I. МАКРОИКОНОМИЧЕСКА СТАТИКА

1. Основни понятия в макроикономиката

В средата на XX век икономическата наука, изучаваща процесите на обществено производство, разпределение и използване на стоки и услуги в условие на ограниченост на ресурсите се разделя на два клона – микроикономика и макроикономика, различаващи се по предмет и методи на изследване.

Макроикономиката има за цел да определи резултатите от функционирането на националното стопанство като цяло. В макроикономиката се изследват факторите, определящи националния доход, нивото на безработица, темпа на инфлацията, състоянието на държавния бюджет и платежния баланс, темпа на икономически ръст и др.

Макроикономика – основни въпроси на които тя търси и дава отговори и съответните раздели

ВЪПРОСИ	РАЗДЕЛИ
Какво определя стойността на националния доход?	Теория на статичното макроикономическо равновесие
Какво представляват парите и каква е ролята им?	Теория на парите
Какво представлява нивото на цените и кое определя динамиката му?	Теория на инфлацията
От какво се определя нивото на заетост?	Теория на заетостта
Какви фактори определят колебанията на икономическата конюнктура?	Теория на икономическите цикли
Какви са условията за стабилен икономически ръст?	Теория на икономическия ръст

Агрегиране на макроикономическите субекти, функции и пазари.

Агрегиране на макроикономическите субекти. В макроикономическите анализи участват четири „действащи лица“, наричани сектори – **сектор на домакинствата, предприемачески сектор, правителствен сектор и външен сектор.**

Агрегиране на макроикономическите функции. Основните икономически функции на сектор домакинства са: да потребяват или спестяват разполагаемият си доход, да плащат данъци, да търсят пари и да предлагат своя труд. На базата на тези техни дейности се получават и съответните макроикономически функции: функция на потребление, функция на спестяване, функция на предлагане на труд. За предприемаческия сектор имаме функция на инвестиции и функция на търсене на труд. Тъй като и предприемачите, заедно с домакинствата, търсят пари за своята дейност, двата сектора заедно оформят функцията на търсене на пари. Освен това, за да произведат националния доход, предприемачите използват производствена технология, на базата на която се получава макроикономическата производствена функция – тя указва връзката на произведения национален доход с двата основно фактора за неговото производство – труда и капитала. Държавата събира приходи от данъци и извършва разходи, от там и съответните функции. Освен това държавата (чрез централната банка) предлага пари. Външният сектор (състоящ се от всички държави, различни от разглежданата) купува стоки (функция на износ) и продава стоки (функция на внос).

Агрегиране на макроикономическите пазари. Различават се четири пазара: **пазар на стоки** (и услуги), **пазар на труд**, **пазар на капитал** (акции и облигации) и **пазар на пари**. Пазарите на стоки и на труд образуват **реалния сектор** на икономиката, а пазарите на пари и ценни книжа – **монетарен сектор**.

Макроикономически модели. Опростяването на икономическата действителност до обозрим брой най-съществени взаимовръзки е в основата на макроикономическото моделиране. Моделираните взаимовръзки и процеси се описват във вид на математически уравнения. Моделирането включва две групи елементи – величини, известни до построяването на модела – **екзогенни** и такива, които се определят от модела – **ендогенни**. При построяването на макроикономическите модели се използват четири типа функционални уравнения: **поведенчески функции**, изразяващи сложилите се в обществото предпочитания; **производствени функции**; **институционални функции**, представляващи институционално установените зависимости между параметрите на модела и **дефиниционни функции**, изразяващи зависимости, съответстващи на вербално определените икономически явления.

Освен това, макроикономическите модели се делят на две големи групи – **статични** (при които се изключва времето като фактор) и **динамични.**

Брутен вътрешен продукт (Gross Domestic Product) БВП (GDP). Локално БВП се определя като сумата от добавените стойности, създадени за определен период от време от всички производители в дадена държава. Под добавена стойност се разбира разликата между приходите и материалните (нетрудови) разходи за производството и реализацията на продукцията. Глобално БВП е дефиниционна функция, определяща се така:

$$\mathrm{GDP} = y = C + I + G + (E - Z),$$

където C са разходите на домакинствата за крайни продукти (функция на потреблението), I – инвестициите в реален капитал (функция на инвестициите), G – правителствените разходи за крайни продукти, E – износа и Z – вноса. Понякога бележим $NE = E - Z$ – чист износ.

Чист национален продукт (ЧНП) – това е БВП минус амортизациите (еквивалент на величината на обезценяване на основния капитал за даден период от време).

Национален доход (НД) – ЧНП минус косвените данъци плюс субсидиите. Тогава ЧНП може да се разглежда като сума от резултатите на частния сектор (НД) и държавата (салдото от косвените данъци и субсидиите). От друга страна НД се разпада на факторни доходи – работна заплата (доход от труд), процент (доход от пари), рента (доход от собственост на земя и др. недвижими имоти) и предприемачески доход.

Ниво на цените – P е средно претеглената цена на произведените през дадения период стоки и услуги.

Нека $P^1(p_1^1, p_2^1, \dots, p_i^1, \dots, p_n^1)$ е ценовия вектор за текущия период, а $Q^1(q_1^1, q_2^1, \dots, q_i^1, \dots, q_n^1)$ – количествения вектор за текущия период, а $P^0(p_1^0, p_2^0, \dots, p_i^0, \dots, p_n^0)$ и $Q^0(q_1^0, q_2^0, \dots, q_i^0, \dots, q_n^0)$ – съответните вектори за базовия период, тогава величината

$$d^1 = \frac{P^1Q^1}{P^0Q^1} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i^1 q_i^1}{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^1} = \frac{\text{номинален продукт}}{\text{реален продукт}}$$

е **дефлатора** на продукта (дохода) за текущия период. Вижда се, че в знаменателя на израза за дефлатора всички количества от текущия период са оценени по цени от базовия период. Всички макроикономически величини, които се измерват в парични единици имат номинални и реални стойности. Ако P^1 е нивото на цените за текущия период, а P^0 – за базовия, то ще имаме $P^1 = P^0 d^1$. В макроикономическите анализи се приема, че нивото на цените през базовия период е единица, тогава $P^1 = d^1$.

Ясно е, че величината

$$NG^1 = \frac{P^1Q^1}{P^0Q^0} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i^1 q_i^1}{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^0},$$

явяваща се частно от номиналните продукти за текущия и базов период измерва номиналния ръст на продукта за текущия период (спрямо базовия). Тогава ще имаме

$$NG^1 = \frac{P^1Q^1}{P^0Q^0} = \frac{P^1Q^1}{P^0Q^1}\frac{P^0Q^1}{P^0Q^0} = d^1 RG^1,$$

където с

$$RG^1 = \frac{P^0Q^1}{P^0Q^0} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^1}{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^0}$$

сме означили реалния ръст на продукта за текущата година, т.е. номиналният ръст е произведение на дефлатора с реалния ръст.

Пример 1. Дадени са следните данни за номиналния БВП и дефлатора на БВП на България по години

Година	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
БВП	1761	17432	22421	23790	26752	29709	32335	34546	38275	41948	46173
дефлатор	-	10,48	1,237	1,037	1,067	1,065	1,038	1,023	1,048	1,038	1,034

а) Пресметнете номиналния и реален ръст на БВП на България по години.

б) Пресметнете реалния ръст на БВП на България за целия разглеждан период.

в) Пресметнете средния годишен реалния ръст на БВП на България за целия разглеждан период.

Решение:

а) Първи подход. Ще пресметнем номиналния ръст на БВП по години и след като го разделим с дефлатора, ще получим реалния ръст. Резултатите нанасяме в таблица

Година	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
БВП	1761	17432	22421	23790	26752	29709	32335	34546	38275	41948	46173
дефлатор	-	10,48	1,237	1,037	1,067	1,065	1,038	1,023	1,048	1,038	1,034
NG	-	9,899	1,286	1,061	1,125	1,111	1,088	1,068	1,108	1,096	1,101
RG	-	0,945	1,040	1,023	1,054	1,043	1,048	1,044	1,057	1,056	1,065
$RG\%$	-	-5,5	4,0	2,3	5,4	4,3	4,8	4,4	5,7	5,6	6,5

Втори подход. Разделяме номиналния БВП за съответната година на дефлатора и така получаваме БВП, оценен по цените от предходната година (означен в долната таблица като БВП$_p$), който, разделен с номиналния БВП от предходната година дава реалния ръст на БВП (RG):

Година	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
БВП	1761	17432	22421	23790	26752	29709	32335	34546	38275	41948	46173
дефлатор	-	10,48	1,237	1,037	1,067	1,065	1,038	1,023	1,048	1,038	1,034
БВП$_p$	-	1663	18125	22,941	25,072	27896	31151	33767	36522	40412	44655
RG	-	0,944	1,040	1,023	1,054	1,043	1,048	1,044	1,057	1,056	1,065
$RG\%$	-	-5,6	4,0	2,3	5,4	4,3	4,8	4,4	5,7	5,6	6,5

б) Първи подход. Умножаваме получените в а) реални ръстове на БВП за 1997, 1998,…, 2005, 2006 и така получаваме ръста на БВП за десетгодишния период 1996-2006 г.:

$$0,945 \cdot 1,040 \cdot 1,023 \cdot 1,054 \cdot 1,043 \cdot 1,048 \cdot 1,044 \cdot 1,057 \cdot 1,056 \cdot 1,065 = 1,438,$$

което означава, че за този десетгодишен период икономиката е нараснала с 43,8%.

Втори подход. Разделяме БВП на 2006 г. последователно (от зад на пред) с всички дефлатори и така получаваме БВП за 2006 г., осенен по цени от 1996 г.:

$$46173 : 1{,}034 : 1{,}038 : 1{,}048 : 1{,}023 : 1{,}038 : 1{,}065 : 1{,}067 : 1{,}037 : 1{,}237 : 10{,}48 = 2531$$

Така получения реален БВП за 2006 г. делим на БВП от 1996 и получаваме ръста:

$$\frac{2531}{1761} = 1{,}437.$$

в) Предполагаме, че БВП се изменя за този период с постоянен ръст q. Тогава БВП ще са членове на геометрична прогресия и съотношението на БВП от 2006 г. към БВП от 1996 г. ще бъде q на степен 10. Тогава ще имаме

$$q^{10} = 1{,}438 \Rightarrow 10 \ln q = \ln 1{,}438 = 0{,}363 \Rightarrow \ln q = 0{,}0363 \Rightarrow q = e^{0{,}0363} = 1{,}037.$$

Така получихме, че средният реален ръст на БВП на България за периода 1996-2006 г. възлиза на 3,7% годишно. Ако пресметнем средно аритметичния ръст, то (поради това, че числата са малки) ще получим отново 3,7%.

Пример 2. БВП на една държава за 2015 год. възлиза на 100 млрд. от местната валута. Крайното потребление е 72 млрд., като съотношението между разходите на домакинствата и държавата е 3:1. Вносът превишава с 2 млрд. износа. През 2016 год. салдото по платежния баланс става нула, инвестициите нарастват с 8%, крайното потребление на домакинствата – с 10%, а крайното потребление на държавата – с 5%. Да се пресметне БВП за 2016 год., номиналния и реален ръст на БВП, ако дефлаторът за 2016 год. е 3,5%.

