_1^1 + p_2x_2^1 = p_1\omega_1^1 + p_2\omega_2^1 = 10p_1 + 20p_2.$$

(При цени на стоките $p_1$ и $p_2$ изразът от лявата страна на равенството представлява разходите на първия потребител, а изразът от дясната страна – приходите.)

Тъй като функцията на полезност е от Кооб-Дъгласов вид, то ще е изпълнено: съотношението на разходите за стоките е равно на съотношението на степенните показатели във функцията на полезност. Т.е. ще имаме

$$p_1x_1^1 : p_2x_2^1 = \frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 1:1.$$

Тогава

$$p_1x_1^1 = \frac{1}{2}(10p_1 + 20p_2) = 5p_1 + 10p_2 = p_2x_2^1.$$

Така получаваме функциите на търсене за първия потребител

$$x_1^1 = 5 + 10\frac{p_2}{p_1} \quad \text{и} \quad x_2^1 = 5\frac{p_1}{p_2} + 10.$$

Аналогично, оптимизационната задача за втория потребител е

$$U^2 = (x_1^2)^{\frac{1}{3}}(x_2^2)^{\frac{2}{3}} \to max,$$

като

$$p_1x_1^2 + p_2x_2^2 = p_1\omega_1^2 + p_2\omega_2^2 = 30p_1 + 15p_2.$$

Ще е изпълнено съотношението

$$p_1x_1^2 : p_2x_2^2 = \frac{1}{3} : \frac{2}{3} = 1:2,$$

следователно

$$p_1 x_1^2 = \frac{1}{3}(30p_1 + 15p_2) = 10p_1 + 5p_2 \quad \text{и} \quad p_2 x_2^2 = \frac{2}{3}(30p_1 + 15p_2)$$
$$= 20p_1 + 10p_2.$$

Така получаваме функциите на търсене за втория потребител

$$x_1^2 = 10 + 5\frac{p_2}{p_1} \quad \text{и} \quad x_2^1 = 20\frac{p_1}{p_2} + 10.$$

(Ако положим съотношението на цените $p_1/p_2 = p$, то кривите

$$(x_1^1, x_2^1) = \left(5 + \frac{10}{p}, 5p + 10\right) \quad \text{и} \quad (x_1^2, x_2^2) = \left(10 + \frac{5}{p}, 20p + 10\right)$$

са офертните криви на двамата потребители.)

2. Сега ще трябва да изравним търсенето и предлагането на двете стоки. За първата ще имаме

$$x_1^1 + x_1^2 = \omega_1^1 + \omega_1^2 = 10 + 30 = 40,$$

а за втората -

$$x_2^1 + x_2^2 = \omega_2^1 + \omega_2^2 = 20 + 15 = 35.$$

Заместваме $x_1^1, x_1^2, x_2^1$ и $x_2^2$ с получените изрази и получаваме

$$x_1^1 + x_1^2 = 5 + \frac{10}{p} + 10 + \frac{5}{p} = 15 + \frac{15}{p} = 40,$$

$$x_2^1 + x_2^2 = 5p + 10 + 20p + 10 = 25p + 20 = 35.$$

И от двете уравнения получаваме $p = 0{,}6 -$ това е взаимноизгодното съотношение на цените на стоките.

Тогава за количествата от стоките след размяната, ще имаме

$$(x_1^1, x_2^1) = \left(\frac{65}{3}, 13\right) \quad \text{и} \quad (x_1^2, x_2^2) = \left(\frac{55}{3}, 22\right).$$

Тъй като първият потребител преди размяната е разполагал с $10 = 30/3$ количествени единици от първата стока, той е получил от втория останалите $35/3$ единици, срещу което е дал $7$ единици от втората.

3. След като сме пресметнали равновесната относителна цена $p$, можем да намерим съотношението на богатствата на двамата потребители. Тъй като размяната е взаимноизгодна (те не променят богатствата си вследствие от размяната), то можем да пресметнем съотношението преди размяната. Ще имаме

$$\frac{p_1\omega_1^1 + p_2\omega_2^1}{p_1\omega_1^2 + p_2\omega_2^2} = \frac{10p_1 + 20p_2}{30p_1 + 15p_2} = \frac{p_2(10p + 20)}{p_2(30p + 15)} = \frac{10 \cdot 0{,}6 + 20}{30 \cdot 0{,}6 + 15} = \frac{26}{33}$$

8. Разглеждаме двама потребителя на две стоки, които в условия на свободна размяна на тези две стоки имат съответните функции на потребителска полезност

$$1)\ U^1 = 4x_1^1 + 3x_2^1 \quad \text{и} \quad U^2 = 3\ln x_1^2 + 4\ln x_2^2\ ,$$
$$2)\ U^1 = min\{4x_1^1, 3x_2^1\} \quad \text{и} \quad U^2 = 3x_1^2 + 4\ln x_2^2\,,$$
$$3)\ U^1 = x_1^1 + 3\ln x_2^1 \quad \text{и} \quad U^2 = 2\ln x_1^2 + x_2^2$$

като с $x_i^k$ е означено потреблението на $k$-тия потребител на $i$-тата стока. Предполага се, че потребителите разполагат с някакви първоначални количества от стоките (фондове) преди осъществяването на размяната, а именно: за първия потребител – 12 единици от първата и 9 единици от втората; за втория потребител – 8 единици от първата и 11 единици от втората. За какво съотношение на цените на двете стоки биха се разбрали потребителите и какви количества от стоките ще притежават те след размяната. Какво е съотношението на техните имущества?

**Решение.** 1) Съставяме оптимизационната задача за първия потребител. Тя е

$$U^1 = 4x_1^1 + 3x_2^1 \to max, \text{като}\ p_1x_1^1 + p_2x_2^1 = 12p_1 + 9p_2.$$

Образуваме функцията на Лагранж за тази задача за условен екстремум.

$$\mathcal{L}(x_1^1, x_2^1; \lambda) = 4x_1^1 + 3x_2^1 + \lambda(12p_1 + 9p_2 - p_1x_1^1 - p_2x_2^1).$$

Условията от първи ред за тази задача са

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1^1} = 4 - \lambda p_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{4}{p_1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2^1} = 3 - \lambda p_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{p_2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 12p_1 + 9p_2 - p_1x_1^1 - p_2x_2^1 = 0.$$

От първите две уравнения получаваме

$$\lambda = \frac{4}{p_1} = \frac{3}{p_2} \Leftrightarrow \frac{p_1}{p_2} = p = \frac{4}{3},$$

т.е. линейната функция на полезност на първия потребител предопределя оптималното съотношение на цените. Ако разделим бюджетното ограничение с $p_1$ и използваме, че $p_1/p_2 = 4/3$, получаваме

$$4x_1^1 + 3x_2^1 = 75.$$

Оптимизационната задача за втория потребител е

$$U^2 = 3\ln x_1^2 + 4\ln x_2^2 \to max, \text{като } p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 = 8p_1 + 11p_2.$$

