АНАЛИТИЧНА МАКРОИКОНОМИКА

Асен Христов

Пловдив

2020

Съдържание

Предговор

Макроикономиката е едновременно дял от теоретичната икономическа наука и подход за анализ на икономическите явления и техните модели. Обособяването ѝ се извършва през 30-те години на миналия век, оттогава интересът към нейните методи е много голям – сред финансисти, мениджъри и политици. Още в началото на нейното развитие, в макроикономическия анализ бурно навлизат разнообразни математически методи, които икономистите обикновено наричат „аналитични“. Настоящият електронен учебник е посветен на изложението на такива математически модели в макроикономиката, станали вече класически.

В учебника са обособени две части – макроикономическа статика и динамика.

В макроикономическата статика са въведени базови за дисциплината понятия и са разгледани някои класически модели, необходими за изложението във втората част. В параграф 1 са въведени някои основни за макроикономиката понятия – брутен вътрешен продукт (БВП), дефлатор на БВП, икономически кръгооборот. В следващия параграф е разгледана макроикономическата производствена функция – на една и две ресурсни променливи. В основният за тази част параграф 3 е разгледано общото икономическо равновесие (ОИР) в някои негови основни варианти – неокласически модел на ОИР, кейнсиански модел на ОИР, неокласически синтез. Параграф 4 е посветен на многоотрасловия макроикономически анализ – разгледан е базовия балансов модел на Леонтиев. В следващия параграф са показани някои модели на социално-икономическото неравенство, основаващи се на кривата на Лоренц и индекса на Джини. Последния за тази част параграф 6 е посветен на моделирането на безработицата.

В макроикономическата динамика са разгледани по-сложни модели – в тях икономическите функции зависят от времето по непрекъснат или по дискретен начин. Параграф 7 е елементарно въведение в динамичните модели, а параграф 8 е посветен на най-простия от тях – динамичния модел на Кейнс с непрекъснато време. Моделът на Кейнс с дискретно време е разгледан в параграф 9, а в параграф 10 са разгледани моделите на Харод-Домар с непрекъснато и дискретно време. Тъй като при моделите на Кейнс и Харод-Домар може да се получи стабилен ръст на националния доход само при малко вероятни релации между началните данни, в параграф 11 е разгледан модела на Калдор, който се опитва да избегне това противоречие чрез превръщането на нормата на спестяване в ендогенна величина. Следващите два параграфа – 12 и 13 са посветени на динамични модели на Леонтиев – еднопродуктов и отраслов. Цели 4 параграфа (14, 15, 16 и 17) са посветени на неокласическия модел на икономически ръст на Солоу-Сван. Общата слабост на разглежданите досега модели на икономическият ръст е неотчитането на най-важния фактор за нарастване на икономиката – техническия прогрес. Затова в следващите 4 параграфа (18, 19, 20 и 21) са разгледани модели на икономически ръст с екзогенен (18, 19, 20) и ендогенен (21) технически прогрес. Всички досегашни динамични макроикономически модели са модели на икономическия ръст, последния (22) параграф е посветен на цял дял в макроикономиката – моделиране на икономическите цикли. Тук е намерил място само моделът на Самуелсън–Хикс (в дискретен вариант), но е разгледан сравнително подробно.

Поради ограничения в обема (а не като маловажни) не са разгледани други модели на икономическите цикли. Не са намерили място в този учебник и инфлационните модели, инфлационно-цикличните модели, както и моделите на икономическите кризи.

Целта на настоящият електронен учебник е да послужи на студентите от ФМИ на ПУ „П. Хилендарски“ за подготовка на избираемата дисциплина със същото име, но същевременно той запълва и един дефицит в литературата на български език за математическо моделиране в макроикономиката (а и в икономиката като цяло).

I. МАКРОИКОНОМИЧЕСКА СТАТИКА

1. Основни понятия в макроикономиката

В средата на XX век икономическата наука, изучаваща процесите на обществено производство, разпределение и използване на стоки и услуги в условие на ограниченост на ресурсите се разделя на два клона – микроикономика и макроикономика, различаващи се по предмет и методи на изследване.

Макроикономиката има за цел да определи резултатите от функционирането на националното стопанство като цяло. В макроикономиката се изследват факторите, определящи националния доход, нивото на безработица, темпа на инфлацията, състоянието на държавния бюджет и платежния баланс, темпа на икономически ръст и др.

Макроикономика – основни въпроси на които тя търси и дава отговори и съответните раздели

ВЪПРОСИ	РАЗДЕЛИ
Какво определя стойността на националния доход?	Теория на статичното макроикономическо равновесие
Какво представляват парите и каква е ролята им?	Теория на парите
Какво представлява нивото на цените и кое определя динамиката му?	Теория на инфлацията
От какво се определя нивото на заетост?	Теория на заетостта
Какви фактори определят колебанията на икономическата конюнктура?	Теория на икономическите цикли
Какви са условията за стабилен икономически ръст?	Теория на икономическия ръст

Агрегиране на макроикономическите субекти, функции и пазари.

Агрегиране на макроикономическите субекти. В макроикономическите анализи участват четири „действащи лица“, наричани сектори – **сектор на домакинствата, предприемачески сектор, правителствен сектор и външен сектор.**

Агрегиране на макроикономическите функции. Основните икономически функции на сектор домакинства са: да потребяват или спестяват разполагаемият си доход, да плащат данъци, да търсят пари и да предлагат своя труд. На базата на тези техни дейности се получават и съответните макроикономически функции: функция на потребление, функция на спестяване, функция на предлагане на труд. За предприемаческия сектор имаме функция на инвестиции и функция на търсене на труд. Тъй като и предприемачите, заедно с домакинствата, търсят пари за своята дейност, двата сектора заедно оформят функцията на търсене на пари. Освен това, за да произведат националния доход, предприемачите използват производствена технология, на базата на която се получава макроикономическата производствена функция – тя указва връзката на произведения национален доход с двата основно фактора за неговото производство – труда и капитала. Държавата събира приходи от данъци и извършва разходи, от там и съответните функции. Освен това държавата (чрез централната банка) предлага пари. Външният сектор (състоящ се от всички държави, различни от разглежданата) купува стоки (функция на износ) и продава стоки (функция на внос).

Агрегиране на макроикономическите пазари. Различават се четири пазара: **пазар на стоки** (и услуги), **пазар на труд**, **пазар на капитал** (акции и облигации) и **пазар на пари**. Пазарите на стоки и на труд образуват **реалния сектор** на икономиката, а пазарите на пари и ценни книжа – **монетарен сектор**.

Макроикономически модели. Опростяването на икономическата действителност до обозрим брой най-съществени взаимовръзки е в основата на макроикономическото моделиране. Моделираните взаимовръзки и процеси се описват във вид на математически уравнения. Моделирането включва две групи елементи – величини, известни до построяването на модела – **екзогенни** и такива, които се определят от модела – **ендогенни**. При построяването на макроикономическите модели се използват четири типа функционални уравнения: **поведенчески функции**, изразяващи сложилите се в обществото предпочитания; **производствени функции**; **институционални функции**, представляващи институционално установените зависимости между параметрите на модела и **дефиниционни функции**, изразяващи зависимости, съответстващи на вербално определените икономически явления.

Освен това, макроикономическите модели се делят на две големи групи – **статични** (при които се изключва времето като фактор) и **динамични.**

Брутен вътрешен продукт (Gross Domestic Product) БВП (GDP). Локално БВП се определя като сумата от добавените стойности, създадени за определен период от време от всички производители в дадена държава. Под добавена стойност се разбира разликата между приходите и материалните (нетрудови) разходи за производството и реализацията на продукцията. Глобално БВП е дефиниционна функция, определяща се така:

$$\mathrm{GDP} = y = C + I + G + (E - Z),$$

където C са разходите на домакинствата за крайни продукти (функция на потреблението), I – инвестициите в реален капитал (функция на инвестициите), G – правителствените разходи за крайни продукти, E – износа и Z – вноса. Понякога бележим $NE = E - Z$ – чист износ.

Чист национален продукт (ЧНП) – това е БВП минус амортизациите (еквивалент на величината на обезценяване на основния капитал за даден период от време).

Национален доход (НД) – ЧНП минус косвените данъци плюс субсидиите. Тогава ЧНП може да се разглежда като сума от резултатите на частния сектор (НД) и държавата (салдото от косвените данъци и субсидиите). От друга страна НД се разпада на факторни доходи – работна заплата (доход от труд), процент (доход от пари), рента (доход от собственост на земя и др. недвижими имоти) и предприемачески доход.

Ниво на цените – P е средно претеглената цена на произведените през дадения период стоки и услуги.

Нека $P^1(p_1^1, p_2^1, \dots, p_i^1, \dots, p_n^1)$ е ценовия вектор за текущия период, а $Q^1(q_1^1, q_2^1, \dots, q_i^1, \dots, q_n^1)$ – количествения вектор за текущия период, а $P^0(p_1^0, p_2^0, \dots, p_i^0, \dots, p_n^0)$ и $Q^0(q_1^0, q_2^0, \dots, q_i^0, \dots, q_n^0)$ – съответните вектори за базовия период, тогава величината

$$d^1 = \frac{P^1 Q^1}{P^0 Q^1} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i^1 q_i^1}{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^1} = \frac{\text{номинален продукт}}{\text{реален продукт}}$$

е **дефлатора** на продукта (дохода) за текущия период. Вижда се, че в знаменателя на израза за дефлатора всички количества от текущия период са оценени по цени от базовия период. Всички макроикономически величини, които се измерват в парични единици имат номинални и реални стойности. Ако P^1 е нивото на цените за текущия период, а P^0 – за базовия, то ще имаме $P^1 = P^0 d^1$. В макроикономическите анализи се приема, че нивото на цените през базовия период е единица, тогава $P^1 = d^1$.

Ясно е, че величината

$$NG^1 = \frac{P^1 Q^1}{P^0 Q^0} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i^1 q_i^1}{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^0},$$

явяваща се частно от номиналните продукти за текущия и базов период измерва номиналния ръст на продукта за текущия период (спрямо базовия). Тогава ще имаме

$$NG^1 = \frac{P^1 Q^1}{P^0 Q^0} = \frac{P^1 Q^1}{P^0 Q^1} \frac{P^0 Q^1}{P^0 Q^0} = d^1 RG^1,$$

където с

$$RG^1 = \frac{P^0 Q^1}{P^0 Q^0} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^1}{\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^0}$$

сме означили реалния ръст на продукта за текущата година, т.е. номиналният ръст е произведение на дефлатора с реалния ръст.

Пример 1. Дадени са следните данни за номиналния БВП и дефлатора на БВП на България по години

Година	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
БВП	1761	17432	22421	23790	26752	29709	32335	34546	38275	41948	46173
дефлатор	-	10,48	1,237	1,037	1,067	1,065	1,038	1,023	1,048	1,038	1,034

а) Пресметнете номиналния и реален ръст на БВП на България по години.

б) Пресметнете реалния ръст на БВП на България за целия разглеждан период.

в) Пресметнете средния годишен реалния ръст на БВП на България за целия разглеждан период.

Решение:

а) Първи подход. Ще пресметнем номиналния ръст на БВП по години и след като го разделим с дефлатора, ще получим реалния ръст. Резултатите нанасяме в таблица

Година	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
БВП	1761	17432	22421	23790	26752	29709	32335	34546	38275	41948	46173
дефлатор	-	10,48	1,237	1,037	1,067	1,065	1,038	1,023	1,048	1,038	1,034
NG	-	9,899	1,286	1,061	1,125	1,111	1,088	1,068	1,108	1,096	1,101
RG	-	0,945	1,040	1,023	1,054	1,043	1,048	1,044	1,057	1,056	1,065
$RG\%$	-	-5,5	4,0	2,3	5,4	4,3	4,8	4,4	5,7	5,6	6,5

Втори подход. Разделяме номиналния БВП за съответната година на дефлатора и така получаваме БВП, оценен по цените от предходната година (означен в долната таблица като $БВП_p$), който, разделен с номиналния БВП от предходната година дава реалния ръст на БВП (RG):

Година	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
БВП	1761	17432	22421	23790	26752	29709	32335	34546	38275	41948	46173
дефлатор	-	10,48	1,237	1,037	1,067	1,065	1,038	1,023	1,048	1,038	1,034
$БВП_p$	-	1663	18125	22,941	25,072	27896	31151	33767	36522	40412	44655
RG	-	0,944	1,040	1,023	1,054	1,043	1,048	1,044	1,057	1,056	1,065
$RG\%$	-	-5,6	4,0	2,3	5,4	4,3	4,8	4,4	5,7	5,6	6,5

б) Първи подход. Умножаваме получените в а) реални ръстове на БВП за 1997, 1998,…, 2005, 2006 и така получаваме ръста на БВП за десетгодишния период 1996-2006 г.:

$$0{,}945 \cdot 1{,}040 \cdot 1{,}023 \cdot 1{,}054 \cdot 1{,}043 \cdot 1{,}048 \cdot 1{,}044 \cdot 1{,}057 \cdot 1{,}056 \cdot 1{,}065 = 1{,}438,$$

което означава, че за този десетгодишен период икономиката е нараснала с 43,8%.

Втори подход. Разделяме БВП на 2006 г. последователно (от зад на пред) с всички дефлатори и така получаваме БВП за 2006 г., осенен по цени от 1996 г.:

$$46173 : 1{,}034 : 1{,}038 : 1{,}048 : 1{,}023 : 1{,}038 : 1{,}065 : 1{,}067 : 1{,}037 : 1{,}237 \\ : 10{,}48 = 2531$$

Така получения реален БВП за 2006 г. делим на БВП от 1996 и получаваме ръста:

$$\frac{2531}{1761} = 1{,}437.$$

в) Предполагаме, че БВП се изменя за този период с постоянен ръст q. Тогава БВП ще са членове на геометрична прогресия и съотношението на БВП от 2006 г. към БВП от 1996 г. ще бъде q на степен 10. Тогава ще имаме

$$q^{10} = 1{,}438 \Rightarrow 10 \ln q = \ln 1{,}438 = 0{,}363 \\ \Rightarrow \ln q = 0{,}0363 \Rightarrow q = e^{0{,}0363} = 1{,}037.$$

Така получихме, че средният реален ръст на БВП на България за периода 1996-2006 г. възлиза на 3,7% годишно. Ако пресметнем средно аритметичния ръст, то (поради това, че числата са малки) ще получим отново 3,7%.

Пример 2. БВП на една държава за 2015 год. възлиза на 100 млрд. от местната валута. Крайното потребление е 72 млрд., като съотношението между разходите на домакинствата и държавата е 3:1. Вносът превишава с 2 млрд. износа. През 2016 год. салдото по платежния баланс става нула, инвестициите нарастват с 8%, крайното потребление на домакинствата – с 10%, а крайното потребление на държавата – с 5%. Да се пресметне БВП за 2016 год., номиналния и реален ръст на БВП, ако дефлаторът за 2016 год. е 3,5%.

Решение:

Според формулата

$$y = C + I + G + (E - Z)$$

$$y = 100;\ C + G = 72 \ \text{ и } \ E - Z = -2 \Rightarrow I = 30.$$

Тъй като

$$C{:}G = 3{:}1 \ \text{ и } \ C + G = 72, \text{то } \ C = 54 \text{ и } \ G = 18.$$

Според данните, показателите за 2016 год. са

$$(E - Z)' = 0;\ I' = 1{,}08I = 32{,}4;\ C' = 1{,}1C = 59{,}4 \text{ и } G' = 1{,}05G = 18{,}9.$$

Тогава, за БВП за 2016 год. получаваме

$$y' = C' + I' + G' + (E - Z)' = 59{,}4 + 32{,}4 + 18{,}9 + 0 = 110{,}7,$$

следователно номиналният ръст на БВП е $1{,}107 = 10{,}7\%$. Реалният ръст на БВП за 2016 год. ще бъде

$$\frac{1{,}107}{1{,}035} = 1{,}0696 = 6{,}96\%.$$

Икономически кръгооборот. Бюджетът на даден субект отразява всички доходи и разходи на субекта и, следователно – изменението на богатството му. Тъй като доходите на едни са разходи за други, то всички бюджети са взаимосвързани и характеризират кръгооборота на парите в икономическата система. В долната таблица е даден опростен модел на икономическия кръгооборот в трисекторната икономика (без външен сектор)

от \ към	домакинства	фирми	държава	богатство
домакинства	-	C	T	S
фирми	y	-	0	0
държава	0	G	-	$T-G$
богатство	0	I	$G-T$	-

По редове са дадени разходите на дадения сектор, а по стълбове – приходите. Естествено, трябва да има равенство на разходи и приходи. От сектор домакинства получаваме

$$y = C + T + S,$$

а от предприемаческия сектор -

$$y = C + G + I.$$

Ако извадим второто равенство от първото, получаваме основно макроикономическо тъждество

$$T + S = G + I,$$

Т.е. равенство между всички изтегляния от потенциалното търсене и всички инжекции към него.

Пример 3. Бюджетният дефицит на даден държава възлиза на 3 млрд. парични единици от местната валута, националният доход за същата година е 185 млрд., Домакинствата се облагат с данъци в размер на 20% от доходите им, а функцията на техните спестявания има вида $S = -28 + 0{,}4y$. Да се попълни таблицата на икономическия кръгооборот в тази трисекторната икономика.

Решение:

От $T = 0{,}2y$ получаваме $T = 0{,}2 \cdot 185 = 37$. Тъй като бюджетният дефицит $G - T = 3$, то държавните разходи за крайни стоки са $G = 40$. От $S = -28 + 0{,}4y$ ще имаме $S = -28 + 0{,}4 \cdot 185 = 46$. Заместваме получените макроикономически величини в бюджетното равенство на сектор домакинства

$$y = C + T + S \Longrightarrow 185 = C + 37 + 46.$$

За крайното потребление на домакинствата получаваме $C = 102$. Сега заместваме в бюджетното равенство за предприемаческия сектор:

$$y = C + G + I \Longrightarrow 185 = 102 + 40 + I$$

и получаваме инвестициите на сектора $I = 43$. Сега вече можем да попълним таблицата на икономическия кръгооборот в тази трисекторната икономика

от \ към	домакинства	фирми	държава	богатство
домакинства	-	102	37	46
фирми	185	-	0	0
държава	0	40	-	0
богатство	0	43	3	-

2. Макроикономическа производствена функция

Макроикономическа производствена функция на една ресурсна променлива. Нека с N сме означили цялото количество труд, вложен в производството на националния доход в една държава за определен период от време (обикновено година), а с y – произведения национален доход за този период от време. Макроикономическа производствена функция $y = F(N)$ ще наричаме максималния национален доход, който може да се произведе при вложен труд в обем N. Така производствената функция свидетелства за технологията на производство, използвана от предприемаческия сектор. Понякога, в макроикономическите анализи се използва производствена функция на една ресурсна променлива – вложеното количество капитал.

Производната на тази функция $y' = F'(N)$ се нарича маргинална производителност (или ефективност) на труда.

Неокласическата производствена функция на една променлива удовлетворява следните аксиоми:

i. Не може да има доход без труд, т.е. $F(0) = 0$;
ii. С увеличаването на количеството труд, нараства и дохода, т.е. $F'(N) > 0$;
iii. С увеличаването на количеството труд, нарастването на дохода намалява (закон за намаляващата маргинална производителност на труда), т.е. $\left(F'(N)\right)' = F''(N) < 0$.

Горната аксиоматика показва, че всяка растяща вдлъбната функция, нулираща се в нулата, може да бъде използвана за моделиране на неокласическата зависимост на националния доход от количеството труд, вложено за производството му. Най-често се използват следните два вида производствени функции:

1. Да разгледаме производствена функция, която е квадратен тричлен, т.е. $y = aN^2 + bN + c$. От i. следва, че $c = 0$ и $y = aN^2 + bN$. От ii., тъй като $y'' = a < 0$ се получава $y = bN - aN^2$. Тогава $y' = b - 2aN > 0 \Leftrightarrow N < b/2a$. Ако N_0 е максималното възможно количество труд и $N_0 \leq b/2a$, то при $N \in (0, N_0)$

функцията $y = bN - aN^2$ $(a > 0, b > 0)$ удовлетворява всички аксиоми на неокласическа производствена функция.

2. Сега ще разгледаме степенна производствена функция, т.е. $y = aN^{\alpha}$. Условието $i.$ е автоматично изпълнено. Тъй като $y' = \alpha a N^{\alpha-1}$, то за да бъде изпълнено $ii.$, трябва $\alpha > 0$. От друга страна, $y'' = \alpha(\alpha-1)aN^{\alpha-2}$ и $\alpha < 1$ е условието за отрицателност на втората производна. Така окончателно, степенната функция $y = aN^{\alpha}$, $a > 0$, $\alpha \in (0,1)$ удовлетворява всички аксиоми на неокласическа производствена функция.

Нека една конкурентна унипродуктна фирма с микроикономическа производствена функция на една ресурсна променлива $q = F(L)$ (q е количеството от произвежданата стока, а L – количеството, вложен за производството ѝ труд) да максимализира печалбата си. Тъй като $R = pq = pF(L)$ са приходите ѝ (p е цената на произвежданата стока), а $C = C_0 + WL$ (W е номиналната работна заплата, WL са разходите за труд, а C_0 – нетрудовите разходи) – нейните разходи, то печалбата ще бъде

$$\Pi = \Pi(L) = R - C = pF(L) - (C_0 + WL).$$

Условието за максимализиране на печалбата от първи ред е

$$\Pi'(L) = 0 \Leftrightarrow pF'(L) - W = 0 \text{ или } F'(L) = \frac{W}{p},$$

т.е. маргиналната производителност на труда трябва да съвпада с относителната му цена. Условието от втори ред $\Pi''(L) = pF''(L) < 0$ е автоматично изпълнено (при неокласическа производствена функция), т.е. става дума за максимум на $\Pi(L)$.

В условие на конкуренция всички фирми максимализират печалбите си и условието от първи ред добива вида

$$F'(N) = \frac{W}{P} = w,$$

където W е номиналната работна заплата, P – нивото на цените, а w – реалната работна заплата.

Пример 4. Предполага се, че функционалната зависимост на националния доход на една държава y (в млрд. от паричната ѝ единица) от броя на заетите N (в млн.) е от вида $y = bN - aN^2$ $(a > 0, b > 0)$. Счита се, че максималната стойност на националния доход от 122,5 може да се постигне при заетост $N = 3{,}5$. През 2016 год. средната годишна номинална и реална работна заплата възлиза на 12 хил. парични единици. Да се пресметнат: обема на заетост; националния доход за 2016 год. и разпределението му, ако нетрудовите разходи възлизат на 45 млрд.

Решение:

Тъй като $y' = b - 2aN$, то максимумът на функцията $y = bN - aN^2$ ще се достига при $N = b/2a$, следователно $b/2a = 3{,}5$ и $b = 7a$. Тогава видът на макроикономическата производствена функция ще бъде $y = 7aN - aN^2$. От друга страна $y(N = 3{,}5) = 24{,}5a - 12{,}25a = 12{,}25a = 122{,}5$, следователно $a = 10$ и $y = 70N - 10N^2$. Тъй като номиналната заплата W и реалната заплата w съвпадат, нивото на цените е $P = 1$. Тогава условието от първи ред ще бъде

$$F'(N) = 70 - 20N = w = 12,$$

от където получаваме $N = 2{,}9$. При такъв обем на заетост ще се произведе национален доход в размер на $y(N = 2{,}9) = 70 \cdot 2{,}9 - 10 \cdot 2{,}9^2 = 118{,}9$. Тогава приходите на предприемаческия сектор ще бъдат $R = Py = 118{,}9$, а разходите - $C = C_0 + WN = 45 + 12 \cdot 2{,}9 = 45 + 34{,}8 = 79{,}8$. Печалбата ще възлиза на $\Pi = R - C = 118{,}9 - 79{,}8 = 39{,}1$. Окончателно: разходи за труд 34,8 млрд., нетрудови (капиталови) разходи 45 млрд. и печалба на предприемаческия сектор 39,1 млрд.

Макроикономическа производствена функция на две ресурсни променливи. Нека y е националният доход (или брутният продукт) на една държава за разглеждан и фиксиран период от време, а K и N – количествата, вложени в производството му ресурси – капитал (основни фондове) и труд. Под макроикономическа производствена функция на две ресурсни променливи $y = F(K, N)$ ще разбираме максималния възможен национален доход y, който може да се произведе при влагане на ресурси в количества K и N.

Неокласическа производствена функция. Това е гладка функция (притежава първи и втори частни производни от първи и втори ред, които са непрекъснати функции), удовлетворяваща аксиомите:

1. $F(0{,}0) = 0$ – без ресурси няма продукция;
2. $F_K = \frac{\partial F}{\partial K} > 0$ и $F_N = \frac{\partial F}{\partial N} > 0$ – националният доход расте при нарастването на всеки от ресурсите;
3. $F_{KK} = \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} = \frac{\partial}{\partial K} F_K < 0$ и $F_{NN} = \frac{\partial^2 F}{\partial N^2} = \frac{\partial}{\partial N} F_N < 0$ – с увеличаването на количеството на всеки от ресурсите, скоростта на нарастване на дохода намалява;
4. $F_{KN} = \frac{\partial^2 F}{\partial K \partial N} = \frac{\partial}{\partial K} F_N = F_{NK} = \frac{\partial^2 F}{\partial N \partial K} = \frac{\partial}{\partial N} F_K \geq 0$.

Първите частни производни F_K и F_N се наричат маргинални производителности (ефективности) на капитала и труда. Тогава третата аксиома твърди, че маргиналните производителности намаляват при нарастване на количеството от същия ресурс. Четвъртата аксиома твърди, че маргиналната производителност на един от ресурсите нараства при нарастване на количеството от другия ресурс.

Основен пример за неокласическа производствена функция на две ресурсни променливи е **мултипликативната функция.** Тя е от вида

$$y = F(K,N) = AK^{\alpha}N^{\beta}.$$

И наистина, аксиома 1. Е очевидно изпълнена. Тъй като

$$F_K = \alpha AK^{\alpha-1}N^{\beta} \quad \text{и} \quad F_N = \beta AK^{\alpha}N^{\beta-1},$$

то за $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ аксиома 2. също е изпълнена. За вторите производни F_{KK} и F_{NN} имаме

$$F_{KK} = \alpha(\alpha-1)AK^{\alpha-2}N^{\beta} \quad \text{и} \quad F_{NN} = \beta(\beta-1)AK^{\alpha}N^{\beta-2},$$

което означава, че при $\alpha \in (0,1)$ и $\beta \in (0,1)$ аксиома 3. ще бъде изпълнена. И накрая

$$F_{KN} = \alpha\beta AK^{\alpha-1}N^{\beta-1} > 0$$

при тези стойности на α и β.

В редица случаи технологията на производство може да се моделира с производствени функции, които не са двукратно гладки (диференцируеми). Такъв е случая с **производствената функция на Леонтиев**

$$y = F(K,N) = min\left\{\frac{K}{a}, \frac{N}{b}\right\},$$

наричана още **производствена функция с пълна взаимодопълняемост на ресурсите**.

Ако една фирма работи в условие на конкуренция, тя ще има приходи

$$R = R(K,N) = py = pF(K,N),$$

където p е цената на продаваната от нея стока и разходи

$$C = C(K,N) = rK + wN,$$

като r е цената на капитала (процент), а w – на труда (заплата). Тогава печалбата на фирмата ще бъде

$$\Pi = \Pi(K,N) = R - C = pF(K,N) - (rK + wN).$$

Тогава условието от първи ред за максимализиране на печалбата ще изглежда така

$$\Pi_K = 0 \Leftrightarrow F_K = \frac{r}{p} \quad \text{и} \quad \Pi_N = 0 \Leftrightarrow F_N = \frac{w}{p}.$$

Това икономически се изказва така: максимализирайки печалбата си, конкурентната фирма изразходва толкова ресурси, че да се получи изравняване на маргиналните производителности на ресурсите с относителните им цени.

Условието от втори ред е вдлъбнатост на производствената функция, което (тъй като $F_{KK} < 0$) означава

$$F_{KK}F_{NN} - {F_{KN}}^2 > 0.$$

За мултипликативната функция ще имаме

$$\begin{aligned} F_{KK}F_{NN} - {F_{KN}}^2 &= \alpha\beta(\alpha-1)(\beta-1)A^2K^{2\alpha-2}N^{2\beta-2} - \alpha^2\beta^2A^2K^{2\alpha-2}N^{2\beta-2} \\ &= [(\alpha-1)(\beta-1) - \alpha\beta]\alpha\beta A^2K^{2\alpha-2}N^{2\beta-2} \\ &= [1-(\alpha+\beta)]\alpha\beta A^2K^{2\alpha-2}N^{2\beta-2}. \end{aligned}$$

Условието от втори ред $F_{KK}F_{NN} - {F_{KN}}^2 > 0$ е изпълнено точно когато $\alpha + \beta < 1$.

В условие на конкуренция всички фирми максимализират печалбите си и условието от първи ред добива вида

$$F_K = \frac{R}{P} = r \quad \text{и} \quad F_N = \frac{W}{P} = w,$$

където R е номиналната цена на капитала, W е номиналната работна заплата, P – нивото на цените, r – реалната цена на капитала и w – реалната работна заплата.

Тъждеството на Ойлер за една хомогенна функция е

$$\gamma F(K,N) = F_K K + F_N N,$$

където γ е степента (показателя) на хомогенност.

При мултипликативната функция ще имаме

$$\gamma = \alpha + \beta.$$

Тогава тъждеството на Ойлер ще добие вида

$$(\alpha+\beta)y = F_K K + F_N N.$$

Тъй като предполагаме конкуренция и максимализиране на печалбата, то при $P = 1$ получаваме

$$(\alpha+\beta)y = F_K K + F_N N = RK + WN = C.$$

Тогава за печалбата на предприемаческия сектор ще имаме

$$\Pi = R - C = y - (\alpha+\beta)y = [1-(\alpha+\beta)]y$$

или

$$y = [1-(\alpha+\beta)]y + RK + WN.$$

Горната формула показва как се разпределя националния доход на печалба на предприемаческия сектор, разходи за капитал и труд.

Пример 5. За една производствена функция е известно, че:

1) Тя е от вида $y = F(K,N) = AK^{\alpha}N^{\beta}$;
2) При условие на максимална печалба, печалбата на предприемачите, разходите за капитал и разходите за труд са в съотношение 1:2:2;

3) При капитал в размер на 200 млрд. лв. и труд в размер на 2 млн. заети, националният доход възлиза на 65,914 млрд. лв.

Определете:

а) вида на производствената функция;

б) количеството вложени капитал и труд, ако цената на капитала е $r = 15\%$, а цената на труда – 12000 лв. за год.;

в) стойността на произведения национален доход и разпределението му за печалба и разходи за капитал и труд;

г) количеството направени инвестиции през разглежданата година, ако предишната година в икономиката е бил включен капитал на стойност 156 млрд. лв., който се амортизира средно за 20 год. (по линеен закон).

Решение:

а) При условие за максимална печалба е изпълнено

$$F_K = r \quad \text{и} \quad F_N = w.$$

От друга страна за хомогенната мултипликативна функция е изпълнено тъждеството на Ойлер:

$$(\alpha + \beta)F = F_K K + F_N N$$

Като заместим в горното тъждество F_K и F_N, получаваме

$$(\alpha + \beta)F = rK + wN.$$

Тъй като rK са разходите за капитал, а wN – за труд, то $rK + wN = C$ – общите разходи за производството на националния доход. Тогава печалбата ще бъде

$$\Pi = R - C = F - (\alpha + \beta)F = [1 - (\alpha + \beta)]F.$$

В нашия случай имаме $\Pi = 0{,}2F$, следователно $\alpha + \beta = 0{,}8$.

Тъй като

$$\frac{F_K}{F_N} = \frac{\alpha N}{\beta K} = \frac{r}{w} \Longrightarrow \alpha w N = \beta r K \Longrightarrow rK : wN = \alpha : \beta.$$

Тъй като $rK = wN$ то $\alpha = \beta = 0{,}4$. Тогава производствената функция ще има вида

$$y = F(K, N) = AK^{0{,}4}N^{0{,}4}.$$

За да определим окончателния ѝ вид ще използваме условието, че при $K = 200$ млрд. и $N = 2$ млн. $y = 65{,}914$ млрд. тогава ще имаме

$$A = \frac{65{,}914 \cdot 10^9}{(2 \cdot 10^{11})^{0{,}4}(2 \cdot 10^6)^{0{,}4}} = \frac{65{,}914}{2^{0{,}8}}10^{2{,}2} = \frac{65{,}914}{1{,}741}158{,}489 \cong 6000,$$

така получаваме

$$y = F(K,N) = 6000K^{0,4}N^{0,4}.$$

б) Тъй като $F_K = A\alpha K^{\alpha-1}N^{\beta}$ и $F_N = \mathrm{A}\beta K^{\alpha}N^{\beta-1}$, то системата уравнения за определянето на K и N добива вида

$$F_K = 2400\frac{N^{0,4}}{K^{0,6}} = r = 0{,}15;\ F_N = 2400\frac{K^{0,4}}{N^{0,6}} = w = 12000.$$

Разделяме първото уравнение на второто и получаваме

$$\frac{N}{K} = \frac{0{,}15}{12000} \Longrightarrow 12000N = 0{,}15K \Longrightarrow K = 80000N.$$

Като заместим $K = 80000N = 8\cdot 10^4N = 2^3 2^4 5^4 N = 2^7 5^4 N$ във второто уравнение, ще имаме

$$2400\frac{(2^7 5^4 N)^{0,4}}{N^{0,6}} = 12000 \Leftrightarrow \frac{2^{2,8}5^{1,6}N^{0,4}}{N^{0,6}} = 5 \Leftrightarrow \frac{2^{2,8}5^{0,6}}{N^{0,2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{2^{14}5^3}{N} = 1.$$

Така получаваме $N = 2^{14}5^3 = 2048000 = 2{,}048$ млн. заети. Тогава за количеството вложен капитал ще имаме $K = 80000N = 80000\cdot 2048000 = 163840000000 = 163{,}84$ млрд. лв.