Решение:

Според формулата

$$y = C + I + G + (E - Z)$$

$$y = 100;\ C + G = 72 \ \text{ и } \ E - Z = -2 \Rightarrow I = 30.$$

Тъй като

$$C : G = 3 : 1 \quad \text{и} \quad C + G = 72, \text{то } \ C = 54 \text{ и } \ G = 18.$$

Според данните, показателите за 2016 год. са

$$(E - Z)' = 0;\ I' = 1{,}08I = 32{,}4;\ C' = 1{,}1C = 59{,}4 \text{ и } G' = 1{,}05G = 18{,}9.$$

Тогава, за БВП за 2016 год. получаваме

$$y' = C' + I' + G' + (E - Z)' = 59{,}4 + 32{,}4 + 18{,}9 + 0 = 110{,}7,$$

следователно номиналният ръст на БВП е $1{,}107 = 10{,}7\%$. Реалният ръст на БВП за 2016 год. ще бъде

$$\frac{1{,}107}{1{,}035} = 1{,}0696 = 6{,}96\%.$$

Икономически кръгооборот. Бюджетът на даден субект отразява всички доходи и разходи на субекта и, следователно – изменението на богатството му. Тъй като доходите на едни са разходи за други, то всички бюджети са взаимосвързани и характеризират кръгооборота на парите в икономическата система. В долната таблица е даден опростен модел на икономическия кръгооборот в трисекторната икономика (без външен сектор)

от \ към	домакинства	фирми	държава	богатство
домакинства	-	C	T	S
фирми	y	-	0	0
държава	0	G	-	$T-G$
богатство	0	I	$G-T$	-

По редове са дадени разходите на дадения сектор, а по стълбове – приходите. Естествено, трябва да има равенство на разходи и приходи. От сектор домакинства получаваме

$$y = C + T + S,$$

а от предприемаческия сектор -

$$y = C + G + I.$$

Ако извадим второто равенство от първото, получаваме основно макроикономическо тъждество

$$T + S = G + I,$$

Т.е. равенство между всички изтегляния от потенциалното търсене и всички инжекции към него.

Пример 3. Бюджетният дефицит на даден държава възлиза на 3 млрд. парични единици от местната валута, националният доход за същата година е 185 млрд., Домакинствата се облагат с данъци в размер на 20% от доходите им, а функцията на техните спестявания има вида $S = -28 + 0{,}4y$. Да се попълни таблицата на икономическия кръгооборот в тази трисекторната икономика.

Решение:

От $T = 0{,}2y$ получаваме $T = 0{,}2 \cdot 185 = 37$. Тъй като бюджетният дефицит $G - T = 3$, то държавните разходи за крайни стоки са $G = 40$. От $S = -28 + 0{,}4y$ ще имаме $S = -28 + 0{,}4 \cdot 185 = 46$. Заместваме получените макроикономически величини в бюджетното равенство на сектор домакинства

$$y = C + T + S \Longrightarrow 185 = C + 37 + 46.$$

За крайното потребление на домакинствата получаваме $C = 102$. Сега заместваме в бюджетното равенство за предприемаческия сектор:

$$y = C + G + I \Longrightarrow 185 = 102 + 40 + I$$

и получаваме инвестициите на сектора $I = 43$. Сега вече можем да попълним таблицата на икономическия кръгооборот в тази трисекторната икономика

от \ към	домакинства	фирми	държава	богатство
домакинства	-	102	37	46
фирми	185	-	0	0
държава	0	40	-	0
богатство	0	43	3	-

2. Макроикономическа производствена функция

Макроикономическа производствена функция на една ресурсна променлива. Нека с N сме означили цялото количество труд, вложен в производството на националния доход в една държава за определен период от време (обикновено година), а с y – произведения национален доход за този период от време. Макроикономическа производствена функция $y = F(N)$ ще наричаме максималния национален доход, който може да се произведе при вложен труд в обем N. Така производствената функция свидетелства за технологията на производство, използвана от предприемаческия сектор. Понякога, в макроикономическите анализи се използва производствена функция на една ресурсна променлива – вложеното количество капитал.

Производната на тази функция $y' = F'(N)$ се нарича маргинална производителност (или ефективност) на труда.

Неокласическата производствена функция на една променлива удовлетворява следните аксиоми:

i. Не може да има доход без труд, т.е. $F(0) = 0$;
ii. С увеличаването на количеството труд, нараства и дохода, т.е. $F'(N) > 0$;
iii. С увеличаването на количеството труд, нарастването на дохода намалява (закон за намаляващата маргинална производителност на труда), т.е. $\left(F'(N)\right)' = F''(N) < 0$.

Горната аксиоматика показва, че всяка растяща вдлъбната функция, нулираща се в нулата, може да бъде използвана за моделиране на неокласическата зависимост на националния доход от количеството труд, вложено за производството му. Най-често се използват следните два вида производствени функции:

1. Да разгледаме производствена функция, която е квадратен тричлен, т.е. $y = aN^2 + bN + c$. От i. следва, че $c = 0$ и $y = aN^2 + bN$. От ii., тъй като $y'' = a < 0$ се получава $y = bN - aN^2$. Тогава $y' = b - 2aN > 0 \Leftrightarrow N < b/2a$. Ако N_0 е максималното възможно количество труд и $N_0 \leq b/2a$, то при $N \in (0, N_0)$

функцията $y = bN - aN^2$ $(a > 0, b > 0)$ удовлетворява всички аксиоми на неокласическа производствена функция.

2. Сега ще разгледаме степенна производствена функция, т.е. $y = aN^\alpha$. Условието $i.$ е автоматично изпълнено. Тъй като $y' = \alpha a N^{\alpha-1}$, то за да бъде изпълнено $ii.$, трябва $\alpha > 0$. От друга страна, $y'' = \alpha(\alpha - 1)aN^{\alpha-2}$ и $\alpha < 1$ е условието за отрицателност на втората производна. Така окончателно, степенната функция $y = aN^\alpha$, $a > 0$, $\alpha \in (0,1)$ удовлетворява всички аксиоми на неокласическа производствена функция.

Нека една конкурентна унипродуктна фирма с микроикономическа производствена функция на една ресурсна променлива $q = F(L)$ (q е количеството от произвежданата стока, а L – количеството, вложен за производството ѝ труд) да максимализира печалбата си. Тъй като $R = pq = pF(L)$ са приходите ѝ (p е цената на произвежданата стока), а $C = C_0 + WL$ (W е номиналната работна заплата, WL са разходите за труд, а C_0 – нетрудовите разходи) – нейните разходи, то печалбата ще бъде

$$\Pi = \Pi(L) = R - C = pF(L) - (C_0 + WL).$$

Условието за максимализиране на печалбата от първи ред е

$$\Pi'(L) = 0 \Leftrightarrow pF'(L) - W = 0 \text{ или } F'(L) = \frac{W}{p},$$

т.е. маргиналната производителност на труда трябва да съвпада с относителната му цена. Условието от втори ред $\Pi''(L) = pF''(L) < 0$ е автоматично изпълнено (при неокласическа производствена функция), т.е. става дума за максимум на $\Pi(L)$.

В условие на конкуренция всички фирми максимализират печалбите си и условието от първи ред добива вида

$$F'(N) = \frac{W}{P} = w,$$

където W е номиналната работна заплата, P – нивото на цените, а w – реалната работна заплата.

Пример 4. Предполага се, че функционалната зависимост на националния доход на една държава y (в млрд. от паричната ѝ единица) от броя на заетите N (в млн.) е от вида $y = bN - aN^2$ $(a > 0, b > 0)$. Счита се, че максималната стойност на националния доход от 122,5 може да се постигне при заетост $N = 3{,}5$. През 2016 год. средната годишна номинална и реална работна заплата възлиза на 12 хил. парични единици. Да се пресметнат: обема на заетост; националния доход за 2016 год. и разпределението му, ако нетрудовите разходи възлизат на 45 млрд.

Решение:

Тъй като $y' = b - 2aN$, то максимумът на функцията $y = bN - aN^2$ ще се достига при $N = b/2a$, следователно $b/2a = 3{,}5$ и $b = 7a$. Тогава видът на макроикономическата производствена функция ще бъде $y = 7aN - aN^2$. От друга страна $y(N = 3{,}5) = 24{,}5a - 12{,}25a = 12{,}25a = 122{,}5$, следователно $a = 10$ и $y = 70N - 10N^2$. Тъй като номиналната заплата W и реалната заплата w съвпадат, нивото на цените е $P = 1$. Тогава условието от първи ред ще бъде

$$F'(N) = 70 - 20N = w = 12,$$

от където получаваме $N = 2{,}9$. При такъв обем на заетост ще се произведе национален доход в размер на $y(N = 2{,}9) = 70 \cdot 2{,}9 - 10 \cdot 2{,}9^2 = 118{,}9$. Тогава приходите на предприемаческия сектор ще бъдат $R = Py = 118{,}9$, а разходите - $C = C_0 + WN = 45 + 12 \cdot 2{,}9 = 45 + 34{,}8 = 79{,}8$. Печалбата ще възлиза на $\Pi = R - C = 118{,}9 - 79{,}8 = 39{,}1$. Окончателно: разходи за труд 34,8 млрд., нетрудови (капиталови) разходи 45 млрд. и печалба на предприемаческия сектор 39,1 млрд.

Макроикономическа производствена функция на две ресурсни променливи. Нека y е националният доход (или брутният продукт) на една държава за разглеждан и фиксиран период от време, а K и N – количествата, вложени в производството му ресурси – капитал (основни фондове) и труд. Под макроикономическа производствена функция на две ресурсни променливи $y = F(K, N)$ ще разбираме максималния възможен национален доход y, който може да се произведе при влагане на ресурси в количества K и N.

Неокласическа производствена функция. Това е гладка функция (притежава първи и втори частни производни от първи и втори ред, които са непрекъснати функции), удовлетворяваща аксиомите:

1. $F(0,0) = 0$ – без ресурси няма продукция;
2. $F_K = \frac{\partial F}{\partial K} > 0$ и $F_N = \frac{\partial F}{\partial N} > 0$ – националният доход расте при нарастването на всеки от ресурсите;
3. $F_{KK} = \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} = \frac{\partial}{\partial K} F_K < 0$ и $F_{NN} = \frac{\partial^2 F}{\partial N^2} = \frac{\partial}{\partial N} F_N < 0$ – с увеличаването на количеството на всеки от ресурсите, скоростта на нарастване на дохода намалява;
4. $F_{KN} = \frac{\partial^2 F}{\partial K \partial N} = \frac{\partial}{\partial K} F_N = F_{NK} = \frac{\partial^2 F}{\partial N \partial K} = \frac{\partial}{\partial N} F_K \geq 0$.

Първите частни производни F_K и F_N се наричат маргинални производителности (ефективности) на капитала и труда. Тогава третата аксиома твърди, че маргиналните производителности намаляват при нарастване на количеството от същия ресурс. Четвъртата аксиома твърди, че маргиналната производителност на един от ресурсите нараства при нарастване на количеството от другия ресурс.

Основен пример за неокласическа производствена функция на две ресурсни променливи е **мултипликативната функция.** Тя е от вида

$$y = F(K,N) = AK^{\alpha}N^{\beta}.$$

И наистина, аксиома 1. Е очевидно изпълнена. Тъй като

$$F_K = \alpha AK^{\alpha-1}N^{\beta} \quad \text{и} \quad F_N = \beta AK^{\alpha}N^{\beta-1},$$

то за $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ аксиома 2. също е изпълнена. За вторите производни F_{KK} и F_{NN} имаме

$$F_{KK} = \alpha(\alpha-1)AK^{\alpha-2}N^{\beta} \quad \text{и} \quad F_{NN} = \beta(\beta-1)AK^{\alpha}N^{\beta-2},$$

което означава, че при $\alpha \in (0,1)$ и $\beta \in (0,1)$ аксиома 3. ще бъде изпълнена. И накрая

$$F_{KN} = \alpha\beta AK^{\alpha-1}N^{\beta-1} > 0$$

при тези стойности на α и β.

В редица случаи технологията на производство може да се моделира с производствени функции, които не са двукратно гладки (диференцируеми). Такъв е случая с **производствената функция на Леонтиев**

$$y = F(K,N) = min\left\{\frac{K}{a}, \frac{N}{b}\right\},$$

наричана още **производствена функция с пълна взаимодопълняемост на ресурсите**.