След като разделим бюджетното ограничение с $p_1$ и използваме, че $p_1/p_2 = 4/3$, получаваме новото бюджетно ограничение

$$4x_1^2 + 3x_2^2 = 65.$$

Съставяме функцията на Лагранж за тази задача за условен екстремум.

$$\mathcal{L}(x_1^2, x_2^2; \lambda) = 3\ln x_1^2 + 4\ln x_2^2 + \lambda(65 - 4x_1^2 - 3x_2^2).$$

Условията от първи ред за тази задача са

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1^2} = \frac{3}{x_1^2} - \lambda p_1 = 0 \Leftrightarrow p_1 x_1^2 = \frac{3}{\lambda}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2^2} = \frac{4}{x_2^2} - \lambda p_2 = 0 \Leftrightarrow p_2 x_2^2 = \frac{4}{\lambda}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 65 - 4x_1^2 - 3x_2^2 = 0.$$

Като разделим първото уравнение с второто получаваме

$$\frac{p_1 x_1^2}{p_2 x_2^2} = \frac{3}{4}\text{, но } \frac{p_1}{p_2} = \frac{4}{3} \Longrightarrow \frac{4x_1^2}{3x_2^2} = \frac{3}{4} \quad \text{или} \quad x_1^2 = \frac{9}{16}\, x_2^2.$$

Като заместим полученото съотношение в бюджетното ограничение, ще имаме

$$4\frac{9}{16}\, x_2^2 + 3x_2^2 = 65 \quad \text{или} \quad x_2^2 = \frac{260}{21} \Longrightarrow x_1^2 = \frac{195}{28}.$$

Сега ще трябва да изравним търсенето и предлагането на двете стоки. За първата ще имаме

$$x_1^1 + x_1^2 = \omega_1^1 + \omega_1^2 = 12 + 8 = 20,$$

а за втората -

$$x_2^1 + x_2^2 = \omega_2^1 + \omega_2^2 = 9 + 11 = 20.$$

Като в последните равенства заместим $x_2^2$ и $x_2^2$ с получените стойности, за потреблението на първия потребител получаваме

$$x_1^1 = 20 - \frac{195}{28} = \frac{365}{28} \quad \text{и} \quad x_2^1 = 20 - \frac{260}{21} = \frac{160}{21}.$$

Лесно се проверява, че тези стойности удовлетворяват полученото съотношение $4x_1^1 + 3x_2^1 = 75$, валидно за потреблението на първия потребител след размяната.

Сега можем да оценим съотношението на богатствата на двамата потребители. Преди размяната то е

$$\frac{p_1\omega_1^1 + p_2\omega_2^1}{p_1\omega_1^2 + p_2\omega_2^2} = \frac{12p_1 + 9p_2}{8p_1 + 11p_2} = \frac{p_2(12p + 9)}{p_2(8p + 11)} = \frac{12 \cdot \frac{4}{3} + 9}{8 \cdot \frac{4}{3} + 11} = \frac{25}{\frac{65}{3}} = \frac{15}{13}.$$

2) Оптимизационната задача за първия потребител е

$$2)\ U^1 = min\{4x_1^1, 3x_2^1\} \to max, \text{като } p_1x_1^1 + p_2x_2^1 = 12p_1 + 9p_2.$$

Функцията на полезност на Леонтиев се оптимизира при изравняване на двата аргумента, т.е. ако е изпълнено условието

$$4x_1^1 = 3x_2^1 \Longrightarrow x_2^1 = \frac{4}{3}x_1^1.$$

Като заместим последното равенство в бюджетното ограничение, получаваме

$$x_1^1 = \frac{36p + 27}{3p + 4} \quad \text{и} \quad x_2^1 = \frac{48p + 36}{3p + 4}.$$

Оптимизационната задача на втория потребител е

$$U^2 = 3x_1^2 + 4\ln x_2^2 \to max, \text{като } p_1x_1^2 + p_2x_2^2 = 8p_1 + 11p_2.$$

Съставяме функцията на Лагранж за тази задача за условен екстремум.

$$\mathcal{L}(x_1^2, x_2^2; \lambda) = 3x_1^2 + 4\ln x_2^2 + \lambda(8p_1 + 11p_2 - p_1x_1^2 - p_2x_2^2).$$

Условията от първи ред за тази задача са

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1^2} = 3 - \lambda p_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{p_1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2^2} = \frac{4}{x_2^2} - \lambda p_2 = 0 \Leftrightarrow p_2x_2^2 = \frac{4}{\lambda}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 8p_1 + 11p_2 - p_1x_1^2 - p_2x_2^2 = 0\ .$$

Като заместим $\lambda$ от първото равенство във второто, получаваме

$$p_2x_2^2 = \frac{4}{3}p_1 \Longrightarrow x_2^2 = \frac{4}{3}\frac{p_1}{p_2} = \frac{4}{3}p$$

Заместваме полученото за $x_2^2$ в третото равенство и получаваме уравнение само за $x_1^2$:

$$p_1x_1^2 + p_2\frac{4}{3}\frac{p_1}{p_2} = 8p_1 + 11p_2 \Longrightarrow x_1^2 = \frac{20}{3} + \frac{11}{p}.$$

Сега изравняваме търсенето и предлагането за двете стоки. За първата ще имаме

$$x_1^1 + x_1^2 = \frac{36p + 27}{3p + 4} + \frac{20}{3} + \frac{11}{p} = \omega_1^1 + \omega_1^2 = 12 + 8 = 20,$$

а за втората –

$$x_2^1 + x_2^2 = \frac{48p + 36}{3p + 4} + \frac{4}{3}p = \omega_2^1 + \omega_2^2 = 9 + 11 = 20.$$

Второто равенство ни води до уравнението

$$3(48p + 36) + 4p(3p + 4) - 20 \cdot 3(3p + 4) = 0$$

или

$$3p^2 - 5p - 33 = 0 \Longrightarrow p = \frac{5 + \sqrt{25 + 396}}{6} = \frac{5 + 20{,}52}{6} = 4{,}25.$$

Ясно е (от теоремата на Валрас), че същото бихме получили и от решаването на първото уравнение. Тъй като количествата на стоките след размяната зависят само от $p$, то замествайки $p = 4{,}25$ в изразите за $x_1^1$, $x_2^1$, $x_1^2$ и $x_2^2$ получаваме

$$x_1^1 = \frac{36p + 27}{3p + 4} = \frac{36 \cdot 4{,}25 + 27}{3 \cdot 4{,}25 + 4} = \frac{180}{16{,}75} = 10{,}75;\ x_2^1 = \frac{4}{3}x_1^1 = \frac{4}{3}10{,}75 = 14{,}33$$

$$x_1^2 = \frac{20}{3} + \frac{11}{p} = 6{,}67 + \frac{11}{4{,}25} = 6{,}67 + 2{,}59 = 9{,}26;\ x_2^2 = \frac{4}{3}p = \frac{4}{3}4{,}25 = 5{,}67.$$

Сега можем да оценим (на база на полученото съотношение на цените) съотношението на богатствата на двамата потребители. Преди размяната то е

$$\frac{p_1\omega_1^1 + p_2\omega_2^1}{p_1\omega_1^2 + p_2\omega_2^2} = \frac{12p_1 + 9p_2}{8p_1 + 11p_2} = \frac{p_2(12p + 9)}{p_2(8p + 11)} = \frac{12 \cdot 4{,}25 + 9}{8 \cdot 4{,}25 + 11} = \frac{60}{44} = \frac{15}{11}.$$

След размяната това съотношение се запазва.