в) На база получените стойности за вложените в производството на националния доход капитал и труд, лесно можем да пресметнем и самия национален доход:

$$\begin{aligned} y = F(K,N) &= 6000K^{0,4}N^{0,4} = 6000\cdot 164840000000^{0,4}2048000^{0,4} \\ &= 61440000000 = 61{,}44\ \text{млрд. лв.} \end{aligned}$$

Разпределението на националния доход е следното: $24{,}576\ \text{млрд. лв.} = 15\%\ \text{от}\ 163{,}84\ \text{млрд. лв.}$ – разходи за капитал; $24{,}576\ \text{млрд. лв.} = 12000\cdot 2048000$ – разходи за труд и 12,288 млрд. лв. – печалба за предприемачите.

г) Тъй като предишната година в производството на националния доход е бил вложен капитал на стойност 150 млрд. лв., като 1/20 от него, т.е. 7,5 млрд. лв. се е амортизирал, тогава в настоящата година е останал капитал на стойност 142,5 млрд. лв. Сегашният капитал е на обща стойност 163,84 млрд. лв., следователно разликата от 163,84-142,5=21,34 са брутните инвестиции за тази година.

3. Общо икономическо равновесие

Различните подходи към функционирането на отделните сектори на икономиката по естествен път водят до наличието в съвременната макроикономика на алтернативни (статични) модели на съвместното равновесие на тези сектори. Такива модели се наричат модели за общо икономическо равновесие (ОИР).

3.1. Неокласически модел на ОИР

Посредством дадения модел в обобщен вид се реконструира представата за макроикономическото функциониране на пазарната икономика, господстваща до появата на книгата на Дж. М. Кейнс „Обща теория на заетостта, лихвените проценти и парите“, т. е. До втората половина на 30-те години на миналия век. За да се изяви същността на неокласическата концепция е достатъчно да се разгледа модела на двусекторна икономика – на домакинства и предприемачи.

Тъй като според неокласическата концепция парите не се явяват богатство в икономиката, следователно има три пазара – на труд, капитал и стоки. На тези пазари се срещат два макроикономически субекта – домакинствата и предприемачите. Своеобразното тълкуване на същността на парите води до **класическата дихотомия** – съществуване на два независими един от друг сектора – реален и паричен.

Реален сектор:

1. **Пазар на капитал**: в резултат на изравняването на обема на предлагане на капитал (спестяванията на домакинствата) и обема на търсене на капитал (инвестициите на фирмите) се установява равновесен лихвен процент, т.е.
$$S(i_+) = I(i_-) \to\ i^*$$
2. **Пазар на труда**: при зададен лихвен процент на пазара на труд се достига до устойчиво равновесие, т.е. изравняват се търсенето на труд $N = N^D(w_-)$ и предлагането на труд $N = N^S(w_+, i_+)$, при което се определя равновесната стойност на реалната заплата w^* и равновесното количество труд $N^* = N^D(w^*) = N^S(w^*, i^*)$. Разбира се, търсенето на труд се определя от условието за максимизирането на печалбата при съвършена конкуренция $y'(N) = w$ (където $y(N)$ е п.ф. на една променлива).

Така получаваме, че равновесието в реалния сектор не зависи нито от нивото на цените, нито от количеството пари.

Паричен сектор:

Тук е валидно съотношението
$$\frac{M}{P} = \frac{y}{v}$$
където v е скоростта на обръщение на НД y, а M – количеството пари. Така търсенето на доход ще бъде $y^D = \frac{Mv}{P}$ и тъй като предлагането е $y^S = y^* = y(N^*)$; то от изравняването на търсене и предлагане $y^S = y^D = y^*$ ще се определи равновесното ниво на цените
$$P^* = \frac{Mv}{y^*}$$

Окончателно ще имаме

(1) $$S(i_+) = I(i_-)$$

(2) $$\frac{M}{P} = \frac{y}{v}$$

(3) $$N^D(w_-) = N^S(w_+, i_+)$$

(4) $$y = y(N)$$

Извод: за сметка на гъвкавостта на лихвения процент i и реалната работна заплата w пазарния механизъм винаги установява равновесие при пълна заетост. Превишаването на предлагането над търсеното на пазара на труд и на стоки са възможни само като временни явления и са свързани с отклонение на относителните цени от равновесните им стойности. Изменението на количеството пари в обращение не влияе на равновесните реални стойности на стоките и работната заплата, а променя само номиналните им стойности.

Пример 6. Зададени са: п.ф. $y = 20N - N^2$, функция на спестяванията $S = 2 + 3i$, на инвестициите $I = 20 - 3i$, предлагане на труд $N^S = 2w + i$. Парите в обращение са $M = 10$, а скоростта на обръщение на НД е $v = 12$ оборота за година. Да се намерят всички макроикономически величини.

Решение:

Съставяме модела

(1) $$2 + 3i = 20 - 3i$$

(2) $$\frac{10}{P} = \frac{y}{12}$$

(3) $$y' = 20 - 2N = w \Longrightarrow N^D = 10 - \frac{w}{2} = N^S = 2w + i$$

(4) $$y = 20N - N^2$$

От (1) $i^* = 3$. В (3) $10 - \frac{w}{2} = 2w + 3 \Longrightarrow w^* = 2{,}8$ и $N^* = 8{,}6$. От (4) $y^* = y(N^*) = y(8{,}6) = \frac{20.43}{5} - \left(\frac{43}{5}\right)^2 = 172 - \frac{1849}{25} = 98{,}04$. От (2) $P^* = \frac{10.12}{y^*} = \frac{120}{98{,}04} = 1{,}22$. Освен това $S = I = 11 \Longrightarrow C = y - S = 87{,}04$.

Забележка: Как да намерим функциите на съвкупно предлагане $y = y^S(i)$ и търсене $y = y^D(i)$. От (3) определяме $N = 4 - \frac{2i}{5}$ и $N = 8 + \frac{i}{5}$, тогава от (4) определяме $y^S = y(N) = y\left(8 + \frac{i}{5}\right) = 20\left(8 + \frac{i}{5}\right) - \left(8 + \frac{i}{5}\right)^2 = 96 + \frac{4}{5}i - \frac{i^2}{25}$. Тогава, тъй като $y^S = C + S = y^S(i)$ и $y^D = C + I = y^D(i), y^D(i) = C + S + (I - S) = y^S(i) + (I - S) \Longrightarrow y^D(i) = 96 + \frac{4}{5}i - \frac{i^2}{25} + (20 - 3i - 2 - 3i) = 114 - \frac{28}{5}i - \frac{i^2}{25}$.

Неокласически модел на ОИР за трисекторна икономика. В този модел се променя само (1) със следното равенство, гарантиращо равновесието на пазарите на капитал и стоки

$$(1') \qquad S(i_+) + T(y_+) = I(i_-) + G$$

Алгоритъм за решаване на модела:

1. От (1ʿ) се определя $y^D = y^D(i)$
2. От (3) се определят $w = w(i)$ и $N = N(i)$

3. От (4) се определя $y^S = y(N(i))$
4. Тогава от $y^D(i) = y^S(i) \rightarrow\ i^*$ и y^*
5. $w^* = w(i^*)$ и $N^* = N(i^*)$
6. $P^* = \frac{Mv}{y^*}$

Пример 7. Нека при условията на предишния пример се появява държава събираща плосък данък от 20% и извършваща разходи $G = 31{,}8$.

Решение:

$$2 + 3i + 0{,}2y = 20 - 3i + 31{,}8 \implies y^D = 249 - 30i$$

Както преди имаме $y^S = 96 + \frac{4}{5}i - \frac{i^2}{25}$. От $y^D = y^S$ получаваме $i^* = 5$ и $y^* = 99$; $w^* = w(5) = 2$ и $N^* = N(5) = 9$; $P^* = \frac{120}{99} \approx 1{,}21$. Освен това $S = 17; T = 19{,}8; I = 5,$ а $C = y - S - T = 62{,}2$, $G - T = 31{,}8 - 19{,}8 = 12$ е бюджетния дефицит (превишението на държавните разходи над държавните приходи).

3.2. Кейнсиански модел на ОИР

За разлика от неокласическия модел, при който основен се явява пазара на факторите на производство, при кейнсианския модел акцентът е върху формираното на пазарите на стоки и пари (т.е. въз основа на *IS*-*LM*-модела)ефективно търсене.

Моделът на стоковия пазар е:

(1) $S(y) + T(y) = I(i) + G$

Той определя множество от точки в координатната равнина (y, i), обезпечаващи равновесие на стоковия (и капиталов) пазар. Това множество се нарича IS-линия, а модела - IS-модел.

Моделът на паричния пазар е:

(2) $\frac{M}{P} = l(y, i)$

При фиксирано ниво на цените P в координатната равнина се определя множество от точки, чиито координати (y, i) обезпечават равновесието на паричния пазар. Моделът се нарича LM-модел, а линията LM-линия. Съвместното разглеждане на пазарите на стоките, пари и капитал (при P-фиксирано) обезпечават равновесие на тези пазари, тоест пресечна точка на IS-линията и LM-линията. Ако P не е фиксирано от (1) и (2) се определятт функциите $i = i(P)$ и $y = y^D(P)$ - функция на съвкупното търсене.

Модел на пазара на труда е:

(3) $W^S(N,P) = Py'(N) = W^D(N,P)$

при

(4) $y = y(N)$ - производствена функция.

От (3) се определя $W = W(P)$ и $N = N(P)$, а от (4)-функцията на съвкупното предлагане $y = y^S(P) = Y(N(P))$.

Алгоритъм за решаване на модела:

1) от (1) и (2) се определя $i = i(P)$ и $y = y^D(P)$;
2) от (3) се определят: $N = N(P)$ и $W = W(P)$;
3) от (4) се определя предлагане $y = y^S(P) = Y(N(P))$;
4) от $y^S(P) = y^D(P) \to P^*, y^*$;
5) тогава $i^* = i(P^*), W^* = W(P^*)$ и $N^* = N(P^*)$.

Забележка: Ако $W^S = W^S(N)$, тоест предлагането на труд не зависи от нивото на цените, казваме че работниците имат парична илюзия, в общият случай работниците са лишени от парична илюзия (но не и в степента, характерна за неокласическия модел).

Пример 8: Поведението на домакинствата се описва от функцията на потреблението $C = 80 + 0{,}7y$, функцията на търсене на реалните касови остатъци $l = 0{,}04y + 2(50 - i)$ и функцията на предлагане на труд $W^S = 0{,}519N + 10P$. Предприемаческият сектор в условие на конкуренция работи по технология, описана чрез производствената функция $y = 70N - N^2$, а функцията на търсене на инвестиции е $I = 260 - 6i$. Държавата извършва разходи за закупуване на крайни продукти $G = 110$, събира плосък данък от 10% и предлага пари в обръщение (номинални касови остатъци) $M = 104$. Да се намерят равновесните стойности на ендогенните за модела макроикономически величини.

Решение:

За стоковия пазар ще имаме:

$$S = y - T - C = y - 0{,}1y - 80 - 0{,}7y = 0{,}2y - 8$$

$$0{,}2y - 80 + 0{,}1y = 260 - 6i + 110$$

$0{,}3y = 450 - 6i \rightarrow y = 1500 - 20i - IS -$ линия.

За паричния пазар получаваме

$$\frac{104}{P} = 0{,}04y + 100 - 2i - LS - \text{линия за всяко } P$$

От съвместното равновесие на стоковия и паричен пазар получаваме функцията на съвкупно търсене

$$\frac{104}{P} = 0{,}04(1500 - 20i) + 100 - 2i \rightarrow i = \frac{400}{7} - \frac{260}{7P}$$

и

$$y^D = \frac{2500}{7} + \frac{5200}{7P}$$

Сега, чрез изравняване на търсенето и предлагане на труд получаваме

$$W^D = Py' = P(70 - 2N) = 70P - 2NP$$

$$W^D = W^S \Longrightarrow 0{,}519N + 10P = 70P - 2NP \Longrightarrow N = \frac{60P}{2P + 0{,}519}$$

$$W = 0{,}519\frac{60P}{2P + 0{,}519} + 10P = \frac{36{,}33P + 20P^2}{2P + 0{,}519}$$

$$y^S = N(70 - N) = \frac{60P}{2P + 0{,}519}(70 - \frac{60P}{2P + 0{,}519}) = \frac{60P(80P + 36{,}33)}{(2P + 0{,}519)^2}$$

Приравнявайки съвкупното търсене със съвкупното предлагане ще получим равновесните стойности на нивото на цените и националния доход

$$y^S = y^D = \frac{60P(80P + 36{,}33)}{(2P + 0{,}519)^2} = \frac{2500}{7} + \frac{5200}{7P}$$

$$420P^2(80P + 36{,}33) = (2500P + 5200)(2P + 0{,}519)^2$$

$$33600P^3 + 15258{,}6P^2 = (2500P + 5200)(4P^2 + 2{,}076P + 0{,}26931) =$$

$$= 10000P^3 + 5190P^2 + 673{,}4025P + 20800P^2 + 10795{,}2P + 1400{,}6772$$

$$23600P^3 - 10731{,}4P^2 - 11468{,}602P - 1400{,}6772 = 0$$

$$P^3 - 0{,}45472P^2 - 0{,}48596P - 0{,}05935 = 0.$$

Корените на горното кубично уравнение (изчислени с помощта на http://calcpad-bg.com) са $P_1 = -0{,}4$, $P_2 = -0{,}15$ и $P_3 = 1$. Очевидно, $P = P_3 = 1$.

Следователно $P^* = 1 \Longrightarrow y^* = \frac{2500+5200}{7} = 1100$

Тъй като трудовата заетост N, номиналната заплата W и лихвения процент i са изразени като функции на нивото на цените P, то сега можем да получим и техните равновесни стойности

$$N^* = 23{,}82;\ i^* = 20 \text{ и } W^* = 22{,}36.$$

Тогава получаваме, че потреблението на домакинствата е $C = 850$; спестяванията $-\ S = 140$; данъците, събрани от държавата $-\ T = 110 \Longrightarrow T = G$, което свидетелства за балансиран бюджет (без излишък или дефицит). Инвестициите на предприемачите са $I = 140 (= S$, тъй като $T = G)$. В частност получаване, че $N^*W^* = 23{,}82 \cdot 22{,}36 = 532{,}62$ са общите доходи от труд, а $y^* - N^*W^* = 1100 - 532{,}62 = 567{,}38$ – доходите от капитал.

3.3. Сравнение на неокласическия и кейнсианския модел на ОИР

Сравнителните характеристика на двете макроикономически концепции са дадени в следната таблица

Неокласически	**Кейнсиански**
За домакинствата спестяванията са първични а потреблението – вторично. Те зависят от лихвения процент.	За домакинствата първично е потреблението, а спестяванията са вторични. Зависят от националния доход.
На пазара на стоки и капитал се определя равновесната стойност на лихвения процент.	На пазара на стоки и капитал се определя равновесна двойка $(i, y) - IS -$ линията.
Парите не са богатство, следователно не съществува паричен пазар.	Парите могат да бъдат разглеждани като богатство, съществува паричен пазар.
В паричният сектор е валидна количествената формула за парите $\frac{M}{P} = \frac{y}{v}$.	На паричния пазар се определя равновесна двойка $(i, y) - LM -$ линия. На пазарите на стоки, капитал и пари се определя съвкупното търсене.
Търсенето на труд е функция на реалната работна заплата.	Търсенето на труд е функция на номиналната работна заплата (при наличие на парични илюзии) и на нея и нивото на цените (без парични илюзии).

Съвкупното предлагане, определено на трудовия пазар е $const$.	Съвкупното предлагане, определено на трудовия пазар е растяща функция на нивото на цените.
Равновесието се постига при условие на пълно използване на наличните (включително трудови) ресурси.	Възможно е равновесие при наличието на излишъци на пазарите (например конюнктурна безработица).
Съществува класическа дихотомия – реалния и паричния сектор функционират отделно един от друг.	Не съществува дихотомия – равновесието се постига при взаимодействие на реалния и паричен сектор.
При увеличено предлагане на пари ще се променят само цените, всички величини на модела ще запазят реалните си стойности.	При увеличено предлагане на пари ще се променят всички величини на модела по различен начин.
Сферата на приложение е при съвършената конкуренция, както и в дългосрочен план.	Сферата на приложение е в условията на несъвършена конкуренция и в краткосрочен план.
Основен извод – намесата на държавата може само да влоши положението.	Основен извод – държавата чрез активна фискална и монетарна политика може да създаде предпоставки за нарастване на НД.

3.4. Неокласически синтез

Неокласическия синтез позволява да се разкрият условия за съвместимост на неокласическият и кейнсиански модел на ОИР и да се отстранят някои техни противоречия в изходните предпоставки – например класическата дихотомия. Най-простия пример, това е модел при който модела на пазар и на стоки, пари и капитали се вземат от кейнсианската концепция, а трудовия пазар се моделира както е при неокласиците.

Пример 9. Предприемачите работят по технология, зададена чрез п.ф. $y = 3N^{2/3}$, предлагането на труд се осъществява чрез $N^S = 0{,}5w$, функцията на спестяване е $S = 0{,}1y$, а функцията на инвестиции - $I = 1 - 0{,}1i$. Търсенето на реални касови остатъци е $l = 5y - 0{,}2i$, а парите в обръщение са $M = 27{,}2$. Да се намерят всички равновесни стойности на макроикономическите величини в този модел.

Решение:

Системата на модела е

(1) $0{,}1y = 1 - 0{,}1i$

(2) $27{,}2 = 5y - 0{,}2i$

(3) $3.\frac{2}{3}.\frac{1}{N^{\frac{1}{3}}} = w = 2N^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{8}{N} = 8N^3 \quad \Rightarrow \quad N^* = 1, w^* = 2$

$y^* = 3;\ i = 7; P^* = 2; S = I = 0{,}3.$

Друг модел на неокласически синтез (за двусекторна икономика) се задава чрез системата

$$\left| \begin{array}{c} S(i,y) = I(i) \\ \frac{M}{P}(i) = \frac{y}{v} + l_S(i) \\ w^D(N) = y'(N) = w^S(N,i) \\ y = y(N) \end{array} \right.$$

Според първото уравнение, се предполага, че спестяванията на домакинствата зависят както от лихвения процент (неокласическа съставяща), така и от дохода (кейнсианска съставяща). Второто уравнение за равновесието е според кейнсианската концепция – присъства при търсенето на реални касови остатъци съставката на спекулативното търсене $l_S(i)$. Третото уравнение изравнява търсенето и предлагането на труд според неокласическата концепция.

4. Многоотраслов макроикономически анализ. Модел на Леонтиев

През 30-те години на 20 век американският икономист от руски произход В. В. Леонтиев започнал изучаването на статичната структура на националната икономика на ниво отрасъл. Той разглежда взаимните връзки между 500 отрасъла на икономиката на САЩ. За решаването на този модел е удостоен с Нобелова награда за икономика през 1973 г.. В основата на модела стоят следните предположения:

1. В икономическата система се произвеждат, продават, купуват и потребяват n на брой продукта;

2. Всеки отрасъл произвежда само един продукт, като различните отрасли произвеждат различни продукти. Отрасъла, произвеждащ продукт i също ще индексираме с индекс i;

3. Производствената технология на отрасъл j се състои в преработването на определени количества от някакво множество продукти (възможно от всички) с цел производството на някакво количество от продукта j. При това съотношението между количествата изразходвани продукти и произведен продукт е постоянно (независимо от мащаба на производството).

Поради предположение 3. - моделът е линеен. Освен това той е статичен макроикономически модел, защото разглежданията са във фиксиран момент (година , месец).

Балансовият отчет по данни за фиксиран период от времето представлява следната таблица:

Структура на разходите	Структура на търсенето				Обем на продукцията
	Търсене на отраслите			Непроизводствена сфера	
	1…	…j…	…n		
1	$\bar{a}_{11}$…	… $\bar{a}_{1j}$ …	…$\bar{a}_{1n}$	y_1	x_1
⋮	…	…	…	⋮	⋮
i	$\bar{a}_{i1}$ …	…$\bar{a}_{ij}$	… $\bar{a}_{in}$	y_i	x_i
⋮	…	…	…	⋮	⋮
n	$\bar{a}_{n1}$ …	… $\bar{a}_{nj}$ …	… $\bar{a}_{nn}$	y_n	x_n
Добавена стойност	$\bar{v}_1$ …	… $\bar{v}_j$	… $\bar{v}_n$		
Обем на продукцията	x_1 …	… x_j …	… x_n		

В тази балансова таблица величината $\bar{a}_{ij}$ показва какъв обем от продукцията на i-тия отрасъл се изразходва от j-тия отрасъл през отчетния период. Величината x_i е общият обем на продукцията (брутен продукт) на i-тия отрасъл, а величината y_i показва обема на потреблението на продукцията на i-тия отрасъл в непроизводствената сфера – крайно търсене. Крайното (непроизводствено) търсене се състои от крайно потребление , експорт и инвестиции. Това обаче се пренебрегва и в модела на Леонтиев величините y_i , $i = 1, \dots, n$ се възприемат като екзогенни. И накрая $\bar{v}_j$ е добавената (новосъздадена) стойност от j-тия отрасъл. Аналогично на y_i ,$\bar{v}_j$ включва работна заплата, амортизационни отчисления, косвени данъци и печалба, което се пренебрегва в модела на Леонтиев.

Величините x_i и y_i могат да се измерват в количества (бройки или други) или в стойности (количество по цена) – съответно говорим за натурален или стойностен модел. За по-голяма определеност ще разглеждаме стойностния модел.

Балансовият характер на модела се определя от следните съотношения:

1.Баланс по редове – обемът на продукцията на i-тия отрасъл е равен на сумата от производственото и непроизводственото търсене т.е.

$$Y_i + \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} = X_i \qquad i = 1, \dots, n \qquad (1.1)$$

2.Баланс по стълбове – обемът на продукцията на j-тия отрасъл е равен на сумата от производствените разходи (за придобиване на продукти от другите отрасли) и величината на добавената стойност т.е.

$$\bar{v}_j + \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{ij} = X_j \qquad j = 1, \dots, n \qquad (1.2)$$

Поради линейността на модела ще имаме - $\bar{a}_{ij} = a_{ij} X_j$

Коефициентите a_{ij} се наричат технологични коефициенти и показват колко единици от продукцията на i-тия отрасъл са необходими за производството на единица продукция от j-тия отрасъл. Матрицата $A = (a_{ij})$ състояща се от технологичните коефициенти се нарича технологична матрица на модела. Тогава условието (1.1) добива вида

$$Y_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = X_i \qquad i = 1, \dots, n \tag{1.3}$$

Това е моделът на Леонтиев. Нарича се още модел на междуотрасловия баланс или Input-Output модел. Чрез системата (2.3) моделът на Леонтиев позволява да се определят общите обеми на производството на отраслите $X_1, \dots, X_n$ по дадено крайно търсене $Y_1, \dots, Y_n$ въз основа на производствените технологии на отраслите, определени с технологичните коефициенти a_{ij}. Разбира се системата (1.3) позволява и решението на обратната задача – по дадени обеми на продукцията x_i , $i = 1, \dots, n$ да се определи крайното търсене y_i , $i = 1, \dots, n$ на всеки отраслов продукт.

Системата (1.3) е система от n на брой линейни уравнения за n неизвестни x_i, $i = 1, \dots, n$ които са добре изучени от линейната алгебра. Обаче тази система има специфични свойства – технологичните коефициенти a_{ij} , обемите на крайно търсене y_i и брутните продукти x_i са неотрицателни.

Определение: Моделът на междуотраслов баланс се нарича **продуктивен** ако описващата го система (1.3) има неотрицателни решения т.е., $x_i \geq 0$ $i = 1, \dots, n$.

Условия за продуктивност. Системата (1.3) може да бъде записана в матричен вид:

$$(E - A)X = Y \tag{1.4}$$,

където $E = E_n$ е единичната матрица от ред n, $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ - вектор на производството на отраслите, $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T$ - вектор на крайното (непроизводствено) търсене. $A = (a_{ij})$ е технологичната матрица.

Теорема 4.1. Следните условия са еквивалентни:

1.Системата (1.3) притежава неотрицателно решение $X \geq 0$ при някой строго положителен вектор Y.

2.Системата (1.3) притежава неотрицателно решение $X \geq 0$ при всеки неотрицателен вектор Y.

3. (**Условие на Хоукинс – Саймън**) Всички главни минори на матрицата $E - A$ са положителни.

4. Матрицата $(E - A)^{-1}$ съществува и е неотрицателна.

Ако е изпълнено едно от условията за продуктивност на горната теорема:

$$X = (E - A)^{-1}Y \qquad (1.5),$$

като $X \geq 0$ т.е. задачата за намиране на брутният продукт на отраслите е решена.

Да отбележим, че матрицата $E - A$ се нарича матрица на Леонтиев , а $(E - A)^{-1}$ - инверсна матрица на Леонтиев.

Неразложими технологични матрици

Да означим с N множеството на номерата на всички отрасли $N = \{1,2, \cdots, n\}$. Подмножеството $S \subset N$ е изолирано , ако $a_{ij} = 0$ за $i \in \bar{S} = N \setminus S$, $j \in S$. Това означава , че отраслите с индекси от S не се нуждаят от продуктите на другите отрасли с индекси от $\bar{S}$ въпреки че (може би) им продават своята продукция. Ако преномерираме отраслите така че първи да бъдат K отрасли от S, то технологичната матрица A ще добие вида:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \qquad (1.6),$$

където A_1 е квадратна матрица $k \times k$ отговаряща на отраслите S, A_3 - квадратна матрица $(n - k) \times (n - k)$ отговаряща на отраслите $\bar{S}$.

Определение: Технологичната матрица A се нарича **неразложима** ако чрез разместване на редове и стълбове не може да придобие вида (1.6). Неразложимостта означава че всеки отрасъл макар и косвено ползва продукцията на другите отрасли.

За неразложимите технологични матрици е в сила – Теорема 1.2.

Теорема 4.2. (Фробениус – Перон): Неразложимата неотрицателна матрица A притежава единствена собствена стойност $\lambda_A > 0$ с най-голям модул. На собствената стойност λ_A съответстват единствен собствен вектор X_A и единствен собствен ковектор P_A които могат да бъдат избрани положителни.

Собствената стойност λ_A и свързаните с нея собствен вектор X_A $(AX_A = \lambda_A X_A)$ и собствен ковектор P_A $(P_A A = \lambda_A P_A)$ се наричат Фробениусови.

Условия за продуктивност на неразложими технологични матрици – на базата на теоремата на Фробениус - Перон можем да докажем следната теорема:

Теорема 4.3. Моделът на Леонтиев е продуктивен тогава и само тогава когато $\lambda_A < 1$.

Доказателство: 1. Необходимост – нека моделът на Леонтиев е продуктивен, тогава за векторът на крайното търсене $Y > 0$ съществува такъв вектор на брутен продукт $X \geq 0$ че $X - AX = Y$ т.е. $X > AX \geq 0$ и следователно $X > 0$. Умножаваме неравенството $X > AX$ отляво с фробениусовия ковектор $P_A > 0$ и получаваме $P_A X > P_A AX = \lambda_A P_A X$, но $P_A X > 0$, следователно $\lambda_A < 1$.

2. Достатъчност – тъй като $AX_A = \lambda_A X_A$, $X_A > 0$, $0 < \lambda_A < 1$, то $A^K X_A = A^{K-1}(AX_A) = A^{K-1}(\lambda_A X_A) = \lambda_A A^{K-1} X_A = {\lambda_A}^2 A^{K-2} X_A = \cdots = {\lambda_A}^K X_A$

Тогава $\lim_{k\to\infty} A^K X_A = \lim_{k\to\infty} {\lambda_A}^K X_A = 0$. Но $X_A > 0$, $A^K \geq 0$ следователно $\lim_{k\to\infty} A^K = 0$.

Разглеждаме матричното равенство:

$$(E - A)(E + A + A^2 + \cdots + A^{K-1}) = E - A^K,$$

което лесно може да се провери ако се разкрият скобите. Тъй като границата на дясната страна при $K \to \infty$ е равна на E , то съществува граница на лявата страна и тя също е равна на E т.е. ще имаме

$$(E - A)\sum_{K=0}^{\infty} A^K = E$$

Горното равенство показва че съществува обратна матрица $(E - A)^{-1}$ и за нея е изпълнено

$$(E - A)^{-1} = \sum_{K=0}^{\infty} A^K$$

(това равенство е аналогично на сумата на безкрайна геометрична прогресия).

Освен това тъй като за всички $A^K \geq 0$, то $(E - A)^{-1} \geq 0$, следователно за всеки вектор $Y \geq 0$ съществува неотрицателно решение на системата (1.3)

$$X = (E - A)^{-1} Y,$$

т.е. моделът на Леонтиев е продуктивен.

Теорема 4.3. дава възможност за проверка на продуктивността на модела на Леонтиев, но е лишена от икономическа интерпретация. Доказателството и обаче ни дава възможност да формулираме едно полезно следствие.

Следствие: Ако моделът на Леонтиев е продуктивен, то за всеки вектор на крайно търсене $Y \geq 0$ се определя еднозначно вектор на брутно предлагане X по формулата –

$$X = \sum_{K=0}^{\infty} A^K Y = Y + AY + A^2 Y + \cdots \qquad (1.7)$$

Това разлагане може да се интерпретира така – за производството на даден обем продукция Y трябва да се изразходват AY продукти , но за да се произведат тези AY продукти трябва да се изразходват $A(AY) = A^2 Y$ продукти, за чието производство са необходими $A(A^2 Y) = A^3 Y$ продукти и т.н.

Формулата (1.7) ни дава възможност да изчисляваме вектора X чрез рекурентна редица –

$$X_0 = Y,\ X_{n+1} = Y + AX_n\ ,\ X = \lim_{n\to\infty} X_n \qquad (1.8)$$

Предимствата на рекурентния метод (1.8) в сравнение с инверсния метод (1.5) са следните:

1. Не трябва да се пресмята обратна матрица

2. Може да се използва както при стойностен така и при натурален баланс

Към недостатъците на този метод можем да отнесем неопределеният обем на изчисления.

Методът на инверсията изисква краен брой изчислителни ресурси , но при реализацията му трябва да отчетем следните особености:

1. Необходимо е баланса да бъде в стойностна форма

2. Обратната матрица може да се окаже много чувствителна към грешки при закръглянето

За установяване на продуктивността на модела на Леонтиев може да се използва и следващия критерий (достатъчно условие):

Теорема 4.4. Ако технологичната матрица A е неразложима и сумите a_i от елементите на i-тия ред са не по-големи от 1: $a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq 1$ като за поне един ред K е изпълнено –

$a_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} < 1$, то моделът на Леонтиев е продуктивен.

Доказателство: Нека P_A е Фробениусовия ковектор, а λ_A - Фробениусовата собствена стойност на матрицата A т.е.

$$P_A A = \lambda_A P_A\ , \qquad P_A > 0, \qquad 0 < \lambda_A$$

Да умножим последното равенство отдясно с вектор $e = (1,1,\dots,1)^T$. Получаваме

$$P_A A e = \lambda_A P_A e \qquad (1.9)$$

Тъй като $Ae = (a_1, \dots, a_n)^T$, то за лявата част на (1.9) ще имаме

$$P_A A e = \sum_{i=1}^{n} (P_A)_i a_i < \sum_{i=1}^{n} (P_A)_i$$

В последното неравенство сме отчели условието на твърдението. Тъй като за дясната страна на (1.9) имаме $\lambda_A P_A e = \lambda_A \sum_{i=1}^{n} (P_A)_i$, то окончателно от (1.9) получаваме

$$\lambda_A \sum_{i=1}^{n} (P_A)_i < \sum_{i=1}^{n} (P_A)_i,$$

От където $\lambda_A < 1$ т.е. моделът на Леонтиев е продуктивен според Теорема 1.3.

Пример 10. При $n = 2$ за двата отрасъла имаме зададена технологичната матрица

$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ и вектора на продукцията на отраслите, предназначена за крайно потребление $Y = (2,4)^T$. Трябва да намерим вектора на брутна продукция на отраслите $X = (X_1, X_2)^T$, който балансира модела.

Решение:

1.Проверка за продуктивност

1.1.по критерия на Хоукинс-Саймън. Образуваме матрицата –

$$E - A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-5}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

За главните минори имаме - $M_{11} = a_{11} = \frac{2}{3} > 0$, $M_{22} = \Delta = \frac{25}{72} > 0$, което показва продуктивността по този критерии.