Ако една фирма работи в условие на конкуренция, тя ще има приходи

$$R = R(K,N) = py = pF(K,N),$$

където p е цената на продаваната от нея стока и разходи

$$C = C(K,N) = rK + wN,$$

като r е цената на капитала (процент), а w – на труда (заплата). Тогава печалбата на фирмата ще бъде

$$\Pi = \Pi(K,N) = R - C = pF(K,N) - (rK + wN).$$

Тогава условието от първи ред за максимализиране на печалбата ще изглежда така

$$\Pi_K = 0 \Leftrightarrow F_K = \frac{r}{p} \quad \text{и} \quad \Pi_N = 0 \Leftrightarrow F_N = \frac{w}{p}.$$

Това икономически се изказва така: максимализирайки печалбата си, конкурентната фирма изразходва толкова ресурси, че да се получи изравняване на маргиналните производителности на ресурсите с относителните им цени.

Условието от втори ред е вдлъбнатост на производствената функция, което (тъй като $F_{KK} < 0$) означава

$$F_{KK}F_{NN} - {F_{KN}}^2 > 0.$$

За мултипликативната функция ще имаме

$$\begin{aligned} F_{KK}F_{NN} - {F_{KN}}^2 &= \alpha\beta(\alpha-1)(\beta-1)A^2K^{2\alpha-2}N^{2\beta-2} - \alpha^2\beta^2A^2K^{2\alpha-2}N^{2\beta-2} \\ &= [(\alpha-1)(\beta-1) - \alpha\beta]\alpha\beta A^2K^{2\alpha-2}N^{2\beta-2} \\ &= [1-(\alpha+\beta)]\alpha\beta A^2K^{2\alpha-2}N^{2\beta-2}. \end{aligned}$$

Условието от втори ред $F_{KK}F_{NN} - {F_{KN}}^2 > 0$ е изпълнено точно когато $\alpha + \beta < 1$.

В условие на конкуренция всички фирми максимализират печалбите си и условието от първи ред добива вида

$$F_K = \frac{R}{P} = r \quad \text{и} \quad F_N = \frac{W}{P} = w,$$

където R е номиналната цена на капитала, W е номиналната работна заплата, P – нивото на цените, r – реалната цена на капитала и w – реалната работна заплата.

Тъждеството на Ойлер за една хомогенна функция е

$$\gamma F(K,N) = F_KK + F_NN,$$

където γ е степента (показателя) на хомогенност.

При мултипликативната функция ще имаме

$$\gamma = \alpha + \beta.$$

Тогава тъждеството на Ойлер ще добие вида

$$(\alpha+\beta)y = F_KK + F_NN.$$

Тъй като предполагаме конкуренция и максимализиране на печалбата, то при $P = 1$ получаваме

$$(\alpha+\beta)y = F_KK + F_NN = RK + WN = C.$$

Тогава за печалбата на предприемаческия сектор ще имаме

$$\Pi = R - C = y - (\alpha+\beta)y = [1-(\alpha+\beta)]y$$

или

$$y = [1-(\alpha+\beta)]y + RK + WN.$$

Горната формула показва как се разпределя националния доход на печалба на предприемаческия сектор, разходи за капитал и труд.

Пример 5. За една производствена функция е известно, че:

1) Тя е от вида $y = F(K, N) = AK^{\alpha}N^{\beta}$;
2) При условие на максимална печалба, печалбата на предприемачите, разходите за капитал и разходите за труд са в съотношение 1:2:2;
3) При капитал в размер на 200 млрд. лв. и труд в размер на 2 млн. заети, националният доход възлиза на 65,914 млрд. лв.

Определете:

а) вида на производствената функция;

б) количеството вложени капитал и труд, ако цената на капитала е $r = 15\%$, а цената на труда – 12000 лв. за год.;

в) стойността на произведения национален доход и разпределението му за печалба и разходи за капитал и труд;

г) количеството направени инвестиции през разглежданата година, ако предишната година в икономиката е бил включен капитал на стойност 156 млрд. лв., който се амортизира средно за 20 год. (по линеен закон).

Решение:

а) При условие за максимална печалба е изпълнено

$$F_K = r \quad \text{и} \quad F_N = w.$$

От друга страна за хомогенната мултипликативна функция е изпълнено тъждеството на Ойлер:

$$(\alpha + \beta)F = F_K K + F_N N$$

Като заместим в горното тъждество F_K и F_N, получаваме

$$(\alpha + \beta)F = rK + wN.$$

Тъй като rK са разходите за капитал, а wN – за труд, то $rK + wN = C$ – общите разходи за производството на националния доход. Тогава печалбата ще бъде

$$\Pi = R - C = F - (\alpha + \beta)F = [1 - (\alpha + \beta)]F.$$

В нашия случай имаме $\Pi = 0{,}2F$, следователно $\alpha + \beta = 0{,}8$.

Тъй като

$$\frac{F_K}{F_N} = \frac{\alpha N}{\beta K} = \frac{r}{w} \Longrightarrow \alpha w N = \beta r K \Longrightarrow rK : wN = \alpha : \beta.$$

Тъй като $rK = wN$ то $\alpha = \beta = 0{,}4$. Тогава производствената функция ще има вида

$$y = F(K, N) = AK^{0{,}4}N^{0{,}4}.$$

За да определим окончателния ѝ вид ще използваме условието, че при $K = 200$ млрд. и $N = 2$ млн. $y = 65{,}914$ млрд. тогава ще имаме

$$A = \frac{65{,}914 \cdot 10^9}{(2 \cdot 10^{11})^{0{,}4}(2 \cdot 10^6)^{0{,}4}} = \frac{65{,}914}{2^{0{,}8}} 10^{2{,}2} = \frac{65{,}914}{1{,}741} 158{,}489 \cong 6000,$$

така получаваме

$$y = F(K, N) = 6000K^{0{,}4}N^{0{,}4}.$$

б) Тъй като $F_K = A\alpha K^{\alpha-1}N^{\beta}$ и $F_N = \mathrm{A}\beta K^{\alpha}N^{\beta-1}$, то системата уравнения за определянето на K и N добива вида

$$F_K = 2400\frac{N^{0{,}4}}{K^{0{,}6}} = r = 0{,}15;\; F_N = 2400\frac{K^{0{,}4}}{N^{0{,}6}} = w = 12000.$$

Разделяме първото уравнение на второто и получаваме

$$\frac{N}{K} = \frac{0{,}15}{12000} \Longrightarrow 12000N = 0{,}15K \Longrightarrow K = 80000N.$$

Като заместим $K = 80000N = 8 \cdot 10^4 N = 2^3 2^4 5^4 N = 2^7 5^4 N$ във второто уравнение, ще имаме

$$2400\frac{(2^7 5^4 N)^{0{,}4}}{N^{0{,}6}} = 12000 \Leftrightarrow \frac{2^{2{,}8}5^{1{,}6}N^{0{,}4}}{N^{0{,}6}} = 5 \Leftrightarrow \frac{2^{2{,}8}5^{0{,}6}}{N^{0{,}2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{2^{14}5^3}{N} = 1.$$

Така получаваме $N = 2^{14}5^3 = 2048000 = 2{,}048$ млн. заети. Тогава за количеството вложен капитал ще имаме $K = 80000N = 80000 \cdot 2048000 = 163840000000 = 163{,}84$ млрд. лв.

в) На база получените стойности за вложените в производството на националния доход капитал и труд, лесно можем да пресметнем и самия национален доход:

$$\begin{aligned} y = F(K, N) = 6000K^{0{,}4}N^{0{,}4} &= 6000 \cdot 164840000000^{0{,}4}2048000^{0{,}4} \\ &= 61440000000 = 61{,}44 \text{ млрд. лв.} \end{aligned}$$

Разпределението на националния доход е следното: $24{,}576 \text{ млрд. лв.} = 15\% \text{ от } 163{,}84 \text{ млрд. лв.}$ – разходи за капитал; $24{,}576 \text{ млрд. лв.} = 12000 \cdot 2048000$ – разходи за труд и 12,288 млрд. лв. – печалба за предприемачите.

г) Тъй като предишната година в производството на националния доход е бил вложен капитал на стойност 150 млрд. лв., като 1/20 от него, т.е. 7,5 млрд. лв. се е амортизирал, тогава в настоящата година е останал капитал на стойност 142,5 млрд. лв. Сегашният капитал е на обща стойност 163,84 млрд. лв., следователно разликата от 163,84-142,5=21,34 са брутните инвестиции за тази година.

3. Общо икономическо равновесие

Различните подходи към функционирането на отделните сектори на икономиката по естествен път водят до наличието в съвременната макроикономика на алтернативни (статични) модели на съвместното равновесие на тези сектори. Такива модели се наричат модели за общо икономическо равновесие (ОИР).

3.1. Неокласически модел на ОИР

Посредством дадения модел в обобщен вид се реконструира представата за макроикономическото функциониране на пазарната икономика, господстваща до появата на книгата на Дж. М. Кейнс „Обща теория на заетостта, лихвените проценти и парите", т. е. До втората половина на 30-те години на миналия век. За да се изяви същността на неокласическата концепция е достатъчно да се разгледа модела на двусекторна икономика – на домакинства и предприемачи.

Тъй като според неокласическата концепция парите не се явяват богатство в икономиката, следователно има три пазара – на труд, капитал и стоки. На тези пазари се срещат два макроикономически субекта – домакинствата и предприемачите. Своеобразното тълкуване на същността на парите води до **класическата дихотомия** – съществуване на два независими един от друг сектора – реален и паричен.

Реален сектор:

1. **Пазар на капитал**: в резултат на изравняването на обема на предлагане на капитал (спестяванията на домакинствата) и обема на търсене на капитал (инвестициите на фирмите) се установява равновесен лихвен процент, т.е.
$$S(i_+) = I(i_-) \to \ i^*$$
2. **Пазар на труда**: при зададен лихвен процент на пазара на труд се достига до устойчиво равновесие, т.е. изравняват се търсенето на труд $N = N^D(w_-)$ и предлагането на труд $N = N^S(w_+, i_+)$, при което се определя равновесната стойност на реалната заплата w^* и равновесното количество труд $N^* = N^D(w^*) = N^S(w^*, i^*)$. Разбира се, търсенето на труд се определя от условието за максимизирането на печалбата при съвършена конкуренция $y'(N) = w$ (където $y(N)$ е п.ф. на една променлива).

Така получаваме, че равновесието в реалния сектор не зависи нито от нивото на цените, нито от количеството пари.

Паричен сектор:

Тук е валидно съотношението
$$\frac{M}{P} = \frac{y}{v}$$
където v е скоростта на обръщение на НД y, а M – количеството пари. Така търсенето на доход ще бъде $y^D = \frac{Mv}{P}$ и тъй като предлагането е $y^S = y^* = y(N^*)$; то от изравняването на търсене и предлагане $y^S = y^D = y^*$ ще се определи равновесното ниво на цените
$$P^* = \frac{Mv}{y^*}$$

Окончателно ще имаме

(1) $S(i_+) = I(i_-)$

(2) $\frac{M}{P} = \frac{y}{v}$

(3) $N^D(w_-) = N^S(w_+, i_+)$

(4) $y = y(N)$

Извод: за сметка на гъвкавостта на лихвения процент i и реалната работна заплата w пазарния механизъм винаги установява равновесие при пълна заетост. Превишаването на предлагането над търсеното на пазара на труд и на стоки са възможни само като временни явления и са свързани с отклонение на относителните цени от равновесните им стойности. Изменението на количеството пари в обращение не влияе на равновесните реални стойности на стоките и работната заплата, а променя само номиналните им стойности.