3) Оптимизационната задача за първия потребител е

$$U^1 = x_1^1 + 3\ln x_2^1 \to max, \text{като } p_1x_1^1 + p_2x_2^1 = 12p_1 + 9p_2.$$

Функцията на Лагранж за тази задача е

$$\mathcal{L}(x_1^1, x_2^1; \lambda) = x_1^1 + 3\ln x_2^1 + \lambda(8p_1 + 11p_2 - p_1x_1^2 - p_2x_2^2).$$

Условията от първи ред за тази задача са

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1^1} = 1 - \lambda p_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{p_1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2^1} = \frac{3}{x_2^1} - \lambda p_2 = 0 \Leftrightarrow x_2^1 = \frac{3}{\lambda p_2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 12p_1 + 9p_2 - p_1 x_1^1 - p_2 x_2^1 = 0.$$

Замествайки $\lambda$ от първото равенство във второто, получаваме

$$x_2^1 = \frac{3p_1}{p_2} = 3p$$

Сега заместваме намереното $x_2^1$ в третото равенство и намираме $x_1^1$:

$$p_1 x_1^1 + p_2 \frac{3p_1}{p_2} = 12p_1 + 9p_2 \Longrightarrow x_1^1 = 9 + \frac{9}{p}.$$

Аналогично, оптимизационната задача за втория потребител е

$$U^2 = 2\ln x_1^2 + x_2^2 \to max, \text{като } p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 = 8p_1 + 11p_2.$$

Съставяме функцията на Лагранж за задачата

$$\mathcal{L}(x_1^2, x_2^2; \lambda) = 2\ln x_1^2 + x_2^2 + \lambda(8p_1 + 11p_2 - p_1 x_1^2 - p_2 x_2^2)$$

С условия от първи ред

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1^2} = \frac{2}{x_1^2} - \lambda p_1 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = \frac{2}{\lambda p_1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2^2} = 1 - \lambda p_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{p_2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 8p_1 + 11p_2 - p_1 x_1^2 - p_2 x_2^2 = 0 .$$

Сега заместваме намереното $\lambda$ от второто уравнение в първото и получаваме

$$x_1^2 = \frac{2p_2}{p_1} = \frac{2}{p}.$$

Заместваме $x_1^2$ в третото уравнение и получаваме $x_2^2$:

$$p_1 \frac{2p_2}{p_1} + p_2 x_2^2 = 8p_1 + 11p_2 \Longrightarrow x_2^2 = 8p + 9.$$

Сега изравняваме търсенето и предлагането за двете стоки. За първата ще имаме

$$x_1^1 + x_1^2 = 9 + \frac{9}{p} + \frac{2}{p} = \omega_1^1 + \omega_1^2 = 12 + 8 = 20,$$

а за втората –

$$x_2^1 + x_2^2 = 3p + 8p + 9 = \omega_2^1 + \omega_2^2 = 9 + 11 = 20.$$

Второто равенство ни води до уравнението

$$11p + 9 = 20 \Longrightarrow p = 1.$$

Тъй като количествата на стоките след размяната зависят само от $p$, то замествайки $p = 1$ в изразите за $x_1^1$, $x_2^1$, $x_1^2$ и $x_2^2$ получаваме

$$x_1^1 = 9 + \frac{9}{p} = 9 + \frac{9}{1} = 18;\ x_2^1 = 3p = 3 \cdot 1 = 3$$

$$x_1^2 = \frac{2}{p} = \frac{2}{1} = 2;\ x_2^2 = 8p + 9 = 8 \cdot 1 + 9 = 17.$$

Ясно е, че при размяната на стоки, първият потребител дава на втория 6 количествени единици от втората стока, като затова получава от него 6 количествени единици от първата.

Сега можем да оценим (на база на полученото съотношение на цените) съотношението на богатствата на двамата потребители. Преди размяната то е

$$\frac{p_1\omega_1^1 + p_2\omega_2^1}{p_1\omega_1^2 + p_2\omega_2^2} = \frac{12p_1 + 9p_2}{8p_1 + 11p_2} = \frac{p_2(12p + 9)}{p_2(8p + 11)} = \frac{12 \cdot 1 + 9}{8 \cdot 1 + 11} = \frac{21}{19}.$$

След размяната това съотношение се запазва.

9. Дадени са 4 потребители на три стоки, като всеки от потребителите има функция на полезност

$$U\left(x_1^i, x_2^i, x_3^i\right) = \sqrt{x_1^i x_2^i x_3^i}\,, \qquad i = 1,2,3,4$$

Началните запаси от стоките са $\omega^1(\omega_1^1, \omega_2^1, \omega_3^1) = (1,2,3)$, $\omega^2(\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2) = (2,2,2)$, $\omega^3(\omega_1^3, \omega_2^3, \omega_3^3) = (3,4,5)$, $\omega^4(\omega_1^4, \omega_2^4, \omega_3^4) = (1,1,6)$. Да се определят съотношенията на цените и равновесното разпределение на стоките.

10. Да си представим потребител с функция на полезност $U(q, F) = \ln q + 0{,}5 \ln F$, където $q$ е количеството от потребяваната от него единствена стока, а $F$ е времето му за почивка. Той се явява едновременно собственик и единствен работник във фирмата, произвеждаща потребяваната от него стока. Тази фирма работи по технология, зададена чрез производствената функция $q = 4\sqrt{L}$, където $L$ е работното време. Предполага се, че общият фонд от свободно време (за работа и

почивка) е 16. а) Да се намерят оптималните стойности на времето за работа и почивка и количеството от произведена и потребявана стока без въвеждане на парични отношения. б) Да се намери правилното съотношение между цените на стоката и труда при въведени парични отношения.