1.2.чрез фробениусовото число λ_A. Образуваме характеристичното уравнение –

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} - \lambda & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{3} - \lambda\right)\left(\frac{1}{6} - \lambda\right) - \frac{5}{24} = 0$$

Неговите корени са $\lambda_1 \approx 0{,}71$ *и* $\lambda_2 \approx -0{,}21$. Съгласно теоремата на Фробениус – Перон $\lambda_A = \lambda_1 \approx 0{,}71 < 1$, което показва продуктивността по този критерии.

1.3. според Теорема 4.4. Образуваме сумите на елементите по редове

$$a_1 = a_{11} + a_{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} < 1$$

$$a_2 = a_{21} + a_{22} = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

Тъй като a_1 *и* a_2 са по-малки или равни на 1 , а a_1 е строго по-малко от 1 , то и по този критерии установяваме продуктивност.

2. Намиране на решението. Тъй като за тази технологична матрица A моделът е продуктивен, следва че съществува обратна матрица $(E - A)^{-1}$, която е неотрицателна и $X = (E - A)^{-1} Y$. Получаваме $(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ и $X = (7{,}68; 12{,}48)^T$.

3. Възстановяване на модела. Окончателната балансова таблица се получава от $AX + Y = X$. В нашия случай тя е:

	Отрасъл №1	Отрасъл №2	Крайно потребление	Обща продукция
Отрасъл №1	2,56	3,12	2	7,68
Отрасъл №2	6,40	2,08	4	12,48
Добавена стойност	-1,28	7,28		
Обща продукция	7,68	12,48		

Така например 3,12 е стойността на продукцията на първият отрасъл вложена във втория отрасъл , 6,40 е сумата която първият отрасъл е заплатил на втория отрасъл за да придобие неговият продукт , който е вложил в своето производство. Да отбележим , че макар и продуктивен този модел не е печеливш за първият отрасъл – неговите разходи са ресурси $\bar{a}_{11} + \bar{a}_{21} = 8{,}96$, а общите му приходи са 7,68 т.е. той работи на загуба.

А сега нека да пресметнем вектор X рекурентно т.е. като използваме степените на технологичната матрица A (8). Получаваме следната редица:

$$X_0 = Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, X_1 = Y + AX_0 \approx \begin{pmatrix} 3{,}67 \\ 6{,}33 \end{pmatrix}, X_2 = Y + AX_1 \approx \begin{pmatrix} 4{,}81 \\ 8{,}11 \end{pmatrix}$$

$$X_3 = Y + AX_2 \approx \begin{pmatrix} 5{,}63 \\ 9{,}36 \end{pmatrix}, \quad X_4 = Y + AX_3 \approx \begin{pmatrix} 6{,}22 \\ 10{,}25 \end{pmatrix}, X_5 = Y + AX_4 \approx \begin{pmatrix} 6{,}63 \\ 10{,}89 \end{pmatrix}$$

$X_6 = Y + AX_5 \approx \begin{pmatrix} 6{,}93 \\ 11{,}35 \end{pmatrix}$, $X_7 = Y + AX_6 \approx \begin{pmatrix} 7{,}15 \\ 11{,}67 \end{pmatrix}$ и т.н.

От горната рекурентна редица се вижда че твърде бързо се приближава към точния отговор X , получен по метода на обратната матрица.

Пример 11 (Леонтиев). При n=3 в таблицата са дадени разходите на всеки отрасъл , необходими за производството на единица от собствената си продукция и за производството на единица от продукцията на всеки от останалите два отрасъла

Сектор	земеделие	промишленост	Обслужващ сектор
Земеделие	0,35	0,13	0,09
Промишленост	0,11	0,27	0,29
Обслужващ сектор	0,44	0,32	0,04

Нека количествата от продукция на всеки сектор , необходими за крайния потребител да възлизат съответно на – 3,12 млрд. $ от земеделие , 29,36 млрд. $ от промишленост и 32,24 млрд. $ от обслужващия сектор. Каква трябва да е стойността на общата продукция на всеки от трите отрасъла за да бъде балансиран моделът?

Таблицата задава матрицата A на преките разходи т.е.

$A = \begin{pmatrix} 0,35 & 0,13 & 0,09 \\ 0,11 & 0,27 & 0,29 \\ 0,44 & 0,32 & 0,04 \end{pmatrix}$, а за вектора Y имаме $Y = \begin{pmatrix} 3,12 \\ 29,36 \\ 32,24 \end{pmatrix}$

Решение:

1.Проверка за продуктивност -

1.1. По критерия на Хоукинс – Саймън. Образуваме матрицата $E - A = \begin{pmatrix} 0,65 & -0,13 & -0,09 \\ -0,11 & 0,73 & -0,29 \\ -0,44 & -0,32 & 0,96 \end{pmatrix}$

За главните минори имаме - $M_{11} = a_{11} = 0,65 > 0$, $M_{22} = 0,46 > 0$ и $M_{33} = 0,33 > 0$, което показва продуктивността по този критерий.

1.2. Според Теорема 4.4. Образуваме сумите на елементите по редове –

$$a_1 = a_{11} + a_{12} + a_{13} = 0,35 + 0,13 + 0,09 = 0,57 < 1$$

$$a_2 = a_{21} + a_{22} + a_{23} = 0,11 + 0,27 + 0,29 = 0,67 < 1$$

$$a_3 = a_{31} + a_{32} + a_{33} = 0,44 + 0,32 + 0,04 = 0,8 < 1$$

Тъй като a_1 , a_2 и a_3 са по-малки от 1 , то и по този критерии установяваме продуктивност.

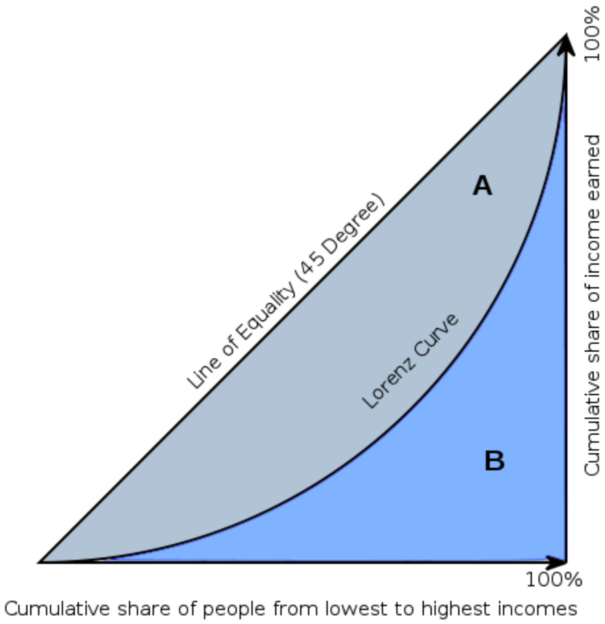
2. Намиране на решението. Тъй като за тази технологична матрица A моделът е продуктивен следва , че съществува обратна матрица $(E - A)^{-1}$ която е неотрицателна и $X = (E - A)^{-1}Y$. Получаваме $(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,85 & 0,45 & 0,33 \\ 0,73 & 1,76 & 0,61 \\ 1,06 & 0,82 & 1,39 \end{pmatrix}$ и $X = (29,62; 73,62; 72,19)^T$.

3. Възстановяване на модела. Окончателната балансова таблица се получава от $AX + Y = X$. В нашия случай тя е:

сектор	земеделие	промишленост	Обслужващ сектор	Крайно потребление	Обща продукция
Земеделие	10,37	9,57	6,50	3,12	29,62
Промишленост	3,26	19,88	20,93	29,36	73,62
Обслужващ сектор	13,03	23,56	2,89	32,24	72,19
Добавена стойност	2,96	20,61	41,87		
Обща продукция	29,62	73,62	72,19		

Да отбележим , че този модел е печеливш и за трите отрасъла – защото 2,96, 20,61 и 41,87 са по-големи от 0.

5. Моделиране на социално-икономическото неравенство. Крива на Лоренц и индекс на Джини



Най-добрият начин да бъде моделирано неравенството на доходите е като се използват кривата на Лоренц и индекса на Джини. Кривата на Лоренц се получава така: абсцисата се използва за нанасяне на комулативния дял на хората от най-ниските до най-високите доходи, а ординатата – за комулативният дял от доходите. Така например, ако най-бедните 20% получават 4% от общия доход, следващите 20% - 12% от дохода, средните 20% получават 20% от дохода, предпоследните по бедност (и вторите по богатство) 20% - 28% от дохода и най-богатите 20% - 36% от дохода, то кривата на Лоренц ще свързва точките с координати (0%,0%), (20%,4%), (40%,16%), (60%,36%), (80%,64%) и (100%,100%) – в проценти или (0,0), (0,2;0,04), (0,4;0,16), (0,6;0,36), (0,8;0,64) – (1;1) – в дялове от цялото. Нека да означим с B лицето на областта, разположена под кривата на Лоренц, а с A – лицето на областта между кривата на Лоренц и линията $y = x$, съответстваща на абсолютно равенство на доходите, тогава

$$\text{индекса на Джини } D = \frac{A}{A+B} = \frac{\frac{1}{2} - \int_0^1 f(x)dx}{\frac{1}{2}} = 1 - 2\int_0^1 f(x)dx$$

ако $y = f(x)$ е аналитичния вид на кривата на Лоренц. Вижда се, че при $D = 0$ имаме абсолютно равенство на доходите, а при $D = 1$ – абсолютно недавенство. Тези две състояния са икономически невъзможни, следователно $D \in (0,1)$.

Най-често за моделиране на кривата на Лоренц се използва степенната функция $y = x^{\alpha}$, $\alpha > 1$. При това положение индексът на Джини D и степенния показател α са свързани:

$$D = 1 - 2\int_0^1 x^\alpha dx = 1 - 2\frac{1}{\alpha+1} = \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \Longrightarrow \alpha = \frac{1+D}{1-D}$$

В долната таблица са нанесени някои характерни стойности на D и α

Индекс на Джини D	0,2	0,3	0,33	0,4	0,43	0,5	0,56	0,6	0,64	0,67
Степенен показател α	1,5	1,86	2	2,33	2,5	3	3,5	4	4,5	5

Медианен доход. Медианният доход е доходът по средата, т.е. предполага се, че половината от хората получават доход, по-висок от него, а другата половина – по-нисък. Това е важен индикатор на социално-икономическото неравенство, защото повечето хора възприемат този доход на средния човек като среден доход. Нека $y = f(x)$ е аналитичния вид на кривата на Лоренц. Тогава средният като доходи човек ($x = 0{,}5$) го включваме в една група с хора с по-високи доходи ($x \in (0{,}5; 0{,}5 + \delta)$) и в симетричната група с по-ниски ($x \in (0{,}5 - \delta; 0{,}5)$). тога. Тогава средният доход на тази обединена група ще бъде

$$\frac{f(0{,}5+\delta) - f(0{,}5-\delta)}{(0{,}5+\delta) - (0{,}5-\delta)} = \frac{f(0{,}5+\delta) - f(0{,}5-\delta)}{2\delta}.$$

При граничен преход ($\delta \to 0$) получаваме медианния доход:

$$M = \lim_{\delta\to 0}\frac{f(0{,}5+\delta) - f(0{,}5-\delta)}{2\delta} = f'(0{,}5).$$

За степенната функция $y = x^\alpha$ ще имаме

$$M = \frac{\alpha}{2^{\alpha-1}}.$$

Разбира се, това което сме означили с M е съотношението между медианния и среден доход. От горното равенство се вижда, че при $\alpha \in (1{,}2)$ медианният доход е по-висок от средния, при $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$ те се изравняват (при $\alpha = 1$ всички доходи са изравнени), а при $\alpha > 2$ медианният доход е по-нисък от средния (което е най-разпространения случай.

Минимален доход. По аналогичен начин се извежда, че за минималният доход m е изпълнено

$$m = f'(0).$$

Ясно е, че за степенната функция $y = x^\alpha$ ще имаме $m = 0$, следователно тя не е подходяща за моделиране на разпределение на доходите с определен минимален доход. За това се използва функцията

$$y = kx + (1-k)x^\alpha.$$

Тогава ще имаме $f'(0) = m = k$, т.е k е съотношението на минималния към средния доход.

Пример 12. Ако е известно, че индекса на Джини за България е 0,35, моделирайте разпределението на доходите:

а) с функция от вида $y = x^{\alpha}$;

б) с функция от вида $y = kx + (1-k)x^{\alpha}$, ако е известно, че минималният доход е 40% от средния.

И в двата случая намерете съотношението на медианния доход към средния, както и разпределението на доходите, ако хората са разделени на пет равночислени групи.

Решение:

а) Пресмятаме α по формулата, изведена по-горе

$$\alpha = \frac{1+D}{1-D} = \frac{1+0{,}35}{1-0{,}35} = \frac{1{,}35}{0{,}65} = 2{,}08.$$

Тогава ще имаме

$$y = x^{2{,}08}.$$

За съотношението на медианния доход към средния получаваме

$$M = \frac{\alpha}{2^{\alpha-1}} = \frac{2{,}08}{2^{1{,}08}} = 0{,}98,$$

следователно медианният доход е 98% от средния. За да получим разделението на доходите на пет равночислени групи ще трябва да пресметнем $f(0{,}2)$, $f(0{,}4)$, $f(0{,}6)$ и $f(0{,}8)$. Ще имаме

$$f(0{,}2) = 0{,}2^{2{,}08} = 0{,}035;\ f(0{,}4) = 0{,}4^{2{,}08} = 0{,}149;\ f(0{,}6) = 0{,}6^{2{,}08} = 0{,}346;\ f(0{,}8) = 0{,}8^{2{,}08} = 0{,}629.$$

Тогава най-бедните 20% от хората ще получават $f(0{,}2) = 0{,}035 = 3{,}5\%$ от всички доходи; следващата група - $f(0{,}4) - f(0{,}2) = 0{,}149 - 0{,}035 = 0{,}114 = 11{,}4\%$; средната група - $f(0{,}6) - f(0{,}4) = 0{,}346 - 0{,}149 = 0{,}197 = 19{,}7\%$; следващата - $f(0{,}8) - f(0{,}6) = 0{,}629 - 0{,}346 = 0{,}283 = 28{,}3\%$ и най-богатата - $f(1) - f(0{,}8) = 1 - 0{,}629 = 0{,}371 = 37{,}1\%$. Нанасяме тези резултати в таблица

група	от-до	% от общия доход	среден доход
бедни	от 0% до 20%	3,5%	17,5%
средно бедни	от 20% до 40%	11,4%	57%
средни	от 40% до 60%	19,7%	98,5%
средно богати	от 60% до 80%	28,3%	141,5%
богати	от 80% до 100%	37,1%	185,5%

б) Ще търсим функция от вида $y = 0{,}4x + 0{,}6x^{\alpha}$ (минималният доход е 40%=0,4 от средния). Индексът на Джини за тази функция е

$$D = 1 - 2\int_0^1 (0{,}4x + 0{,}6x^{\alpha})dx = 1 - 2\left(0{,}2 + \frac{0{,}6}{\alpha + 1}\right) = 0{,}6\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \Rightarrow \alpha = \frac{0{,}6 + D}{0{,}6 - D}.$$

При $D = 0{,}35$ ще имаме

$$\alpha = \frac{0{,}6 + D}{0{,}6 - D} = \frac{0{,}6 + 0{,}35}{0{,}6 - 0{,}35} = \frac{0{,}95}{0{,}25} = 3{,}8.$$

Тогава за функцията на разпределение на доходите получаваме

$$y = 0{,}4x + 0{,}6x^{3{,}8}.$$

Тогава най-бедните 20% от хората ще получават $f(0{,}2) = 0{,}081 = 8{,}1\%$ от всички доходи; следващата група - $f(0{,}4) - f(0{,}2) = 0{,}178 - 0{,}081 = 0{,}097 = 9{,}7\%$; средната група - $f(0{,}6) - f(0{,}4) = 0{,}326 - 0{,}178 = 0{,}148 = 14{,}8\%$; следващата - $f(0{,}8) - f(0{,}6) = 0{,}577 - 0{,}326 = 0{,}251 = 25{,}1\%$ и най-богатата - $f(1) - f(0{,}8) = 1 - 0{,}577 = 0{,}423 = 42{,}3\%$. Нанасяме тези резултати в таблица

група	от-до	% от общия доход	среден доход
бедни	от 0% до 20%	8,1%	40,5%
средно бедни	от 20% до 40%	9,7%	48,5%
средни	от 40% до 60%	14,8%	74%
средно богати	от 60% до 80%	25,1%	125,5%
богати	от 80% до 100%	42,3%	211,5%

За съотношението на медианния доход към средния получаваме

$$M = 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 3{,}8 \cdot 0{,}5^{2{,}8} = 0{,}727 = 72{,}7\%,$$

следователно медианният доход е 72,7% от средния.

Пример 13. Известно е, че индексът на Джини за една държава е 0,32, а медианната заплата е 86% от средната. Да се моделира разпределението на доходите чрез функцията

$$y = \alpha x + \beta x^2 + (1 - \alpha - \beta)x^3.$$

Намерете разпределението на доходите, ако хората са разделени на пет равночислени групи.

Решение:

За индексът на Джини на горната функция ще имаме

$$D = 1 - 2\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3} + \frac{1 - \alpha - \beta}{4}\right) = \frac{3 - 3\alpha - \beta}{6}.$$

Тъй като по условие $D = 0{,}32$, то получаваме следното уравнение за неизвестните α и β

$$3\alpha + \beta = 1{,}08.$$

За медианния доход при такава функция ще имаме

$$M = y'(0{,}5) = \alpha + 2\beta \cdot 0{,}5 + 3(1 - \alpha - \beta) \cdot 0{,}25 = 0{,}75 + 0{,}25\alpha + 0{,}25\beta.$$

Тъй като по условие $M = 86\% = 0{,}86$, то получаваме още едно уравнение за неизвестните α и β

$$\alpha + \beta = 0{,}44.$$

Решавайки горната система получаваме $\alpha = 0{,}32$ и $\beta = 0{,}12$. Тогава функцията моделираща разпределението на доходите ще бъде

$$y = 0{,}32x + 0{,}12x^2 + 0{,}56x^3$$

Тогава най-бедните 20% от хората ще получават $f(0{,}2) = 0{,}073 = 7{,}3\%$ от всички доходи; следващата група - $f(0{,}4) - f(0{,}2) = 0{,}183 - 0{,}073 = 0{,}11 = 11\%$; средната група - $f(0{,}6) - f(0{,}4) = 0{,}356 - 0{,}183 = 0{,}173 = 17{,}3\%$; следващата - $f(0{,}8) - f(0{,}6) = 0{,}62 - 0{,}356 = 0{,}264 = 26{,}4\%$ и най-богатата - $f(1) - f(0{,}8) = 1 - 0{,}62 = 0{,}38 = 38\%$. Нанасяме тези резултати в таблица

група	от-до	% от общия доход	среден доход
бедни	от 0% до 20%	7,3%	36,5%
средно бедни	от 20% до 40%	11%	55%
средни	от 40% до 60%	17,3%	86,5%
средно богати	от 60% до 80%	26,4%	132%
богати	от 80% до 100%	38%	190%

Пример 14. В един университет има 130 професори със средно годишна заплата от 25000 лв., 260 доценти с 21000 лв., 390 асистенти с 1600 лв. и 520 служители с 10000 лв. Пресметнете индекса на Джини за този университет.

Решение:

Общият брой на хората, работещи в университета е 130+260+390+520=1300. Тогава професорите съставляват 10%=0,1 от общия брой, доцентите – 20%=0,2, асистентите – 30%=0,3 и служителите – 40%=0,4. Въз основа на това можем да пресметнем средната заплата на работещите в този университет. Тя е

$$0{,}1 \cdot 25 + 0{,}2 \cdot 21 + 0{,}3 \cdot 16 + 0{,}4 \cdot 10 = 15{,}5$$

или 15500 лв. Тогава средната заплата на служителите ще представлява 0,645=64,5% от тази средна заплата и тъй като те са 0,4 от общия брой, то на тях ще се падат 0,258=25,8% от всички доходи. За асистентите – 1,032 спрямо средната заплата и 0,3096=30,96% от общите доходи, за доцентите – 1,355 спрямо средната заплата и 0,271=27,1% от общите доходи, тогава за професорите остават 0,1614=16,14% от доходите. Нека $f(x)$ е функцията на разпределение на доходите. Тогава $f(0{,}4)$ (най-бедната група – служителите съставлява 0,4 от общия брой) ще бъде дела на дохода на служителите от общия доход, т.е. $f(0{,}4) = 0{,}258$. $f(0{,}7)$ (най бедната и следващата по бедност група обхващат 0,7 от общия брой на работещите в университета) ще бъде равно на $0{,}258 + 0{,}3096 = 0{,}5676$ (колкото е дела на доходите на служителите и асистентите). И накрая, $f(0{,}9) = 0{,}8386$. Ако с S означим лицето на фигурата, разположена под начупената линия, съединяваща точките с координати (0;0), (0,4;0,258), (0,7;0,5676), (0,9;0,8386) и (1;1), то за индекса на Джини D ще имаме

$$D = \frac{\frac{1}{2} - S}{\frac{1}{2}} = 1 - 2S.$$

Тази фигура (с лице S) се състои от четири фигури, чиито лица означаваме с S_1, S_2, S_3 и S_4. Първата фигура е триъгълник, а другите три – трапци. За лицата им ще имаме

$$S_1 = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}258}{2} = 0{,}0516, \qquad S_2 = \frac{0{,}3(0{,}258 + 0{,}5676)}{2} = 0{,}12384,$$

$$S_3 = \frac{0{,}2(0{,}5676 + 0{,}8386)}{2} = 0{,}14062, \qquad S_4 = \frac{0{,}1(0{,}8386 + 1)}{2} = 0{,}09193.$$

Тогава, за S получаваме

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 0{,}0516 + 0{,}12384 + 0{,}14062 + 0{,}09193 = 0{,}40799.$$

Така за индекса на Джини D ще имаме

$$D = 1 - 2S = 1 - 2 \cdot 0{,}40799 = 0{,}184.$$

Как се получава индекса на Джини в случай, че всички домакинства са разделени на n групи с равна численост. Нека техните средни доходи са $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Тогава се прилага формулата

$$D = \frac{1}{\bar{y}n^2} \sum_{i,j:i<j} |y_j - y_i|$$

където с D е означен индекса на Джини, а с $\bar{y} = \frac{1}{n}(y_1 + \cdots + y_n)$ - средния доход.

Пример 15. Всички домакинства са разделени на 5 равночислени групи, чиито доходи са както следва

I	II	III	IV	V
1400	800	500	300	200

Да се пресметне индекса на Джини.

Решение:

Ясно е, че $n = 5$ и $\bar{y} = \frac{1}{5}(1400 + 800 + 500 + 300 + 200) = 640$. Тогава за индекса на Джини получаваме

$$D = \frac{100 + 300 + 600 + 1200 + 200 + 500 + 1100 + 300 + 900 + 600}{640 \cdot 25} = \frac{5800}{16000} = 0{,}3625.$$

6. Безработица

Приемаме, че за изследвания период от време обема на трудовите ресурси R е константен. Той включва две групи – заети трудови ресурси N и безработни U, т.е. $R = N + U$. Делът на безработните към обема на трудовите ресурси

$$u = \frac{U}{R}$$

се нарича отчетена безработица.

Означаваме с δ делът от всички работещи, които през даден период са загубили работата си, а с γ - делът от всички безработни, които през същия период са постъпили на работа. Изменението на броя работещи през този период ще се осъществява по формулата

$$\Delta N = \gamma U - \delta N$$

Ще имаме пълна заетост ако $\Delta N = 0$ или $\gamma U = \delta N$, т.е.

$$\gamma U = \delta(R - U)$$

Решаваме горното уравнение относно U:

$$U = \frac{\delta R}{\gamma + \delta}$$

Горната формула определя броя на безработните в условие на пълна заетост (при $\Delta N = 0$). Пресмятаме техния дял спрямо активните трудови ресурси

$$\frac{U}{R} = \frac{\delta R}{(\gamma + \delta)R} = \frac{\delta}{\gamma + \delta} = u^*$$

Полученият коефициент u^* се нарича норма на естествена безработица.

Разликата между фактическото u и естественото u^* ниво на безработицата се нарича конюнктурна безработица: $u_k = u - u^*$.

Ако потенциално възможният брутен продукт в условие на пълна заетост ($u_k = 0$) означим с $y_F(N^*)$ ($N^* = (1 - u^*)R$), а брутния продукт при положителна конюнктурна безработица - $y(N)$, разликата $y_F(N^*) - y(N)$ образува конюнктурен разрив на брутния продукт. На базата на емпирични данни Артур Оукен е намерил устойчива връзка между величините на конюнктурната безработица и конюнктурния разрив, а именно валидно е съотношението

$$\frac{y_F - y}{y_F} = \theta(u - u^*) = \theta u_k,$$

където θ е параметъра на Оукен.

Пример 16. Трудовите ресурси на една държава възлизат на 3 млн. До края на месец декември в страната е имало 10% отчетена безработица.

а) През периода януари – юни (включително) 2% от заетите напускат работа, а 38% от безработните започват да работят. Определете динамиката на конюнктурната безработица и попълнете таблицата (като всички величини се пресмятат до стотни).

б) Ситуацията на пазара на труд се задържа със същите параметри, като в а) през първото тримесечие, а през второто се влошава рязко - 3% от заетите напускат работа, а 27% от безработните започват да работят. Определете динамиката на конюнктурната безработица и попълнете таблицата (като всички величини се пресмятат до стотни).

	1	2	3	4	5	6
N						
U						
δN						
γU						
ΔN						
u_k						

Решение:

а) Ще измерваме в хиляди. През януари $t = 1$ е имало 2700 работещи и 300 безработни. От тези работещи напускат работа 2% от $2700 = 0{,}02 \cdot 2700 = 54$, хората, започващи работа са 38% от $300 = 0{,}38 \cdot 300 = 114$, следователно $\Delta N = \gamma U - \delta N = 114 - 54 = 60$. Тези 60 прибавяме към N за следващия месец (февруари, $t = 2$) и изваждаме от U. Така получаваме $N(t = 2) = 2760$ и $U(t = 2) = 240$. Тогава ще имаме $\delta N(t = 2) = 0{,}02 \cdot 2760 = 55{,}2$ и $\gamma U(t = 2) = 0{,}38 \cdot 240 = 91{,}2 \Longrightarrow \Delta N(t = 2) = \gamma U(t = 2) - \delta N(t = 2) = 91{,}2 - 55{,}2 = 36$.
По този начин попълваме клетките на таблицата (без тези от последния ред). През всички месеци естествената безработица u^* е една и съща

$$u^* = \frac{\delta}{\delta + \gamma} = \frac{0{,}02}{0{,}02 + 0{,}38} = 0{,}05 = 5\%.$$

Тъй като през януари отчетената безработица е 10%, то $u_k(t = 1) = 10\% - 5\% = 5\%$. През февруари отчетената безработица ще бъде

$$u(t = 2) = \frac{U(t = 2)}{U + N} = \frac{240}{3000} = 0{,}08 = 8\%,$$

Тогава ще имаме $u_k(t = 2) = 8\% - 5\% = 3\%$. След като направим пресмятанията при $t = 2, \ldots 6$ по същия начин попълнената таблица изглежда така

	1	2	3	4	5	6
N	2700	2760	2796	2817,6	2830,56	2838,34
U	300	240	204	182,4	169,44	161,66
δN	54	55,2	55,92	56,35	56,61	56,77
γU	114	91,2	77,52	69,31	64,39	61,43
ΔN	60	36	21,6	12,96	7,78	4,66
$u_k\%$	5	3	1,8	1,08	0,65	0,39

б) Тъй като конюнктурата през първите три месеца съвпада с тази от а), то колоните, съответстващи на $(t = 1)$, $(t = 2)$ и $(t = 3)$ ще останат същите. При $(t = 4)$ ще имаме $N(t = 4) = 2817{,}6$ и $U(t = 4) = 182{,}4$, тогава отчетената безработица ще е $u(t = 4) = 6{,}08$, но естествената безработица u^* ще се е променила, в следствие на промяната на коефициентите δ и γ:

$$u^* = \frac{\delta}{\delta + \gamma} = \frac{0{,}03}{0{,}03 + 0{,}27} = 0{,}1 = 10\%.$$

Тогава за конюнктурната безработица през този месец получаваме $u_k(t = 4) = 6{,}08\% - 10\% = -3{,}92\%$. През април съкратените работници ще са $\delta N(t = 4) = 0{,}03 \cdot 2817{,}6 = 84{,}53$, а започналите работа - $\gamma U(t = 4) = 0{,}27 \cdot 182{,}4 = 49{,}2$, в следствие на което промяната на заетостта ще бъде $\Delta N(t = 4) = \gamma U(t = 4) - \delta N(t = 4) = 49{,}2 - 84{,}53 = -35{,}33$. Това ще се отрази на работещите и безработните през май: $N(t = 5) = N(t = 4) + \delta N(t = 4) = 2817{,}6 - 35{,}33 = 2782{,}27$; $U(t = 5) = U(t = 4) - \delta N(t = 4) = 182{,}4 + 35{,}33 = 217{,}73$. По същия начин попълваме колонките, съответстващи на $t = 5$ и $t = 6$ и получаваме

	1	2	3	4	5	6
N	2700	2760	2796	2817,6	2782,27	2757,59
U	300	240	204	182,4	217,73	242,41
δN	54	55,2	55,92	84,53	83,47	82,73
γU	114	91,2	77,52	49,2	58,79	65,45
ΔN	60	36	21,6	-35,33	-24,68	-17,28
$u_k\%$	5	3	1,8	-3,92	-2,74	-1,92

II. МАКРОИКОНОМИЧЕСКА ДИНАМИКА

7. Въведение в макроикономическата динамика

Динамичните модели в икономиката се наричат моделите, описващи икономиката в развитие, т.е. моделите, описващи икономически процеси. Те са контрапункт на статичните модели, характеризиращи дадена икономическа система в определен момент, а не в развитие.

Даден модел се явява динамичен, ако поне една икономическа променлива се отнася за период от време, различен от времето, към което са отнесени другите променливи. Всички променливи в динамичните модели са отнесени към времето (t), което играе ролята на независима променлива.

С помощта на динамичните модели се решават въпросите за планирането и прогнозирането на икономическите процеси.

Има два типа динамични макроикономически модели:

а) модели с дискретно отчитане на времето; наричат се още квазидинамични модели. Свеждат се до диференчни уравнения;

б) модели с непрекъснато отчитане на времето (същински динамични модели). Свеждат се до (обикновени) диференциални уравнения.

От друга страна разграничаваме динамичните макроикономически модели според тяхното предназначение на:

а) модели на икономическия ръст;

б) модели на икономическите цикли;

в) инфлационни макроикономически модели.

Разбира се, съществуват динамични макроикономически модели (те са най-сложните), явяващи се съчетание на модели с горните характеристики.

При динамичните модели на икономическия ръст може да се говори за два типа макроикономически модели:

а) с постулиране на определена (егзогенно предположена) зависимост. Изборът на тази зависимост се прави с цел получаването на правдоподобни (от гледна точка на съществуващите статистически данни) резултати. Основен техен недостатък е, че техните решения обикновено не са устойчиви.

б) такива, при които се постулира някакъв принцип за оптималност (екстремалност), от който интересуващите ни величини се определят ендогенно.

Диференциални уравнения се наричат уравнения, в които неизвестната величина е функция (в случая на времето t) и в тях освен неизвестната функция $y(t)$ участват и някои нейни производни $y'(t)$, $y''(t)$, $y'''(t)$,… и т.н. Най-високият ред участваща в обикновеното диференциално уравнение производна определя и реда на самото уравнение. Така разграничаваме обикновени диференциални уравнения от първи ред (в които се срещат $y(t)$ и $y'(t)$), от втори ред ($y(t)$, $y'(t)$ и $y''(t)$) и т.н.

Приложението на обикновените диференциални уравнения в икономиката се основава преди всичко на механичната интерпретация на производната. При нея

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

се интерпретира като скорост на изменение на икономическата величина $y(t)$.

Ако приемем, че времето е зададено дискретно (дни, седмици, месеци, години), то тогава икономическата величина $y(t)$ е определена само за $t = 0,1,2, \dots$, следователно ще имат смисъл само стойностите

$$y(0), y(1), y(2), \dots, y(t-1), y(t), y(t+1), \dots$$

Всяка връзка, при която $y(t+1)$ зависи от предишните стойности на величината $y(t), y(t-1), y(t-2), y(t-3), \dots$ се нарича диференчно уравнение. Ако $y(t+1)$ зависи само от $y(t)$ говорим за диференчно уравнение от първи ред, ако $y(t+1)$ зависи и от $y(t-1)$ – от втори ред и т.н.