Пример 6. Зададени са: п.ф. $y = 20N - N^2$, функция на спестяванията $S = 2 + 3i$, на инвестициите $I = 20 - 3i$, предлагане на труд $N^S = 2w + i$. Парите в обращение са $M = 10$, а скоростта на обръщение на НД е $v = 12$ оборота за година. Да се намерят всички макроикономически величини.

Решение:

Съставяме модела

(1) $2 + 3i = 20 - 3i$

(2) $\frac{10}{P} = \frac{y}{12}$

(3) $y' = 20 - 2N = w \Rightarrow\ N^D = 10 - \frac{w}{2} = N^S = 2w + i$

(4) $y = 20N - N^2$

От (1) $i^* = 3$. В (3) $10 - \frac{w}{2} = 2w + 3\ \Rightarrow w^* = 2{,}8$ и $N^* = 8{,}6$. От (4) $y^* = y(N^*) = y(8{,}6) = \frac{20.43}{5} - \left(\frac{43}{5}\right)^2 = 172 - \frac{1849}{25} = 98{,}04$. От (2) $P^* = \frac{10.12}{y^*} = \frac{120}{98{,}04} = 1{,}22$. Освен това $S = I = 11\ \Rightarrow C = y - S = 87{,}04$.

Забележка: Как да намерим функциите на съвкупно предлагане $y = y^S(i)$ и търсене $y = y^D(i)$. От (3) определяме $N = 4 - \frac{2i}{5}$ и $N = 8 + \frac{i}{5}$, тогава от (4) определяме $y^S = y(N) = y\left(8 + \frac{i}{5}\right) = 20\left(8 + \frac{i}{5}\right) - \left(8 + \frac{i}{5}\right)^2 = 96 + \frac{4}{5}i - \frac{i^2}{25}$. Тогава, тъй като $y^S = C + S = y^S(i)$ и $y^D = C + I = y^D(i), y^D(i) = C + S + (I - S) = y^S(i) + (I - S) \Rightarrow\ y^D(i) = 96 + \frac{4}{5}i - \frac{i^2}{25} + (20 - 3i - 2 - 3i) = 114 - \frac{28}{5}i - \frac{i^2}{25}$.

Неокласически модел на ОИР за трисекторна икономика. В този модел се променя само (1) със следното равенство, гарантиращо равновесието на пазарите на капитал и стоки

$$(1') \qquad S(i_+) + T(y_+) = I(i_-) + G$$

Алгоритъм за решаване на модела:

1. От (1') се определя $y^D = y^D(i)$
2. От (3) се определят $w = w(i)$ и $N = N(i)$
3. От (4) се определя $y^S = y(N(i))$
4. Тогава от $y^D(i) = y^S(i) \rightarrow \ i^*$ и y^*
5. $w^* = w(i^*)$ и $N^* = N(i^*)$
6. $P^* = \frac{Mv}{y^*}$

Пример 7. Нека при условията на предишния пример се появява държава събираща плосък данък от 20% и извършваща разходи $G = 31{,}8$.

Решение:

$$2 + 3i + 0{,}2y = 20 - 3i + 31{,}8 \implies y^D = 249 - 30i$$

Както преди имаме $y^S = 96 + \frac{4}{5}i - \frac{i^2}{25}$. От $y^D = y^S$ получаваме $i^* = 5$ и $y^* = 99$; $w^* = w(5) = 2$ и $N^* = N(5) = 9$; $P^* = \frac{120}{99} \approx 1{,}21$. Освен това $S = 17; T = 19{,}8; I = 5,$ а $C = y - S - T = 62{,}2,$ $\quad G - T = 31{,}8 - 19{,}8 = 12$ е бюджетния дефицит (превишението на държавните разходи над държавните приходи).

3.2. Кейнсиански модел на ОИР

За разлика от неокласическия модел, при който основен се явява пазара на факторите на производство, при кейнсианския модел акцентът е върху формираното на пазарите на стоки и пари (т.е. въз основа на *IS*-*LM*-модела)ефективно търсене.

Моделът на стоковия пазар е:

$$(1) \qquad S(y) + T(y) = I(i) + G$$

Той определя множество от точки в координатната равнина (y, i), обезпечаващи равновесие на стоковия (и капиталов) пазар. Това множество се нарича IS-линия, а модела - IS-модел.

Моделът на паричния пазар е:

$$(2) \qquad \frac{M}{P} = l(y, i)$$

При фиксирано ниво на цените P в координатната равнина се определя множество от точки, чиито координати (y, i) обезпечават равновесието на паричния пазар. Моделът се нарича LM-модел, а линията LM-линия. Съвместното разглеждане на пазарите на стоките, пари и капитал (при P-фиксирано) обезпечават равновесие на тези пазари, тоест пресечна точка на IS-линията и LM-линията. Ако P не е фиксирано от (1) и (2) се определятт функциите $i = i(P)$ и $y = y^D(P)$ - функция на съвкупното търсене.

Модел на пазара на труда е:

(3) $W^S(N,P) = Py'(N) = W^D(N,P)$

при

(4) $y = y(N)$ - производствена функция.

От (3) се определя $W = W(P)$ и $N = N(P)$, а от (4)-функцията на съвкупното предлагане $y = y^S(P) = Y(N(P))$.

Алгоритъм за решаване на модела:

1) от (1) и (2) се определя $i = i(P)$ и $y \quad = y^D(P)$;
2) от (3) се определят: $N = N(P)$ и $W = W(P)$;
3) от (4) се определя предлагане $y = y^S(P) = Y(N(P))$;
4) от $y^S(P) = y^D(P) \to P^*, y^*$;
5) тогава $i^* = i(P^*), W^* = W(P^*)$и $N^* = N(P^*)$.

Забележка: Ако $W^S = W^S(N)$, тоест предлагането на труд не зависи от нивото на цените, казваме че работниците имат парична илюзия, в общият случай работниците са лишени от парична илюзия (но не и в степента, характерна за неокласическия модел).

Пример 8: Поведението на домакинствата се описва от функцията на потреблението $C = 80 + 0{,}7y$, функцията на търсене на реалните касови остатъци $l = 0{,}04y + 2(50 - i)$ и функцията на предлагане на труд $W^S = 0{,}519N + 10P$. Предприемаческият сектор в условие на конкуренция работи по технология, описана чрез производствената функция $y = 70N - N^2$, а функцията на търсене на инвестиции е $I = 260 - 6i$. Държавата извършва разходи за закупуване на крайни продукти $G = 110$, събира плосък данък от 10% и предлага пари в обръщение (номинални касови остатъци) $M = 104$. Да се намерят равновесните стойности на ендогенните за модела макроикономически величини.

Решение:

За стоковия пазар ще имаме:

$$S = y - T - C = y - 0{,}1y - 80 - 0{,}7y = 0{,}2y - 8$$

$$0{,}2y - 80 + 0{,}1y = 260 - 6i + 110$$

$0{,}3y = 450 - 6i \rightarrow y = 1500 - 20i - IS -$ линия.

За паричния пазар получаваме

$$\frac{104}{P} = 0{,}04y + 100 - 2i - LS - \text{линия за всяко } P$$

От съвместното равновесие на стоковия и паричен пазар получаваме функцията на съвкупно търсене

$$\frac{104}{P} = 0{,}04(1500 - 20i) + 100 - 2i \rightarrow i = \frac{400}{7} - \frac{260}{7P}$$

и

$$y^D = \frac{2500}{7} + \frac{5200}{7P}$$

Сега, чрез изравняване на търсенето и предлагане на труд получаваме

$$W^D = Py' = P(70 - 2N) = 70P - 2NP$$

$$W^D = W^S \Longrightarrow 0{,}519N + 10P = 70P - 2NP \Longrightarrow N = \frac{60P}{2P + 0{,}519}$$

$$W = 0{,}519\frac{60P}{2P + 0{,}519} + 10P = \frac{36{,}33P + 20P^2}{2P + 0{,}519}$$

$$y^S = N(70 - N) = \frac{60P}{2P + 0{,}519}(70 - \frac{60P}{2P + 0{,}519}) = \frac{60P(80P + 36{,}33)}{(2P + 0{,}519)^2}$$

Приравнявайки съвкупното търсене със съвкупното предлагане ще получим равновесните стойности на нивото на цените и националния доход

$$y^S = y^D = \frac{60P(80P + 36{,}33)}{(2P + 0{,}519)^2} = \frac{2500}{7} + \frac{5200}{7P}$$

$$420P^2(80P + 36{,}33) = (2500P + 5200)(2P + 0{,}519)^2$$

$$33600P^3 + 15258{,}6P^2 = (2500P + 5200)(4P^2 + 2{,}076P + 0{,}26931) =$$

$$= 10000P^3 + 5190P^2 + 673{,}4025P + 20800P^2 + 10795{,}2P + 1400{,}6772$$

$$23600P^3 - 10731{,}4P^2 - 11468{,}602P - 1400{,}6772 = 0$$

$$P^3 - 0{,}45472P^2 - 0{,}48596P - 0{,}05935 = 0.$$

Корените на горното кубично уравнение (изчислени с помощта на http://calcpad-bg.com) са $P_1 = -0{,}4$, $P_2 = -0{,}15$ и $P_3 = 1$. Очевидно, $P = P_3 = 1$.

Следователно $P^* = 1 \Longrightarrow y^* = \frac{2500+5200}{7} = 1100$

Тъй като трудовата заетост N, номиналната заплата W и лихвения процент i са изразени като функции на нивото на цените P, то сега можем да получим и техните равновесни стойности

$$N^* = 23{,}82;\ i^* = 20 \text{ и } W^* = 22{,}36.$$

Тогава получаваме, че потреблението на домакинствата е $C = 850$; спестяванията $-\ S = 140$; данъците, събрани от държавата $-\ T = 110 \Longrightarrow T = G$, което свидетелства за балансиран бюджет (без излишък или дефицит). Инвестициите на предприемачите са $I = 140(= S$, тъй като $T = G)$. В частност получаване, че $N^*W^* = 23{,}82 \cdot 22{,}36 = 532{,}62$ са общите доходи от труд, а $y^* - N^*W^* = 1100 - 532{,}62 = 567{,}38$ – доходите от капитал.

3.3. Сравнение на неокласическия и кейнсианския модел на ОИР

Сравнителните характеристика на двете макроикономически концепции са дадени в следната таблица

Неокласически	**Кейнсиански**
За домакинствата спестяванията са първични а потреблението – вторично. Те зависят от лихвения процент.	За домакинствата първично е потреблението, а спестяванията са вторични. Зависят от националния доход.
На пазара на стоки и капитал се определя равновесната стойност на лихвения процент.	На пазара на стоки и капитал се определя равновесна двойка $(i, y) - IS -$ линията.
Парите не са богатство, следователно не съществува паричен пазар.	Парите могат да бъдат разглеждани като богатство, съществува паричен пазар.
В паричният сектор е валидна количествената формула за парите $\frac{M}{P} = \frac{y}{v}$.	На паричния пазар се определя равновесна двойка $(i, y) - LM -$ линия. На пазарите на стоки, капитал и пари се определя съвкупното търсене.

Търсенето на труд е функция на реалната работна заплата.	Търсенето на труд е функция на номиналната работна заплата (при наличие на парични илюзии) и на нея и нивото на цените (без парични илюзии).
Съвкупното предлагане, определено на трудовия пазар е $const$.	Съвкупното предлагане, определено на трудовия пазар е растяща функция на нивото на цените.
Равновесието се постига при условие на пълно използване на наличните (включително трудови) ресурси.	Възможно е равновесие при наличието на излишъци на пазарите (например конюнктурна безработица).
Съществува класическа дихотомия – реалния и паричния сектор функционират отделно един от друг.	Не съществува дихотомия – равновесието се постига при взаимодействие на реалния и паричен сектор.
При увеличено предлагане на пари ще се променят само цените, всички величини на модела ще запазят реалните си стойности.	При увеличено предлагане на пари ще се променят всички величини на модела по различен начин.
Сферата на приложение е при съвършената конкуренция, както и в дългосрочен план.	Сферата на приложение е в условията на несъвършена конкуренция и в краткосрочен план.
Основен извод – намесата на държавата може само да влоши положението.	Основен извод – държавата чрез активна фискална и монетарна политика може да създаде предпоставки за нарастване на НД.