**Решение**. а) За да намерим оптималните стойности на времето за работа и почивка и количеството от произведена и потребявана стока без въвеждане на парични отношения не е необходимо да оптимизираме дейността на фирмата, достатъчно е само да максимализираме функцията на полезност. Ако в

$$U(q,F) = \ln q + 0{,}5 \ln F$$

заместим $q$ с $4\sqrt{L}$ от производствената функция и $F$ с $16 - L$ ще получим полезността като функция само на една променлива $L$:

$$U(L) = \ln 4\sqrt{L} + 0{,}5 \ln(16 - L) = \ln 4 + 0{,}5 \ln L + 0{,}5 \ln(16 - L).$$

Условието от първи ред за тази безусловна оптимизационна задача е

$$U'(L) = \frac{0{,}5}{L} - \frac{0{,}5}{(16 - L)} = 0,$$

От което получаваме $L = 8$. За условието от втори ред ще имаме

$$U''(L) = -\frac{0{,}5}{L^2} - \frac{0{,}5}{(16 - L)^2} \Rightarrow U''(8) = -\frac{1}{256} < 0,$$

следователно полученият екстремум е от тип максимум. Така окончателно получаваме, че оптималната стойност на времето за работа е $L = 8$, на времето за почивка - $F = 8$, а произведената продукция е $q = 4\sqrt{8} = 8\sqrt{2}$.

б) Сега ще трябва да максимализираме печалбата на фирмата. Ще имаме

$$\Pi = pq - wL = p \cdot 4\sqrt{L} - wL.$$

Условието от първи ред на тази оптимизационна задача е

$$\Pi'(L) = \frac{2p}{\sqrt{L}} - w = 0 \Leftrightarrow L = \frac{4p^2}{w^2}.$$

Условието от втори ред е

$$\Pi''(L) = -\frac{p}{L^{\frac{3}{2}}} < 0,$$

което показва, че екстремумът е от тип максимум.

Тъй като условието за максимализиране на функцията на полезност трябва да е изпълнено, то $L = 8$ и

$$L = \frac{4p^2}{w^2} = 8 \Rightarrow \frac{p}{w} = \sqrt{2}.$$

Да отбележим, че бюджетното условие е налице, защото разходите за закупуване на стоката са $pq$, приходите от труд – $wL$, а приходите от печалба (дивидент) - $pq - wL$. Така, че окончателно правилното съотношение на цените на стоката и труда $p/w$ трябва да бъде $\sqrt{2}$.

## IV. СЪВЪРШЕНА КОНКУРЕНЦИЯ

11. В даден отрасъл фирмите работят по технология, предполагащи следната зависимост на общите разходи от произведеното количество: $C(q) = 10 + 8q + 4q^2$. Предполага се, че функцията на пазарно търсене за отрасъла е $Q^D = 120 - 3p$.

а) Ако в даден момент в отрасъла функционират 20 еднакви фирми, какви количества и на каква цена ще реализират те продукцията си в краткосрочен план? Каква печалба ще има всяка от тях?

б) Каква ще бъде цената и количеството произведена продукция в дългосрочен план? Колко фирми ще функционират в отрасъла?

в) Каква ще бъде цената и количеството произведена продукция ако отрасълът е монополизиран. Каква ще бъде печалбата на монопола?

**Решение.** а) Конкурентната фирма има обратна функция на предлагане

$$p = MC(q) = C'(q) = 8 + 8q.$$

Тогава индивидуалната функция на предлагане на всяка от 20-те фирми ще бъде

$$q^S = \frac{p}{8} - 1,$$

а отрасловата функция на предлагане ще бъде

$$Q^S = 20q^S = 20\left(\frac{p}{8} - 1\right) = 2{,}5p - 20.$$

От изравняването на отрасловото търсене и предлагане получаваме равновесната цена

$$Q^D = Q^S \Leftrightarrow 120 - 3p = 2{,}5p - 20 \Leftrightarrow p = \frac{280}{11} \approx 25{,}45.$$

Като заместим тази равновесна цена във функцията на предлагане ще получим равновесното количество

$$Q = Q^S(25{,}45) = 2{,}5 \cdot 25{,}45 - 20 = 43{,}625.$$

Тогава всяка от конкуриращите се фирми ще произвежда една двадесета от това количество

$$q = \frac{Q}{20} = \frac{43{,}625}{20} = 2{,}18.$$

Приходите на конкурентната фирма ще възлизат на

$$R = pq = 25{,}45 \cdot 2{,}18 = 55{,}48,$$

а разходите –

$$C = C(q) = C(2{,}18) = 10 + 8 \cdot 2{,}18 + 4 \cdot 2{,}18^2 = 46{,}44.$$

Печалбата на тази фирма ще е

$$\pi = R - C = 55{,}48 - 46{,}44 = 9{,}04.$$

**Забележка.** Функцията на разходите за целия отрасъл не е сума от разходите на отделните фирми. Как се получава тази функция? Да я означим с $\bar{C}(q)$. За обратната функция на предлагане на отрасъла ще имаме

$$p = \bar{C}'(q)$$

От друга страна, получената в решението функция на отраслово предлагане е

$$Q^S = 2{,}5p - 20$$

с обратна функция

$$p = 8 + 0{,}4q.$$

Така, след интегриране на равенството

$$(p =)\bar{C}'(q) = 8 + 0{,}4q$$

получаваме

$$\bar{C}(q) = c_0 + 8q + 0{,}2q^2.$$

Интеграционната константа $c_0$ намираме от условието

$$\bar{C}(0) = c_0 = 20C(0) = 20 \cdot 10 = 200.$$

Така окончателно, за функцията на разходи за отрасъла получаваме

$$\bar{C}(q) = 200 + 8q + 0{,}2q^2.$$

б) В дългосрочен план, при наличието на съвършена конкуренция в отрасъла, за фирмите не се предвижда печалба. По-точно, цената се определя от равенството

$$p = AC_{min}(q) = MC(q),$$

където с $AC(q)$ сме означили функцията на средните разходи. Тогава ще имаме

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{10 + 8q + 4q^2}{q} = \frac{10}{q} + 8 + 4q.$$

За да намерим този минимум ще трябва да нулираме първата производна на функцията:

$$AC'(q) = 0 \Leftrightarrow -\frac{10}{q^2} + 4 = 0.$$

Решавайки горното уравнение получаваме критичната точка $q^2 = 2{,}5 \Rightarrow q = \sqrt{2{,}5} = 1{,}58$. Тъй като

$$AC''(q) = \frac{20}{q^3} > 0,$$

то става дума за екстремум от тип минимум. Сега да пресметнем този минимум от който ще получим равновесната цена в дългосрочен план:

$$p = AC_{min}(q) = AC(1{,}58) = \frac{10}{1{,}58} + 8 + 4 \cdot 1{,}58 = 6{,}33 + 8 + 6{,}32 = 20{,}65.$$

Равновесното количество за отрасъла ще получим, разбира се, от функцията на отраслово търсене:

$$Q = Q^D(20{,}65) = 120 - 3 \cdot 20{,}65 = 120 - 61{,}95 = 58{,}05.$$

Тъй като една от фирмите ще произвежда количество $q = 1{,}58$, а общото за отрасъла количество е $Q = 58{,}05$, то броят $n$ на фирмите в отрасъла ще възлиза на

$$n = \frac{Q}{q} = \frac{58{,}05}{1{,}58} = 36{,}74 \approx 37.$$

в) При монопола равновесието се постига при изравняване на маргиналните приходи с маргиналните разходи:

$$R'(q) = C'(q).$$

Приходите на монопола възлизат на

$$R(q) = p(q)q,$$

където $p(q)$ е обратната функция на търсене. Тъй като функцията на търсене е $Q^D(p) = 120 - 3p$, то обратната функция ще бъде

$$p(q) = 40 - \frac{1}{3}q\ .$$

Ще имаме

$$R(q) = p(q)q = \left(40 - \frac{1}{3}q\ \right)q = 40q - \frac{1}{3}q^2 \quad \text{и} \quad R'(q) = 40 - \frac{2}{3}q.$$