Диференциалните уравнения могат винаги да се разглеждат като гранични състояния на диференчните, а диференчните се получават често (но не винаги) от диференциалните чрез дискретизация на времето. Това става по следния начин:

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \approx \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t+1) - y(t)}{(t+1) - t} = \frac{y(t+1) - y(t)}{1}$$
$$= y(t+1) - y(t).$$

Аналогично получаваме формулата

$$y''(t) \approx [y(t+2) - y(t+1)] - [y(t+1) - y(t)] = y(t+2) - 2y(t+1) + y(t)$$

Модел на Бернули на постоянния ръст. Да предположим, че една дискретно зададена величина се изменя с постоянен ръст. Това означава, че изменението става по закона

$$y(t+1) = (1+k)y(t),$$

където k е малко (от порядъка на стотни или хилядни). Тогава k ако е положително (отрицателно) се нарича ръст на нарастването (намаляването) на величината $y(t)$. Предполага се, че е зададено началното състояние на тази величина

$$y_0 = y(0).$$

Тогава ще имаме

$$y(1) = (1+k)y_0$$

$$y(2) = (1+k)y(1) = (1+k)^2 y_0$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$y(t) = (1+k)y(t-1) = (1+k)^t y_0.$$

Ако заменим $y(t+1)$ с $y'(t) + y(t)$ ще получим диференциалното уравнения на изменението с постоянен ръст:

$$y'(t) = ky(t).$$

Това уравнение за пръв път е било предложено от Якоб Бернули. Решението му е елементарно: умножаваме уравнението

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

с dt и делим на y, получаваме

$$\frac{dy}{y} = kdt,$$

след интегриране намираме общото решение

$$\ln y = kt + C \Longrightarrow y(t) = Ce^{kt}.$$

От началното условие намираме

$$C = y(0) = y_0.$$

Така окончателното решение е

$$y(t) = e^{kt} y_0.$$

Решението на диференциалното уравнение на постоянния ръст е граница на решението на съответното уравнение:

$$\lim_{k \to 0} (1+k)^t y_0 = y_0 \lim_{k \to 0} (1+k)^{\frac{1}{k}kt} = y_0 \left[\lim_{k \to 0} (1+k)^{\frac{1}{k}} \right]^{kt} = e^{kt} y_0.$$

За много малки стойности на k е валидна следната формула за приближено пресмятане

$$(1+k)^t \approx 1 + kt.$$

Тя се обосновава по следния начин. Нека k и m да са много малки величини, тогава

$$(1+k)(1+m) = 1 + k + m + km \approx 1 + k + m.$$

Това е така, защото ако k и m са от порядъка на стотни, то произведението km е от порядъка на десетохилядни (или най много хилядни) и може да бъде пренебрегнато. Тогава за $(1+k)^t$ получаваме

$$(1+k)^t = (1+k)(1+k)\dots(1+k) \approx 1+k+k+\dots+k = 1+kt.$$

Така окончателно получаваме приблизителните равенства

$$e^{kt} \approx (1+k)^t \approx 1+kt.$$

Забележка 1. Лесно можем да получим и формулата за приблизително деление

$$\frac{1+k}{1+m} \approx 1+k-m.$$

Забележка 2. Ясно е, че редицата

$$1, e^k, e^{2k}, \dots, e^{kt}$$

се явява геометрична прогресия с частно $q = e^k$. Когато дадена величина нараства по такъв начин, казваме че тя има експоненциален ръст.

Правилото „70“. При величините, променящи се с постоянен темп, често възниква въпроса: след колко време те ще се удвоят (утроят). Нека една величина се изменя с постоянен темп от $p\%$. Тогава законът на нейното изменение ще бъде

$$y(t) = e^{\frac{pt}{100}} y_0.$$

Предполагаме, че след определено време тя се е удвоила. Тогава ще имаме

$$e^{\frac{pt}{100}} y_0 = 2y_0 \Longrightarrow e^{\frac{pt}{100}} = 2.$$

Като логаритмуваме последното равенство, получаваме

$$\frac{pt}{100} = \ln 2 \Longrightarrow t = \frac{100 \ln 2}{p} = \frac{100 \cdot 0{,}693}{p} \approx \frac{70}{p}.$$

За да определим след колко време една величина, нарастваща с постоянен темп от $p\%$, ще се удвои, трябва 70 да разделим с p.

Аналогично получаваме правилото „110“ за утрояване:

$$t = \frac{100 \ln 3}{p} = \frac{100 \cdot 1{,}099}{p} \approx \frac{110}{p}.$$

Пример 17. Да се прогнозира населението на България за 2020, 2030, 2040, 2050, 2070 и 2100 год. на базата на следните данни и като се използва модела на постоянния ръст.

История на населението на България

година	население	Темп на нарастване
2008	7541012	-0,73%
2009	7486752	-0,72%
2010	7433677	-0,71%
2011	7381264	-0,71%
2012	7329486	-0,70%
2013	7278140	-0,70%
2014	7226924	-0,70%
2015	7175548	-0,71%
2016	7124817	-0,71%
2017	7074445	-0,71%

Кога населението на България ще намалее на половината от това, което е през 2017 год.

Решение:

На базата на резултатите от таблицата приемаме постоянен ръст от -0,70% (намаление с 0,70%) годишно. Ще извършим пресмятанията по първите две формули, като данните за последната 2017 год., закръглени до хиляди приемаме за начални, т.е.

$$y_0 = 7074.$$

Тогава, по първата формула получаваме

$$y(t) = e^{\frac{pt}{100}} y_0 = 7074e^{-0,007t},$$

където

$$t = \text{дадената година} - 2017,$$

т.е. $t = 3$ за 2020 год., $t = 13$ за 2030 год., $t = 23$ за 2040 год., $t = 33$ за 2050 год., $t = 53$ за 2070 год. и $t = 83$ за 2100 год. Ще имаме

$$y(3) = 7074e^{-0,021} = 6927;\ y(13) = 7074e^{-0,091} = 6459;\ y(23) = 7074e^{-0,161} = 6022;\ y(33) = 7074e^{-0,231} = 5615;\ y(53) = 7074e^{-0,371} = 4881;\ y(83) = 7074e^{-0,581} = 3957.$$

Аналогични пресмятания извършваме по втората формула

$$y(t) = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t y_0 = 0,993^t \cdot 7074.$$

Получаваме

$$y(3) = 0{,}993^3 \cdot 7074 = 6926;\ y(13) = 0{,}993^{13} \cdot 7074 = 6457;\ y(23) = 0{,}993^{23} \cdot 7074 = 6019;\ y(33) = 0{,}993^{33} \cdot 7074 = 5610;\ y(53) = 0{,}993^{53} \cdot 7074 = 4875;\ y(83) = 0{,}993^{83} \cdot 7074 = 3949;$$

Всички получени резултати (прогнози) нанасяме в таблица

година	$7074e^{-0{,}007t}$	$7074 \cdot 0{,}993^t$
2017	7074	7074
2020	6927	6926
2030	6459	6457
2040	6022	6019
2050	5615	5610
2070	4881	4875
2100	3957	3949

По правилото „70“ намираме, че населението на България ще намалее двойно спрямо това от 2017 год. (т.е. ще възлиза на 3537 хил.) след 100 год. или през 2127 год.

Забележка. Горните пресмятания могат да се извършват или директно или чрез преминаване към логаритми. Нека например да пресметнем $y(13)$ чрез преминаване към логаритми. По първата формула ще имаме

$$y(13) = 7074e^{-0{,}091} \Rightarrow \ln y(13) = \ln 7074 - 0{,}091 = 8{,}864 - 0{,}091 = 8{,}773 \Rightarrow y(13) = e^{8{,}773} = 6458.$$

По втората:

$$y(13) = 0{,}993^{13} \cdot 7074 \Rightarrow \ln y(13) = 13 \ln 0{,}993 + \ln 7074 = 13(-0{,}007) + 8{,}864 = 8{,}773 \Rightarrow y(13) = e^{8{,}773} = 6458.$$

(грешките са от закръгляния)

8. Динамичен модел на Кейнс с непрекъснато време

Разглеждаме прост балансов модел, включващ в себе си основните компоненти на разходната и доходна част на икономиката в динамичен вид. Нека $y(t)$, $C(t)$, $I(t)$ и $G(t)$ да са съответно националния доход, крайното потребление на домакинствата, инвестициите на предприемаческия сектор и крайното потребление на държавата. Всички тези макроикономически величини се разглеждат като функции от времето. Тогава са изпълнени следните равенства

$$y(t) = C(t) + I(t) + G(t)$$

$$C(t) = a(t)y(t) + b(t)$$

$$I(t) = k(t)y'(t).$$

Във втората формула с $a(t)$ е означена склонността на домакинствата към потребление ($0 < a(t) < 1$), а с $b(t)$ – автономното крайно потребление. В третото равенство $k(t)$ е нормата на акселерация.

Да поясним смисъла на горните формули. Първата формула е формулата за националния доход в трисекторна икономика в динамичен аспект. Втората формула отразява кейнсианската концепция за потреблението на домакинствата, също в динамичен аспект. Третата формула показва, че инвестициите в икономиката не се правят произволно – те се явяват произведение на акселератора (отразяващ технологията на производство и инфраструктурата в държавата) с маргиналния (по отношение на времето) национален доход.

Ще предполагаме, че функциите $a(t)$, $b(t)$, $k(t)$ и $G(t)$ са зададени. Те се явяват характеристики на функционирането и развитие на държавата (а също и на манталитета и потребностите на нейните граждани). В този модел трябва да се определи динамичната функция $y(t)$, т.е. националния доход като функция на времето.

Заместваме $C(t)$ от второто уравнение и $I(t)$ от третото уравнение в първото уравнение и след преобразования получаваме следното линейно диференциално уравнение от първи ред за неизвестната функция $y(t)$

$$y'(t) = \frac{1 - a(t)}{k(t)} y(t) - \frac{b(t) + G(t)}{k(t)}.$$

Да проанализираме най-простия случай, когато зададените функции $a(t)$, $b(t)$, $k(t)$ и $G(t)$ са константи. Тогава горното диференциално уравнение е уравнение с постоянни коефициенти

$$y'(t) = \frac{1 - a}{k} y(t) - \frac{b + G}{k}.$$

За да получим общото решение на нехомогенното уравнение, първо ще решим съответното хомогенно уравнение

$$y'(t) = \frac{1 - a}{k} y(t) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{1 - a}{k} y \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{1 - a}{k} dt$$
$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{1 - a}{k} dt \Rightarrow \ln y = \frac{1 - a}{k} t + C_0 \Rightarrow y = Ce^{\frac{1-a}{k}t}$$

Сега решаваме нехомогенното уравнение по метода на вариране на константата. Допускаме, че интеграционната константа C е функция от времето, т.е. $C = C(t)$. Тогава ще търсим решение от вида

$$y(t) = C(t)e^{\frac{1-a}{k}t} \Longrightarrow y'(t) = C'(t)e^{\frac{1-a}{k}t} + C(t)\frac{1-a}{k}e^{\frac{1-a}{k}t}.$$

Заместваме $y'(t)$ и $y(t)$ в нехомогенното уравнение и след преобразования получаваме следното диференциално уравнение за функцията $C(t)$

$$C'(t) = -\frac{b+G}{k}e^{-\frac{1-a}{k}t}.$$

Интегрираме горното равенство и получаваме

$$C(t) = \frac{b+G}{1-a}e^{-\frac{1-a}{k}t} + C.$$

Замествайки получения израз за $C(t)$ в израза за $y(t)$ получаваме окончателно решението на разглежданото нехомогенно уравнение за $y(t)$:

$$y(t) = \frac{b+G}{1-a} + Ce^{\frac{1-a}{k}t},$$

където C е интеграционна константа, определяща се от началното условие $y(t) = y_0$. Замествайки в горното уравнение $t = 0$ и получаваме

$$C = y_0 - \frac{b+G}{1-a}.$$

Тогава решението на диференциалното уравнение ще бъде

$$y(t) = \frac{b+G}{1-a} + \left(y_0 - \frac{b+G}{1-a}\right)e^{\frac{1-a}{k}t}.$$

Тъй като имаме

$$\frac{b+G}{1-a} = y_p,$$

където y_p е решението на диференциалното уравнение $y'(t) = 0$, то окончателно ще имаме

$$y(t) = y_p + (y_0 - y_p)e^{\frac{1-a}{k}t}.$$

Очевидно, при $y_0 < y_p$ $y(t)$ ще бъде намаляваща функция, а при $y_0 > y_p$ – растяща. В случай, че $y_0 = y_p$, то ще имаме $y(t) = y_0 = y_p$, т.е. националният доход няма да се променя с времето. На рис. 1 са показани интегралните криви на уравнението при различни съотношения между y_0 и y_p.

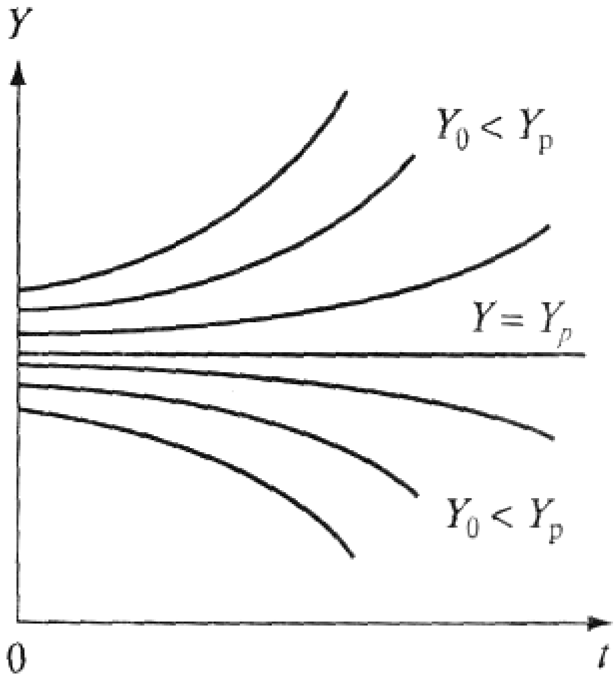


Рис. 1. Различни варианти на динамичния модел на Кейнс в зависимост от началното условие и параметрите на модела

Пример 18. Националният доход на една държава през 2015 год. Възлиза на 100 млрд. от местната парична единица. Функцията на потребление на домакинствата има вида $C(t) = 0{,}5y(t) + 10$. На колко трябва да възлизат постоянните държавни разходи (за крайни стоки), за да се осигури растеж на икономиката на тази държава през следващите години? Изразете динамичната функция на националния доход при произволен акселератор k и при $G = 35$. Пресметнете стойностите на националния доход, потреблението и инвестициите през следващите пет години при $k = 2$.

Решение:

От условието на задачата имаме $a = 0{,}5$, $b = 10$ и $y_0 = 100$. Тогава условието за нарастване на националния доход

$$y_0 > y_p = \frac{b + G}{1 - a}$$

добива вида

$$100 > y_p = \frac{10 + G}{1 - 0{,}5} = 20 + 2G,$$

откъдето получаваме $G < 40$. При $G = 40$ националният доход няма да се променя с времето, а при $G > 40$ – ще спада.

Тъй като $G = 35 < 40$, то националният доход в този случай ще расте с времето. Тъй като равенството

$$y(t) = C(t) + I(t) + G(t)$$

е изпълнено и за $t = 0$ и $C(0) = 0{,}5y(0) + 10 = 0{,}5 \cdot 100 + 10 = 60$, а $G(t) = const = 35 = G(0)$, то получаваме $I(0) = 5$.

Като заместим $a = 0{,}5$, $b = 10$ $G = 35$ и $y_0 = 100$ във формулата

$$y(t) = \frac{b+G}{1-a} + \left(y_0 - \frac{b+G}{1-a}\right) e^{\frac{1-a}{k}t}$$

получаваме

$$y(t) = 90 + 10e^{\frac{0{,}5}{k}t},$$

а за $k = 2$ ще имаме

$$y(t) = 90 + 10e^{0{,}25t}.$$

За $t = 1$ получаваме

$$y(1) = 90 + 10e^{0{,}25} = 102{,}84.$$

Тогава ще имаме

$$C(1) = 0{,}5y(1) + 10 = 0{,}5 \cdot 102{,}84 + 10 = 61{,}42$$

$$I(t) = y(1) - C(1) - G(1) = 6{,}42.$$

Аналогично извършваме пресмятанията за $t = 2{,}3{,}4{,}5$ и нанасяме в таблица

t	y(t)	C(t)	I(t)
0	100	60	5
1	102,84	61,42	6,42
2	106,49	63,25	8,23
3	111,17	65,59	10,58
4	117,18	68,59	13,59
5	124,90	72,45	17,45

Вижда се, че тъй като $a = 0{,}5$ то половината от нарастването на националния доход се усвоява от потреблението на домакинствата, а другата половина – от инвестициите на предприемачите. От друга страна, да отбележим, че винаги ще имаме

$$I(t+1) > k\big(y(t+1) - y(t)\big) = 2\big(y(t+1) - y(t)\big).$$

И наистина

$$I(1) = 6{,}42 > 2\big(y(1) - y(0)\big) = 2(102{,}84 - 100) = 5{,}68$$

$$I(2) = 8{,}23 > 2\big(y(2) - y(1)\big) = 2(106{,}49 - 102{,}84) = 7{,}3$$

$$I(3) = 10{,}58 > 2\big(y(3) - y(2)\big) = 2(111{,}17 - 106{,}49) = 9{,}36$$

$$I(4) = 13{,}59 > 2\big(y(4) - y(3)\big) = 2(117{,}18 - 111{,}17) = 12{,}02$$

$$I(5) = 17{,}45 > 2\big(y(5) - y(4)\big) = 2(124{,}9 - 117{,}18) = 15{,}46.$$

Проблемът се изразява в следното: в макроикономическите анализи участват годишните стойности на националния доход (или БВП). Така например, ако с $t = 0$ имаме предвид националния доход (потреблението, инвестициите) през календарната 2015 год., то за $t = 1$ ще разбираме 2016 год., а за $t = 2$ – 2017 год. тогава за $t = 1{,}77$ няма как да дадем каквато и да била икономическа интерпретация. Поради тази причина в анализите често се използват модели с дискретно време.

Някои обобщения и специализации на модела. Това, което прави разгледания модел икономически недостоверен е, че държавните разходи (за крайни стоки) се приемат за постоянни. За това ще разгледаме две обобщения на модела:

1. Приема се, че държавните разходи са фиксиран дял от националния доход, т.е. изпълнено е

$$G = gy, g = const.$$

Тогава уравнението на модела ще бъде

$$y(t) = a(t)y(t) + b(t) + k(t)y'(t) + gy(t)$$

или след преобразуване

$$y'(t) = \frac{1 - a(t) - g}{k(t)} y(t) - \frac{b(t)}{k(t)}.$$

Отново приемаме, че $a(t) = a = const$, $b(t) = b = const$ и $k(t) = k = const$. Тогава получаваме следното диференциално уравнение с постоянни коефициенти

$$y'(t) = \frac{1 - a - g}{k} y(t) - \frac{b}{k}.$$

Решението на това уравнение е

$$y(t) = \frac{b}{1 - a - g} + Ce^{\frac{1-a-g}{k}t}$$

или

$$y(t) = \frac{b}{1 - a - g} + \left(y_0 - \frac{b}{1 - a - g}\right) e^{\frac{1-a-g}{k}t}.$$

Да отбележим, че в този случай стационарното решение ($y'(t) = 0$) y_p има вида

$$y_p = \frac{b}{1 - a - g},$$

така че решението може да бъде представено така

$$y(t) = y_p + \left(y_0 - y_p\right)e^{\frac{1-a-g}{k}t}.$$

За да бъде осигурен ръст на икономиката, трябва да е налице условието

$$y_0 > y_p = \frac{b}{1-a-g}.$$

2. Приема се, че държавните разходи нарастват с постоянен темп r, което при непрекъснато време означава, че

$$G = G_0 e^{rt}.$$

Тогава диференциалното уравнението на модела ще бъде

$$y(t) = a(t)y(t) + b(t) + k(t)y'(t) + G_0 e^{rt}$$

или ($a(t) = a = const$, $b(t) = b = const$ и $k(t) = k = const$)

$$y'(t) = \frac{1-a}{k}y(t) - \frac{b + G_0 e^{rt}}{k}.$$

Тъй като съответното хомогенно уравнение е същото, както в основния случай, то при вариране на константата получаваме

$$C'(t) = -\frac{b + G_0 e^{rt}}{k}e^{-\frac{1-a}{k}t} = -\frac{b}{k}e^{-\frac{1-a}{k}t} - \frac{G_0}{k}e^{\left(r-\frac{1-a}{k}\right)t}.$$

След интегриране ще имаме

$$C(t) = \frac{b}{1-a}e^{-\frac{1-a}{k}t} + \frac{G_0}{1-a-rk}e^{\left(r-\frac{1-a}{k}\right)t} + C.$$

След заместване на $C(t)$ в

$$y(t) = C(t)e^{\frac{1-a}{k}t}$$

получаваме

$$y(t) = \frac{b}{1-a} + \frac{G_0}{1-a-rk}e^{rt} + Ce^{\frac{1-a}{k}t}.$$

При $t = 0$ ще имаме

$$y_0 = \frac{b}{1-a} + \frac{G_0}{1-a-rk} + C \Rightarrow C = y_0 - \frac{b}{1-a} - \frac{G_0}{1-a-rk}.$$

Като заместим в решението, получаваме окончателно

$$y(t) = \frac{b}{1-a} + \frac{G_0}{1-a-rk}e^{rt} + \left(y_0 - \frac{b}{1-a} - \frac{G_0}{1-a-rk}\right)e^{\frac{1-a}{k}t}.$$

За $b = 0$ ще имаме

$$y(t) = \frac{G_0}{1-a-rk}e^{rt} + \left(y_0 - \frac{G_0}{1-a-rk}\right)e^{\frac{1-a}{k}t}.$$

В частния случай, когато за началната стойност на националния доход е изпълнено

$$y_0 = \frac{G_0}{1-a-rk},$$

получаваме

$$y(t) = y_0 e^{rt},$$

т.е. в такъв случай националният доход нараства със същия (постоянен) темп, както държавните разходи.

Интересен е случаят, когато е изпълнено условието

$$r = \frac{1-a}{k}.$$

Тук не трябва да ни смущава това, че $1 - a - rk$ и $\frac{G_0}{1-a-rk} = \infty$, защото тези изрази ще се съкратят и ще се получи

$$y(t) = \frac{b}{1-a} + \left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right)e^{rt}$$

и (стига да е изпълнено условието

$$y_0 > \frac{b}{1-a})$$

ще има устойчив ръст на икономиката.

Разбира се, ако положим $r = 0$, тогава $G = G_0 = const$ и получаваме формулата за $y(t)$ при постоянни държавни разходи.

3. Ако във формулата за $y(t)$ в основния случай (при фиксирани държавни разходи) заместим $G = 0$ получаваме

$$y(t) = \frac{b}{1-a} + \left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right)e^{\frac{1-a}{k}t},$$

Което е формулата за годишните стойности на националния доход в двусекторна икономика.

Пример 19. Нека са изпълнени условията на пример 2. Да се пресметнат годишните стойности на националния доход, потреблението, инвестициите и държавните разходи, ако:

а) държавните разходи са фиксирани в размер на 35% от националния доход;

б) Държавните разходи нарастват с постоянен годишен темп от 5%.

Решение:

а) Заместваме във формулата

$$y(t) = \frac{b}{1-a-g} + \left(y_0 - \frac{b}{1-a-g}\right) e^{\frac{1-a-g}{k}t}$$

$b = 10, a = 0{,}5, g = 0{,}35, y_0 = 100$ и $k = 2$, получаваме

$$y(t) = 66{,}67 + (100 - 66{,}67)e^{0{,}075t} = 66{,}67 + 33{,}33e^{0{,}075t}.$$

Тази формула ни дава възможност да пресмятаме годишните стойности на националния доход $y(t)$ (при $t = 1,2,3,4,5$), чрез него – на потреблението $C(t) = 0{,}5y(t) + 10$ и на държавните разходи $G(t) = 0{,}35y(t)$. Това, което остава от националния доход след приспадане на потреблението и държавните разходи, ще бъдат инвестициите $I(t)$. Резултатите нанасяме в таблица

t	y(t)	C(t)	G(t)	I(t)
0	100	60	35	5
1	102,60	61,30	35,91	5,39
2	105,39	62,69	36,89	5,81
3	108,41	64,20	37,94	6,27
4	111,66	65,83	39,08	6,85
5	115,16	67,58	40,31	7,27

б) Заместваме във формулата

$$y(t) = \frac{b}{1-a} + \frac{G_0}{1-a-rk} e^{rt} + \left(y_0 - \frac{b}{1-a} - \frac{G_0}{1-a-rk}\right) e^{\frac{1-a}{k}t}$$

$b = 10, a = 0{,}5, r = 0{,}05, k = 2, G_0 = 35$ и получаваме

$$y(t) = 20 + 87{,}5e^{0{,}05t} + (100 - 20 - 87{,}5)e^{0{,}25t} = 20 + 87{,}5e^{0{,}05t} - 7{,}5e^{0{,}25t}.$$

Пресмятаме националния доход при $t = 1,2,3,4,5$:

$$y(1) = 20 + 87{,}5e^{0{,}05} - 7{,}5e^{0{,}25} = 102{,}36$$

$$y(2) = 20 + 87{,}5e^{0{,}10} - 7{,}5e^{0{,}50} = 104{,}34$$

$$y(3) = 20 + 87{,}5e^{0{,}15} - 7{,}5e^{0{,}75} = 105{,}78$$

$$y(4) = 20 + 87{,}5e^{0{,}20} - 7{,}5e^{1{,}00} = 106{,}49$$

$$y(5) = 20 + 87{,}5e^{0{,}25} - 7{,}5e^{1{,}25} = 106{,}17.$$

Вижда се, че в този случай нямаме налице устойчив ръст на националния доход ($y(5) < y(4)$). При по-големи стойности на t спадът става много голям:

$$y(10) = 20 + 87{,}5e^{0{,}5} - 7{,}5e^{2{,}5} = 72{,}89.$$

$$y(20) = 20 + 87{,}5e^1 - 7{,}5e^5 = -855{,}25.$$

Изводи: Основна слабост на динамичния модел на Кейнс (с непрекъснато време) е, че условията за постигане на устойчив ръст на икономиката са много специални и до голяма степен е чиста случайност, те да бъдат изпълнени. Нещо повече – в най-общия случай (когато държавните разходи нарастват с постоянен темп) такова условие не може да се изведе в явен вид.

9. Динамичен модел на Кейнс с дискретно време

Приемаме, че t може да заема само цели неотрицателни стойности, т.е. $t = 0,1,2,3, \ldots$. Тогава за $t+1$-вата година ще имаме

$$y_{t+1} = C_{t+1} + I_{t+1} + G_{t+1}$$

$$C_{t+1} = a_{t+1}y_{t+1} + b_{t+1}$$

$$I_{t+1} = k_{t+1}(y_{t+1} - y_t),$$

където a_{t+1}, b_{t+1}, k_{t+1} и G_{t+1} са дадени функции от дискретното време (числови редици). И тук ще се ограничим с най-простия случай при който тези зададени числови редици се състоят от константи, т.е.

$$a_{t+1} = a, b_{t+1} = b, k_{t+1} = k \text{ и } G_{t+1} = G.$$

Тогава уравненията на модела ще добият вида

$$y_{t+1} = C_{t+1} + I_{t+1} + G$$

$$C_{t+1} = ay_{t+1} + b$$

$$I_{t+1} = k(y_{t+1} - y_t)$$

или (след заместване на второто и третото равенство в първото)

$$y_{t+1} = ay_{t+1} + b + k(y_{t+1} - y_t) + G.$$

Като изразим y_{t+1} чрез y_t получаваме

$$y_{t+1} = \frac{k}{k+a-1}y_t - \frac{b+G}{k+a-1}.$$

Да установим стационарната стойност на y, т.е. тази при която $y_{t+1} = y_t = y^*$. Замествайки в горното уравнение ще имаме

$$y^* = \frac{k}{k+a-1}y^* - \frac{b+G}{k+a-1} \Longrightarrow y^* = \frac{b+G}{1-a}.$$

Сега изваждаме тази стационарна стойност y^* от двете страни на горното равенство и получаваме

$$
\begin{aligned}
y_{t+1} - y^* = y_{t+1} - \frac{b+G}{1-a} &= \frac{k}{k+a-1} y_t - \frac{b+G}{k+a-1} - \frac{b+G}{1-a} \\
&= \frac{k}{k+a-1} y_t - (b+G)\left(\frac{1}{k+a-1} - \frac{1}{1-a}\right) \\
&= \frac{k}{k+a-1} y_t - (b+G)\frac{k}{(k+a-1)(1-a)} \\
&= \frac{k}{k+a-1}\left(y_t - \frac{b+G}{1-a}\right) = \frac{k}{k+a-1}(y_t - y^*).
\end{aligned}
$$

Така получихме, че за $k > 1$ редицата $y_t - y^*$ е растяща геометрична прогресия с частно

$$q = \frac{k}{k+a-1} > 1.$$

За да бъде редицата от годишни национални доходи y_t растяща е необходимо $y_0 > y^*$. Да отбележим, че y^* е y_p от непрекъснатия модел, т.е. условието за нарастване на националния доход с времето е същото. Тогава, по формулата за общ член на геометрична прогресия ще имаме

$$y_t - \frac{b+G}{1-a} = \left(\frac{k}{k+a-1}\right)^t \left(y_0 - \frac{b+G}{1-a}\right)$$

или

$$y_t = \frac{b+G}{1-a} + \left(\frac{k}{k+a-1}\right)^t \left(y_0 - \frac{b+G}{1-a}\right).$$

Пример 20. Да се пресметнат стойностите на националния доход, потреблението и инвестициите, като се използват данните от пример 2 в дискретно време.

Решение:

Имаме

$$\frac{b+G}{1-a} = \frac{10+35}{1-0{,}5} = 90, \quad \frac{k}{k+a-1} = \frac{2}{2+0{,}5-1} = \frac{4}{3},$$

тогава за y_t получаваме

$$y_t = 90 + \left(\frac{4}{3}\right)^t \cdot 10.$$

Като използваме горната формула, последователно получаваме

$$y_1 = 103{,}33;\ y_2 = 107{,}78;\ y_3 = 113{,}70;\ y_4 = 121{,}60;\ y_5 = 132{,}14.$$

Ако сравним резултатите за националния доход по години, пресметнат въз основа на двата модела, ще видим значителни разлики:

t	0	1	2	3	4	5
y_t – непрек. време	100	102,84	106,49	111,17	117,18	124,90
y_t – дискр. време	100	103,33	107,78	113,70	121,60	132,40

На базата на пресметнатите годишни стойности на националния доход, можем да пресметнем съответните стойности на инвестициите и потреблението. Резултатите нанасяме в таблица:

t	y_t	C_t	I_t
0	100	60	5
1	103,33	61,66	6,67
2	107,78	63,88	8,90
3	113,70	66,86	11,84
4	121,60	70,80	15,80
5	132,40	75,80	21,60

Сега ще разгледаме и модела с дискретно зададено време при който държавните разходи са фиксиран дял (процент) от националния доход. Тогава получаваме диференчното уравнение

$$y_{t+1} = ay_{t+1} + b + k(y_{t+1} - y_t) + gy_{t+1}$$

или

$$y_{t+1} = \frac{k}{k+a+g-1} y_t - \frac{b}{k+a+g-1}.$$

Тук стационарното решение y^* (определено от $y_{t+1} = y_t = y^*$) е

$$y^* = \frac{b}{1-a-g}$$

Изваждайки стационарното решение y^* от двете страни на горното равенство получаваме

$$y_{t+1} - y^* = \frac{k}{k+a+g-1}(y_t - y^*).$$

От тук получаваме формулата за общия член на времевата редица y_t:

$$y_t = \frac{b}{1-a-g} + \left(\frac{k}{k+a+g-1}\right)^t \left(y_0 - \frac{b}{1-a-g}\right).$$

И накрая, да разгледаме случая при който държавните разходи нарастват с постоянен темп r или

$$G = G_0(1+r)^t.$$

Диференчното уравнение на този модел ще бъде

$$y_{t+1} = ay_{t+1} + b + k(y_{t+1} - y_t) + G_0(1+r)^t$$

или

$$y_{t+1} = \frac{k}{k+a-1}y_t - \frac{b + G_0(1+r)^t}{k+a-1}.$$

Да намерим стационарното решение (определено от $y_{t+1} = y_t = y^*$). За него получаваме

$$y^* = \frac{b + G_0(1+r)^t}{1-a},$$

Следователно то също зависи от t и не можем да използваме подхода, при който получихме решението в другите случаи.

Пример 21. Да се реши пример 3, но в дискретно време.

Решение:

а) Ще разгледаме случая, когато държавните разходи са фиксирани на 35% от националния доход. Диференчното уравнение на този модел ще бъде

$$y_{t+1} = 0{,}5y_{t+1} + 10 + 2(y_{t+1} - y_t) + 0{,}35y_{t+1}$$

или

$$y_{t+1} = \frac{2}{2+0{,}5+0{,}35-1}y_t - \frac{10}{2+0{,}5+0{,}35-1} \Rightarrow y_{t+1} = 1{,}081y_t - 5{,}405.$$

Стационарното решение y^* (определено от $y_{t+1} = y_t = y^*$) е

$$y^* = \frac{5{,}405}{0{,}081} = 66{,}73.$$

Изваждайки стационарното решение y^* от двете страни на горното равенство получаваме

$$\begin{aligned} y_{t+1} - 66{,}73 &= 1{,}081y_t - 5{,}405 - 66{,}73 = 1{,}081y_t - 72{,}115 \\ &= 1{,}081(y_t - 66{,}73). \end{aligned}$$

От тук получаваме формулата за общия член на времевата редица y_t:

$$\begin{aligned} y_t &= 66{,}73 + 1{,}081^t(y_0 - 66{,}73) = 66{,}73 + 1{,}081^t(100 - 66{,}73) \\ &= 66{,}73 + 1{,}081^t(33{,}27). \end{aligned}$$

По тази формула пресмятаме y_t за $t = 1{,}2{,}3{,}4{,}5$ а държавните разходи и потреблението изчисляваме на база зависимостите им от националния доход.