3.4. Неокласически синтез

Неокласическия синтез позволява да се разкрият условия за съвместимост на неокласическият и кейнсиански модел на ОИР и да се отстранят някои техни противоречия в изходните предпоставки – например класическата дихотомия. Най-простия пример, това е модел при който модела на пазар и на стоки, пари и капитали се вземат от кейнсианската концепция, а трудовия пазар се моделира както е при неокласиците.

Пример 9. Предприемачите работят по технология, зададена чрез п.ф. $y = 3N^{2/3}$, предлагането на труд се осъществява чрез $N^S = 0{,}5w$, функцията на спестяване е $S = 0{,}1y$, а функцията на инвестиции - $I = 1 - 0{,}1i$. Търсенето на реални касови остатъци е $l = 5y - 0{,}2i$, а парите в обръщение са $M = 27{,}2$. Да се намерят всички равновесни стойности на макроикономическите величини в този модел.

Решение:

Системата на модела е

(1) $0{,}1y = 1 - 0{,}1i$

(2) $27{,}2 = 5y - 0{,}2i$

(3) $3.\frac{2}{3}.\frac{1}{N^{\frac{1}{3}}} = w = 2N^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{8}{N} = 8N^3 \quad \Rightarrow \quad N^* = 1, w^* = 2$

$y^* = 3;\ i = 7; P^* = 2; S = I = 0{,}3.$

Друг модел на неокласически синтез (за двусекторна икономика) се задава чрез системата

$$\left| \begin{array}{c} S(i,y) = I(i) \\ \frac{M}{P}(i) = \frac{y}{v} + l_S(i) \\ w^D(N) = y'(N) = w^S(N,i) \\ y = y(N) \end{array} \right.$$

Според първото уравнение, се предполага, че спестяванията на домакинствата зависят както от лихвения процент (неокласическа съставяща), така и от дохода (кейнсианска съставяща). Второто уравнение за равновесието е според кейнсианската концепция – присъства при търсенето на реални касови остатъци съставката на спекулативното търсене $l_S(i)$. Третото уравнение изравнява търсенето и предлагането на труд според неокласическата концепция.

4. Многоотраслов макроикономически анализ. Модел на Леонтиев

През 30-те години на 20 век американският икономист от руски произход В. В. Леонтиев започнал изучаването на статичната структура на националната икономика на ниво отрасъл. Той разглежда взаимните връзки между 500 отрасъла на икономиката на САЩ. За решаването на този модел е удостоен с Нобелова награда за икономика през 1973 г.. В основата на модела стоят следните предположения:

1. В икономическата система се произвеждат, продават, купуват и потребяват *n* на брой продукта;

2. Всеки отрасъл произвежда само един продукт, като различните отрасли произвеждат различни продукти. Отрасъла, произвеждащ продукт i също ще индексираме с индекс i;

3. Производствената технология на отрасъл j се състои в преработването на определени количества от някакво множество продукти (възможно от всички) с цел производството на някакво количество от продукта j. При това съотношението между количествата изразходвани продукти и произведен продукт е постоянно (независимо от мащаба на производството).

Поради предположение 3. - моделът е линеен. Освен това той е статичен макроикономически модел, защото разглежданията са във фиксиран момент (година , месец).

Балансовият отчет по данни за фиксиран период от времето представлява следната таблица:

Структура на разходите	Структура на търсенето		Обем на продукцията
	Търсене на отраслите	Непроизводствена сфера	
	1... ...j... ...n		
1	$\bar{a}_{11}$... ... $\bar{a}_{1j}$ ... ...$\bar{a}_{1n}$	y_1	x_1
⋮	... ...	⋮	⋮
i	$\bar{a}_{i1}$ ... ...$\bar{a}_{ij}$ ... $\bar{a}_{in}$	y_i	x_i
⋮	... ...	⋮	⋮
n	$\bar{a}_{n1}$ ... ... $\bar{a}_{nj}$ ... ... $\bar{a}_{nn}$	y_n	x_n
Добавена стойност	$\bar{v}_1$ ... ... $\bar{v}_j$ ... $\bar{v}_n$		
Обем на продукцията	x_1 ... ... x_j ... ... x_n		

В тази балансова таблица величината $\bar{a}_{ij}$ показва какъв обем от продукцията на i-тия отрасъл се изразходва от j-тия отрасъл през отчетния период. Величината x_i е общият обем на продукцията (брутен продукт) на i-тия отрасъл, а величината y_i показва обема на потреблението на продукцията на i-тия отрасъл в непроизводствената сфера – крайно търсене. Крайното (непроизводствено) търсене се състои от крайно потребление , експорт и инвестиции. Това обаче се пренебрегва и в модела на Леонтиев величините y_i , $i = 1, \dots, n$ се възприемат като екзогенни. И накрая $\bar{v}_j$ е добавената (новосъздадена) стойност от j-тия отрасъл. Аналогично на y_i ,$\bar{v}_j$ включва работна заплата, амортизационни отчисления, косвени данъци и печалба, което се пренебрегва в модела на Леонтиев.

Величините x_i и y_i могат да се измерват в количества (бройки или други) или в стойности (количество по цена) – съответно говорим за натурален или стойностен модел. За по-голяма определеност ще разглеждаме стойностния модел.

Балансовият характер на модела се определя от следните съотношения:

1.Баланс по редове – обемът на продукцията на i-тия отрасъл е равен на сумата от производственото и непроизводственото търсене т.е.

$$Y_i + \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} = X_i \qquad i = 1, \dots, n \qquad (1.1)$$

2.Баланс по стълбове – обемът на продукцията на j-тия отрасъл е равен на сумата от производствените разходи (за придобиване на продукти от другите отрасли) и величината на добавената стойност т.е.

$$\bar{v}_j + \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{ij} = X_j \qquad j = 1, \dots, n \tag{1.2}$$

Поради линейността на модела ще имаме - $\bar{a}_{ij} = a_{ij}X_j$

Коефициентите a_{ij} се наричат технологични коефициенти и показват колко единици от продукцията на i-тия отрасъл са необходими за производството на единица продукция от j-тия отрасъл. Матрицата $A = (a_{ij})$ състояща се от технологичните коефициенти се нарича технологична матрица на модела. Тогава условието (1.1) добива вида

$$Y_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j = X_i \qquad i = 1, \dots, n \tag{1.3}$$

Това е моделът на Леонтиев. Нарича се още модел на междуотрасловия баланс или Input-Output модел. Чрез системата (2.3) моделът на Леонтиев позволява да се определят общите обеми на производството на отраслите $X_1, \dots, X_n$ по дадено крайно търсене $Y_1, \dots, Y_n$ въз основа на производствените технологии на отраслите, определени с технологичните коефициенти a_{ij}. Разбира се системата (1.3) позволява и решението на обратната задача – по дадени обеми на продукцията x_i , $i = 1, \dots, n$ да се определи крайното търсене y_i , $i = 1, \dots, n$ на всеки отраслов продукт.

Системата (1.3) е система от n на брой линейни уравнения за n неизвестни x_i, $i = 1, \dots, n$ които са добре изучени от линейната алгебра. Обаче тази система има специфични свойства – технологичните коефициенти a_{ij} , обемите на крайно търсене y_i и брутните продукти x_i са неотрицателни.

Определение: Моделът на междуотраслов баланс се нарича **продуктивен** ако описващата го система (1.3) има неотрицателни решения т.е., $x_i \geq 0$ $i = 1, \dots, n$.

Условия за продуктивност. Системата (1.3) може да бъде записана в матричен вид:

$$(E - A)X = Y \qquad (1.4),$$

където $E = E_n$ е единичната матрица от ред n, $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ - вектор на производството на отраслите, $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T$ - вектор на крайното (непроизводствено) търсене. $A = (a_{ij})$ е технологичната матрица.

Теорема 4.1. Следните условия са еквивалентни:

1.Системата (1.3) притежава неотрицателно решение $X \geq 0$ при някой строго положителен вектор Y.

2.Системата (1.3) притежава неотрицателно решение $X \geq 0$ при всеки неотрицателен вектор Y.

3. (**Условие на Хоукинс – Саймън**) Всички главни минори на матрицата $E - A$ са положителни.

4. Матрицата $(E - A)^{-1}$ съществува и е неотрицателна.

Ако е изпълнено едно от условията за продуктивност на горната теорема:

$$X = (E - A)^{-1}Y \qquad (1.5),$$

като $X \geq 0$ т.е. задачата за намиране на брутният продукт на отраслите е решена.

Да отбележим, че матрицата $E - A$ се нарича матрица на Леонтиев , а $(E - A)^{-1}$ - инверсна матрица на Леонтиев.

Неразложими технологични матрици

Да означим с N множеството на номерата на всички отрасли $N = \{1,2, \cdots, n\}$. Подмножеството $S \subset N$ е изолирано , ако $a_{ij} = 0$ за $i \in \bar{S} = N \setminus S , j \in S$. Това означава , че отраслите с индекси от S не се нуждаят от продуктите на другите отрасли с индекси от $\bar{S}$ въпреки че (може би) им продават своята продукция. Ако преномерираме отраслите така че първи да бъдат K отрасли от S, то технологичната матрица A ще добие вида:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \qquad (1.6),$$

където A_1 е квадратна матрица $k \times k$ отговаряща на отраслите S, A_3 - квадратна матрица $(n - k) \times (n - k)$ отговаряща на отраслите $\bar{S}$.

Определение: Технологичната матрица A се нарича **неразложима** ако чрез разместване на редове и стълбове не може да придобие вида (1.6). Неразложимостта означава че всеки отрасъл макар и косвено ползва продукцията на другите отрасли.

За неразложимите технологични матрици е в сила – Теорема 1.2.

Теорема 4.2. (Фробениус – Перон): Неразложимата неотрицателна матрица A притежава единствена собствена стойност $\lambda_A > 0$ с най-голям модул. На собствената стойност λ_A съответстват единствен собствен вектор X_A и единствен собствен ковектор P_A които могат да бъдат избрани положителни.

Собствената стойност λ_A и свързаните с нея собствен вектор X_A ($AX_A = \lambda_A X_A$) и собствен ковектор P_A ($P_A A = \lambda_A P_A$) се наричат Фробениусови.

Условия за продуктивност на неразложими технологични матрици – на базата на теоремата на Фробениус - Перон можем да докажем следната теорема:

Теорема 4.3. Моделът на Леонтиев е продуктивен тогава и само тогава когато $\lambda_A < 1$.

Доказателство: 1. Необходимост – нека моделът на Леонтиев е продуктивен, тогава за векторът на крайното търсене $Y > 0$ съществува такъв вектор на брутен продукт $X \geq 0$ че $X - AX = Y$ т.е. $X > AX \geq 0$ и следователно $X > 0$.

Умножаваме неравенството $X > AX$ отляво с фробениусовия ковектор $P_A > 0$ и получаваме $P_A X > P_A AX = \lambda_A P_A X$, но $P_A X > 0$, следователно $\lambda_A < 1$.