Така получаваме

$$R'(q) = C'(q) \Leftrightarrow 40 - \frac{2}{3}q = 8 + 8q \Longrightarrow q = \frac{48}{13} \approx 3{,}69.$$

Цената на монопола се определя от обратната функция на търсене:

$$p = p(3{,}69) = 40 - \frac{1}{3}3{,}69 = 38{,}77.$$

Тогава приходите ще възлизат на

$$R = R(3{,}69) = 40 \cdot 3{,}69 - \frac{1}{3}3{,}69^2 = 143{,}1,$$

разходите –

$$C = C(q) = 10 + 8 \cdot 3{,}69 + 43{,}69^2 = 94{,}2,$$

а печалбата - $\Pi = R - C = 143{,}1 - 94{,}2 = 48{,}9$.

Можем да пресметнем и индекса на Лернер за този монополизиран пазар. Ще имаме

$$I_L = \frac{p - C'(q)}{p} = \frac{38{,}77 - C'(3{,}69)}{38{,}77} = \frac{38{,}77 - 37{,}52}{38{,}77} \approx 0{,}03.$$

**Забележка**. Можем да направим съпоставка на равновесните стойности при различните видове пазари. За целта ще пресметнем стойностите и на една друга важна величина – потребителския излишък (Consumer Surplus). При линейна функция на търсене той се пресмята по формулата

$$CS = \frac{1}{2}(p_{max} - p)q,$$

където $p$ и $q$ са ефективно достигнатите цена и количество, а $p_{max}$ е възможно най-високата цена, която позволява функцията на търсене. В конкретния случай ще имаме

$$p_{max} = p(q = 0) = 40,$$

а поради това че

$$q = Q^D = 120 - 3p = 3(40 - p)$$

за потребителския излишък получаваме

$$CS(p) = 1{,}5(40 - p)^2.$$

В случай на съвършена конкуренция в дългосрочен план ($p = 20{,}65$) ще имаме $CS = CS(20{,}65) = 561{,}63$, при конкуренция в краткосрочен план ($p = 25{,}45$) - $CS = CS(25{,}45) = 317{,}55$, а при монополизиран пазар ($p = 38{,}77$) - $CS = CS(38{,}77) = 2{,}27$. Получените резултати (за по-голяма прегледност) нанасяме в таблица

| | конкуренция в дългосрочен план | конкуренция в краткосрочен план | монополизиран пазар |
|---|---|---|---|
| цена | 20,65 | 25,45 | 38,77 |
| количество | 58,05 | 43,625 | 3,69 |
| инд. на Лернер | 0 | 0 | 0,03 |
| потр. излишък | 561,63 | 317,55 | 2,27 |

12. Функцията на разходите в дългосрочен план за даден отрасъл е $C(q) = 50q - 4q^2 + 0{,}5q^3$, а функцията на търсене за стоката, произвеждана от отрасъла - $Q^D = 330 - 5p$. Да се пресметнат равновесните стойности на цената, количеството и излишъкът на потребителите в случаите на съвършена конкуренция и монопол.

**Решение.** а) При пазарите на съвършена конкуренция в дългосрочен план печалбата на фирмите е нулева, следователно равновесната пазарна цена е минимума на средните разходи, т.е.

$$p = AC_{min}(q) = MC(q)\,.$$

За функцията на средните разходи ще имаме

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{50q - 4q^2 + 0{,}5q^3}{q} = 50 - 4q + 0{,}5q^2.$$

Намираме критичната точка на функцията на средните разходи:

$$AC'(q) = 0 \Leftrightarrow -4 + q = 0 \Rightarrow q = 4.$$

Тъй като

$$AC''(q) = 1 > 0,$$

то въпросният екстремум е от тип минимум.

Пресмятайки този минимум намираме въпросната равновесна цена

$$p = AC_{min}(q) = AC(4) = 42.$$

Сега от функцията на пазарно търсене ще определим общото количество от стоката, което ще трябва да произведат всички фирми в отрасъла:

$$Q = Q^D(42) = 330 - 5 \cdot 42 = 120.$$

Тогава оптималният брой $n$ на фирмите в отрасъла ще бъде

$$n = \frac{Q}{q} = \frac{120}{4} = 30.$$

б) В случай на монополизиране на отрасъла ще има изравняване на маргиналните приходи и маргиналните разходи. Приходите на фирмата-монополист са

$$R(q) = p(q)q,$$

където $p(q)$ е обратната функция на търсене. Тъй като функцията на търсене е $Q^D(p) = 330 - 5p$, то обратната функция ще бъде

$$p(q) = 66 - 0{,}2q\ .$$

Ще имаме

$$R(q) = p(q)q = (66 - 0{,}2q\ )q = 66q - 0{,}2q^2 \quad \text{и} \quad R'(q) = 66 - 0{,}4q.$$

Така получаваме

$$R'(q) = C'(q) \Leftrightarrow 66 - 0{,}4q = 50 - 8q + 1{,}5q^2 \Leftrightarrow 1{,}5q^2 - 7{,}6q - 16 = 0.$$

Положителното решение на горното квадратно уравнение е

$$q = \frac{3{,}8 + \sqrt{3{,}8^2 + 1{,}5 \cdot 16}}{1{,}5} = \frac{20}{3} \approx 6{,}67$$

Цената на монопола се определя от обратната функция на търсене:

$$p = p\left(\frac{20}{3}\right) = 66 - 0{,}2\frac{20}{3} = \frac{194}{3} \approx 64{,}67.$$

Тогава приходите ще възлизат на

$$R = R\left(\frac{20}{3}\right) = \frac{20}{3}\frac{194}{3} = \frac{3880}{9} \approx 431{,}11$$

разходите –

$$C = C\left(\frac{20}{3}\right) = 50\frac{20}{3} - 4\left(\frac{20}{3}\right)^2 + 0{,}5\left(\frac{20}{3}\right)^3 = \frac{8200}{27} \approx 303{,}7,$$

а печалбата - $\Pi = R - C = 431{,}11 - 303{,}7 = 127{,}41.$

Можем да пресметнем и индекса на Лернер за този монополизиран пазар. Ще имаме

$$I_L = \frac{p - C'(q)}{p} = \frac{\frac{194}{3} - C'\left(\frac{20}{3}\right)}{\frac{194}{3}} = \frac{\frac{194}{3} - \frac{190}{3}}{\frac{194}{3}} = \frac{2}{97} \approx 0{,}02.$$

**Потребителски излишък.** При линейна функция на търсене той се пресмята по формулата

$$CS = \frac{1}{2}(p_{max} - p)q,$$

където $p$ и $q$ са ефективно достигнатите цена и количество, а $p_{max}$ е възможно най-високата цена, която позволява функцията на търсене. В конкретния случай ще имаме

$$p_{max} = p(q = 0) = 66,$$

а поради това че

$$q = Q^D = 330 - 5p = 5(66 - p)$$

за потребителския излишък получаваме

$$CS(p) = 2{,}5(66 - p)^2.$$

В случай на съвършена конкуренция в дългосрочен план ($p = 42$) ще имаме $CS = CS(42) = 1440$, а при монополизиран пазар ($p = 64{,}67$) - $CS = CS(64{,}67) = 4{,}42$.