Това, което остава е за инвестициите. Резултатите от пресмятанията нанасяме в таблица

t	y_t	C_t	G_t	I_t
0	100	60	35	5
1	102,69	61,35	35,94	5,40
2	105,61	62,81	36,96	5,84
3	108,76	64,38	38,07	6,31
4	112,16	66,08	39,26	6,82
5	115,84	67,92	40,54	7,38

Да съпоставим резултатите, получени за годишните стойности на националния доход при моделите с непрекъснато и дискретно време:

t	0	1	2	3	4	5
y_t − непрек. време	100	102,60	105,39	108,41	111,66	115,16
y_t − дискр. време	100	102,69	105,61	108,76	112,16	115,84

б) Сега ще разгледаме модела с дискретно време, при който държавните разходи нарастват с постоянен темп от 5% годишно, т.е.

$$G = 35(1{,}05)^t.$$

Тогава диференчното уравнение на модела ще бъде

$$y_{t+1} = 0{,}5y_{t+1} + 10 + 2(y_{t+1} - y_t) + 35(1{,}05)^t$$

или

$$y_{t+1} = \frac{2}{2 + 0{,}5 - 1}y_t - \frac{10 + 35(1{,}05)^t}{2 + 0{,}5 - 1} \Longrightarrow y_{t+1} = \frac{4}{3}y_t - \frac{20}{3} - \frac{70}{3}(1{,}05)^t.$$

Така, за $t = 1,2,3,4,5$ получаваме

$$y_1 = \frac{4}{3}100 - \frac{20}{3} - \frac{70}{3} = \frac{310}{3} = 103{,}33;$$

$$y_2 = \frac{4}{3}103{,}33 - \frac{20}{3} - \frac{70}{3}1{,}05 = 106{,}61;$$

$$y_3 = \frac{4}{3}106{,}61 - \frac{20}{3} - \frac{70}{3}1{,}05^2 = 109{,}76;$$

$$y_4 = \frac{4}{3}109{,}76 - \frac{20}{3} - \frac{70}{3}1{,}05^3 = 112{,}67;$$

$$y_5 = \frac{4}{3}112{,}67 - \frac{20}{3} - \frac{70}{3}1{,}05^4 = 115{,}20.$$

Вижда се, че националният доход нараства с все по-забавен темп, но картината е доста по-различна в сравнение с непрекъснатия случай.

Получаване на y_t в случай, че $G = G_0(1+r)^t$ в явен вид. В този случай достигнахме до диференчното уравнение

$$y_{t+1} = \frac{k}{k+a-1} y_t - \frac{b + G_0(1+r)^t}{k+a-1}$$

или

$$y_{t+1} = A y_t + B(t),$$

където $B(t) = a + b\lambda^t$ ($\lambda = 1 + r$). Как в общия случай можем да решим такова (нехомогенно) диференчно уравнение от първи ред? Първо, предполагаме, че сме намерили едно (частно) решение на това уравнение и то е $\bar{y}_t$. Тогава общото решение на уравнението ще има вида

$$y_t = (y_0 - \bar{y}_0)A^t + \bar{y}_t.$$

И наистина, нека y_t е общото решение, стартиращо от даденото y_0. Полагаме $x_t = y_t - \bar{y}_t$. Тогава ще имаме

$$x_{t+1} = y_{t+1} - \bar{y}_{t+1} = A y_t + B(t) - \left(A\bar{y}_t + B(t)\right) = A(y_t - \bar{y}_t) = A x_t.$$

Така получихме, че x_t са членове на геометрична прогресия, следователно

$$x_t = x_0 A^t = (y_0 - \bar{y}_0)A^t.$$

Сега ще покажем начин за намиране на частното решение в случай, че $B(t) = a + b\lambda^t$. Ще търсим частното решение $\bar{y}_t$ от същия вид, т.е. $\bar{y}_t = c + d\lambda^t$. Заместваме това $\bar{y}_t$ и $\bar{y}_{t+1} = c + d\lambda^{t+1}$ в уравнението. Получаваме

$$c + d\lambda^{t+1} = A(c + d\lambda^t) + a + b\lambda^t = (Ac + a) + (Ad + b)\lambda^t.$$

Освобождаваме се от свободните членове:

$$c = Ac + a \Rightarrow c = \frac{a}{1-A}.$$

При това положение получаваме, че

$$d\lambda^{t+1} = (Ad + b)\lambda^t.$$

Разделяме двете страни на последното равенство с λ^t и получаваме

$$d\lambda = Ad + b \Rightarrow d = \frac{b}{\lambda - A}.$$

Така, окончателно намираме частното решение $\bar{y}_t$:

$$\bar{y}_t = c + d\lambda^t = \frac{a}{1-A} + \frac{b}{\lambda - A}\lambda^t.$$

Оттам общото решение се намира по указания метод.

Пример 22. Да се намери y_t в явен вид в случая на пример 5 б).

Решение:

Диференчното уравнение, което получихме при решаването на пример 5 б) беше

$$y_{t+1} = \frac{4}{3}y_t - \frac{20}{3} - \frac{70}{3}(1{,}05)^t,$$

следователно, трябва да търсим частното решение $\bar{y}_t$ във вид, т.е. $\bar{y}_t = c + d(1{,}05)^t$. Тогава $\bar{y}_{t+1} = c + d(1{,}05)^{t+1} = c + 1{,}05d(1{,}05)^t$. Заместваме $\bar{y}_t$ и $\bar{y}_{t+1}$ в уравнението и получаваме

$$\begin{aligned} c + 1{,}05d(1{,}05)^t &= \frac{4}{3}(c + d(1{,}05)^t) - \frac{20}{3} - \frac{70}{3}(1{,}05)^t \\ &= \frac{4c-20}{3} + \frac{4d-70}{3}(1{,}05)^t. \end{aligned}$$

За да се съкратят свободните членове, е необходимо да е изпълнено

$$c = \frac{4c-20}{3} \Longrightarrow c = 20.$$

Тогава равенството добива вида

$$\frac{21}{20}d(1{,}05)^t = \frac{4d-70}{3}(1{,}05)^t,$$

или, след разделяне на двете страни с $(1{,}05)^t$

$$\frac{21d}{20} = \frac{4d-70}{3} \Longrightarrow d = \frac{1400}{17}.$$

Така, окончателният вид на частното решение е

$$\bar{y}_t = 20 + \frac{1400}{17}(1{,}05)^t \quad \text{и} \quad \bar{y}_0 = 20 + \frac{1400}{17} = \frac{1740}{17}.$$

Сега вече може да заместим получените $\bar{y}_t$ и $\bar{y}_0$ във формулата за общото решение

$$y_t = (y_0 - \bar{y}_0)A^t + \bar{y}_t$$

и получаваме

$$y_t = \left(100 - \frac{1740}{17}\right)\left(\frac{4}{3}\right)^t + 20 + \frac{1400}{17}(1{,}05)^t = 20 + \frac{1400}{17}(1{,}05)^t - \frac{40}{17}\left(\frac{4}{3}\right)^t.$$

10. Модел на Харод-Домар

10.1. Модел на Харод-Домар с непрекъснато време. Този модел се базира на следните предпоставки:

1) Зависимостта на произведения национален доход от вложените в производството му количества ресурси се описва от производствената функция на Леонтиев:

$$y(t) = min\left\{\frac{K(t)}{a}, \frac{e^{mt}N(t)}{b}\right\},$$

където $N(t) = e^{nt}N_0$ (заетостта расте с постоянен темп n), а m е постоянния темп на увеличаване на ефективността на работната сила в следствие от техническия прогрес. В този случай се казва, че техническият прогрес е неутрален по Харод. (Повече за влиянието на техническият прогрес върху икономиката – в следващите параграфи).

2) За спестяванията на сектор домакинства е изпълнено съотношението

$$S(t) = sy(t),$$

където $s = const$; $s \in (0,1)$ е нормата на спестяване на домакинствата.

3) Винаги съществува равновесие при факторите на производство:

3.1) $K(t) = ay(t)$ и

3.2) $e^{mt}N(t) = by(t) \Longrightarrow N(t) = be^{-mt}y(t)$.

Условието 3.1) подсигурява пълен капацитет на производствените мощности, а 3.2) – пълна заетост.

Тогава (разглеждаме двусекторна икономика) ще бъде в сила

$$I(t) = S(t), \text{т. е.} \frac{dK(t)}{dt} = S(t).$$

Ако заместим $K(t) = ay(t)$ и $S(t) = sy(t)$, получаваме диференциалното уравнение

$$\frac{day(t)}{dt} = sy(t) \Longrightarrow \frac{dy(t)}{dt} = \frac{s}{a}y(t).$$

Това е диференциално уравнение на Бернули (за постоянен ръст), чието решение е

$$y(t) = e^{\frac{s}{a}t}y(0).$$

Тогава, за капитала ще имаме

$$K(t) = ay(t) = ae^{\frac{s}{a}t}y(0) = e^{\frac{s}{a}t}K(0)\ \big(K(0) = ay(0)\big),$$

а за труда –

$$N(t) = be^{-mt}y(t) = be^{-mt}e^{\frac{s}{a}t}y(0) = e^{\left(\frac{s}{a}-m\right)t}N(0)\ (N(0) = by(0)).$$

От друга страна имаме

$$N(t) = e^{nt}N(0).$$

Като сравним двата израза за $N(t)$ получаваме условието

$$\frac{s}{a} = n + m.$$

Извод. И при този модел, както при динамичния модел на Кейнс, се достига до стабилен ръст на националния доход, ако са изпълнени малко вероятни релации между началните данни и екзогенните константи в модела:

$$K(0) = ay(0);\ N(0) = by(0);\ \frac{s}{a} = n + m.$$

Пример 23. Предполага се, че през 2017 год. в една двусекторна икономика има макроикономическо равновесие и зависимостта на произведения национален доход от вложените в производството му количества ресурси се описва от производствената функция на Леонтиев. Произведеният национален доход възлиза на 100 млрд. парични единици, при вложен капитал в размер на 200 млрд. и труд – 4 млн. заети. През следващата 2018 год. се предполага, че заетите ще нараснат с 0,5%, а ефективността на един зает – с 3%.

а) При каква норма на спестяване макроикономическото равновесие ще бъде запазено през 2018 год.?

б) Какви сценарии на развитие на тази икономика се очертават, ако нормата на спестяване е 14%?

Решение:

а) Изхождайки от равенството ($t = 0$ за 2017 год.) $K(0) = ay(0) \Longrightarrow 200 = a \cdot 100$ определяме $a = 2$. От равенството $N(0) = by(0)$ (N се измерва в млн. заети, а K и y – в млрд. парични единици) определяме $b = 1/25$.

Така производствената функция ще има вида

$$y(t) = min\left\{\frac{K(t)}{2}, 25e^{0,03t}N(t)\right\},$$

където $N(t) = e^{0,005t}N(0)$.

При това положение, условието за равновесен ръст ще бъде

$$\frac{s}{a} = \frac{s}{2} = n + m = 0,005 + 0,03 = 0,035 \Longrightarrow s = 0,07 = 7\%.$$

Тогава показателите на тази икономика ще бъдат

t	$K(t) = e^{0,035t}K(0)$	$N(t) = e^{0,005t}N(0)$	$e^{0,03t}N(t)$	$y(t)$
0	200	4	4	100
1	207,12	4,02	4,142	103,55

б) Ако нормата на спестяване се отличава от равновесната, тогава икономиката ще излезе от макроикономическото равновесие. В случая, при норма на спестяване от 14%=0,14, капитала ще нарасне с темп от

$$\frac{s}{a} = \frac{0,14}{2} = 0,07 = 7\%,$$

а при труда ще се запазят показателите от подусловие а). тогава макроикономическите показатели ще изглеждат така:

t	$K(t) = e^{0,07t}K(0)$	$N(t) = e^{0,005t}N(0)$	$e^{0,03t}N(t)$	$y(t)$
0	200	4	4	100
1	214,50	4,02	4,142	103,55

При това положение се очертават три сценария за възстановяване на макроикономическото равновесие:

1) Тъй като с капитал $K(1) = 214{,}50$ може да се произведе национален доход $y(1) = K(1)/2 = 214{,}50/2 = 107{,}25$, то (в условие на равновесие) за това ще трябва да се вложи труд в такъв размер, че да е изпълнено

$$25e^{0,03}N(1) = y(1) \Longrightarrow N(1) = 0{,}04e^{-0,03}y(1) = 0{,}04e^{-0,03}107{,}25 = 4{,}163$$

Тъй като имаме $N(1) = 4{,}020$ (в действителност), то трябва да се внесат $4{,}163 - 4{,}020 = 0{,}143 = 143$ хил. работници (внос на работна ръка).

2) Националният доход $y(1) = 103{,}55$ се произвежда с капитал $K(1) = 207{,}10$, а останалият капитал е излишен. Така, че може да се изнесе капитал в размер на $214{,}50 - 207{,}10 = 7{,}40$ млрд. (износ на капитал).

3) Разбира се може количествата капитал и работна ръка да не се променят, но това ще доведе до намаляване на ефективността на използвания капитал и дохода от него, а това в средносрочен план пак ще доведе до отлив на капитал (или до внос на работна ръка).

10.2. Модел на Харод-Домар с дискретно време. Първо ще разгледаме модела на Домар. В този модел динамичното равновесие се обезпечава от равенствата

$$y_t = min\left\{\frac{K_t}{a}, \frac{N_t}{b}\right\} = C_t + I_t = cy_t + I_t,$$

където $N_t = (1+n)^t N_0$ (работната сила нараства с постоянен темп n, който е екзогенно зададен), $C_t = cy_t$ е потреблението на сектор домакинства, а $c = 1 - s$ е екзогенно зададена постоянна норма на потребление.

За капитала и инвестициите имаме съотношението

$$K_t = K_{t-1} + I_{t-1} = K_{t-1} + S_{t-1} = K_{t-1} + sy_{t-1}.$$

Динамичното макроикономическо равновесие изисква пълното оползотворяване на капиталовите и трудови ресурси, т.е.:

$$y_t = \frac{K_t}{a} = \frac{N_t}{b} \quad (*).$$

Използвайки първото равенство на $(*)$ ще имаме

$$K_t = ay_t = K_{t-1} + sy_{t-1} = ay_{t-1} + sy_{t-1} = (a+s)y_{t-1}$$

или

$$y_t = \left(1 + \frac{s}{a}\right) y_{t-1}.$$

Горното равенство показва, че годишните стойности на националния доход образуват (растяща) геометрична прогресия, за общия член на която ще имаме

$$y_t = \left(1 + \frac{s}{a}\right)^t y_0.$$

Сега използваме второто равенство от $(*)$ и получаваме

$$N_t = by_t = b\left(1 + \frac{s}{a}\right)^t y_0 = \left(1 + \frac{s}{a}\right)^t N_0, (N_0 = by_0).$$

Но от друга страна $N_t = (1+n)^t N_0$, така че окончателно получаваме

$$\frac{s}{a} = n.$$

Вижда се, че при този модел фактически националният доход расте с темпа на нарастване на работната сила, така че НД на един зает остава неизменна:

$$\frac{y_t}{N_t} = \frac{(1+n)^t y_0}{(1+n)^t N_0} = \frac{y_0}{N_0} = \frac{y_0}{by_0} = \frac{1}{b}.$$

От друга страна и трите параметъра на модела s, a и n са екзогенно зададени, така че икономическият растеж в този модел с пълно използване на производствения и трудов потенциал е напълно случайно явление.

В модела на Харод производствената функция е

$$y_t = min\left\{\frac{K_t}{a}, \frac{(1+m)^t N_t}{b}\right\},$$

а всичко останало е същото, както в модела на Домар. В този случай растежът на икономиката (на НД и капитала) ще бъде с темп $m + n$ и трябва да бъде изпълнено тъждеството

$$\frac{s}{a} = n + m.$$

Следователно, в модела на Харод единствената възможност за нарастване на националния доход на един зает идва от техническия прогрес.

Пример 24. Производството на национален доход в една икономика се характеризира с производствената функция

$$y_t = min\{0{,}25K_t, 2N_t\}.$$

При $t = 0$ икономиката се намира в състояние на равновесие за $N_0 = 125$.

а) При каква норма на потребление в тази икономика ще се установи динамично равновесие с темп на растеж от 4%?

б) Какъв обем инвестиции трябва да бъде направен при $t = 4$ за съхраняване на равновесния ръст?

Решение:

а) Ще имаме

$$\frac{s}{a} = n, a = 4, n = 0{,}04 \Longrightarrow s = 0{,}16 \Longrightarrow c = 1 - s = 0{,}84.$$

Тогава $y_0 = 2N_0 = 2 \cdot 125 = 250$, $K_0 = 4y_0 = 4 \cdot 250 = 1000, S_0 = sy_0 = 0{,}16 \cdot 250 = 40$.

б) Тъй като

$$y_t = (1{,}04)^t y_0 = 250(1{,}04)^t \Longrightarrow y_4 = 250(1{,}04)^4 = 292{,}46.$$

Тогава, за инвестициите през четвъртата година ще имаме

$$I_4 = S_4 = sy_4 = 0{,}16 \cdot 292{,}46 = 46{,}8.$$

Пример 25. В икономика с производствена технология, представена от функцията

$$y_t = min\{0{,}2K_t, 5N_t\}.$$

населението спестява 20% от доходите си. За $t = 0$ $y_0 = 40$, като съвкупното търсене е било равно на съвкупното предлагане. Темпът на нарастване на трудовите ресурси е 5% годишно. Да се определят: обема на капитала, националния доход, инвестициите и трудовите ресурси през първите три години след базовата. Какви трябва да бъдат трудовите ресурси през третата година, за да обезпечат равновесен ръст? А каква ще бъде конюнктурната безработица? Как да се коригира нормата на спестовност, за да може икономиката да нараства с максимално възможния темп?

Решение:

Капиталът ще нараства с $s/a = 20/5 = 4\%$, а трудовите ресурси – с $n = 5\%$. Това означава, че НД ще нараства с 4% (по-малкият от двата темпа на растеж). Тъй като $y_0 = 40$ и през базовата година има равновесие, то $K_0 = 200$ и $N_0 = 8$. Тогава, за макроикономическите показатели през трите години ще имаме

t	K_t	$y_t = 0{,}2K_t$	$I_t = C_t = 0{,}2y_t$	N_t
0	200	40	8	8
1	208	41,6	8,3	8,4
2	216,3	43,3	8,7	8,82
3	225	45	9	9,26

Ясно е, че всички макроикономически показатели, без броя на заетите ще расте с 4% годишно, а броя на заетите – с 5%. Това означава, че работната сила ще става все по-неефективна – ще спада НД на едно заето лице. Ако искаме през третата година да има равновесие, ще трябва да се използват по-малко заети от $N_3 = 9{,}26$. Нека с $N_3{}^*$ означим този брой заети. Тогава ще имаме

$$y_3 = 0{,}2K_3 = 5N_3{}^* \Longrightarrow 45 = 5N_3{}^* \text{ и } N_3{}^* = 9.$$

Тогава $N_3 - N_3{}^* = 9{,}26 - 9 = 0{,}26$ ще бъде обема на конюнктурната безработица, а в проценти тя ще възлиза на

$$\frac{N_3 - N_3{}^*}{N_3}100\% = \frac{0{,}26}{9{,}26}100\% \cong 2{,}8\%.$$

От друга страна, ако приемем за даденост темпа на нарастване на работната сила, то ще трябва да коригираме нормата на спестовност, така че капиталът и националният доход да нарастват със същия темп. Тогава ще имаме

$$\frac{s}{a} = n \Longrightarrow s = an = 5 \cdot 5 = 25\%.$$

11. Модел на Калдор

За да избегне някои от противоречията на предишните модели, Калдор е превърнал нормата на спестяване в ендогенна величина на основание на следните допускания:

(1) получателите на дохода от капитал (предприемачите) спестяват по-голяма част от дохода си, отколкото получаващите доход от труд (работна заплата) работници;

(2) цените на пазара на фактори на производство (капитал и труд) реагират гъвкаво на съотношението търсене – предлагане (наличие на съвършена конкуренция).

Означаваме с s_b нормата на спестяване на предприемачите, а с s_w – на работниците. Очевидно, ще имаме $0 < s_w < s_b < 1$. При каквато и да е производствена функция $y = y(K, N)$, хомогенна от първа степен, ще имаме

$$y = \frac{dy}{dK}K + \frac{dy}{dN}N.$$

(Това е тъждеството на Ойлер за хомогенни функции). От друга страна, при съвършена конкуренция е изпълнено

$$\frac{dy}{dK} = r \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dN} = w,$$

където r и w са цените на производствените фактори – процент и реална работна заплата. Тогава получаваме

$$y = rK + wN,$$

като rK е дохода от капитал, а wN – от труд.

Тогава, за спестяванията S ще имаме

$$S = s_b rK + s_w(y - rK).$$

За средната норма на спестяване s имаме

$$s = \frac{S}{y} = s_b\frac{rK}{y} + s_w - s_w\frac{rK}{y} = s_w + (s_b - s_w)\frac{rK}{y}.$$

Означаваме с

$$\frac{rK}{y} = \Omega \text{ делът на предприемаческият доход в националния доход,}$$

тогава ще имаме

$$s(\Omega) = s_w + (s_b - s_w)\Omega.$$

Сега прилагаме равенството

$$\frac{s}{a} = n,$$

изразяващо условието за ръст на НД (със същия темп n като ръста на трудовите ресурси) при пълно оползотворяване на трудовите ресурси. Получаваме

$$\frac{s(\Omega)}{a} = n \Longrightarrow \frac{1}{a}[s_w + (s_b - s_w)\Omega] = n \Longrightarrow s_w + (s_b - s_w)\Omega = na.$$

От последното равенство ще имаме

$$\Omega^* = \frac{na - s_w}{s_b - s_w}.$$

Последната формула показва каква е равновесната стойност Ω^* на дела на предприемачите в НД, така че икономиката да расте с темпа на растеж на работната сила n при зададена производствена функция и зададени норми на спестяване на предприемачите и работниците.

Пример 26. Нека производствената технология да е зададена чрез производствената функция

$$y_t = min\{0{,}2K_t, 2N_t\}.$$

През базовият период ($t = 0$) е установено общо икономическо равновесие и е употребен капитал в размер на $K_0 = 100$. Доходите между работодатели и работници се разпределят по равно, т.е. $\Omega = 0{,}5$. Нормата на спестяване при работниците е $s_w = 10\%$, а при работодателите - $s_b = 40\%$. Темпът на ръст на работната сила е 3%, т.е. $N_t = (1{,}03)^t N_0$.

а) Да се пресметнат основните макроикономически величини през следващия период ($t = 1$) и да се установи наличието или липсата на ОИР. Какви са възможните сценарии за преодоляване на неравновесието, ако има такова?

б) Нека при запазване на данните се променя само производствената функция, така че тя да отчита техническия прогрес

$$y_t = min\{0{,}2K_t, 2(1{,}04)^t N_t\}.$$

Да се отговори на всички въпроси от а).

в) В случаите а) и б) да се промени само разпределението на доходите между работници и работодатели Ω, така че да се осигурява ОИР при $t \geq 1$.

Решение:

а) Тъй като при $t = 0$ има ОИР, то

$$y_0 = 0{,}2K_0 = 2N_0.$$

От $K_0 = 100$ получаваме $y_0 = 20$ и $N_0 = 10$. От

$$y_0 = rK_0 + wN_0 \quad \text{и} \quad \Omega = \frac{rK_0}{y_0} = \frac{1}{2}$$

намираме, че $rK_0 = wN_0 = 10$, следователно $r = 0{,}1 = 10\%$ е доходността на вложения в производството капитал и $w = 1$ е реалната работна заплата. Условието за равновесен ръст на икономиката (т.е. за запазване на установеното при $t = 0$ ОИР за $t \geq 1$) е

$$n = \frac{1}{a}[s_w + (s_b - s_w)\Omega],$$

като отляво е темпа на нарастване на заетите, а отдясно – на капитала. Тъй като

$$\frac{1}{a}[s_w + (s_b - s_w)\Omega] = \frac{1}{5}[0{,}1 + (0{,}4 - 0{,}1)0{,}5] = 0{,}05, \text{а } n = 0{,}03,$$

то капитала ще нараства с 5% годишно, а труда – с 3% и при $t \geq 1$ ОИР няма да се запази. Националният доход, естествено, ще расте с по-малкия от двата темпа – с 3%. Тъй като средната норма на спестяване

$$s = 0{,}1 + (0{,}4 - 0{,}1)0{,}5 = 0{,}25,$$

а $S = sy$, то спестяванията, равните на тях инвестиции и потреблението ще растат с темпа на ръст на НД от 3%. Получава се следната картина на макроикономическите показатели

t	K	S = I	C	y	N
0	100	5	15	20	10
1	105	5,15	15,45	20,6	10,3

Появява се излишък от капитал, защото за производството на НД $y_1 = 20{,}6$ е необходим (в условие на равновесие) капитал в размер на $K_1{}^* = 103$, т.е. $K_1 - K_1{}^* = 105 - 103 = 2$ парични единици е излишния капитал. Възможни са три случая:

1) нерационално използване на целия капитал, т.е. използва се всичкия капитал, но с все по-малка доходност

$$r_1 = \frac{\Omega y_1}{K_1} = \frac{10{,}3}{105} = 0{,}098 = 9{,}8\%.$$

2) износ на капитал в размер на излишния капитал, тогава наличният в страната капитал ще се използва рационално (с доходност от 10%).

3) привличане на работници от чужбина. И наистина с капитал от $K_1 = 105$ може да се произведе национален доход $y_1{}' = 0{,}2K_1 = 0{,}2 \cdot 105 = 21$, за който е необходим трудов ресурс $N_1{}' = 0{,}5y_1{}' = 0{,}5 \cdot 21 = 10{,}5$, следователно трябва да се привлече трудов ресурс в размер на $N_1{}' - N_1 = 10{,}5 - 10{,}3 = 0{,}2$.

б) В този случай равенството, обезпечаващо равновесен ръст ще бъде

$$n + m = \frac{1}{a}[s_w + (s_b - s_w)\Omega]$$

и тъй като $n + m = 7\%$, а капитала нараства с постоянен темп от 5% (по отношение на него нищо не се е променило), то НД ще нараства с темп от 5% и макроикономическите показатели ще изглеждат по следния начин

t	K	S = I	C	y	N	$(1{,}04)^t N_t$
0	100	5	15	20	10	10
1	105	5,25	15,75	21	10,3	10,7

Появява се излишък от труд, защото на базата на наличния трудовия ресурс може да се произведе национален доход от 21,4, а на практика НД е $y_1 = 21$. Отново има три възможности:

1) нерационално използване на всички трудови ресурси – тогава реалната работна заплата (и производителността на труда) ще се увеличава с темп, по-малък отколкото позволява техническия прогрес:

$$w_1 = \frac{(1-\Omega)y_1}{N_1} = \frac{10,5}{10,3} = 1,02, \text{а не } 1,04.$$

2) конюнктурна безработица. За да се произведе НД от $y_1 = 21$ е необходима работна ръка в размер на

$$N_1{}^* = \frac{y_1}{2 \cdot 1,04} = 10,1,$$

т.е. абсолютният обем на конюнктурната безработица ще бъде $N_1 - N_1{}^* = 10,3 - 10,1 = 0,2$. В този случай, за да се избегне конюнктурната безработица може да се появи износ на работна ръка в размер на 0,2.

3) внос на капитал в размер, позволяващ пълното ангажиране на работната ръка, т.е. $107 - 105 = 2$ парични единици капитал.

в) И в двата случая, чрез корекция на Ω може да се осигури равновесен ръст. В първия случай:

$$\Omega^* = \frac{na - s_w}{s_b - s_w} = \frac{0,03 \cdot 5 - 0,1}{0,4 - 0,1} = \frac{0,05}{0,3} = \frac{1}{6}.$$

При такова разпределение на доходите на работниците и работодателите $\Omega^* y = 3,33$ ще бъдат доходите от капитал, а 16,67 – от труд. Тогава 3,33% ще бъде доходността на капитала, а 1,667 – реалната работна заплата.

Във втория случай ще имаме

$$\Omega^* = \frac{(n+m)a - s_w}{s_b - s_w} = \frac{0,07 \cdot 5 - 0,1}{0,4 - 0,1} = \frac{0,25}{0,3} = \frac{5}{6}.$$

Доходите от капитал ще възлизат на 16,67 при доходност от 16,67%, а доходите от труд – 3,33 при реална работна заплата $w = 0,33$.

12. Еднопродуктов динамичен модел на Леонтиев

12.1. Еднопродуктов модел на Леонтиев с дискретно време. Този макроикономически модел описва разпределението на съвкупния обществен продукт (СОП) x_t на текущи производствени разходи z_t, инвестиции I_t и крайно потребление C_t:

$$x_t = z_t + I_t + C_t.$$

Материалните производствени разходи се приемат за пропорционални на СОП: $z_t = ax_t$, където $a \in (0,1)$ е коефициент на преките разходи, който може да се интерпретира като дела от СОП, отиващ за производството. Този коефициент свидетелства за производствената технология и понякога се нарича технологичен коефициент.

Инвестициите I_t са пропорционални на нарастването на СОП през периода от време t:

$$I_t = b\Delta x_t, \text{където } \Delta x_t = x_{t+1} - x_t,$$

където $b > 0$ е акселератора на модела. Именно това съотношение прави модела динамичен.

Ако приемем редицата C_t за екзогенно зададена, получаваме отворения модел на Леонтиев:

$$x_t = ax_t + b(x_{t+1} - x_t) + C_t$$

или

$$x_{t+1} = \frac{1 - a + b}{b} x_t - \frac{1}{b} C_t.$$

Горното линейно диференчно уравнение от първи ред е подобно на уравнението, задаващо динамичния модел на Кейнс. Аналогично, и тук могат да се разгледат три основни възможности:

1) Крайното потребление е постоянно във времето, т.е. $C_t = C_0 = const$. Тогава получаваме уравнение с постоянни коефициенти

$$x_{t+1} = \frac{1 - a + b}{b} x_t - \frac{1}{b} C_0.$$

Стационарното решение x_* $(x_{t+1} = x_t = x_*)$ на това уравнение е

$$x_* = \frac{C_0}{1 - a}.$$

Като извадим това стационарно решение от двете страни на уравнението, получаваме

$$\begin{aligned} x_{t+1} - x_* &= \frac{1 - a + b}{b} x_t - \frac{1}{b} C_0 - \frac{C_0}{1 - a} = \frac{1 - a + b}{b} x_t - C_0 \frac{1 - a + b}{b(1 - a)} \\ &= \frac{1 - a + b}{b} \left(x_t - \frac{C_0}{1 - a} \right) = \frac{1 - a + b}{b} (x_t - x_*), \end{aligned}$$

следователно редицата с общ член $x_t - x_*$ е растяща геометрична прогресия. Тогава ще имаме

$$x_t - x_* = \left(\frac{1-a+b}{b}\right)^t (x_0 - x_*)$$

или

$$x_t = \frac{C_0}{1-a} + \left(\frac{1-a+b}{b}\right)^t \left(x_0 - \frac{C_0}{1-a}\right).$$

Ясно е, че при $x_0 \neq x_*$ ням да има устойчивост, а при $x_0 < x_*$ годишните стойности на СОП ще намаляват и за големи стойности на t могат да станат отрицателни. За това, трябва да е изпълнено неравенството $x_0 > x_*$ - тогава съвкупният продукт ще расте с времето.

2) Крайното потребление е пропорционално на СОП, т.е. $C_t = cx_t$, където $c \in (0,1)$. Тогава ще имаме

$$x_{t+1} = \frac{1-a+b}{b} x_t - \frac{1}{b} c x_t = \frac{1-a+b-c}{b} x_t.$$

Това означава, че годишните стойности на съвкупния продукт образуват геометрична прогресия, следователно СОП ще расте с постоянен ръст:

$$x_t = \left(\frac{1-a+b-c}{b}\right)^t x_0.$$

3) Крайното потребление расте с постоянен ръст, т.е.

$$C_t = \rho^t C_0.$$

Тогава общото (и частното) решение на модела се намира по начина, описан при разглеждането на аналогичния случай на динамичния модел на Кейнс.

Пример 27. Нека за еднопродуктовия модел на Леонтиев да е известно, че $C_0 = 50$, $x_0 = 80$, $I_0 = 14$ и $b = 2$. Да се получи формулата за x_t и да се пресметнат годишните стойности на СОП, производственото потребление и инвестициите за $t \leq 5$, ако:

а) крайното потребление е постоянно;

б) крайното потребление е фиксирана част от СОП;

в) крайното потребление расте с постоянен темп от 10% годишно;

г) Да се намери постоянния ръст на крайното потребление, при който СОП също расте с постоянен ръст.

д) крайното потребление расте с постоянен темп от 7,5% годишно.