2. Достатъчност – тъй като $AX_A = \lambda_A X_A$, $X_A > 0$, $0 < \lambda_A < 1$, то $A^K X_A = A^{K-1}(AX_A) = A^{K-1}(\lambda_A X_A) = \lambda_A A^{K-1} X_A = {\lambda_A}^2 A^{K-2} X_A = \cdots = {\lambda_A}^K X_A$

Тогава $\lim\limits_{k\to\infty} A^K X_A = \lim\limits_{k\to\infty} {\lambda_A}^K X_A = 0$. Но $X_A > 0$, $A^K \geq 0$ следователно $\lim\limits_{k\to\infty} A^K = 0$.

Разглеждаме матричното равенство:

$$(E - A)(E + A + A^2 + \cdots + A^{K-1}) = E - A^K,$$

което лесно може да се провери ако се разкрият скобите. Тъй като границата на дясната страна при $K \to \infty$ е равна на E , то съществува граница на лявата страна и тя също е равна на E т.е. ще имаме

$$(E - A)\sum_{K=0}^{\infty} A^K = E$$

Горното равенство показва че съществува обратна матрица $(E - A)^{-1}$ и за нея е изпълнено

$$(E - A)^{-1} = \sum_{K=0}^{\infty} A^K$$

(това равенство е аналогично на сумата на безкрайна геометрична прогресия).

Освен това тъй като за всички $A^K \geq 0$, то $(E - A)^{-1} \geq 0$, следователно за всеки вектор $Y \geq 0$ съществува неотрицателно решение на системата (1.3)

$$X = (E - A)^{-1} Y,$$

т.е. моделът на Леонтиев е продуктивен.

Теорема 4.3. дава възможност за проверка на продуктивността на модела на Леонтиев, но е лишена от икономическа интерпретация. Доказателството и обаче ни дава възможност да формулираме едно полезно следствие.

Следствие: Ако моделът на Леонтиев е продуктивен, то за всеки вектор на крайно търсене $Y \geq 0$ се определя еднозначно вектор на брутно предлагане X по формулата –

$$X = \textstyle\sum_{K=0}^{\infty} A^K Y = Y + AY + A^2 Y + \cdots \qquad (1.7)$$

Това разлагане може да се интерпретира така – за производството на даден обем продукция Y трябва да се изразходват AY продукти , но за да се произведат тези AY продукти трябва да се изразходват $A(AY) = A^2 Y$ продукти, за чието производство са необходими $A(A^2 Y) = A^3 Y$ продукти и т.н.

Формулата (1.7) ни дава възможност да изчисляваме вектора X чрез рекурентна редица –

$$X_0 = Y,\ X_{n+1} = Y + AX_n\ ,\ X = \lim_{n\to\infty} X_n \qquad (1.8)$$

Предимствата на рекурентния метод (1.8) в сравнение с инверсния метод (1.5) са следните:

1. Не трябва да се пресмята обратна матрица

2. Може да се използва както при стойностен така и при натурален баланс

Към недостатъците на този метод можем да отнесем неопределеният обем на изчисления.

Методът на инверсията изисква краен брой изчислителни ресурси , но при реализацията му трябва да отчетем следните особености:

1. Необходимо е баланса да бъде в стойностна форма

2. Обратната матрица може да се окаже много чувствителна към грешки при закръглянето

За установяване на продуктивността на модела на Леонтиев може да се използва и следващия критерий (достатъчно условие):

Теорема 4.4. Ако технологичната матрица A е неразложима и сумите a_i от елементите на i-тия ред са не по-големи от 1: $a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \le 1$ като за поне един ред K е изпълнено –

$a_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} < 1$, то моделът на Леонтиев е продуктивен.

Доказателство: Нека P_A е Фробениусовия ковектор, а λ_A - Фробениусовата собствена стойност на матрицата A т.е.

$$P_A A = \lambda_A P_A\ , \qquad P_A > 0, \qquad 0 < \lambda_A$$

Да умножим последното равенство отдясно с вектор $e = (1,1,\dots,1)^T$. Получаваме

$$P_A A e = \lambda_A P_A e \qquad (1.9)$$

Тъй като $Ae = (a_1, \dots, a_n)^T$, то за лявата част на (1.9) ще имаме

$$P_A A e = \sum_{i=1}^{n} (P_A)_i a_i < \sum_{i=1}^{n} (P_A)_i$$

В последното неравенство сме отчели условието на твърдението. Тъй като за дясната страна на (1.9) имаме $\lambda_A P_A e = \lambda_A \sum_{i=1}^{n} (P_A)_i$, то окончателно от (1.9) получаваме

$$\lambda_A \sum_{i=1}^{n} (P_A)_i < \sum_{i=1}^{n} (P_A)_i,$$

От където $\lambda_A < 1$ т.е. моделът на Леонтиев е продуктивен според Теорема 1.3.

Пример 10. При $n = 2$ за двата отрасъла имаме зададена технологичната матрица $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ и вектора на продукцията на отраслите, предназначена за крайно потребление $Y = (2,4)^T$. Трябва да намерим вектора на брутна продукция на отраслите $X = (X_1, X_2)^T$, който балансира модела.

Решение:

1.Проверка за продуктивност

1.1.по критерия на Хоукинс-Саймън. Образуваме матрицата –

$$E - A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-5}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

За главните минори имаме - $M_{11} = a_{11} = \frac{2}{3} > 0$, $M_{22} = \Delta = \frac{25}{72} > 0$, което показва продуктивността по този критерии.

1.2.чрез фробениусовото число λ_A. Образуваме характеристичното уравнение –

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} - \lambda & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{3} - \lambda\right)\left(\frac{1}{6} - \lambda\right) - \frac{5}{24} = 0$$

Неговите корени са $\lambda_1 \approx 0{,}71$ *и* $\lambda_2 \approx -0{,}21$. Съгласно теоремата на Фробениус – Перон $\lambda_A = \lambda_1 \approx 0{,}71 < 1$, което показва продуктивността по този критерии.

1.3. според Теорема 4.4. Образуваме сумите на елементите по редове

$$a_1 = a_{11} + a_{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} < 1$$

$$a_2 = a_{21} + a_{22} = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

Тъй като a_1 *и* a_2 са по-малки или равни на 1 , а a_1 е строго по-малко от 1 , то и по този критерии установяваме продуктивност.

2. Намиране на решението. Тъй като за тази технологична матрица A моделът е продуктивен, следва че съществува обратна матрица $(E - A)^{-1}$, която е

неотрицателна и $X = (E - A)^{-1}Y$. Получаваме $(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ и $X = (7{,}68; 12{,}48)^T$.

3. Възстановяване на модела. Окончателната балансова таблица се получава от $AX + Y = X$. В нашия случай тя е:

	Отрасъл №1	Отрасъл №2	Крайно потребление	Обща продукция
Отрасъл №1	2,56	3,12	2	7,68
Отрасъл №2	6,40	2,08	4	12,48
Добавена стойност	-1,28	7,28		
Обща продукция	7,68	12,48		

Така например 3,12 е стойността на продукцията на първият отрасъл вложена във втория отрасъл , 6,40 е сумата която първият отрасъл е заплатил на втория отрасъл за да придобие неговият продукт , който е вложил в своето производство. Да отбележим , че макар и продуктивен този модел не е печеливш за първият отрасъл – неговите разходи са ресурси $\bar{a}_{11} + \bar{a}_{21} = 8{,}96$, а общите му приходи са 7,68 т.е. той работи на загуба.

А сега нека да пресметнем вектор X рекурентно т.е. като използваме степените на технологичната матрица A (8). Получаваме следната редица:

$$X_0 = Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, X_1 = Y + AX_0 \approx \begin{pmatrix} 3{,}67 \\ 6{,}33 \end{pmatrix}, X_2 = Y + AX_1 \approx \begin{pmatrix} 4{,}81 \\ 8{,}11 \end{pmatrix}$$

$$X_3 = Y + AX_2 \approx \begin{pmatrix} 5{,}63 \\ 9{,}36 \end{pmatrix}, \quad X_4 = Y + AX_3 \approx \begin{pmatrix} 6{,}22 \\ 10{,}25 \end{pmatrix}, X_5 = Y + AX_4 \approx \begin{pmatrix} 6{,}63 \\ 10{,}89 \end{pmatrix}$$

$$X_6 = Y + AX_5 \approx \begin{pmatrix} 6{,}93 \\ 11{,}35 \end{pmatrix}, \ X_7 = Y + AX_6 \approx \begin{pmatrix} 7{,}15 \\ 11{,}67 \end{pmatrix} \text{ и т.н.}$$

От горната рекурентна редица се вижда че твърде бързо се приближава към точния отговор X, получен по метода на обратната матрица.

Пример 11 (Леонтиев). При n=3 в таблицата са дадени разходите на всеки отрасъл , необходими за производството на единица от собствената си продукция и за производството на единица от продукцията на всеки от останалите два отрасъла

Сектор	земеделие	промишленост	Обслужващ сектор
Земеделие	0,35	0,13	0,09
Промишленост	0,11	0,27	0,29
Обслужващ сектор	0,44	0,32	0,04

Нека количествата от продукция на всеки сектор , необходими за крайния потребител да възлизат съответно на – 3,12 млрд. $ от земеделие , 29,36 млрд. $ от промишленост и 32,24 млрд. $ от обслужващия сектор. Каква трябва да е стойността на общата продукция на всеки от трите отрасъла за да бъде балансиран моделът?

Таблицата задава матрицата A на преките разходи т.е.

$A = \begin{pmatrix} 0,35 & 0,13 & 0,09 \\ 0,11 & 0,27 & 0,29 \\ 0,44 & 0,32 & 0,04 \end{pmatrix}$, а за вектора Y имаме $Y = \begin{pmatrix} 3,12 \\ 29,36 \\ 32,24 \end{pmatrix}$

Решение:

1.Проверка за продуктивност -

1.1. По критерия на Хоукинс – Саймън. Образуваме матрицата $E - A = \begin{pmatrix} 0,65 & -0,13 & -0,09 \\ -0,11 & 0,73 & -0,29 \\ -0,44 & -0,32 & 0,96 \end{pmatrix}$

За главните минори имаме - $M_{11} = a_{11} = 0,65 > 0$, $M_{22} = 0,46 > 0$ $и$ $M_{33} = 0,33 > 0$, което показва продуктивността по този критерий.

1.2. Според Теорема 4.4. Образуваме сумите на елементите по редове –

$$a_1 = a_{11} + a_{12} + a_{13} = 0,35 + 0,13 + 0,09 = 0,57 < 1$$

$$a_2 = a_{21} + a_{22} + a_{23} = 0,11 + 0,27 + 0,29 = 0,67 < 1$$

$$a_3 = a_{31} + a_{32} + a_{33} = 0,44 + 0,32 + 0,04 = 0,8 < 1$$

Тъй като a_1 , a_2 $и$ a_3 са по-малки от 1 , то и по този критерии установяваме продуктивност.

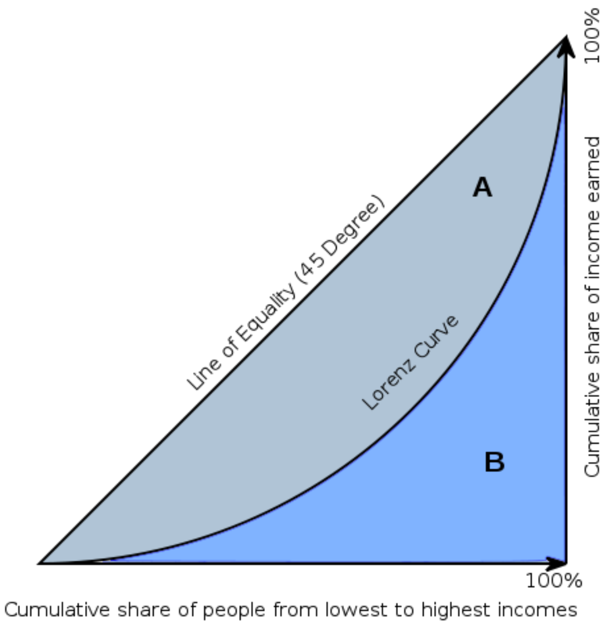
2. Намиране на решението. Тъй като за тази технологична матрица A моделът е продуктивен следва , че съществува обратна матрица $(E - A)^{-1}$ която е неотрицателна и $X = (E - A)^{-1}Y$. Получаваме $(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,85 & 0,45 & 0,33 \\ 0,73 & 1,76 & 0,61 \\ 1,06 & 0,82 & 1,39 \end{pmatrix}$ и $X = (29,62; 73,62; 72,19)^T$.