13. На пазара на съвършена конкуренция първоначално има 100 фирми, технологиите на които са идентични и се представляват от производствената функция

$$q = 5\sqrt{KL}.$$

Известно е, че в краткосрочен план за всяка от фирмите капитала е фиксиран на 10 единици капитал. На конкурентните пазари на ресурси са установени цените на капитала $v = 3$ парични единици и на труда $w = 1$ парична единица. Пазарното търсене на стоката, произвеждана от фирмите се представлява от функцията

$$Q^D(p) = 30000 - 2500p.$$

а) Да се определи функцията на пазарно предлагане $Q^S(p)$, равновесните цена и количество и печалбата на всяка от фирмите.

б) В дългосрочен план капитала на една фирма, присъстваща на този пазар се фиксира на ниво от 25 единици капитал. Да се определят равновесните цена и количество, както и оптималния брой на фирмите, работещи в отрасъла.

в) Какво би се получило в дългосрочен план, ако няма ограничение за капитала на една фирма?

г) Да се пресметнат равновесните цена и количество, както и печалбата на фирмата в случай, че пазарът е монополизиран.

## V. МОНОПОЛ

14. Известна е производствената функция $q = 2\sqrt{K}$ ($K$ – количеството вложен в производството капитал) и функцията на разходите $C = 405 + vK$, като $v = 1$ парична единица за единица вложен капитал. Функцията на пазарно търсене е $Q^D(p) = 40{,}5 - 0{,}5p$.

а) Да се определят равновесните стойности на: цената на стоката, количеството на продукцията, количеството изразходван капитал, печалбата и нормата на печалба, индекса на Лернер и потребителския излишък при условие на монополизиран пазар, ако стратегията на монополиста е да

- максимизира оборота си;
- максимализира печалбата си;
- максимализира нормата си на печалба.

б) Да се определят равновесните стойности на: цената на стоката, количеството на продукцията, количеството изразходван капитал, ако имаме отрасъл на съвършена конкуренция в

- краткосрочен план;
- дългосрочен план.

**Решение**. а) Нека монополистът да максимализира оборота си $R(q) = p(q)q$ като $p(q)$ е обратната функция на търсене. В случая имаме $p(q) = 81 - 2q$, така че $R(q) = 81q - 2q^2$. Условието от първи ред за тази оптимизационна задача е $R'(q) = 0 \Leftrightarrow 81 - 4q = 0$, откъдето получаваме $q = 81/4 = 20{,}25$. За равновесната цена получаваме $p = p(81/4) = 81/2 = 40{,}5$. Тогава за оборота ще имаме

$$R = pq = \frac{81}{2}\frac{81}{4} = \frac{6561}{8} = 820{,}125.$$

От производствената функция изразяваме вложения капитал чрез количеството произведена продукция:

$$K = 0{,}25q^2,$$

следователно в този случай количеството на вложения капитал е $K = 0{,}25(81/4)^2 = 102{,}516$. Тъй като разходната функция е $C = 405 + K$, то за разходите намираме $C = 405 + 102{,}516 = 507{,}516$. Тогава печалбата на фирмата възлиза на

$$\Pi = R - C = 802{,}125 - 507{,}516 = 312{,}609,$$

а за нормата на печалба получаваме

$$\frac{\Pi}{K} = \frac{312{,}609}{102{,}516} = 3{,}05.$$

Сега да пресметнем стойностите на същите икономически величини в стандартния случай, когато фирмата-монополист максимализира печалбата си. Тогава има изравняване на маргиналните приходи с маргиналните разходи

$$R'(q) = C'(q).$$

За функцията на разходите ще имаме $C(q) = 405 + K = 405 + 0{,}25q^2$, следователно $C'(q) = 0{,}5q$ и

$$R'(q) = C'(q) \Leftrightarrow 81 - 4q = 0{,}5q, \text{тогава } q = 18,$$

а за равновесната цена получаваме $p(18) = 81 - 2 \cdot 18 = 45$. Тогава приходите ще бъдат $R = pq = 45 \cdot 18 = 810$. Тъй като за разходите ще имаме $C = C(18) = 405 + 0{,}25 \cdot 18^2 = 405 + 81 = 486$, то печалбата възлиза на $\Pi = R - C = 810 - 486 = 324$. Тогава за нормата на печалба (при $K = 0{,}25 \cdot 18^2 = 81$) получаваме

$$\frac{\Pi}{K} = \frac{324}{81} = 4.$$

Накрая, да пресметнем параметрите на пазара и фирмата в случай, че тя се придържа към стратегия за максимализиране на нормата на печалбата си. Изразяваме печалбата и вложения капитал чрез количеството $q$. Ще имаме

$$\Pi(q) = R(q) - C(q) = 81q - 2q^2 - (405 + 0{,}25q^2) = 81q - 2{,}25q^2 - 405;$$

$$\frac{\Pi(q)}{K(q)} = \frac{81q - 2{,}25q^2 - 405}{0{,}25q^2} = \frac{324}{q} - 9 - \frac{1620}{q^2}.$$

Тогава условието от първи ред за тази оптимизационна задача ще бъде

$$\left[\frac{\Pi(q)}{K(q)}\right]' = 0 \Leftrightarrow -\frac{324}{q^2} + \frac{3240}{q^3} = 0 \quad \text{или} \quad q = 10.$$

Въз основа на така полученото равновесно количество и обратната функция на търсене намираме равновесната цена $p = p(10) = 81 - 2 \cdot 10 = 61$, приходите

$R = pq = 61 \cdot 10 = 810$, вложения капитал $K = 0{,}25 \cdot 10^2 = 25$, разходите $C = 405 + 25 = 430$, печалбата $\Pi = R - C = 610 - 430 = 180$ и нормата на печалба

$$\frac{\Pi}{K} = \frac{180}{25} = 7{,}2.$$

**Индекс на Лернер.** Той се пресмята по формулата

$$I_L = \frac{p - C'(q)}{p} = \frac{p - 0{,}5q}{p}.$$

В случай на максимализиране на оборота ($p = 40{,}5, q = 20{,}25$) ще имаме

$$I_L = \frac{40{,}5 - 0{,}5 \cdot 20{,}25}{40{,}5} = \frac{30{,}375}{40{,}5} = 0{,}75.$$