Решение:

Тъй като за $t = 0$ също е изпълнено равенството на модела

$$x_0 = z_0 + I_0 + C_0$$

и $x_0 = 80$, $I_0 = 14$, $C_0 = 50$, то $z_0 = 16$, тогава

$$a = \frac{z_t}{x_t} = \frac{z_0}{x_0} = \frac{16}{80} = 0{,}2.$$

а) В този случай ще имаме

$$x_0 = 80 > x_* = \frac{C_0}{1-a} = \frac{50}{1-0{,}2} = \frac{50}{0{,}8} = 62{,}5,$$

следователно моделът е зададен коректно. Като заместим в съответната формула, получаваме

$$x_t = \frac{C_0}{1-a} + \left(\frac{1-a+b}{b}\right)^t \left(x_0 - \frac{C_0}{1-a}\right) = 62{,}5 + (1{,}4)^t 17{,}5.$$

Пресмятанията нанасяме в таблица

t	x_t	z_t	I_t	C_t
0	80	16	14	50
1	87	17,4	19,6	50
2	96,8	19,36	27,44	50
3	110,52	22,10	38,42	50
4	129,73	25,95	53,78	50
5	156,62	31,32	75,73	50

б) Тъй като за $t = 0$ $C_0 = 50$ и $x_0 = 80$, то

$$c = \frac{C_t}{x_t} = \frac{C_0}{x_0} = \frac{50}{80} = 0{,}625.$$

Заместваме в съответната формула за x_t и получаваме

$$x_t = \left(\frac{1-a+b-c}{b}\right)^t x_0 = \left(\frac{1-0{,}2+2-0{,}625}{2}\right)^t 80 = (1{,}0875)^t 80.$$

Пресмятанията нанасяме в таблица

t	x_t	z_t	I_t	C_t
0	80	16	14	50
1	87	17,4	15,23	54,37
2	94,61	18,92	16,56	59,13
3	102,89	20,58	18,00	64,31
4	111,89	22,38	19,58	69,83
5	121,68	24,34	21,29	76,05

Да отбележим, че в този случай всички макроикономически величини растат с един и същ темп и за това пропорциите между тях остават неизменни –

производствените разходи са 20% от СОП, инвестициите – 17,5%, а крайното потребление – 62,5%.

в) Ще изведем формулата за общото решение x_t при произволно ρ. Диференчното уравнение на модела е

$$x_{t+1} = \frac{1-a+b}{b} x_t - \frac{1}{b}\rho^t C_0 = A x_t - \frac{1}{b}\rho^t C_0,$$

където с A сме положили коефициента пред x_t. Нека $\bar{x}_t$ е едно частно решение на уравнението, тогава за $z_t = x_t - \bar{x}_t$ ще имаме

$$z_{t+1} = x_{t+1} - \bar{x}_{t+1} = A x_t - \frac{1}{b}\rho^t C_0 - \left(A\bar{x}_t - \frac{1}{b}\rho^t C_0\right) = A(x_t - \bar{x}_t) = A z_t,$$

следователно редицата z_t е геометрична прогресия с частно A. За общия член на тази прогресия ще имаме

$$z_t = A^t z_0,$$

откъдето получаваме

$$x_t = \bar{x}_t + A^t(x_0 - \bar{x}_0).$$

Сега ще търсим частното решение $\bar{x}_t$ от същия вид, както е нехомогенната част на уравнението:

$$\bar{x}_t = B\rho^t.$$

Тогава ще имаме $\bar{x}_{t+1} = \rho B \rho^t$ и след заместване в уравнението получаваме

$$\rho B \rho^t = A B \rho^t - \frac{1}{b}\rho^t C_0.$$

Можем да разделим двете страни на последното уравнение на ρ^t, ще имаме

$$\rho B = AB - \frac{1}{b} C_0,$$

откъдето получаваме

$$B = \frac{C_0}{b(A-\rho)} = \frac{C_0}{b\left(\frac{1-a+b}{b} - \rho\right)} = \frac{C_0}{1-a+b-\rho b}.$$

По този начин получаваме

$$\bar{x}_t = \frac{C_0}{1-a+b-\rho b}\rho^t \Longrightarrow \bar{x}_0 = \frac{C_0}{1-a+b-\rho b}.$$

Като заместим $\bar{x}_t$ и $\bar{x}_0$ във формулата $x_t = \bar{x}_t + A^t(x_0 - \bar{x}_0)$ получаваме окончателния вид на общото решение на уравнението на модела:

$$x_t = \frac{C_0}{1-a+b-\rho b}\rho^t + \left(x_0 - \frac{C_0}{1-a+b-\rho b}\right)\left(\frac{1-a+b}{b}\right)^t.$$

Заместваме в горната формула $C_0 = 50$, $x_0 = 80$, $a = 0{,}2$ и $b = 2$, тогава ще имаме

$$x_t = \frac{50}{2{,}8-2\rho}\rho^t + \frac{174-160\rho}{2{,}8-2\rho}(1{,}4)^t.$$

Като заместим $\rho = 1{,}1$ получаваме

$$x_t = \frac{250}{3}(1{,}1)^t - \frac{10}{3}(1{,}4)^t.$$

Пресмятанията нанасяме в таблица

t	x_t	z_t	I_t	C_t
0	80	16	14	50
1	87	17,4	15,23	55
2	94,3	18,86	14,94	60,5
3	101,77	20,35	14,87	66,55
4	109,20	21,84	14,15	73,21
5	116,28	23,26	12,49	80,53

Виждаме, че при този модел (поради наличието на минус в равенството) СОП расте с по-бавен темп от крайното потребление. Отначало инвестициите започват да намаляват, а при по-големи стойности на t ще започне да спада и съвкупният продукт. Така например ще имаме $x_{10} = 119{,}73$, $x_9 = 127{,}63$. Рано или късно ($x_{14} = -53{,}94$) СОП става отрицателен и моделът губи икономически смисъл.

г) Очевидно е, че за да може СОП да нараства с темпа на нарастване на крайното потребление ρ, трябва множителят пред $(1{,}4)^t$ да се нулира, т.е.:

$$\frac{174-160\rho}{2{,}8-2\rho} = 0 \Leftrightarrow \rho = \frac{174}{160} = 1{,}0875.$$

Това е случая, разгледан в б). При $\rho < 1{,}0875$ СОП ще расте с по-бърз темп от крайното потребление, а при $1{,}0875 < \rho < 1{,}4$ ситуацията ще е както във в) – допуска се (при по-големи стойности на t) спад на СОП и даже отрицателни стойности на същия.

д) За $\rho = 1{,}075$ ще имаме

$$x_t = \frac{1000}{13}(1{,}075)^t + \frac{40}{13}(1{,}4)^t.$$

Пресмятанията нанасяме в таблица

t	x_t	z_t	I_t	C_t
0	80	16	14	50
1	87	17,4	15,85	53,75
2	94,94	18,99	18,17	57,78
3	104	20,8	21,09	62,11
4	114,55	22,91	24,87	66,77
5	126,98	25,40	29,80	71,78

В този случай инвестициите растат с най-голям темп, а крайното потребление – с най-малък.

12.2. Еднопродуктов модел на Леонтиев с непрекъснато време. Преобразуваме уравнението

$$x_t = ax_t + b(x_{t+1} - x_t) + C_t,$$

като заместваме x_t с $x(t)$, C_t с $C(t)$ и като използваме, че

$$\frac{dx}{dt} \cong \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_{t+1} - x_t}{(t+1) - t} = x_{t+1} - x_t.$$

Тогава ще имаме

$$x(t) = ax(t) + b\frac{dx}{dt} + C(t)$$

или

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1-a}{b}x(t) - \frac{1}{b}C(t).$$

При екзогенно зададена функция $C(t)$ (и коефициенти a и b) това линейно нехомогенно диференциално уравнение от първи ред задава еднопродуктовия модел на Леонтиев с непрекъснато време.

Първо решаваме съответното хомогенно уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1-a}{b}x(t) \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{1-a}{b}dt \Rightarrow x(t) = De^{\frac{1-a}{b}t}$$

е решението, където D е интеграционна константа. Сега, по метода на вариране на константата, търсим общото решение на нехомогенното уравнение във вида

$$x(t) = D(t)e^{\frac{1-a}{b}t} \Rightarrow x'(t) = D'(t)e^{\frac{1-a}{b}t} + \frac{1-a}{b}D(t)e^{\frac{1-a}{b}t}.$$

Заместваме $x'(t)$ и $x(t)$ в уравнението и получаваме

$$D'(t)e^{\frac{1-a}{b}t} + \frac{1-a}{b}D(t)e^{\frac{1-a}{b}t} = \frac{1-a}{b}D(t)e^{\frac{1-a}{b}t} - \frac{1}{b}C(t)$$

или

$$D'(t) = -\frac{1}{b}C(t)e^{-\frac{1-a}{b}t}.$$

Така получаваме

$$D(t) = -\frac{1}{b}\int C(t)e^{-\frac{1-a}{b}t}\,dt + D,$$

където D е интеграционна константа. След заместване на намерената функция $D(t)$ в $x(t) = D(t)e^{\frac{1-a}{b}t}$, получаваме общото решение

$$x(t) = \left(D - \frac{1}{b}\int C(t)e^{-\frac{1-a}{b}t}\,dt\right)e^{\frac{1-a}{b}t}.$$

Като използваме началното условие $x(0) = x_0$ можем да намерим D и от там да определим еднозначно годишните стойности на съвкупния продукт, а от там – и на производственото потребление и инвестициите (крайното потребление $C(t)$ е известно).

Сега ще разгледаме случая, когато дадената функция $C(t)$ расте с постоянен темп γ (γ и ρ от случая с дискретно зададено време са свързани с равенството $\rho = 1 + \gamma$). Тогава $C(t)$ има експоненциален вид:

$$C(t) = C_0 e^{\gamma t}.$$

За интеграла в скобите получаваме

$$\int C(t)e^{-\frac{1-a}{b}t}\,dt = C_0\int e^{\left(\gamma-\frac{1-a}{b}\right)t}\,dt = -\frac{bC_0}{1-a-\gamma b}e^{\left(\gamma-\frac{1-a}{b}\right)t}.$$

Като заместим в общото решение, ще имаме

$$x(t) = \left(D + \frac{C_0}{1-a-\gamma b}e^{\left(\gamma-\frac{1-a}{b}\right)t}\right)e^{\frac{1-a}{b}t} = \frac{C_0}{1-a-\gamma b}e^{\gamma t} + De^{\frac{1-a}{b}t}.$$

Сега използваме началното условие $x(0) = x_0$ за да намерим D:

$$x(0) = \frac{C_0}{1-a-\gamma b} + D = x_0 \Longrightarrow D = x_0 - \frac{C_0}{1-a-\gamma b}$$

и

$$x(t) = \frac{C_0}{1-a-\gamma b}e^{\gamma t} + \left(x_0 - \frac{C_0}{1-a-\gamma b}\right)e^{\frac{1-a}{b}t}.$$

Сега ще разгледаме два важни частни случая:

1) $C(t) = C_0$ или $\gamma = 0$ (крайното потребление не се изменя с времето). Тогава формулата за годишните стойности на СОП добива вида:

$$x(t) = \frac{C_0}{1-a} + \left(x_0 - \frac{C_0}{1-a}\right)e^{\frac{1-a}{b}t}.$$

Очевидно,

$$x_0 > \frac{C_0}{1-a}$$

е необходимото и достатъчно условие за (неограничено) нарастване на годишните стойности на СОП.

2) Крайното потребление да е фиксиран дял от съвкупния продукт. Тогава те ще растат с един и същ годишен темп – γ. За да е така, е необходимо коефициентът пред $e^{\frac{1-a}{b}t}$ да е равен на нула:

$$x_0 = \frac{C_0}{1-a-\gamma b}.$$

Тогава ще имаме

$$\frac{C_0}{x_0} = 1 - a - \gamma b = \frac{C(t)}{x(t)} = c.$$

Обратно, при зададени C_0 и x_0 този равновесен ръст γ^* ще се пресмята по формулата

$$\gamma^* = \frac{1-a}{b} - \frac{C_0}{bx_0} = \frac{1-a-c}{b}.$$

Пример 28. Да се реши пример 11, но в случай на непрекъснато време.

Решение:

а) Имаме случая на константно крайно потребление при $C_0 = 50$, $a = 0{,}2$, $b = 2$ и $x_0 = 80$. Заместваме в съответната формула и получаваме

$$x(t) = \frac{50}{1-0{,}2} + \left(80 - \frac{50}{1-0{,}2}\right)e^{\frac{1-0{,}2}{2}t} = 62{,}5 + 17{,}5e^{0{,}4t}.$$

Пресмятанията нанасяме в таблица

t	x(t)	z(t)	I(t)	C(t)
0	80	16	14	50
1	88,61	17,72	20,89	50
2	101,45	20,29	31,16	50
3	120,60	24,12	46,48	50
4	149,18	29,84	69,34	50
5	191,81	38,36	103,45	50

Ясно е, че в сравнение с дискретния случай, съвкупният продукт расте по-бързо, а инвестициите не са достатъчни, за да покрият тоси растеж (при дадения акселератор).

б) В този случай ще имаме

$$x(t) = x_0 e^{\gamma^* t},$$

където γ^* се изчислява по формулата

$$\gamma^* = \frac{1 - a - c}{b} = \frac{1 - 0{,}2 - 0{,}625}{2} = 0{,}0875.$$

Тогава ще имаме

$$x(t) = 80e^{0{,}0875t}.$$

Пресмятанията нанасяме в таблица

t	x(t)	z(t)	I(t)	C(t)
0	80	16	14	50
1	87,32	17,46	15,28	54,58
2	95,30	19,06	16,68	59,56
3	104,01	20,80	18,20	65,01
4	113,53	22,71	19,87	70,95
5	123,91	24,78	21,68	77,45

Вижда се, че за разлика от предишното подусловие, данните, получени при непрекъснато време са съвсем близки до тези с дискретно време.

в) В този случай за крайното потребление ще имаме

$$C_t = C_0 e^{\gamma t} = 50e^{0{,}1t}.$$

Във формулата за общото решение $x(t)$ заместваме $\gamma = 0{,}1$ и получаваме

$$x(t) = \frac{50}{1 - 0{,}2 - 0{,}1 \cdot 2} e^{0{,}1t} + \left(80 - \frac{50}{1 - 0{,}2 - 0{,}1 \cdot 2}\right) e^{\frac{1-0{,}2}{2}t}$$
$$= \frac{250}{3} e^{0{,}1t} - \frac{10}{3} e^{0{,}4t}.$$

Пресмятанията нанасяме в таблица

t	x(t)	z(t)	I(t)	C(t)
0	80	16	14	50
1	87,12	17,42	14,44	55,26
2	94,37	18,87	14,43	61,07
3	101,42	20,28	13,65	67,49
4	107,81	21,56	11,66	74,59
5	112,76	22,55	7,77	82,44

Вижда се, че в сравнение с модела с дискретно време годишните стойности на СОП са леко по-малки, а тези на крайното потребление – леко по-големи. Това води до по ранен и по бърз спад на инвестициите.

г) Виж б).

д) В този случай за крайното потребление ще имаме

$$C_t = C_0 e^{\gamma t} = 50 e^{0{,}075t}.$$

Във формулата за общото решение $x(t)$ заместваме $\gamma = 0{,}075$ и получаваме

$$x(t) = \frac{50}{1 - 0{,}2 - 0{,}075 \cdot 2} e^{0{,}075t} + \left(80 - \frac{50}{1 - 0{,}2 - 0{,}075 \cdot 2}\right) e^{\frac{1-0{,}2}{2}t}$$
$$= \frac{1000}{13} e^{0{,}075t} + \frac{40}{13} e^{0{,}4t}.$$

Пресмятанията нанасяме в таблица

t	x_t	z_t	I_t	C_t
0	80	16	14	50
1	87,50	17,5	16,11	53,89
2	96,22	19,24	18,89	58,09
3	106,55	21,31	21,82	62,62
4	119,07	23,81	27,77	67,49
5	134,66	26,93	34,98	72,75

13. Отраслов динамичен модел на Леонтиев

Ще предполагаме, така както е в статичния модел на Леонтиев, че икономиката на една държава се състои от n на брой отрасъла, всеки от които произвежда една стока. Разглеждаме следния опростен модел на междуотраслов баланс с дискретно време

$$x^t = Ax^t + B(x^{t+1} - x^t) + y^t \text{ }, t = 1,2,\cdots$$

където:

$B = (b_{ij})\text{ }; i,j = 1,\cdots,n$ е матрицата на прирастни фондоемкости, елементът b_{ij} показва колко единици от продукта i е необходимо да се вложат за увеличаването на единица от годишната продукция на j-тия продукт

y^t - вектор на крайното (непроизводствено) потребление за годината t.

От икономическа гледна точка горното съотношение показва разпределянето на вектора на брутното производство (а следователно и на всяка от координатите му) на три съставки:

Ax^t - текущо производствено потребление, включително амортизационни отчисления;

$B(x^{t+1} - x^t)$ - капиталови разходи за разширяване на производството (инвестиции);

y^t - крайно (непроизводствено) потребление.

Моделът с дискретно време може да бъде преобразуван в модел с непрекъснато време по следния начин:

$$B(x^{t+1} - x^t) = (E - A)x^t - y^t$$

$$B\big(x(t + \Delta t) - x(t)\big) = [(E - A)x(t) - y(t)]\Delta t$$

$$B\frac{dx(t)}{dt} = (E - A)x(t) - c(t)$$

Ако обратната матрица B^{-1} съществува, горното матрично уравнение може да добие вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = B^{-1}(E - A)x(t) + B^{-1}c(t), \qquad x(0) = x^o$$

т.е. във вид на линейна система от диференциални уравнения от първи ред. Според теорията на обикновените диференциални уравнения решението на хомогенната линейна система

$$\frac{dx(t)}{dt} = B^{-1}(E - A)x(t)$$

има вида

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \, e^{\lambda_i t} z^i$$

където c_i , $i = 1, \cdots, n$ са общите константи на решението, които могат да бъдат определени от началното условие $x(0) = x^o$, водещо до линейната алгебрична система от n уравнения с n неизвестни

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \, z_j^i = x_j^0$$

Да отбележим , че λ_i , $i = 1, \cdots, n$ са собствените вектори на матрицата $B^{-1}(E - A)$ т.е. корените на уравнението

$$|B^{-1}(E - A) - \lambda E| = 0$$

а $z^i\left(z_1^i, \cdots, z_n^i\right)$, $i = 1, \cdots, n$ - нормираните собствени вектори на същата матрица т.е. те удовлетворяват условията

$$B^{-1}(E - A) z^i = \lambda_i z^i \, , i = 1, \cdots, n$$

Ако собствените стойности имат отрицателни реални части системата, следователно и моделът са устойчиви, т.е. не допускат неограничено нарастване на вектора $x(t)$. Например при $n = 1$ ще имаме

$$\frac{1 - a}{b} - \lambda = 0$$

(a е дела на промеждутъчният продукт в общата продукция, а b е прирастната фондоемкост), тогава $\lambda = \frac{1-a}{b} > 0$ т.е. моделът е неустойчив и допуска неограничено нарастване (или намаляване) на съвкупния продукт. Да отбележим, че общото решение на нехомогенната система се получава като сума от общото решение на хомогенната система и едно частно решение.

Пример 29. Даден е затворен модел на Леонтиев (т.е. $c(t)$ е нулев вектор и отраслите работят само за задоволяване на производствените си потребности), при който

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 1{,}0 & 0{,}8 \end{pmatrix}, \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Да се намери $x(t)$.

Решение:

Ще имаме следната линейна хомогенна система от диференциални уравнения:

$$\frac{dx(t)}{dt} = B^{-1}(E - A) x(t)$$

Намираме

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad E - A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}3 \\ -0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix}.$$

Тогава ще имаме

$$B^{-1}(E - A) = \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}3 \\ -0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7{,}9 & 5{,}4 \\ 9{,}5 & -6{,}0 \end{pmatrix}.$$

Системата ще има вида

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7{,}9 & 5{,}4 \\ 9{,}5 & -6{,}0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

или

$$x_1' = -7{,}9x_1 + 5{,}4x_2$$

$$x_2' = 9{,}5x_1 - 6{,}0x_2.$$

От първото уравнение изразяваме x_2:

$$x_2 = \frac{x_1' + 7{,}9x_1}{5{,}4} = 0{,}185x_1' + 1{,}463x_1$$

и диференцираме

$$x_2' = 0{,}185x_1'' + 1{,}463x_1'.$$

Заместваме x_2 и x_2' във второто уравнение и получаваме

$$0{,}185x_1'' + 2{,}573x_1' - 0{,}69x_1 = 0.$$

Това е едно линейно хомогенно диференциално уравнение от втори ред с постоянни коефициенти за неизвестната функция x_1. Решаваме първо съответното му характеристично (квадратно) уравнение:

$$0{,}185\lambda^2 + 2{,}573\lambda - 0{,}69 = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-2{,}573 \pm \sqrt{6{,}62 + 0{,}51}}{0{,}37} = \frac{-2{,}573 \pm 2{,}67}{0{,}37}.$$

Получаваме корени $\lambda_1 = -14{,}17$ и $\lambda_2 = 0{,}262$, следователно общото решение на диференциалното уравнение за $x_1(t)$ е

$$x_1(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t} = C_1e^{-14{,}17t} + C_2e^{0{,}262t}.$$

Диференцираме този израз за x_1 и получаваме

$$x_1'(t) = -14{,}17C_1e^{-14{,}17t} + 0{,}262C_2e^{0{,}262t}.$$

Сега можем да заместим получените $x_1(t)$ и $x_1'(t)$ в израза за x_2. Ще имаме

$$x_2(t) = 0{,}185x_1' + 1{,}463x_1$$
$$= 0{,}185(-14{,}17C_1e^{-14{,}17t} + 0{,}262C_2e^{0{,}262t})$$
$$+ 1{,}463(C_1e^{-14{,}17t} + C_2e^{0{,}262t}) = -1{,}157C_1e^{-14{,}17t} + 1{,}511C_2e^{0{,}262t}.$$

Накрая, ще използваме началното условие на задачата, за да определим интеграционните константи C_1 и C_2:

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 \\ -1{,}157C_1 + 1{,}511C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Решаваме горната система с неизвестни C_1 и C_2 и получаваме $C_1 = 8{,}536$ и $C_2 = 16{,}464$. Така, окончателното решение на задачата (годишните стойности на произведения продукт от отраслите) са

$$x_1(t) = 8{,}536e^{-14{,}17t} + 16{,}464e^{0{,}262t}$$

$$x_2(t) = -9{,}877e^{-14{,}17t} + 24{,}877e^{0{,}262t}.$$

Прави впечатление, че първото съставящо $e^{-14{,}17t}$ много бързо практически става нула (още за $t = 1$) и доколкото $e^{0{,}262} \cong 1{,}3$, то $x_1(t)$ и $x_2(t)$ ще растат с постоянен годишен темп от около 30% (при $t \geq 1$)

14. Модел на Солоу–Сван в най-общ вид

Изложеният по-долу модел на Солоу–Сван е най-важният пример за динамичен макроикономически модел за равновесен икономически ръст, основаващ се на микроикономическо поведение.

Предпоставките на модела са следните:

(1) Технологията на производството е зададена чрез неокласическа макроикономическа производствена функция, тоест производствена функция удовлетворяваща аксиомите:

5. $Y(0{,}0) = Y(K, 0) = Y(0, N) = 0$ – без един от ресурсите няма продукция;
6. $Y_K = \frac{\partial Y}{\partial K} > 0$ и $Y_N = \frac{\partial Y}{\partial N} > 0$ – националният доход расте при нарастването на всеки от ресурсите;
7. $Y_{KK} = \frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = \frac{\partial}{\partial K} Y_K < 0$ и $Y_{NN} = \frac{\partial^2 Y}{\partial N^2} = \frac{\partial}{\partial N} Y_N < 0$ – с увеличаването на количеството на всеки от ресурсите, скоростта на нарастване на дохода намалява;
8. $Y_{KN} = \frac{\partial^2 Y}{\partial K \partial N} = \frac{\partial}{\partial K} Y_N = Y_{NK} = \frac{\partial^2 Y}{\partial N \partial K} = \frac{\partial}{\partial N} Y_K \geq 0.$

Освен това се предполага, че производствена функция е хомогенна със степен на хомогенност единица т.е.:

$$Y(mK, mN) = mY(K, N).$$

Въвеждаме нови променливи:

$$y = \frac{Y}{N} - \text{средна производителност на труда и}$$

$$k = \frac{K}{N} - \text{средно съотношение} \frac{\text{капитал}}{\text{труд}}.$$

Тогава ще имаме

$$Y(K, N) = Y\left(N \cdot \frac{K}{N}, N \cdot 1\right) = N \cdot Y\left(\frac{K}{N}, 1\right),$$

тоест

$$\frac{Y}{N} = Y\left(\frac{K}{N}, 1\right) \Longrightarrow y = y(k),$$

където сме положили

$$y(k) = Y\left(\frac{K}{N}, 1\right).$$

В този случай производствената функция е функция на една променлива: тя показва как се изчислява средната производственост на труда в следствие изменение на съответствието капитал/труд.

Нека, например да имаме производствената функция на две ресурсни променливи

$$Y = K^{0,5}N^{0,5} + K^{0,7}N^{0,3}.$$

Тя е хомогенна от първа степен. Като разделим на N получаваме

$$\frac{Y}{N} = \frac{K^{0,5}}{N^{0,5}} + \frac{K^{0,7}}{N^{0,7}} \Longrightarrow y = k^{0,5} + k^{0,7}.$$

От полагането и свойствата-аксиоми на производствената функция на две променливи, получаваме че:

$$y'(k) > 0 \quad \text{и} \quad y''(k) < 0,$$

тоест производствената функция $y(k)$ е растяща вдлъбната функция (растяща функция с намаляващ растеж). За всяка хомогенна производствена функция на две променливи $Y(K, N)$, съответната ѝ функция $y(k)$ ще наричаме производствена функция на една променлива. Обратно, ако зададем функция на средната производителност на труда от средното съотношение капитал/труд, която е растяща вдлъбната, то по такъв начин задаваме хомогенна производствена функция на две променливи – капитал и труд.

(2) Функцията на предлагане на труд с постоянен темп, това означава че:

$$N(t) = N_0 e^{nt} \Rightarrow K(t) = \frac{K(t)}{N(t)} N(t) = k(t) N_0 e^{nt}.$$

(3) Нарастването на капитала се осигурява от инвестициите, тоест:

$$\frac{dK(t)}{dt} = I(t) \Rightarrow$$

$$I(t) = (k(t) N_0 e^{nt})' = k'(t) N_0 e^{nt} + k(t) n N_0 e^{nt}.$$

(4) Брутния вътрещен продукт Y се предства като:

$$Y(t) = C(t) + I(t) = C(t) + S(t) \Rightarrow I(t) = S(t).$$

(5) Домакинствата спестяват с постояннна норма на спестяване $\bar{s}$, тоест:

$$I(t) = S(t) = \bar{s} Y(t) \Rightarrow$$

$$\bar{s} Y(t) = k'(t) N_0 e^{nt} + k(t) n N_0 e^{nt}.$$

Но от друга страна имаме

$$Y(t) = Y\big(K(t), N(t)\big) = Y(N_0 e^{nt} k(t), N_0 e^{nt}) = N_0 e^{nt} Y(k(t), 1) = N_0 e^{nt} y\big(k(t)\big).$$

Така получаваме

$$\bar{s} N_0 e^{nt} y\big(k(t)\big) = k'(t) N_0 e^{nt} + k(t) n N_0 e^{nt}.$$

Като разделим на $N_0 e^{nt}$ двете страни на горното равенство, ще имаме

$$\bar{s} y\big(k(t)\big) = k'(t) + k(t) n.$$

Горното равенство показва как във времето трябва да се изменя съотношението капитал/труд, така че да съществува равновесен ръст, обезпечаваш пълно използване на производствените мощностти, съпроводено с пълна заетост *($S(t)=I(t)$; $N^D(t)=N^S(t)$).*

Какво представлява произведението $\bar{s} y(k)$? Тъй като $y = Y/N$, то $y(k)$ е националния доход на един зает в производството му, следователно

$$s = \frac{S}{N} = \frac{\bar{s}Y}{N} = \bar{s}\frac{Y}{N} = \bar{s}y$$

са спестяванията на един зает в производството на националния доход. От друга страна имаме

$$nk = n\frac{K}{N} = \frac{nK}{N},$$

следователно nk са капиталовложенията (инвестициите) на един нов зает (n е ръстът на работната сила, т.е. делът на новите работници), показващи с колко трябва да бъде допълнен капитала, така че новите заети да бъдат обезпечени с капитал в онази степен, с която са обезпечени старите заети. С други думи $\bar{s}y(k)$ са спестяванията на един зает, а nk – инвестициите на един зает. За постигането на равновесен икономически ръст е необходимо спестяванията да се превърнат в инвестиции, тогава ще имаме

$$\bar{s}y(k) = nk \Leftrightarrow k'(t) = 0.$$

Ако уравнението $\bar{s}y(k) = nk$ притежава решение k_*, то $\bar{s}y(k_*) = nk_*$ и ще следва, че $k(t) = k_* = const$. Освен това $y(t) = const = y_* = y(k(t) = k_*)$. Ще имаме

$$\bar{s}y_* = nk_*$$

като условие за равновесен ръст. От друга страна

$$\sigma = \frac{Y}{K} = \frac{\frac{Y}{N}}{\frac{K}{N}} = \frac{y}{k} = \frac{y_*}{k_*} = \sigma_* \Longrightarrow \sigma(t) = const = \sigma_*$$

и условието за равновесен ръст добива вида

$$\bar{s}\sigma_* = n.$$

Какво получаваме за капитала K и националния доход Y:

$$\frac{K(t)}{N(t)} = k(t) = k_* \Longrightarrow K(t) = k_* N_0 e^{nt}$$

$$\frac{Y(t)}{N(t)} = y(t) = y_* \Longrightarrow Y(t) = y_* N_0 e^{nt}.$$

Следователно, ако е изпълнено условието за равновесен ръст брутния вътрешен продукт, капиталът и трудът ще нарастват с годишен темп n. Същото важи и за спестяванията S, инфлациите I и потреблението C. Съотношението капитал/труд k, средната производителност на труда y и средната производителност на капитала σ ще бъдат константи. Такива ще бъдат и реалният доход от капитал r и реалната работна заплата w.

15. Модел на Солоу–Сван с производствена функция на Кооб-Дъглас

Нека технологията на производството на националния доход е зададена с производствената функция на Кооб–Дъглас, т.е.

$$Y(K,N) = K^{\alpha}N^{1-\alpha}.$$

Тогава за еднофакторната производствена функция ще имаме

$$y(k) = Y(k,1) = k^{\alpha}.$$

Условието за съществуване на равновесен ръст на икономиката добива вида

$$\bar{s}k^{\alpha} = nk \Longrightarrow k^{1-\alpha} = \frac{\bar{s}}{n} \;\text{ и }\; k_* = \left(\frac{\bar{s}}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}};\, y_* = \left(\frac{\bar{s}}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}};\; \sigma_* = \frac{n}{\bar{s}}.$$

При условие за оптимално (от микроикономическа гледна точка) поведение и съвършена конкуренция ще имаме

$$Y = \frac{\partial Y}{\partial K}K + \frac{\partial Y}{\partial N}N = rK + wN.$$

Да припомним, че първото равенство е вярно по силата на формулата на Ойлер за хомогенни функции от първи ред, а второто е следствие от условието за максимализиране на печалбата.

От друга страна получаваме

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha K^{\alpha-1}N^{1-\alpha} = \alpha\frac{K^{\alpha}N^{1-\alpha}}{K} = \alpha\frac{Y}{K} = \alpha\sigma = \alpha\sigma_* = \frac{\alpha n}{\bar{s}}.$$

Така за реалната доходност на капитала r ще имаме

$$r = \frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{\alpha n}{\bar{s}}.$$

Аналогично, за другата частна производна получаваме

$$\frac{\partial Y}{\partial N} = (1-\alpha)K^{\alpha}N^{-\alpha} = (1-\alpha)\frac{K^{\alpha}N^{1-\alpha}}{N} = (1-\alpha)\frac{Y}{N} = (1-\alpha)y = (1-\alpha)y_*$$
$$= (1-\alpha)\left(\frac{\bar{s}}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}},$$

Следователно, за реалната работна заплата w ще имаме

$$w = \frac{\partial Y}{\partial N} = (1-\alpha)\left(\frac{\bar{s}}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Пример 30. Нека технологията на производство на националния доход да се задава с производствената функция

$$Y_t = K_t^{1/3} N_t^{2/3},$$

нормата на спестяване е $\bar{s} = 25\%$, а в базовата година ($t = 0$) е приложен капитал $K_0 = 256$ и труд $N_0 = 32$.

а) При какъв темп на нарастване на предлагането на труд ще съществува равновесен ръст на икономиката.

б) Да се изразят Y, K и N като функции на t.

в) Да се пресметнат k_*, y_*, σ_*, r и w в условие на равновесен икономически ръст.