3. Възстановяване на модела. Окончателната балансова таблица се получава от $AX + Y = X$. В нашия случай тя е:

сектор	земеделие	промишлен ост	Обслужващ сектор	Крайно потребление	Обща продукция
Земеделие	10,37	9,57	6,50	3,12	29,62
Промишле ност	3,26	19,88	20,93	29,36	73,62
Обслужва щ сектор	13,03	23,56	2,89	32,24	72,19
Добавена стойност	2,96	20,61	41,87		
Обща продукция	29,62	73,62	72,19		

Да отбележим , че този модел е печеливш и за трите отрасъла – защото 2,96, 20,61 и 41,87 са по-големи от 0.

5. Моделиране на социално-икономическото неравенство. Крива на Лоренц и индекс на Джини



Най-добрият начин да бъде моделирано неравенството на доходите е като се използват кривата на Лоренц и индекса на Джини. Кривата на Лоренц се получава така: абсцисата се използва за нанасяне на комулативния дял на хората от най-ниските до най-високите доходи, а ординатата – за комулативният дял от доходите. Така например, ако най-бедните 20% получават 4% от общия доход, следващите 20% - 12% от дохода, средните 20% получават 20% от дохода, предпоследните по бедност (и вторите по богатство) 20% - 28% от дохода и най-богатите 20% - 36% от дохода, то кривата на Лоренц ще свързва точките с координати (0%,0%), (20%,4%), (40%,16%), (60%,36%), (80%,64%) и (100%,100%) – в проценти или (0,0), (0,2;0,04), (0,4;0,16), (0,6;0,36), (0,8;0,64) – (1;1) – в дялове от цялото. Нека да означим с B лицето на областта, разположена под кривата на Лоренц, а с A – лицето на областта между кривата на Лоренц и линията $y = x$, съответстваща на абсолютно равенство на доходите, тогава

$$\text{индекса на Джини } D = \frac{A}{A+B} = \frac{\frac{1}{2} - \int_0^1 f(x)dx}{\frac{1}{2}} = 1 - 2\int_0^1 f(x)dx$$

ако $y = f(x)$ е аналитичния вид на кривата на Лоренц. Вижда се, че при $D = 0$ имаме абсолютно равенство на доходите, а при $D = 1$ – абсолютно недавенство. Тези две състояния са икономически невъзможни, следователно $D \in (0,1)$.

Най-често за моделиране на кривата на Лоренц се използва степенната функция $y = x^\alpha$, $\alpha > 1$. При това положение индексът на Джини D и степенния показател α са свързани:

$$D = 1 - 2\int_0^1 x^\alpha dx = 1 - 2\frac{1}{\alpha+1} = \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \Longrightarrow \alpha = \frac{1+D}{1-D}$$

В долната таблица са нанесени някои характерни стойности на D и α

Индекс на Джини D	0,2	0,3	0,33	0,4	0,43	0,5	0,56	0,6	0,64	0,67
Степенен показател α	1,5	1,86	2	2,33	2,5	3	3,5	4	4,5	5

Медианен доход. Медианният доход е доходът по средата, т.е. предполага се, че половината от хората получават доход, по-висок от него, а другата половина – по-нисък. Това е важен индикатор на социално-икономическото неравенство, защото повечето хора възприемат този доход на средния човек като среден доход. Нека $y = f(x)$ е аналитичния вид на кривата на Лоренц. Тогава средният като доходи човек $(x = 0{,}5)$ го включваме в една група с хора с по-високи доходи $(x \in (0{,}5; 0{,}5 + \delta))$ и в симетричната група с по-ниски $(x \in (0{,}5 - \delta; 0{,}5))$. тога. Тогава средният доход на тази обединена група ще бъде

$$\frac{f(0{,}5+\delta) - f(0{,}5-\delta)}{(0{,}5+\delta) - (0{,}5-\delta)} = \frac{f(0{,}5+\delta) - f(0{,}5-\delta)}{2\delta}.$$

При граничен преход ($\delta \to 0$) получаваме медианния доход:

$$M = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(0{,}5+\delta) - f(0{,}5-\delta)}{2\delta} = f'(0{,}5).$$

За степенната функция $y = x^\alpha$ ще имаме

$$M = \frac{\alpha}{2^{\alpha-1}}.$$

Разбира се, това което сме означили с M е съотношението между медианния и среден доход. От горното равенство се вижда, че при $\alpha \in (1,2)$ медианният доход е по-висок от средния, при $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$ те се изравняват (при $\alpha = 1$ всички доходи са изравнени), а при $\alpha > 2$ медианният доход е по-нисък от средния (което е най-разпространения случай.

Минимален доход. По аналогичен начин се извежда, че за минималният доход m е изпълнено

$$m = f'(0).$$

Ясно е, че за степенната функция $y = x^{\alpha}$ ще имаме $m = 0$, следователно тя не е подходяща за моделиране на разпределение на доходите с определен минимален доход. За това се използва функцията

$$y = kx + (1-k)x^{\alpha}.$$

Тогава ще имаме $f'(0) = m = k$, т.е k е съотношението на минималния към средния доход.

Пример 12. Ако е известно, че индекса на Джини за България е 0,35, моделирайте разпределението на доходите:

а) с функция от вида $y = x^{\alpha}$;

б) с функция от вида $y = kx + (1-k)x^{\alpha}$, ако е известно, че минималният доход е 40% от средния.

И в двата случая намерете съотношението на медианния доход към средния, както и разпределението на доходите, ако хората са разделени на пет равночислени групи.

Решение:

а) Пресмятаме α по формулата, изведена по-горе

$$\alpha = \frac{1+D}{1-D} = \frac{1+0{,}35}{1-0{,}35} = \frac{1{,}35}{0{,}65} = 2{,}08.$$

Тогава ще имаме

$$y = x^{2{,}08}.$$

За съотношението на медианния доход към средния получаваме

$$M = \frac{\alpha}{2^{\alpha-1}} = \frac{2{,}08}{2^{1{,}08}} = 0{,}98,$$

следователно медианният доход е 98% от средния. За да получим разделението на доходите на пет равночислени групи ще трябва да пресметнем $f(0{,}2)$, $f(0{,}4)$, $f(0{,}6)$ и $f(0{,}8)$. Ще имаме

$$f(0{,}2) = 0{,}2^{2{,}08} = 0{,}035;\ f(0{,}4) = 0{,}4^{2{,}08} = 0{,}149;\ f(0{,}6) = 0{,}6^{2{,}08} = 0{,}346;\ f(0{,}8) = 0{,}8^{2{,}08} = 0{,}629.$$

Тогава най-бедните 20% от хората ще получават $f(0{,}2) = 0{,}035 = 3{,}5\%$ от всички доходи; следващата група - $f(0{,}4) - f(0{,}2) = 0{,}149 - 0{,}035 = 0{,}114 = 11{,}4\%$; средната група - $f(0{,}6) - f(0{,}4) = 0{,}346 - 0{,}149 = 0{,}197 = 19{,}7\%$; следващата - $f(0{,}8) - f(0{,}6) = 0{,}629 - 0{,}346 = 0{,}283 = 28{,}3\%$ и най-богатата - $f(1) - f(0{,}8) = 1 - 0{,}629 = 0{,}371 = 37{,}1\%$. Нанасяме тези резултати в таблица

група	от-до	% от общия доход	среден доход
бедни	от 0% до 20%	3,5%	17,5%
средно бедни	от 20% до 40%	11,4%	57%
средни	от 40% до 60%	19,7%	98,5%
средно богати	от 60% до 80%	28,3%	141,5%
богати	от 80% до 100%	37,1%	185,5%

б) Ще търсим функция от вида $y = 0{,}4x + 0{,}6x^{\alpha}$ (минималният доход е 40%=0,4 от средния). Индексът на Джини за тази функция е

$$D = 1 - 2\int_0^1 (0{,}4x + 0{,}6x^{\alpha})dx = 1 - 2\left(0{,}2 + \frac{0{,}6}{\alpha + 1}\right) = 0{,}6\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \Longrightarrow \alpha = \frac{0{,}6 + D}{0{,}6 - D}.$$

При $D = 0{,}35$ ще имаме

$$\alpha = \frac{0{,}6 + D}{0{,}6 - D} = \frac{0{,}6 + 0{,}35}{0{,}6 - 0{,}35} = \frac{0{,}95}{0{,}25} = 3{,}8.$$

Тогава за функцията на разпределение на доходите получаваме

$$y = 0{,}4x + 0{,}6x^{3{,}8}.$$

Тогава най-бедните 20% от хората ще получават $f(0{,}2) = 0{,}081 = 8{,}1\%$ от всички доходи; следващата група - $f(0{,}4) - f(0{,}2) = 0{,}178 - 0{,}081 = 0{,}097 = 9{,}7\%$; средната група - $f(0{,}6) - f(0{,}4) = 0{,}326 - 0{,}178 = 0{,}148 = 14{,}8\%$; следващата - $f(0{,}8) - f(0{,}6) = 0{,}577 - 0{,}326 = 0{,}251 = 25{,}1\%$ и най-богатата - $f(1) - f(0{,}8) = 1 - 0{,}577 = 0{,}423 = 42{,}3\%$. Нанасяме тези резултати в таблица

група	от-до	% от общия доход	среден доход
бедни	от 0% до 20%	8,1%	40,5%
средно бедни	от 20% до 40%	9,7%	48,5%
средни	от 40% до 60%	14,8%	74%
средно богати	от 60% до 80%	25,1%	125,5%
богати	от 80% до 100%	42,3%	211,5%

За съотношението на медианния доход към средния получаваме

$$M = 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 3{,}8 \cdot 0{,}5^{2{,}8} = 0{,}727 = 72{,}7\%,$$

следователно медианният доход е 72,7% от средния.

Пример 13. Известно е, че индексът на Джини за една държава е 0,32, а медианната заплата е 86% от средната. Да се моделира разпределението на доходите чрез функцията

$$y = \alpha x + \beta x^2 + (1 - \alpha - \beta)x^3.$$

Намерете разпределението на доходите, ако хората са разделени на пет равночислени групи.