При максимализиране на печалбата ($p = 45, q = 18$) ще имаме

$$I_L = \frac{45 - 0{,}5 \cdot 18}{45} = \frac{36}{45} = 0{,}8.$$

И накрая, при максимализиране на нормата на печалба ($p = 61, q = 10$) получаваме

$$I_L = \frac{61 - 0{,}5 \cdot 10}{61} = \frac{56}{61} = 0{,}92.$$

**Потребителски излишък.** Пресмята се по формулата

$$CS = \frac{1}{2}(p_{max} - p)q,$$

където $p$ и $q$ са ефективно достигнатите цена и количество, а $p_{max}$ е възможно най-високата цена, която позволява функцията на търсене. В конкретния случай ще имаме

$$p_{max} = p(q = 0) = 81,$$

а поради това че

$$q = Q^D = 40{,}5 - 0{,}5p = 0{,}5(81 - p)$$

за потребителския излишък получаваме

$$CS(p) = 0{,}25(81 - p)^2.$$

При максимализиране на оборота ($p = 40{,}5$) намираме

$$CS = CS(40{,}5) = 0{,}25(81 - 40{,}5)^2 = 410{,}06.$$

При максимализиране на печалбата ($p = 45$) ще имаме

$$CS = CS(45) = 0{,}25(81 - 45)^2 = 324.$$

При максимализиране на нормата на печалба ($p = 61$) получаваме

$$CS = CS(61) = 0{,}25(81 - 61)^2 = 100.$$

Накрая, всички резултати от трите случая за прегледност нанасяме в таблица

| | Монопол, максимализиращ | | |
|---|---|---|---|
| | оборота | печалбата | нормата на печалба |
| цена | 40,5 | 45 | 61 |
| количество | 20,25 | 18 | 10 |
| приходи | 820,125 | 810 | 610 |
| разходи | 507,516 | 486 | 430 |
| печалба | 312,609 | 324 | 180 |
| капитал | 102,516 | 81 | 25 |
| норма на печалба | 3,05 | 4 | 7,2 |
| индекс на Лернер | 0,75 | 0,80 | 0,92 |
| потр. излишък | 410,06 | 324 | 100 |

15. **Конкретен модел за монополизиране на отрасъл.** В конкурентен отрасъл функционират 10 фирми с еднакви функции на разходите $C_i = 4 + 2q_i + 0{,}5q_i^2$. Отрасловото търсене на произведената от тях стока се задава с функцията $q = 52 - 2p$. Собственикът на една от фирмите предлага на конкурентите си да му прехвърлят своите фирми, като той обещава да им изплаща регулярен доход, равняващ се на удвоената им печалба.

а) Да се намерят равновесните цена, количества и печалби при условие на отраслова конкуренция в краткосрочен план.

б) Да се намерят равновесните цена, количества и брой фирми при условие на отраслова конкуренция в дългосрочен план.

в) Да се намерят същите показатели и индекса на Лернер при условие на монополизиране на отрасъла.

**Решение:**

а) Отраслова конкуренция. Всяка от 10-те конкурентни фирми има обратна фунцкия на предлагане $p_i = MC_i = C_i' \Rightarrow p_i = 2 + q_i$

От друга страна понеже фирмите имат еднакви разходни функции, те ще заемат еднакъв дял от пазара, следователно $q_i = 5{,}2 - 0{,}2p_i = \frac{1}{10}q$ е функцията на търсене за $\forall$ от фирмите. Тогава от $p_i = 2 + q_i$ и $q_i = 5{,}2 - 0{,}2p_i$ ще получим равновесните цени количество на конкурентите $p_i = 6$ и $q_i = 4$. Печалбата на всяка от тези фирми ще бъде

$$\Pi_i = p_i q_i - C_i = 6.4 - (4 + 2.4 + 0{,}5.4^2) = 24 - 20 = 4$$

в) Монополизация на отрасъла. В условието на монопола ще бъде изпълнено условието $MR = MC$. Тъй като $R = p(q).q$, където $p(q)$ е обратна функция на търсене, получаваме

$$R(q) = \frac{52-q}{2}.q = \left(26 - \frac{q}{2}\right)q = 26q - \frac{q^2}{2} \Longrightarrow MR(q) = R'(q) = 26 - q$$

Тъй като $MC(q) = 2 + q$, от приравняването на $MR(q)$ и $MC(q)$ ще получим равновесното количество $q_M = 12$, характерно за монополизирания отрасъл. Като заместим $q_M$ в обратната функция на търсене намираме и монополната цена $p_M = 20$. Тогава, за печалбата (на отрасъла) ще имаме

$$\Pi = R - C = p_M q_M - C(q_M) = 20.12 - (4 + 2.12 + 0{,}5.12^2) = 240 - 100 = 140$$

Сега, според уговорката собственика изплаща на всяка от другите 9 фирми $4.2 = 8$ парични единици или общо $72$, следователно за него остават $68$ парични единици.

Пресмятаме индекса на Лернер

$$I_L = \frac{P_M - MC(q_M)}{P_M}$$

Тъй като $MC(q_M) = 2 + q_M = 14$, получаваме $I_L = 0{,}3$.

16. **Ефекти от демонополизиране на отрасъл.** Монопол има функция на маргинални разходи $MC(q) = -10 + 3q$ и функция на маргинални приходи $MR(q) = 40 - 2q$.

а) Да се определят равновесните количество, цена на стоката и печалба на фирмата, както и индекса на Лернер.

б) Да се определят равновесните количество, цена и печалба при демонополизиране на отрасъла и запазване на функциите на маргинални разходи и маргинални приходи.

**Решение:** а) Равенството на монопола предполага да се произведе количество, изравняващо маргиналните приходи с маргиналните разходи, т.е.:

$q_M: MC(q_M) = MR(q_M)$ =>

$$-10 + 3q_M = 40 - 2q_M => q_M = 10$$

Цената се определя от обратната функция на търсене. Тъй като $R(q) = p(q)q$, където $p(q)$ е обратната функция на търсене, а от друга страна

$$R(q) = \int MR(q)dq = \int (40 - 2q)dq = 40q - q^2 = (40 - q)q$$

Така получаваме, че $p(q) = 40 - q$ е обратната функция на търсене, тогава

$$P_M = 40 - q_M = 40 - 10 = 30$$

б) Сега да определим съответните равновесни стойности характерни за съвършена конкуренция. Тук $p = MC(q)$ е функцията на предлагане на отрасъла и конкурентния отрасъл трябва да произведе количество, изравняващо отрасловото търсене с отрасловото предлагане, т.е.

$$q_c : p_c = MC(q_c) = p(q_c)$$

$$10 + 3q_c = 40 - q_c => q_c = 12{,}5$$

$$p_c = 40 - 12{,}5 = 27{,}5$$

Вижда се, че: $p_c = 27{,}5 < 30 = p_M$ и $q_c = 12{,}5 > 10 = q_M$ .