Решение:

а) За еднофакторната производствена функция ще имаме

$$y(k) = k^{1/3}.$$

Тогава условието за равновесен ръст ще бъде

$$\bar{s}k^{1/3} = nk.$$

След повдигане на трета степен на двете страни на равенството, получаваме

$$\bar{s}^3 k = n^3 k^3 \Longrightarrow \bar{s}^3 = n^3 k^2.$$

При равновесен ръст ще имаме

$$\frac{K_t}{N_t} = const = k_* = \frac{K_0}{N_0} = \frac{256}{32} = 8.$$

Заместваме в равенството $\bar{s}^3 = n^3 k^2$ $k = k_* = 8$ и $\bar{s} = 0{,}25$, получаваме

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3 = n^3 8^2 \Longrightarrow n^3 = \frac{1}{4^3 8^2} = \frac{1}{2^{12}} \Longrightarrow n = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} = 0{,}0625.$$

б) Тъй като

$$Y_0 = K_0^{1/3} N_0^{2/3} = \sqrt[3]{256}\sqrt[3]{32^2} = \sqrt[3]{2^8 2^{10}} = \sqrt[3]{2^{18}} = 2^6 = 64,$$

тогава ще имаме

$$Y_t = Y_0(1+n)^t = 64(1{,}0625)^t,$$

$$K_t = K_0(1+n)^t = 256(1{,}0625)^t,$$

$$N_t = N_0(1+n)^t = 32(1{,}0625)^t.$$

в) Тъй като $k_* = 8$, то $y_* = y(k_*) = 8^{1/3} = 2$ и

$$\sigma_* = \frac{y_*}{k_*} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Имаме разлагането

$$Y = rK + wN.$$

От друга страна, при производствена функция на Кооб-Дъглас (от мултипликативен вид) съотношението на доходите от капитал и труд е равно на съотношението на степенните показатели, т.е.

$$rK = \frac{1}{3}Y \quad \text{и} \quad wN = \frac{2}{3}Y.$$

При $t = 0$ ще имаме

$$rK_0 = \frac{1}{3}Y_0 \Longrightarrow r = \frac{Y_0}{3K_0} = \frac{64}{3 \cdot 256} = \frac{1}{12} = 0{,}0833,$$

следователно, реалната доходност на капитала е 8,33%.

Аналогично, за реалната работна заплата ще имаме

$$wN_0 = \frac{2}{3}Y_0 \Longrightarrow w = \frac{2Y_0}{3N_0} = \frac{2 \cdot 64}{3 \cdot 32} = \frac{4}{3} = 1{,}33.$$

Тогава, за произволно t ще бъде в сила разлагането

$$Y_t = \frac{1}{12}K_t + \frac{4}{3}N_t,$$

Тъй като реалният доход от капитал и реалната работна заплата са постоянни в модела на Солоу-Сван.

Таблица на основните макроикономически показатели през първите 3 години.

t	K	I=S	C	Y	N
0	256	16	48	64	32
1	272	17	51	68	34
2	289	$18\frac{1}{16}$	$54\frac{3}{16}$	$72\frac{1}{4}$	$36\frac{1}{8}$

16. Математическа обосновка на модела на Солоу–Сван

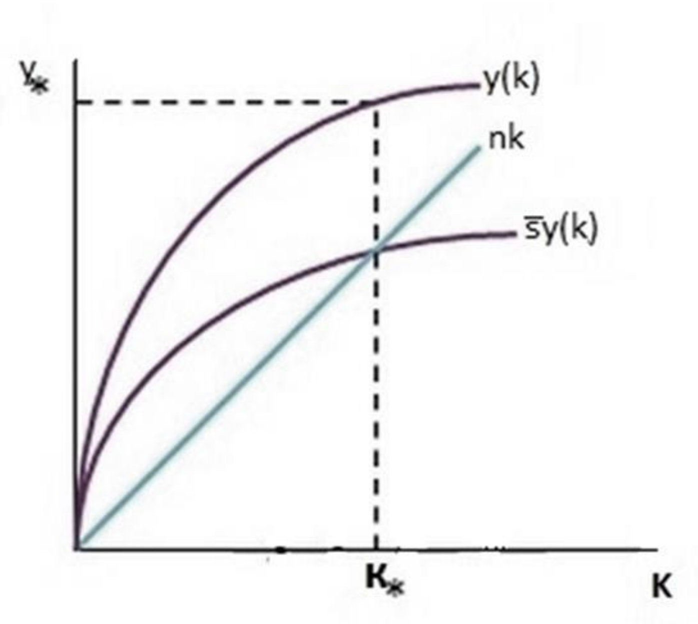


Рис. 2. Графична илюстрация на модела на Солоу–Сван

От математическите свойства на $y(k)$ (вдлъбната или растяща), очевидно следва, че графиката на $\bar{s}y(k)$ при $0 < \bar{s} < 1$ и правата nk ще имат единствена обща точка $k_*: nk_* = \bar{s}y(k_*)$. Това добре се вижда на рис. 2.

По-важно е да обосновем, че в модела на Солоу-Сван има сходимост към равновесно значение на $k = \frac{K}{N} = k_*$. Да допуснем, че в изходната система от цени оптималното съотношение капитал/труд е $k_1 < k_*$ (рис. 3), следователно графиката на кривата $\bar{s}y(k)$ ще бъде разположена над графиката на правата nk при $k = k_1$ ($\bar{s}y(k_1) > nk_1$). Тогава ще има излишък от предлагане на капитал ($S > I$) и цената на капитала ще спадне,

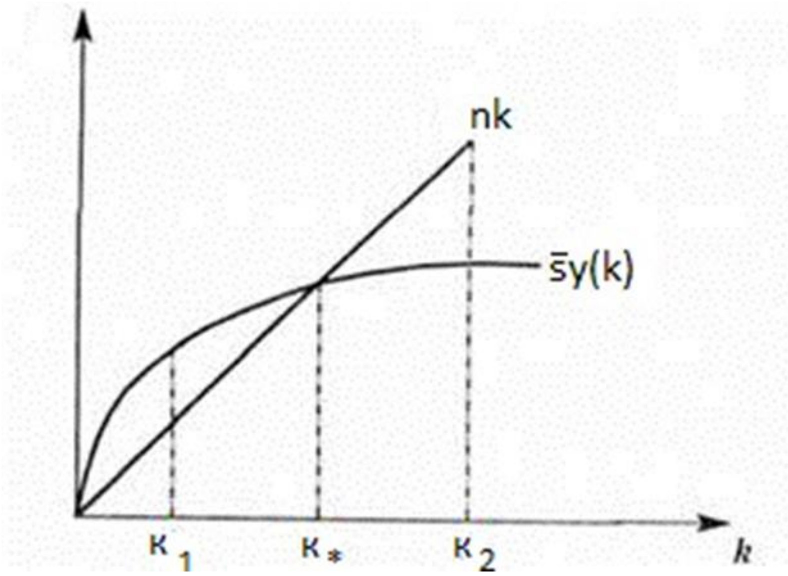


Рис. 3. Сходимост в модела на Солоу–Сван

следователно инвестициите ще нараснат, от там ще нарасне количеството капитал, което ще доведе до покачване на k, т.е. k ще се измени в посока от k_1 към k_*. При $k_2 < k_*$ ще имаме $\bar{s}y(k_2) < nk_2$ и логическата последователност ще бъде следната:

1. Недостиг на капитал $(S < I) \Longrightarrow$
2. Излишък на труд $\Longrightarrow$
3. Спад на цената на труда $\Longrightarrow$
4. Търсенето на труд нараства $\Longrightarrow$
5. Съотношението капитал/труд ще намалее, т.е. k ще се измени в посока от k_2 към k_*.

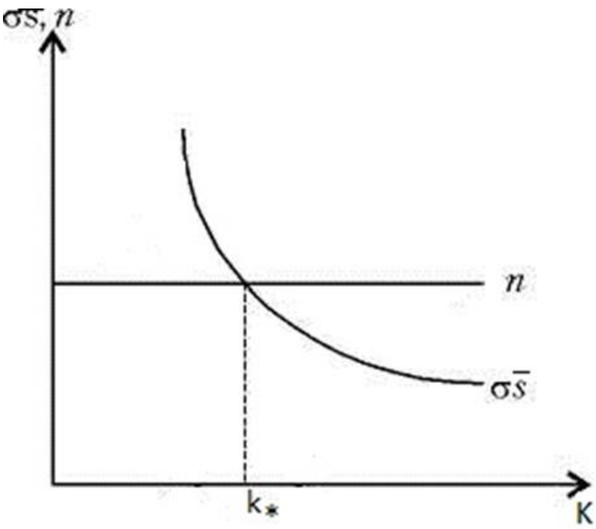


Рис. 4. Графична илюстрация на модела на Солоу–Сван

Другият вид на условието за равновесен икономически ръст е

$$\sigma(k)\bar{s} = n.$$

Тъй като

$$\sigma(k) = \frac{y(k)}{k},$$

то

$$\lim_{k\to\infty}\sigma(k) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{k\to 0}\sigma(k) = \infty.$$

Тогава графиката на функцията $\sigma(k)\bar{s}$ ще има хиперболичен вид (такава крива се нарича квазихипербола). Тя ще се пресича с правата n, която е успоредна на абсцисата (рис. 4).

Това условие само външно прилича на условието за равновесен ръст на Харод-Домар. В този модел постоянството на производителността на капитала σ е предпоставено от технологията и не се влияе от икономически конюнктура. В модела на Солоу-Сван

$$\sigma = \frac{Y}{K} = const = \sigma_*.$$

това е само при условие на равновесен ръст и то не по технологични, а по икономически причини. При неравновесен ръст $\sigma = \sigma(K(t))$ се променя като се стреми към σ_*.

Сега ще се върнем към диференциалното уравнение

$$k'(t) = \bar{s}\, y(k(t)) - k(t)n,$$

което при производствената функция на Кооб-Дъглас има вида

$$k'(t) = \bar{s}\, k^{\alpha}(t) - k(t)n\text{-}$$

това е бернулиево диференциално уравнение. Такива уравнения се решават със субституцията $z = k^{1-\alpha}$ от което следва, че

$$z' = (1-\alpha)k^{-\alpha}k' \quad \Longrightarrow \quad k' = \frac{1}{1-\alpha} z' k^{\alpha}$$

$$\text{Но } k = z^{\frac{1}{1-\alpha}} \Longrightarrow k^{\alpha} = z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \Longrightarrow \frac{1}{1-\alpha} z'\, z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \bar{s}\, z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - z^{\frac{1}{1-\alpha}}.n \;|: Z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

и получаваме

$$\frac{1}{1-\alpha} z' = \bar{s} - zn,$$

което е линейно диференциално уравнение с неизвестна функция $z(t)$.

Решаваме съответното хомогенно диференциално уравнение, т.е. при $\bar{s} = 0$. Ще имаме

$$\frac{z'}{1-\alpha} = -zn \Rightarrow \frac{dz}{dt} = -n(1-\alpha)z \Rightarrow \frac{dz}{z} = -n(1-\alpha)dt$$

$$\text{следователно } lnz = -n(1-\alpha)t \text{ и}$$

$$z = c.e^{-n(1-\alpha)t}.$$

Сега намираме решението на нехомогенното линейно диференциално уравнение чрез вариране на константата, което значи че търсим решение от вида:

$$z(t) = c(t).e^{-n(1-\alpha)t} \Longrightarrow$$

$$z'(t) = c'(t).e^{-n(1-\alpha)t} + c(t).(e^{-n(1-\alpha)t})'$$

$$z'(t) = c'(t).e^{-n(1-\alpha)t} - c(t)n(1-\alpha).e^{-n(1-\alpha)t}$$

$$\frac{c'(t)}{1-\alpha}.e^{-n(1-\alpha)t} - c(t)n.e^{-n(1-\alpha)t} = \bar{s} - nc(t).e^{-n(1-\alpha)t}$$

$$\Longrightarrow c'(t) = \bar{s}(1-\alpha).e^{n(1-\alpha)t}$$

$$\Longrightarrow c(t) = c_0 + \bar{s}(1-\alpha)\int e^{n(1-\alpha)t}\,dt = \ c_0 + \frac{\bar{s}}{n}.e^{n(1-\alpha)t}$$

Тогава

$$z(t) = \left(c_0 + \frac{\bar{s}}{n}.e^{n(1-\alpha)t}\right).e^{-n(1-\alpha)t} = \ c_0.e^{-n(1-\alpha)t} + \frac{s}{\bar{n}}$$

Връщаме се в първоначалното полагане:

$$k = z^{\frac{1}{1-\alpha}} \Longrightarrow k(t) = [c_0.e^{-n(1-\alpha)t} + \frac{s}{\bar{n}}]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\lim_{t\to\infty} k(t) = [\frac{s}{\bar{n}}]^{\frac{1}{1-\alpha}} = k_*$$

Така получихме, че при всяко съотношение на параметрите на модела на Солоу–Сван с производствена функция на Кооб–Дъглас съществува сходимост на съотношението капитал/труд към равновесната стойност k_*. Това е така, дори и първоначалните стойности на $\bar{s}$, n и k да предполагат неравновесие – след достатъчно дълго време, такова ще се установи.

Пример 31. Националният доход се произвежда по технология, зададена чрез производствената функция $Y_t = \sqrt{K_t N_t}$, като в базовата година t=0, $K_0 = 625$, $N_0 = 25$. Предлагането на труд нараства с темп от 5% годишно. Нормата на спестявани я е 1) $\bar{s} = 30\%$; 2) $\bar{s} = 25\%$; 3) $\bar{s} = 20\%$

а) Пресметнете k_0, y_0, σ_0, r_0 и w_0.

б) Пресметнете равновесните гранични стойности k_*, y_*, σ_*, r_* и w_*. Кой от двата фактора - капитал или труд е в недостиг?

в) С какви темпове ще нарастват капита и брутния вътрешен продукт през първата година?

г) Да се изразят k_t,K_t, N_t и Y_t.

д) да се попълни таблица с всичките стойности на K, N, Y ,C=I=dK; $\frac{dK}{K}$; $dY, \frac{dY}{Y}$; k; y; σ; r, w до седем години включително.

Решение:

Ще решим всички подусловия на задачата, при положение, че $\bar{s} = 30\%$.

а) Като заместим $K_0 = 625$, $N_0 = 25$ в производствената функция, получаваме $Y_0 = 125$. Да пресметнем k_0, y_0, σ_0, r_0 и w_0 . Ще имаме

$$k_0 = \frac{K_0}{N_0} = \frac{625}{25} = 25,$$

$$y_0 = \sqrt{k_0} = \sqrt{25} = 5,$$

$$\sigma_0 = \frac{Y_0}{K_0} = \frac{y_0}{k_0} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

$$r_0 = \alpha \frac{Y_0}{K_0} = \frac{1}{2}\sigma_0 = 0{,}2.\frac{1}{2} = 0{,}1; \quad w_0 = (1-\alpha)\frac{Y_0}{N_0} = \frac{1}{2}y_0 = \frac{1}{2}.5 = 2{,}5.$$

б) Сега (като използваме зададената норма на спестяване $\bar{s} = 30\%$) ще пресметнем равновесните стойности на модела - k_*, y_*, σ_*, r_* и w_* . Ще имаме

$$\bar{s}y = nk \Longrightarrow \bar{s}\sqrt{k} = nk \ (^2)\Longrightarrow \ \bar{s}^2 = n^2k^2 \Longrightarrow k = \left(\frac{\bar{s}}{n}\right)^2.$$

Но

$$\frac{\bar{s}}{n} = \frac{30\%}{5\%} = 6 \Longrightarrow k_* = 6^2 = 36\,.$$

Тъй като $k_0 = 25 < 36 = k_*$, от това следва, че има недостиг на капитал (излишък на труд) и K ще нараства с по-бърз темп от N. Получаваме $y_* = \sqrt{k_*} = 6$; $\sigma_* = \frac{y_*}{k_*} = \frac{1}{6}$; $r_* = \frac{1}{2}.\sigma_* = \frac{1}{2}.\frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ и $w_* = \frac{1}{2}y_* = 3$.

в) Тъй като

$$S_0 = I_0 = \bar{s}Y_0 = 0{,}3.125 = 37{,}5 \Longrightarrow K_1 = K_0 + I_0 = K_0 + dK_0 \Longrightarrow {dK_0}/{K_0}$$
$$= {37{,}5}/{625} = 0{,}06 = 6\%,$$

или темпът на нарастване на капитала ще бъде 6% годишно.

В общият случай $Y = K^{\alpha}N^{1-\alpha}$ и n е темпа нарастване на $N;$ $m-$ темпа на нарастване на K. Да пресметнем какъв ще бъде темпа на нарастване на националния доход Y.

Следователно

$$K_t = e^{mt}K_0 \text{ и } N_t = e^{nt}N_0 \Longrightarrow Y_t = (e^{mt}K_0)^{\alpha}\,(e^{mt}N_0)^{1-\alpha} = e^{m\alpha+n(1-\alpha)}Y_0,$$

тоест темпа на нарастване на Y е $m\alpha + n(1-\alpha)$. В нашия случай $n = 5\%;$ m=*6%* от което ства ясно че брутният вътрешен продукт нараства с *5,5%* годишен темп (за първата година).

г) От решението на бернулиевото диференциално уравнение имаме:

$$k(t) = [c_0e^{-n(1-\alpha)t} + \frac{\bar{s}}{n}]^{\frac{1}{1-\alpha}} \Longrightarrow$$

$$k_t = [c_0(1-n(1-\alpha)^t + \frac{\bar{s}}{n}]^{\frac{1}{1-\alpha}} \Longrightarrow$$

$$k_t = [c_0(1-0{,}025)^t + 6]^2 = [c_0(0{,}975)^t + 6]^2.$$

$$k_{0=}[c_0 + 6]^2 = 5^2 \Longrightarrow c_0 = -1$$

$$k_t = (6-(0{,}975)^t)^2$$

$$N_t = (1{,}05)^t 25$$

$$K_t = k_tN_t = (1{,}05)^t(6-(0{,}975)^t)^2 25$$

$$Y_t = \sqrt{K_tN_t} = (1{,}05)^t(6-(0{,}975)^t)25.$$

д) Таблица с всичките стойности до седем години включително.

t	0	1	2	3	4	5	6	7
K	625	662,5	702,06	743,79	787,80	834,22	883,17	934,78
N	25	26,25	26,25	28,94	30,39	31,91	33,51	35,19
Y	125	131,87	139,11	146,71	154,72	163,15	172,02	181,36
dY	-	6,87	7,24	7,60	8,01	8,43	8,87	9,34
dY/Y	-	5,586	5,49%	5,47%	5,46%	5,45%	5,44%	5,43%
dK	-	37,5	39,56	41,73	44,01	46,42	48,95	51,61
dK/K	-	6%	5,97%	5,94%	5,92	5,89%	5,87%	5,84%
S=I	37,5	39,56	41,73	44,01	46,42	48,95	51,61	54,41
k	25	25,24	25,47	25,70	25,92	26,16	26,36	26,57
y	5	5,02	5,05	5,07	5,09	5,11	5,13	5,15
σ	0,200	1,199	0.198	0,197	0,196	0,196	0,195	0,194
r	0,100	0,100	0,099	0,099	0,098	0,098	0,097	0,097
w	2,500	2,510	2,525	2,595	2,545	2,565	2,565	2,575

17. Златно правило на натрупването в модела на Солоу–Сван

Сега поставяме въпроса за максимализиране на потреблението. Ще разгледаме потреблението на един зает. То е (в условие на равновесен ръст):

$$c = (1 - \bar{s})y(k) = y(k) - \bar{s}y(k) = y(k) - nk = \frac{C}{N} = \frac{Y - S}{N} = \frac{Y - I}{N}$$

$$c'(k) = y'(k) - n \Longrightarrow \; y'(k) = \frac{dy}{dk} = n,$$

$$\text{но } \frac{dy}{dk} = \frac{d\frac{Y}{N}}{d\frac{K}{N}} = \frac{\partial Y}{\partial K} \Longrightarrow \frac{\partial Y}{\partial K} = n.$$

(Очевидно $y''(k) < 0$, защото $y(k)$ е вдлъбната функция.) Така получаваме, че потреблението достига своя максимум точно тогава, когато тепма на ръст на капитала съвпада с маргиналната му производителност.

Сега да направим максимализиране на c по $\bar{s}$ при условие че, $k = k_*$. Ще имаме:

$$c(\bar{s}) = (1-\bar{s})y(k_*) = (1-\bar{s})(\frac{\bar{s}}{n})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \Longrightarrow$$

$$c'(\bar{s}) = -(\frac{\bar{s}}{n})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} + (1-\bar{s})\frac{\alpha}{1-\alpha}(\frac{\bar{s}}{n})^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}}.\frac{1}{n} \Longrightarrow$$

$$c'(\bar{s}) = 0 \Longleftrightarrow (\frac{\bar{s}}{n})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = (1-\bar{s})\frac{\alpha}{1-\alpha}(\frac{\bar{s}}{n})^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}}.\frac{1}{n}$$

$$\frac{\bar{s}}{n} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{n}(1-\bar{s}) \Longrightarrow$$

$\bar{s} = (1-\alpha) = \alpha(1-\bar{s})$ от което следва, че $\bar{s} = \alpha$.

$$\text{Тогава } k_g = \left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Забележка: g от gold.

Горното равенство представлява „златното правило на Фелпс за натрупване“: ако нормата на спестовност е равна на еластичността на националния доход по капитала, то средната норма на потребление достига максимума си при пълно използване на труда и капитала.

Означаваме $k_g \coloneqq k_*$ при $\bar{s} = \alpha$:

$$k_g = (\frac{\alpha}{n})^{\frac{1}{1-\alpha}}; \quad y_g = (\frac{\alpha}{n})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}; \quad \sigma_g = \frac{n}{\alpha}\ ; \quad r_g = n; \quad w_g = (1-\alpha)(\frac{\alpha}{n})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Тъй като $Y = \frac{\partial Y}{\partial K}.K + \frac{\partial Y}{\partial N}.N$ и $\frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{\alpha Y}{K}$; $\frac{\partial Y}{\partial N} = \frac{(1-\alpha)Y}{N}$, то $Y = \frac{\alpha Y}{K}.K + \frac{(1-\alpha)Y}{N}.N$ следователно при $\bar{s} = \alpha$, в съответствие със златното правило целият доход от капитал (и само той) трябва да се (спести и) инвестира.

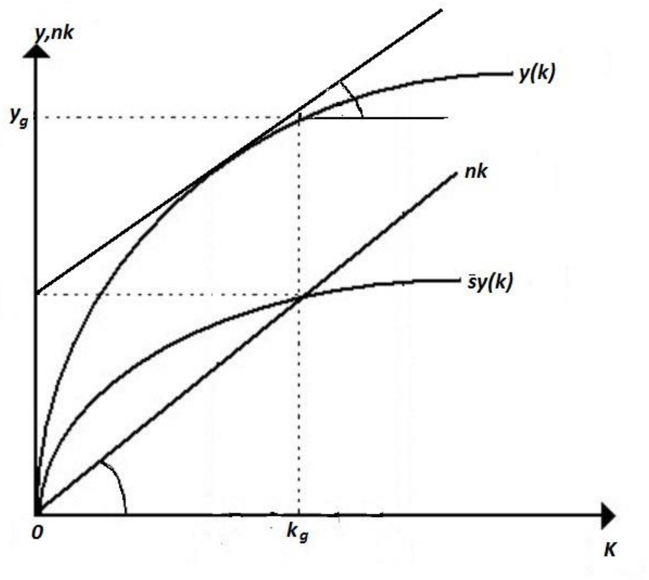


Рис. 5. Златно правило на натрупване

Геометрична интерпретация. При зададена технология на прозиводството (тоест $y = y(k)$) фиксиран ръст на трудовите ресурси n всяка норма на спестовност си има свое устойчиво равновесно съотношение капитал/труд. За да определелим каква норма $\bar{s}$ обезпечава максимума на c към графиката на производствената функция $y(k)$ да прекараме допирателна, успоредна на правата nk, тъй като в съответствие с златното правило $y'(k) = n$. Точката на пресичане на препендикуляра към абцисата от точката на допиране с лъча nk определя оптималната норма на спестяване. През тази точка трябва мине кривата $\bar{s}y(k)$ (рис. 5)

18. Модели на икономическия ръст с екзогенен технически прогрес

Понятието технически прогрес включва всички фактори, които или увеличават БВП при зададени обеми на използване на труда и/или капитала или позволяват да се произведе фиксиран БВП с по-малки капиталови и/или трудови разходи. В отличие от традиционните фактори на производство техническият прогрес е невидим фактор на производство.

В опростените модели техническият прогрес се предполага, че е екзогенно зададен и той се включва по два начина:

1) Може да се разглежда като трети фактор на производството:

$$Y = T_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$$

Тогава, ако N расте с темп от $n\%$ годишно, K - с темп от $m\%$, Т – с $p\%$ и Y – с $q\%$, ще бъде в сила зависимостта:

$$q = p + \alpha m + (1 - \alpha)n.$$

Пример 32: Какъв дял от растежа на НД се осигурява от техническия прогрес, ако е известно, че

t	K_t	N_t	Y_t
0	360	120	275
1	414	132	320

и производствената функция на НД е

$$Y = T_t K_t^{0,24} N_t^{0,76}.$$

Решение:

$$Y = T_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow n = \frac{N_1}{N_0} = \frac{132}{120} = 10\%$$

$$m = \frac{K_1}{K_0} = \frac{414}{360} = 15\%$$

$$q = \frac{Y_1}{Y_0} = \frac{320}{275} = 16\%$$

$$q = p + \alpha m + (1-\alpha)n$$

$$16 = p + \frac{24}{100}.15 + \frac{76}{100}.16$$

$$1600 = 100p + 360 + 1216$$

$$100p = 1600 - 1576$$

$$100p = 24$$

$$p = \frac{24}{100}$$

$$p = 24\%.$$

2) Може да се предостави като условен ръст на обемите на прилагане на капитала и труда, по този начин той увеличава във времето производителността им

$$Y_t = Y(A_t K_t, B_t N_t)$$

Ако A_t и B_t растат с постоянни темпове λ и μ, то

$$Y_t = Y((1+\lambda)^t K_t, (1+\mu)^t N_t) \text{ при дискретно време}$$

$$Y(t) = Y\left(e^{\lambda t} K(t), e^{\mu t} N(t)\right) \text{ при непрекъснато време}$$

Частен случай е. Ако μ=0 или λ=0, т.е. техническият прогрес повишава производителността на единият от факторите на производство. Тогава:

$$Y_t = Y((1+\lambda)^t K^t, N^t)\ ; Y_t = Y(e^{\lambda t}K(t), N(t))$$

или

$$Y_t = Y(K_t, (1+\mu)^t N_t)\ ; Y(t) = Y\big(K(t), e^{\mu t}N(t)\big).$$

Пример 33. Да се намери зависимостта между годишните темпове на усилване на капитала и труда – λ и μ съответно, ако производствената функция е

$$Y_t = ((1+\lambda)^t K_t)^{0,24}((1+\mu)^t N_t)^{0,76},$$

а данните за националния доход и обемите капитал и труд при $t = 0{,}1$ са като в пример 16.

Решение:

За тази производствена функция ще бъде изпълнено съотношението

$$q = 0{,}24(\lambda + m) + 0{,}76(\mu + n),$$

където q е ръстът на НД, m – на капитала и n – на труда. Заместваме в горното равенство $q = 16$, $m = 15$ и $n = 10$ (q, m, n, λ и μ се измерват в %) и получаваме

$$16 = 0{,}24(\lambda + 15) + 0{,}76(\mu + 10) = 0{,}24\lambda + 3{,}6 + 0{,}76\mu + 7{,}6 \Longrightarrow 0{,}24\lambda + 0{,}76\mu = 4{,}8.$$

Така например, при $\lambda = 0$ (техническият прогрес не влияе върху капитала) ще имаме $\mu = 120/19 \cong 6{,}32$, а при $\mu = 0$ (техническият прогрес не влияе върху труда) $\lambda = 20$.

Изменението на производителността на факторите в следствие от техническия прогрес въздейства на функционалното разпределение на НД, тъй като

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = r, \frac{\partial Y}{\partial N} = w \text{ и } Y = rK + wN.$$

За това, при анализа на икономическите последствия от техническия прогрес водещи са следните два въпроса:

- как техническият прогрес влияе върху разпределението на НД;

- възможен ли е е устойчив ръст на НД при пълно използване на труда и капитала в условие на техническия прогрес.

19. Неутрален технически прогрес

Ако техническият прогрес не изменя разпределението на националния доход между труда и капитала, т.е.

$r_t K_t \ / \ w_t N_t = const,$

той се нарича неутрален. Има три възможности:

1) От $K_t / \ N_t = const \Rightarrow r_t / \ w_t = const$. Тогава при зададено (и постоянно във времето) съотношение капитал/труд с еднакви темпове ще нарастват маргиналните производителности на капитала и труда и пропорцията на разпределението на НД няма да се променя.

Тъй като

$$\frac{K_t}{N_t} = k = const$$

и

$$r = \frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{\partial N y(k)}{\partial N k} = y'(k)$$

$$w = \frac{\partial Y}{\partial N} = \frac{\partial N y(k)}{\partial N} = y(k) + N \frac{\partial y}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial N} = y(k) + N y'(k) \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{K}{N}\right)$$
$$= y(k) + N y'(k)\left(-\frac{K}{N^2}\right) = y(k) - k y'(k)$$

следователно

$$\frac{w}{r} = \frac{y(k) - k y'(k)}{k y'(k)} = \frac{y(k)}{y'(k)} - k.$$

За да е изпълнено горното условие е необходимо $\frac{w}{r}$ да е функция само на k (но не и на t) или

$$\frac{w}{r} = \frac{y(k)}{y'(k)} - k = f(k)$$

Ако $y_0(k)$ е частно решение на горното диференциално уравнение, то $y(t) = A(t)\ y_0(k)$ ще е общо решение. И наистина

$$\frac{A(t)\ y_0(k)}{A(t) y_0'(k)} - k = \frac{y_0(k)}{y_0'(k)} - k = f(k).$$

Тогава

$$Y(K,N) = A(t)Y_0(K,N) = Y_0(A(t)K, A(t)N),$$

където $Y_0 = Ny_0(k) = Ny_0\left(\frac{K}{N}\right)$.

В този случай се говори за технически прогрес, неутрален по Хикс. В темпов запис (при производствена функция на Кооб-Дъглас) ще имаме

$$Y_t = ((1+n)^t K)^\alpha ((1+n)^t N)^{1-\alpha}$$

и националният доход ще се разпределя в съотношение $\alpha\colon(1-\alpha)$.

В този случай $k = \frac{K}{N}$ и $\frac{r}{w}$ ще са константи, а y, $\sigma = \frac{Y}{K}$, r и w ще нарастват с постоянен темп.

2) От $\frac{Y_t}{K_t} = const \Rightarrow \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = const$, т.е. на зададена средна производителност на капитала $\sigma = \frac{Y_t}{K_t}$ да съответства постоянна във времето маргинална производителност на капитала $r = \frac{\partial Y_t}{\partial K_t}$. Тъй като $\sigma = \frac{y}{k}$ ще трябва r да бъде функция на $\frac{y}{k}$, т.е. $r = f\left(\frac{y}{k}\right)$. Тъй като $y = r'$, то получаваме диференциалното уравнение:

$$y' = f\left(\frac{y}{k}\right).$$

Ако $y_0(k)$ е едно частно решение на горното диференциално уравнение, то общото решение ще има вида

$$y(k) = A(t)y_0\left(\frac{k}{A(t)}\right).$$

И наистина,

$$y' = A(t)y_0'\left(\frac{k}{A(t)}\right)\frac{1}{A(t)} = y_0'\left(\frac{k}{A(t)}\right),$$

$$f\left(\frac{y}{k}\right) = f\left(\frac{A(t)y_0\left(\frac{k}{A(t)}\right)}{k}\right) = f\left(\frac{y_0\left(\frac{k}{A(t)}\right)}{\frac{k}{A(t)}}\right),$$

но

$$y_0'\left(\frac{k}{A(t)}\right) = f\left(\frac{y_0\left(\frac{k}{A(t)}\right)}{\frac{k}{A(t)}}\right) \Rightarrow y' = f\left(\frac{y}{k}\right).$$

Ако $Y_0(K,N) = Ny_0(k) \Rightarrow Ny_0\left(\frac{K}{A(t)}\right) = Y_0\left(\frac{K}{A(t)}, N\right)$ и общото решение ще бъде

$$Y(K,N) = A(t)Y_0\left(\frac{K}{A(t)}, N\right) = Y_0(K, A(t)N)$$

В този случай се говори за технически прогрес неутрален по Харод. В темпов запис с п.ф. на Кооб-Дъглас ще имаме

$$Y_t = K_t^{\alpha}((1+\mu)^t N_t)^{1-\alpha}$$

Или

$$Y(t) = (K(t))^{\alpha}(e^{\mu t}N(t))^{1-\alpha},$$

където μ е годишния темп на нарастване на производителността на труда в следствие на техническия прогрес, т.е. техническият прогрес неутрален по Харод е еквивалентен на растеж във времето на броя на заетите.

В този случай σ и r са константи, а k, y, w и $\frac{w}{r}$ нарастват с постоянен темп.

3) От $\frac{Y_t}{N_t} = const \Rightarrow \frac{\partial Y_t}{\partial N_t} = const$, т.е. на всяка стойност на средната производителност на труда $y = \frac{Y_t}{N_t}$ да съответства определена и независеща от времето стойност на маргиналната производителност на труда $\frac{\partial Y_t}{\partial N_t} = w$. Тъй като $w = y' - ky$

получаваме диференциалното уравнение:

$$y' - ky = f(y)$$

за някоя функция на f.