Решение:

За индексът на Джини на горната функция ще имаме

$$D = 1 - 2\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3} + \frac{1 - \alpha - \beta}{4}\right) = \frac{3 - 3\alpha - \beta}{6}.$$

Тъй като по условие $D = 0{,}32$, то получаваме следното уравнение за неизвестните α и β

$$3\alpha + \beta = 1{,}08.$$

За медианния доход при такава функция ще имаме

$$M = y'(0{,}5) = \alpha + 2\beta \cdot 0{,}5 + 3(1 - \alpha - \beta) \cdot 0{,}25 = 0{,}75 + 0{,}25\alpha + 0{,}25\beta.$$

Тъй като по условие $M = 86\% = 0{,}86$, то получаваме още едно уравнение за неизвестните α и β

$$\alpha + \beta = 0{,}44.$$

Решавайки горната система получаваме $\alpha = 0{,}32$ и $\beta = 0{,}12$. Тогава функцията моделираща разпределението на доходите ще бъде

$$y = 0{,}32x + 0{,}12x^2 + 0{,}56x^3$$

Тогава най-бедните 20% от хората ще получават $f(0{,}2) = 0{,}073 = 7{,}3\%$ от всички доходи; следващата група - $f(0{,}4) - f(0{,}2) = 0{,}183 - 0{,}073 = 0{,}11 = 11\%$; средната група - $f(0{,}6) - f(0{,}4) = 0{,}356 - 0{,}183 = 0{,}173 = 17{,}3\%$; следващата - $f(0{,}8) - f(0{,}6) = 0{,}62 - 0{,}356 = 0{,}264 = 26{,}4\%$ и най-богатата - $f(1) - f(0{,}8) = 1 - 0{,}62 = 0{,}38 = 38\%$. Нанасяме тези резултати в таблица

група	от-до	% от общия доход	среден доход
бедни	от 0% до 20%	7,3%	36,5%
средно бедни	от 20% до 40%	11%	55%
средни	от 40% до 60%	17,3%	86,5%
средно богати	от 60% до 80%	26,4%	132%
богати	от 80% до 100%	38%	190%

Пример 14. В един университет има 130 професори със средно годишна заплата от 25000 лв., 260 доценти с 21000 лв., 390 асистенти с 1600 лв. и 520 служители с 10000 лв. Пресметнете индекса на Джини за този университет.

Решение:

Общият брой на хората, работещи в университета е 130+260+390+520=1300. Тогава професорите съставляват 10%=0,1 от общия брой, доцентите – 20%=0,2, асистентите – 30%=0,3 и служителите – 40%=0,4. Въз основа на това можем да пресметнем средната заплата на работещите в този университет. Тя е

$$0{,}1 \cdot 25 + 0{,}2 \cdot 21 + 0{,}3 \cdot 16 + 0{,}4 \cdot 10 = 15{,}5$$

или 15500 лв. Тогава средната заплата на служителите ще представлява 0,645=64,5% от тази средна заплата и тъй като те са 0,4 от общия брой, то на тях ще се падат 0,258=25,8% от всички доходи. За асистентите – 1,032 спрямо средната заплата и 0,3096=30,96% от общите доходи, за доцентите – 1,355 спрямо средната заплата и 0,271=27,1% от общите доходи, тогава за професорите остават 0,1614=16,14% от доходите. Нека $f(x)$ е функцията на разпределение на доходите. Тогава $f(0{,}4)$ (най-бедната група – служителите съставлява 0,4 от общия брой) ще бъде дела на дохода на служителите от общия доход, т.е. $f(0{,}4) = 0{,}258$. $f(0{,}7)$ (най бедната и следващата по бедност група обхващат 0,7 от общия брой на работещите в университета) ще бъде равно на $0{,}258 + 0{,}3096 = 0{,}5676$ (колкото е дела на доходите на служителите и асистентите). И накрая, $f(0{,}9) = 0{,}8386$. Ако с S означим лицето на фигурата, разположена под начупената линия, съединяваща точките с координати (0;0), (0,4;0,258), (0,7;0,5676), (0,9;0,8386) и (1;1), то за индекса на Джини D ще имаме

$$D = \frac{\frac{1}{2} - S}{\frac{1}{2}} = 1 - 2S.$$

Тази фигура (с лице S) се състои от четири фигури, чиито лица означаваме с S_1, S_2, S_3 и S_4. Първата фигура е триъгълник, а другите три – трапци. За лицата им ще имаме

$$S_1 = \frac{0,4 \cdot 0,258}{2} = 0,0516, \qquad S_2 = \frac{0,3(0,258 + 0,5676)}{2} = 0,12384,$$

$$S_3 = \frac{0,2(0,5676 + 0,8386)}{2} = 0,14062, \qquad S_4 = \frac{0,1(0,8386 + 1)}{2} = 0,09193.$$

Тогава, за S получаваме

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 0,0516 + 0,12384 + 0,14062 + 0,09193 = 0,40799.$$

Така за индекса на Джини D ще имаме

$$D = 1 - 2S = 1 - 2 \cdot 0,40799 = 0,184.$$

Как се получава индекса на Джини в случай, че всички домакинства са разделени на n групи с равна численост. Нека техните средни доходи са $y_1, y_2, \dots, y_n$. Тогава се прилага формулата

$$D = \frac{1}{\bar{y}n^2} \sum_{i,j:i<j} |y_j - y_i|$$

където с D е означен индекса на Джини, а с $\bar{y} = \frac{1}{n}(y_1 + \dots + y_n)$ - средния доход.

Пример 15. Всички домакинства са разделени на 5 равночислени групи, чиито доходи са както следва

I	II	III	IV	V
1400	800	500	300	200

Да се пресметне индекса на Джини.

Решение:

Ясно е, че $n = 5$ и $\bar{y} = \frac{1}{5}(1400 + 800 + 500 + 300 + 200) = 640$. Тогава за индекса на Джини получаваме

$$D = \frac{100 + 300 + 600 + 1200 + 200 + 500 + 1100 + 300 + 900 + 600}{640 \cdot 25} = \frac{5800}{16000}$$
$$= 0,3625.$$

6. Безработица

Приемаме, че за изследвания период от време обема на трудовите ресурси R е константен. Той включва две групи – заети трудови ресурси N и безработни U, т.е. $R = N + U$. Делът на безработните към обема на трудовите ресурси

$$u = \frac{U}{R}$$

се нарича отчетена безработица.
Означаваме с δ делът от всички работещи, които през даден период са загубили работата си, а с γ - делът от всички безработни, които през същия период са постъпили на работа. Изменението на броя работещи през този период ще се осъществява по формулата

$$\Delta N = \gamma U - \delta N$$

Ще имаме пълна заетост ако $\Delta N = 0$ или $\gamma U = \delta N$, т.е.

$$\gamma U = \delta(R - U)$$

Решаваме горното уравнение относно U:

$$U = \frac{\delta R}{\gamma + \delta}$$

Горната формула определя броя на безработните в условие на пълна заетост (при $\Delta N = 0$). Пресмятаме техния дял спрямо активните трудови ресурси

$$\frac{U}{R} = \frac{\delta R}{(\gamma + \delta)R} = \frac{\delta}{\gamma + \delta} = u^*$$

Полученият коефициент u^* се нарича норма на естествена безработица.

Разликата между фактическото u и естественото u^* ниво на безработицата се нарича конюнктурна безработица: $u_k = u - u^*$.

Ако потенциално възможният брутен продукт в условие на пълна заетост ($u_k = 0$) означим с $y_F(N^*)$ $(N^* = (1 - u^*)R)$, а брутния продукт при положителна конюнктурна безработица - $y(N)$, разликата $y_F(N^*) - y(N)$ образува конюнктурен разрив на брутния продукт. На базата на емпирични данни Артур Оукен е намерил устойчива връзка между величините на конюнктурната безработица и конюнктурния разрив, а именно валидно е съотношението

$$\frac{y_F - y}{y_F} = \theta(u - u^*) = \theta u_k,$$

където θ е параметъра на Оукен.

Пример 16. Трудовите ресурси на една държава възлизат на 3 млн. До края на месец декември в страната е имало 10% отчетена безработица.

а) През периода януари – юни (включително) 2% от заетите напускат работа, а 38% от безработните започват да работят. Определете динамиката на конюнктурната безработица и попълнете таблицата (като всички величини се пресмятат до стотни).

б) Ситуацията на пазара на труд се задържа със същите параметри, като в а) през първото тримесечие, а през второто се влошава рязко - 3% от заетите напускат работа, а 27% от безработните започват да работят. Определете динамиката на конюнктурната безработица и попълнете таблицата (като всички величини се пресмятат до стотни).

	1	2	3	4	5	6
N						
U						
δN						
γU						
ΔN						
u_k						

Решение:

а) Ще измерваме в хиляди. През януари $t = 1$ е имало 2700 работещи и 300 безработни. От тези работещи напускат работа 2% от $2700 = 0{,}02 \cdot 2700 = 54$, хората, започващи работа са 38% от $300 = 0{,}38 \cdot 300 = 114$, следователно $\Delta N = \gamma U - \delta N = 114 - 54 = 60$. Тези 60 прибавяме към N за следващия месец (февруари, $t = 2$) и изваждаме от U. Така получаваме $N(t = 2) = 2760$ и $U(t = 2) = 240$. Тогава ще имаме $\delta N(t = 2) = 0{,}02 \cdot 2760 = 55{,}2$ и $\gamma U(t = 2) = 0{,}38 \cdot 240 = 91{,}2 \Rightarrow \Delta N(t = 2) = \gamma U(t = 2) - \delta N(t = 2) = 91{,}2 - 55{,}2 = 36$.
По този начин попълваме клетките на таблицата (без тези от последния ред). През всички месеци естествената безработица u^* е една и съща

$$u^* = \frac{\delta}{\delta + \gamma} = \frac{0{,}02}{0{,}02 + 0{,}38} = 0{,}05 = 5\%.$$

Тъй като през януари отчетената безработица е 10%, то $u_k(t = 1) = 10\% - 5\% = 5\%$. През февруари отчетената безработица ще бъде

$$u(t = 2) = \frac{U(t = 2)}{U + N} = \frac{240}{3000} = 0{,}08 = 8\%,$$

Тогава ще имаме $u_k(t = 2) = 8\% - 5\% = 3\%$. След като направим пресмятанията при $t = 2, \dots 6$ по същия начин попълнената таблица изглежда така

	1	2	3	4	5	6
N	2700	2760	2796	2817,6	2830,56	2838,34
U	300	240	204	182,4	169,44	161,66
δN	54	55,2	55,92	56,35	56,61	56,77
γU	114	91,2	77,52	69,31	64,39	61,43
ΔN	60	36	21,6	12,96	7,78	4,66
$u_k\%$	5	3	1,8	1,08	0,65	0,39

б) Тъй като конюнктурата през първите три месеца съвпада с тази от а), то колоните, съответстващи на $(t = 1)$, $(t = 2)$ и $(t = 3)$ ще останат същите. При $(t = 4)$ ще имаме $N(t = 4) = 2817{,}6$ и $U(t = 4) = 182{,}4$, тогава отчетената безработица ще е $u(t = 4) = 6{,}08$, но естествената безработица u^* ще се е променила, в следствие на промяната на коефициентите δ и γ:

$$u^* = \frac{\delta}{\delta + \gamma} = \frac{0{,}03}{0{,}03 + 0{,}27} = 0{,}1 = 10\%.$$

Тогава за конюнктурната безработица през този месец получаваме $u_k(t = 4) = 6{,}08\% - 10\% = -3{,}92\%$. През април съкратените работници ще са $\delta N(t = 4) = 0{,}03 \cdot 2817{,}6 = 84{,}53$, а започналите работа - $\gamma U(t = 4) = 0{,}27 \cdot 182{,}4 = 49{,}2$, в следствие на което промяната на заетостта ще бъде $\Delta N(t = 4) = \gamma U(t = 4) - \delta N(t = 4) = 49{,}2 - 84{,}53 = -35{,}33$. Това ще се отрази на работещите и безработните през май: $N(t = 5) = N(t = 4) + \delta N(t = 4) = 2817{,}6 - 35{,}33 = 2782{,}27$; $U(t = 5) = U(t = 4) - \delta N(t = 4) = 182{,}4 + 35{,}33 = 217{,}73$. По същия начин попълваме колонките, съответстващи на $t = 5$ и $t = 6$ и получаваме

	1	2	3	4	5	6
N	2700	2760	2796	2817,6	2782,27	2757,59
U	300	240	204	182,4	217,73	242,41
δN	54	55,2	55,92	84,53	83,47	82,73
γU	114	91,2	77,52	49,2	58,79	65,45
ΔN	60	36	21,6	-35,33	-24,68	-17,28
$u_k\%$	5	3	1,8	-3,92	-2,74	-1,92