За да оценим индекса на Лернер $I_L$, тъй като

$$I_L = \frac{p_M - MC(q_M)}{p_M} = \frac{30 - 20}{30} = \frac{1}{3},$$

което показва степента на монополизираност на отрасъла.

17. Предполага се, че $x_W(p) = a - bp$ е функцията на търсене на *Windows* на *Microsoft*, а всички потенциални потребители, не закупили операционната система *Windows* ще се снабдят с *Linux* безплатно. Разходите на *Microsoft* за разработването на *Windows* са $d$ (постоянните разходи, не зависещи от реализирания брой копия). Каква е оптималната цена за реализация на едно копие на *Windows*? Колко ще бъдат клиентите на *Windows* и *Linux*?

**Решение**. Тъй като $x_W(0) = a$, то капацитетът на този пазар е $a$. Тогава (тъй като всички потребители, които не са закупили *Windows* придобиват безплатно *Linux*):

$$x_L(p) = a - x_W(p) = bp,$$

където с $x_L(p)$ сме означили остатъчната функция на търсене на безплатната операционна система *Linux*.

Задачата, която стои пред корпорацията *Microsoft* е да определи така цената $c$, че печлбата ѝ да е максимална

$$\Pi_W = px_W(p) - d = p(a - bp) - d \to max$$

Тъй като

$$\Pi_W(p) = ap - bp^2 - d$$

условието от I-ви ред ще бъде

$$\Pi_W{}'(c) = a - 2bp = 0 \Leftrightarrow p_0 = \frac{a}{2b}$$

Тогава ще имаме

$$x_W(p_0) = a - b\frac{a}{2b} = \frac{a}{2} = x_L(p_0)$$

За максималната печалба на *Microsoft* получаваме

$$\Pi_W(p_0) = p_0 x_W(p_0) - d = \frac{a}{2b}\frac{a}{2} - d = \frac{a^2}{4b} - d$$

Така доказахме следното твърдение

**Твърдение**. Оптималната цена на лиценза на платения софтуер $p_0 = \frac{a}{2b}$ максимализира печалбата на комерсиалния производител в размер на $\Pi_W(p_0) = \frac{a^2}{4b} - d$, като при това комерсиалният и некомерсиален производител делят пазара по равно: $x_W(p_0) = \frac{a}{2} = x_L(p_0)$.

За отбелязване е, че всичко се свежда до обема на пазара и функцията на потребителското търсене. Така например, ако е изпълнено неравенството $a < 2\sqrt{bd}$ дори и максималната печалба би била всъщност минимална загуба.

18. Дадени са монополистите $A$ и $B$, като $A$ произвежда краен продукт, а купува единствения си ресурс от $B$ по цена от $r$ за единица количество. Производствената функция на $A$ е $q = 0{,}5x$, където $q$ е количеството краен продукт, а $x$ – количеството ресурс. Търсенето на крайния продукт се задава с функцията $q = 25 - 0{,}25p$. Разходите на $A$ са само за покупка на ресурс, а разходите на $B$ са $kx$.

а) Какво количество краен продукт ще бъде произведено и на каква цена ще бъде продадено.

б) Как биха се изменили количеството и цената на крайния продукт при сливането на двата монопола в един.

**Решение.** а) Равновесието на монопола $A$ се постига при изравняването на неговите маргинални приходи с маргиналните му разходи:

$$R_A{}'(x) = C_A{}'(x).$$

Тъй като разходите са $C_A(x) = rx$, то маргиналните разходи на $A$ са $C_A{}'(x) = r$. Приходите на $A$ са

$$R_A(q) = p(q)q,$$

където $p(q)$ е обратната функция на търсене. Тъй като функцията на търсене е $q = 25 - 0{,}25p$, то обратната функция е $p = 100 - 4q$ и

$$R_A(q) = (100 - 4q)q = 100q - 4q^2.$$

Като заместим в горния израз производствената функция $q = 0{,}5x$ получаваме

$$R_A(x) = 50x - x^2 \quad \text{и} \quad R_A{}'(x) = 50 - 2x.$$

Тогава ще имаме

$$R_A{}'(x) = C_A{}'(x) \Leftrightarrow 50 - 2x = r \Longrightarrow x = \frac{50 - r}{2},$$

Като последният израз представлява функцията на търсене на ресурса (от страна на $A$).

Сега ще трябва да подсигурим равновесието при монопол $B$, свързано с изравняването на неговите маргинални приходи и разходи. Тъй като разходите са $C_B(x) = kx$, то $C_B{}'(x) = k$. За приходите ще имаме

$$R_B(x) = r(x)x,$$

където $r(x)$ е обратната функция на търсене на ресурси. Тъй като функцията на търсене е $x = (50 - r)/2$, то обратната функция е $r(x) = 50 - 2x$. Тогава ще имаме

$$R_B(x) = (50 - 2x)x = 50x - 2x^2 \quad \text{и} \quad R_B{}'(x) = 50 - 4x.$$

Тогава, за равновесието на монопол $B$, получаваме

$$R_B{}'(x) = C_B{}'(x) \Leftrightarrow 50 - 4x = k \Longrightarrow x = \frac{50 - k}{4}.$$

Като заместим получения израз за $x$ в обратната функция на търсене на ресурса, ще получим равновесната цена на този ресурс:

$$r = r\left(\frac{50 - k}{4}\right) = 50 - 2\,\frac{50 - k}{4} = \frac{50 + k}{2}$$

Сега можем да се върнем към монопол $A$. Равновесното количество, което ще произвежда този монопол получаваме от неговата производствена функция:

$$q = 0{,}5x = 0{,}5\frac{50-k}{4} = \frac{50-k}{8}.$$

Като заместим това количество в обратната функция на търсене, ще намерим равновесната цена, по която ще се продава крайния продукт:

$$p = 100 - 4\frac{50-k}{8} = \frac{150+k}{2}.$$

б) Сега ще разгледаме ситуацията, при която двата монопола се сливат и действат на пазара като един монопол. Този монопол ще има приходите на $A$ и разходите на $B$. Следователно неговото равновесие се подсигурява от изравняването на маргиналните приходи $R_A{}'(x)$ с маргиналните разходи $C_B{}'(x)$:

$$R_A{}'(x) = C_B{}'(x) \Leftrightarrow 50 - 2x = k \Rightarrow x = \frac{50-k}{2}.$$

Тогава, съгласно производствената функция, ще имаме

$$q = 0{,}5x = 0{,}5\frac{50-k}{2} = \frac{50-k}{4}$$

и съгласно обратната функция на търсене

$$p = 100 - 4\frac{50-k}{4} = 50 + k.$$

Така получихме, че в следствие от сливането на двата монопола оптималното количество краен продукт нараства (в случая – два пъти), а цената намалява.