Аналогично на случай 2. получаваме

$$Y = Y_0(A(t)K, N)$$

а в темпов запис с п.ф. на Кооб-Дъглас

$$Y_t = ((1+\lambda)^t K_t)^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$$

или

$$Y(t) = (e^{\lambda t}K(t))^{\alpha} N(t)^{1-\alpha},$$

където λ е годишния темп на нарастване на производителността на капитала в следствие на техническия прогрес.

В този случай y и w са константи, σ и r ще нарастват с постоянен темп, а k и $\frac{w}{r}$ ще намаляват със същия темп. В този случай се говори за технически прогрес, неутрален по Солоу.

Характеристика на различните видове неутрален технически прогрес

Неутралност	k	y	σ	w	r	w/r
по Хикс	0	+	+	+	+	0
по Харод	+	+	0	+	0	+
по Солоу	−	0	+	0	+	−

Забележка: Ако параметъра не се променя – „0“, ако расте – „+“ и ако намалява – „−„.

20. Модел на Солоу–Сван с технически прогрес, неутрален по Харод

Нека да разгледаме технология за производство на БВП, зададена чрез производствената функция

$$Y_t = K_t^{\alpha}((1+\mu)^t N_t)^{1-\alpha}.$$

Ако положим $E_t = (1+\mu)^t N_t$ – това е труда с отчитане на повишената му, в следствие на техническия прогрес, производителност, ще имаме:

$$Y_t = K_t^{\alpha} E_t^{1-\alpha}$$

Освен това, нека количеството на предлаган труд нараства с с постоянен темп, т.е. $N_t = (1+n)^t N_0$.

Да положим $\frac{K}{E} = \psi$ и $\frac{Y}{E} = \varphi$. Тогава производствената функция на една променлива ще бъде $\varphi = \varphi(\psi) = \varphi^{\alpha}$. Прилагаме основното тъждество, подисгуряващо равновесен ръст от модела на Солоу-Сван:

$$\bar{s}\varphi(\psi) = (n+\mu)\psi,$$

защото E_t ще нараства с постоянен темп $n+\mu$:

$$E_t = (1+\mu)^t N_t = (1+\mu)^t (1+n)^t N_0 = ((1+\mu)(1+n))^t E_0$$

Тогава

$$\bar{s}\psi^{\alpha} = (n+\mu)\psi \Rightarrow \ \psi_* = \left(\frac{\bar{s}}{n+\mu}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

и

$$\varphi_* = \left(\frac{\bar{s}}{n+\mu}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Обаче

$$\psi = \frac{K}{E} = \frac{K}{(1+\mu)^t N} = \frac{1}{(1+\mu)^t}\frac{K}{N} = \frac{1}{(1+\mu)^t}k \Rightarrow k = (1+\mu)^t\psi$$

$$\varphi = \frac{Y}{E} = \frac{Y}{(1+\mu)^t N} = \frac{1}{(1+\mu)^t}\frac{Y}{N} = \frac{1}{(1+\mu)^t}y \Rightarrow y = (1+\mu)^t\varphi$$

Тогава за k_*, y_*, σ_* получаваме

$$k_* = (1+\mu)^t\left(\frac{\bar{s}}{n+\mu}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$y_* = (1+\mu)^t\left(\frac{\bar{s}}{n+\mu}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\sigma_* = \frac{n+\mu}{\bar{S}}.$$

Теорема: Всеки неутрален технически прогрес е еквивалентен на технически прогрес, неутрален по Харод.

Доказателство:

1. Технически прогрес неутрален по Хикс:
$$Y(t) = (e^{\eta t}(K(t))^{\alpha}(e^{\eta t}(N(t))^{1-\alpha}$$
$$= e^{\alpha\eta t}(K(t))^{\alpha}e^{(1-\alpha)\eta t}(N(t))^{1-\alpha} = (K(t))^{\alpha}e^{\eta t}(N(t))^{1-\alpha}$$
$$= (K(t))^{\alpha}(e^{\frac{\eta t}{1-\alpha}}N(t))^{1-\alpha}.$$

2. Технически прогрес, неутрален по Солоу
$$Y(t) = (e^{\lambda t}K(t))^{\alpha}(N(t))^{1-\alpha} = (K(t))^{\alpha}e^{\alpha\lambda t}(N(t))^{1-\alpha} = (K(t))^{\alpha}(e^{\frac{\alpha\lambda t}{1-\alpha}}N(t))^{1-\alpha}.$$

От горната теорема следва, че всеки неутрален технически прогрес е съвместим с равновестния ръст.

Пример 34. Технологията на производство на НД се задава с производствена функция на Кооб-Дъглас, като 40% от националния доход се пада на доход от капитал. Реалната работна заплата (през базовата година) е 2,4, а икономиката се намира в динамично равновесие при съблюдаване на златното правило. Трудоспособното население нараства с постоянен темп от 2% годишно. Намерете:

а) динамичната производствена функция;

б) цената на капитала r и средната производителност на капитала;

в) средната производителност на труда, реалната работна заплата и съотношението капитал/труд след 5 години.

Решение:

а) Нека търсената динамична производствена функция е

$$Y_t = K_t^{\alpha}((1+\mu)^t N_t)^{1-\alpha},$$

където $N_t = (1{,}02)^t N_0$ (предлагането на труд расте с постоянен темп от 2% годишно), а μ е неизвестният темп на усилване ефективността на труда. Тогава статичната производствена функция (при $t = 0$) ще бъде

$$Y_0 = K_0^{\alpha} {N_0}^{1-\alpha},$$

а съответната ѝ еднофакторна производствена функция - $y = k^{\alpha}$.

От една страна ще имаме

$$Y_0 = r_0 K_0 + w_0 N_0,$$

а от друга –

$$Y_0 = \alpha Y_0 + (1-\alpha) Y_0 = \alpha \frac{Y_0}{K_0}.K_0 + (1-\alpha)\frac{Y_0}{N_0}.N_0$$

$$= \alpha \sigma_0 K_0 + (1-\alpha) y_0 N_0.$$

Тогава ще бъдат изпълнени равенствата

$$r_0 = \alpha \sigma_0 \quad \text{и} \quad w_0 = (1-\alpha) y_0.$$

Тъй като 40% от националния доход е доход от капитал, то ще имаме $\alpha = 0{,}4$. По условие е дадено, че $w_0 = 2{,}4$ (реалната работна заплата през базовата година $t = 0$), тогава равенството $w_0 = (1-\alpha) y_0$ добива вида $2{,}4 = 0{,}6 y_0 \Rightarrow y_0 = 4$. Тъй като

$$y_0 = {k_0}^{0,4} \Longrightarrow k_0 = {y_0}^{5/2} = 4^{5/2} = 32.$$

Сега можем да използваме необходимото и достатъчно условие за равновесен ръст на икономиката в модела на Солоу–Сван с отчитане на техническия прогрес

$$\bar{s} y = (n+\mu) k.$$

Разбира се, то ще бъде изпълнено и за $t = 0$, т.е. $\bar{s} y_0 = (n+\mu) k_0$. Заместваме в него $\bar{s} = 0{,}4$ (златното правило, приложено за производствена функция на Кооб–

Дъглас изисква $\overline{s} = \alpha = 0{,}4$), $y_0 = 4$, $k_0 = 32$ и $n = 0{,}02$. Тогава получаваме уравнението (с неизвестно μ)

$$0{,}4.4 = (n+\mu).32 \;\Rightarrow\; n+\mu = 0{,}05 \;\Rightarrow\; \mu = 0{,}03.$$

Така окончателно намираме динамична производствена функция

$$Y_t = K_t^{0,4}((1{,}03)^t N_t)^{0,6}.$$

б) В моделите с технически прогрес, неутрален по Харод средната производителност на капитала σ и реалният доход от капитал са константи. За това ще имаме

$$\sigma = \sigma_0 = \frac{y_0}{k_0} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}.$$

От равенството $r = \alpha\sigma$ ще имаме

$$r = \alpha\sigma = \alpha\sigma_0 = 0{,}4\frac{1}{8} = 0{,}05 = 5\%.$$

в) Другите макроикономически показатели (средното съотношение капитал/труд k, средната производителност на труда y и реалната работна заплата w) растат с постоянен годишен темп μ. За това ще имаме

$$k_5 = (1{,}03)^5 k_0 = (1{,}03)^5.32 = 1{,}16.32 = 43{,}03$$

$$y_5 = (1{,}03)^5 y_0 = (1{,}03)^5.4 = 5{,}38$$

$$w_5 = (1{,}03)^5 w_0 = (1{,}03)^5.2{,}4 = 2{,}78.$$

21. Модели с ендогенен технически прогрес

Тъй като техническия прогрес преди всичко е свързан със значителни разходи на обществото за научни изследвания, образование и техническо преоборудване на производството, то самият той не само обуславя ръст на БВП, но и се нуждае от добро ниво на икономиката. За това по-адекватна представа за механизма на функциониране на растящата икономика дават моделите, при които техническият прогрес е ендогенна величина.

В качество на пример за отчитане на техническия прогрес като ендогенен фактор ще разгледаме модел на икономически растеж, използващ производствена функция с три аргумента – капитал, труд и „човешки капитал“. Под „човешки капитал“ се разбира способността на работника да повишава производителността си в следствие на полученото образование и квалификации.

$$Y = N^{\alpha} K^{\beta} H^{\gamma}, \qquad \text{като } \alpha+\beta+\gamma = 1,$$

където H е човешкия капитал, измерван в особени единици на образованост.

Икономиката се намира в условие на съвършена конкуренция, следователно цените на факторите на производство съвпадат с маргиналните им производителности:

$$w = \frac{\partial Y}{\partial N} = \alpha \frac{Y}{N} \; ; r = \frac{\partial Y}{\partial K} = \beta \frac{Y}{K} \; ; h = \frac{\partial Y}{\partial H} = \gamma \frac{Y}{H}$$

$$\text{и } Y = wN + rK + hH$$

Представителното домакинство разпределя времето си (извън това необходимо за почивка) на време за работа N_i и време за обучение E_i

$$T_i = N_i + E_i$$

Обема на придобития за времето на обучение човешки капитал зависи не само от времето за обучение $E = \sum E_i$, но и от количеството, произведени от държавата публични блага B – инфраструктура на образованието, измервана чрез обема на разходите за производството ѝ.

$$H_i = B^{\mu} E_i^{1-\mu}$$

Горната формула е производствена функция на създаването на човешки капитал. Публичните блага се използват безплатно от населението; производството им се финансира от данъците.

Целта на домакинството е да разпредели времето си между труд и образование така, че да максимализира доходите си от труд и човешки капитал. Формално задачата изглежда така:

$$wN_i + hH_i \; \to max$$

с ограничения $T_i = N_i + E_i$; $H_i = B^{\mu} \, E_i^{1-\mu}$.

За да я решим съставяме функцията на Лагранж

$$\phi_i = wN_i + hH_i - \lambda_{i1}(N_i + E_i - T_i) - \lambda_{i2}(H_i - B^{\mu} E_i^{1-\mu})$$

Тогава:

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial N_i} = 0 \; \Leftrightarrow w = \lambda_{i1}$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial H_i} = 0 \; \Leftrightarrow h = \lambda_{i2}$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial E_i} = 0 \Leftrightarrow \; \lambda_{i1} = \lambda_{i2}(1-\mu)\left(\frac{B}{E_i}\right)^{\mu} \Leftrightarrow \frac{w}{h} = (1-\mu)\left(\frac{B}{E_i}\right)^{\mu}.$$

но от производствената функция на производство на човешки капитал $\Rightarrow B^{\mu} = H_i/E_i^{1-\mu}$, следователно

$$\frac{w}{h} = (1-\mu)\left(\frac{H_i}{E_i}\right).$$

Тъй като, при зададената производствена технология имаме

$$w = \alpha\frac{Y}{N} \quad \text{и} \quad h = \gamma\frac{Y}{H},$$

то

$$\frac{w}{h} = \frac{\alpha\frac{Y}{N}}{\gamma\frac{Y}{H}} = \frac{\alpha H}{\gamma N} = \frac{\alpha x H_i}{\gamma x N_i} = \frac{\alpha H_i}{\gamma N_i},$$

където x е броя на домакинствата. Тогава получаваме

$$\frac{w}{h} = \frac{\alpha H_i}{\gamma N_i} = (1-\mu)\left(\frac{H_i}{E_i}\right) \Longrightarrow \frac{\alpha}{\gamma N_i} = \frac{(1-\mu)}{E_i} \Longrightarrow \frac{N_i}{E_i} = \frac{\alpha}{\gamma(1-\mu)}.$$

Окончателно получихме, че пропорцията, в която представителното домакинство разпределя времето си между труд и образование е константа, зависеща от технологиите на производство на БВП и човешки капитал. Тъй като $N_i + E_i = T_i = const$, то броят часове за работа и учене няма да се променя във времето:

$$T(N_i) = T(E_i) = 0.$$

(От тук нататък с $T(z)$ ще означаваме годишния темп на изменение на динамичната величина z. Малко аритметика на темповете:

$$T(x \cdot y) = T(x) + T(y)$$

$$T(\lambda) = 0 \Longrightarrow T(\lambda x) = T(\lambda) + T(x) = T(x), \lambda \in \mathbb{R}$$

$$T(x/y) = T(x) - T(y)$$

$$T(x^{\alpha}) = \alpha T(x).$$

Да запишем равенството

$$\frac{w}{h} = (1-\mu)\left(\frac{B}{E_i}\right)^{\mu}$$

в темпов запис

$$T(w) - T(h) = \mu\big(T(B) - T(E_i)\big).$$

Но $T(E_i) = 0 \Longrightarrow T(w) - T(h) = \mu T(B)$.

Освен това

$$w = \alpha \frac{Y}{N} \Longrightarrow T(w) = T(Y) - T(N),$$

$$h = \gamma \frac{Y}{H} \Longrightarrow T(h) = T(Y) - T(H)$$

$$\Longrightarrow T(w) - T(h) = T(H) - T(N).$$

Тогава условието $T(w) - T(h) = \mu T(B)$ може да се запише във вида $T(H) - T(N) = \mu T(B)$ или

$$T(H) = n + \mu T(B),$$

където n е темпа на изменение на предлагането на труд.

Може да се докаже, че необходимо и достатъчно условие за съществуване на устойчиво динамично равновесие е постоянството на „капиталоемкостта“ K/Y и „образованиеемкостта“ B/Y на националния доход, т.е.

$$\frac{K}{Y} = const \quad \text{и} \quad \frac{B}{Y} = const.$$

От горните равенства следва, че за темповете е изпълнено

$$T(K) = T(B) = T(Y).$$

Да запишем производствената функция за производство на националния доход $Y = N^{\alpha} K^{\beta} H^{\gamma}$ в темпов запис:

$$T(Y) = \alpha n + \beta T(K) + \gamma T(H).$$

Но $T(H) = n + \mu T(B) = n + \mu T(Y)$, следователно

$$T(Y) = \alpha n + \beta T(Y) + \gamma\big(n + \mu T(Y)\big) \Longrightarrow (1 - \beta - \gamma\mu) T(Y) = (\alpha + \gamma) n.$$

Тъй като $\alpha + \gamma = 1 - \beta$, окончателно получаваме

$$T(Y) = \frac{(1 - \beta) n}{1 - \beta - \gamma\mu} := g.$$

Тъй като $\gamma\mu > 0$, то $g > n$, т.е. темпът на нарастване на националния доход превишава темпът на нарастване на трудовите ресурси. Недостатък на модела е, че при $n = 0 \Longrightarrow g = 0$.

Пример 35. Предполага се наличието на устойчиво равновесие при пълно оползотворяване на трудовите, капиталови и образователни ресурси, като производствената функция е

$$Y = N^{0,3} K^{0,2} H^{0,5}.$$

Трудовите ресурси нарастват с годишен темп от 2%, производствената функция за производство на човешки капитал е $H_i = B^{0,8} E_i^{0,2}$. Да се намерят годишните темпове на изменение на капитала K, човешкия капитал H, цената на труда w, цената на капитала r и цената на човешкия капитал h. Как представителното домакинство разпределя 12 часа между работа и учене?

Решение:

За пресмятането на темпа на нарастване на националния доход $T(Y) = g$ прилагаме формулата

$$T(Y) = g = \frac{(1-\beta)n}{1-\beta-\gamma\mu} = \frac{(1-0{,}2)2}{1-0{,}2-0{,}5\cdot 0{,}8} = \frac{0{,}8\cdot 2}{0{,}4} = 4\%.$$

Ако във формулата $T(Y) = \alpha n + \beta T(K) + \gamma T(H)$, вземем под внимание, че $T(K) = T(Y) = g$ ($T(K) = T(Y)$ е едно от двете условия за наличие на устойчиво равновесие), получаваме

$$g = \alpha n + \beta g + \gamma T(H) \Longrightarrow T(H) = \frac{(1-\beta)g - \alpha n}{\gamma} = 5{,}2\%.$$

За темповете на изменение на цените на факторите за производство на НД ще имаме

$$T(w) = T(Y) - T(N) = 4 - 2 = 2\%$$

$$T(r) = T(Y) - T(K) = 0$$

$$T(h) = T(Y) - T(H) = 4 - 5{,}2 = -1{,}2\%.$$

(Всъщност условието $T(r) = 0,\ r = const$ е винаги налице при устойчиво равновесие).

За разпределението на времето между работа N_i и учене E_i за представителното домакинство използваме формулата

$$\frac{N_i}{E_i} = \frac{\alpha}{\gamma(1-\mu)} = \frac{0{,}3}{0{,}5(1-0{,}8)} = 3,$$

Или 12-те часа ще бъдат разпределени: $N_i = 9$, $E_i = 3$.

22. Моделиране на икономическите цикли

22.1. Цикличност на икономиката. За разлика от теорията на общото икономическо равновесие, която обяснява процесите на съгласуване на плановете на икономическите субекти при дадени производствени възможности и потребителски предпочитания, теорията на икономическите цикли изследва причините, предизвикващи изменения в икономическата активност на обществото. Ако в центъра на вниманието при теорията на общото икономическо равновесие се намират условията за равенство на търсенето и предлагането в различните макроикономически пазари, то теорията на икономическите цикли изследва причините, поради които равенството на съвкупното търсене и предлагане се постига при различни степени на (непълно) използване на производствените мощности и трудовите ресурси. Теорията на икономическите цикли заедно с теорията на икономическия ръст и теорията на инфлацията обяснява динамичния характер на развитие на икономиката. Статистическите данни показват, че изменението на показателите, характеризиращи националните икономики не се изменят монотонно, а колебателно (циклично). На рис. 6 е показана динамиката на годишните темпове на изменение на БВП на четирите от най-успешно развиващите се страни през втората половина на миналия век.

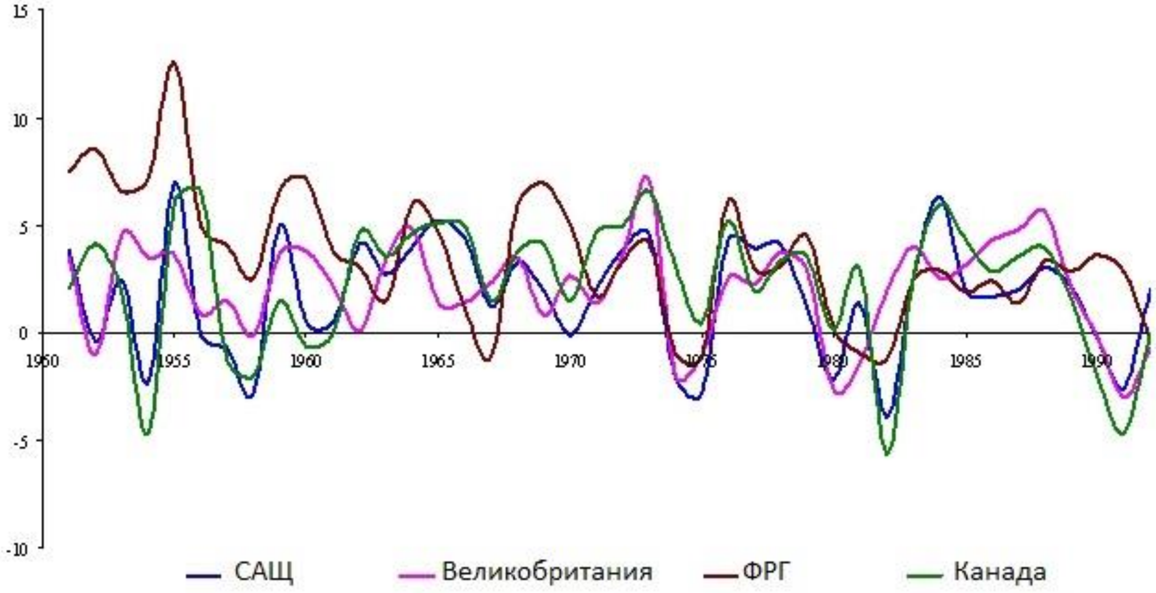


Рис. 6. Годишни темпове на изменение на БВП на САЩ, Великобритания, ФРГ и Канада за периода 1951 - 1992 год.

Направлението и големината на изменение на един макроикономически показател или на съвкупност от показатели се определя като икономическа конюнктура. За това теорията на икономическите цикли често се нарича също и теория на икономическата конюнктура.

Под икономически цикъл се разбира периодът на развитието на икономиката между две еднакви състояния на конюнктурата. В стилизиран вид той е изобразен на рис. 7. Теорията на икономическите цикли е призвана да обясни причините за колебанията на икономическата активност във времето (вълнообразната крива), а теорията на икономическият ръст изследва факторите и условията за устойчив ръст като дълготрайна тенденция в развитието на икономиката (трендовата линия).

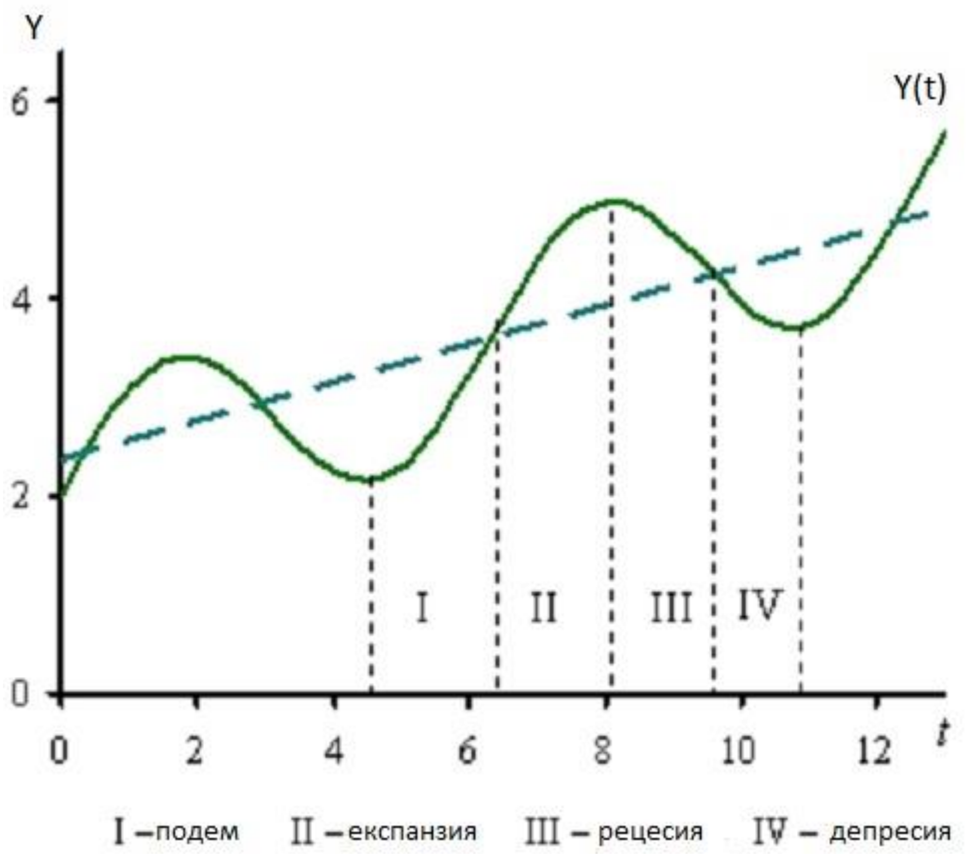


Рис. 7. Стилизирани фази на икономическия цикъл

В структурата на цикъла се открояват най-високата и най-ниска точка и лежащите между тях фази на спад и възход. Общата дължина на цикъла се измерва между две съседни най0високи или най-ниски точки. Съответно под спад се разбира времето между една най-висока точка на икономическа активност и последващата я най-ниска, а под възход – обратното. Националното бюро за икономически изследвания е констатирало, че в развитието на икономиката на САЩ от 1854 до 1991 год. са се наблюдавали 31 цикъла със средна продължителност от 53 мес.; от тях през 18 мес. е имало спад, а през 35 – възход.

При по-сериозен анализ, икономическият цикъл се дели на четири фази:

1. **Експанзия.** Националният доход расте при пълна заетост. Увеличава се търсенето на инвестиции, безработицата спада под естественото ниво – икономиката прегрява. Повишава се нивото на цените, реалната работна заплата и лихвения процент. Неизбежен изход от такова развитие е преход от възход към спад – икономиката се нуждае от охлаждане.
2. **Рецесия (криза).** В този стадий производството се съкращава (темпът на изменение става отрицателен), расте безработицата и намалява съвкупното търсене.

3. **Депресия.** Националният доход продължава да спада, но темпът на спад се забавя (кривата на националния доход $Y(t)$ от вдлъбната става изпъкнала).
4. **Оживление.** Преход от спад на производството към неговото покачване; постепенно възвръщане на икономиката към състояние на растеж.

Проблематиката на теорията на икономическите цикли изисква прилагане на сложни динамични модели с използване на диференциални уравнения. Задачата на този параграф е въз основа на прости диференчни модели да се разгледат основните фактори, пораждащи колебанията на икономическата конюнктура.

22.2. Модел на Самуелсън–Хикс – определение. В базовия (статичен) модел на Кейнс имаме

$$Y = C + I = aY + b + I(i) = aY + A \Longrightarrow (1-a)Y = A \Longrightarrow Y = \frac{1}{1-a}A \Longrightarrow \Delta Y = \frac{1}{1-a}\Delta A.$$

(Предполага се, че инвестициите I зависят само от лихвения процент i, но не и от националния доход Y, за това $b + I(i) = A$ са автономни, не зависещи от Y разходи). Смисълът на последното равенство е следният: при наличието на резервни производствени мощности, ръстът на автономното търсене A с определена величина води до увеличаване на НД Y с много по-голяма величина, равна на мултипликатора (на автономните разходи) $1/(1-a)$.

Когато ефективното търсене превишава капацитета на наличните производствени мощности, предприемачите започват да осъществяват индуцирани (зависещи от националния доход) инвестиции, обемът на които се определя от акселератора k:

$$k = \frac{\Delta K}{\Delta Y}.$$

Следователно, акселераторът k показва колко единици допълнителен капитал трябват, за да се произведе допълнителна единица национален доход. Тези индуцирани инвестиции (допълнителният капитал) водят до ново съвкупно търсене (в това число автономно), поражда се нов мултипликативен ефект, който изисква нови индуцирани инвестиции и т. н.

Дали ще се върне икономическата система в ново равновесно положение или не, ще бъде ли развиващият се процес монотонен или колебателен – на тези въпроси дава отговор моделът на Самуелсън–Хикс, който се явява модел на взаимодействие на мултипликатора и акселератора.

Моделът включва само стоковия пазар (както е при динамичния модел на Кейнс), следователно се приема, че нивото на цени и лихвения процент са неизменни. Така (за двусекторна икономика) ще имаме

$$y_t = C_t + I_t.$$

За динамичната функция на потребление на домакинствата C_t се предполага, че тя зависи от дохода през предходната година:

$$C_t = ay_{t-1} + b_t,$$

където b_t е някакво автономно (не зависещо от дохода) потребление. Да отбележим, че постоянството във времето на маргиналната склонност към потребление a е съществена предпоставка на модела.

Инвестициите на предприемачите се разбиват на автономни и индуцирани:

$$I_t = I_t^a + I_t^i.$$

Предприемачите осъществяват индуцирани инвестиции I_t^i едва след като се убедят, че нарастването на съвкупното търсене е устойчиво. За това, вземайки решение за обема на индуцираните инвестиции, те се ориентират по нарастването на съвкупното търсене (националния доход) не в текущия, а в предшестващия период:

$$I_t^i = k(y_{t-1} - y_{t-2}).$$

Предположението, че акселераторът k е постоянен във времето е важна предпоставка на модела.

Така формулата за НД добива вида

$$y_t = ay_{t-1} + b_t + I_t^a + k(y_{t-1} - y_{t-2})$$

или

$$y_t = (a+k)y_{t-1} - ky_{t-2} + A_t,$$

където с $A_t = b_t + I_t^a$ сме означили общия обем на автономните разходи.

Последното уравнение е линейно нехомогенно диференчно уравнение от втори ред, характеризиращо динамиката на изменение на НД във времето.

При фиксиране на величината на автономните разходи ($A_t = A = const$) в икономиката се достига до дългосрочно равновесие, ако обемът на НД се стабилизира на едно ниво:

$$y_t = y_{t-1} = y_{t-2} = \cdots = \bar{y}.$$

Ако заместим $y_t = \bar{y}$, $y_{t-1} = \bar{y}$ и $y_{t-2} = \bar{y}$ в диференчното уравнение, получаваме

$$\bar{y} = (a+k)\bar{y} - k\bar{y} + A \Longrightarrow \bar{y} = \frac{A}{1-a}.$$

Да означим $z_t = y_t - \bar{y} \Longrightarrow y_t = z_t + \bar{y}$. Заместваме в диференчното уравнение $y_t = (a+k)y_{t-1} - ky_{t-2} + A$

$$y_t = z_t + \frac{A}{1-a}, y_{t-1} = z_{t-1} + \frac{A}{1-a}, y_{t-2} = z_{t-2} + \frac{A}{1-a}$$

и получаваме

$$\begin{aligned}
z_t + \frac{A}{1-a} &= (a+k)\left(z_{t-1} + \frac{A}{1-a}\right) - k\left(z_{t-2} + \frac{A}{1-a}\right) + A \\
&= (a+k)z_{t-1} - kz_{t-2} + A\left(\frac{a+k}{1-a} - \frac{k}{1-a} + 1\right) \\
&= (a+k)z_{t-1} - kz_{t-2} + A\frac{a+k-k+1-a}{1-a} \\
&= (a+k)z_{t-1} - kz_{t-2} + \frac{A}{1-a}.
\end{aligned}$$

Окончателно ще имаме

$$z_t = (a+k)z_{t-1} - kz_{t-2},$$

с други думи сведохме нехомогенното уравнение до хомогенно.

Тъй като $y_t = z_t + \bar{y} = z_t + A/(1-a)$, т.е. y_t и z_t се различават с константа, то направленията на измененията им съвпадат. За да стигнем до решението на модела на Самуелсън–Хикс, ще трябва да използваме теорията на линейните диференчни уравнения от втори ред.

22.3. Линейни диференчни уравнения от втори ред. Разглеждаме най-общото линейно хомогенно диференчно уравнение от втори ред

$$x_t = a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2}.$$

За решаването му се използва така нареченото характеристично уравнение

$$\lambda^2 = a_1\lambda + a_2.$$

Това квадратно уравнение има дìскриминанта

$$D = {a_1}^2 + 4a_2.$$

Възможни са три случая:

1) $D > 0$. Тогава характеристичното уравнение разполага с два различни реални корена λ_1 и λ_2:

$$\lambda_1 = \frac{a_1 - \sqrt{D}}{2} \quad \text{и} \quad \lambda_2 = \frac{a_1 + \sqrt{D}}{2}.$$

Общото решение на съответното диференчно уравнение е

$$x_t = A_1{\lambda_1}^t + A_2{\lambda_2}^t,$$

където A_1 и A_2 са константи, които могат да се определят от началните условия. В този случай x_t се изменя монотонно (расте или намалява).

2) $D = 0$. Характеристичното уравнение има един (двоен) реален корен $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = a_1/2$. Общото решение на диференчното уравнение ще бъде

$$x_t = (A_1 + A_2 t)\lambda^t$$

и x_t също ще се изменя монотонно.

3) $D < 0$. Характеристичното уравнение ще има двойка комплексно спрегнати корени

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_1 \pm i\sqrt{-D}}{2} = \alpha \pm i\beta$$

със съответните модул $g = |\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ и аргумент

$$\omega = arctg\frac{\beta}{\alpha}.$$

Тогава общото решение на диференчното уравнение ще бъде

$$x_t = g^t(A_1 cos\omega t + A_2 sin\omega t).$$

Поведението на x_t във времето ще бъде колебателно.

Решението е стационарно, ако $x_t = x_{t-1} = x_{t-2} = \cdots = \bar{x} = const.$ Лесно се вижда, че стационарното решение на диференчното уравнение е $\bar{x} = 0$. Решението е устойчиво, ако при неограничено нарастване на t x_t се стреми към стационарното решение, т.е.

$$\lim_{t\to\infty} x_t = \bar{x} = 0.$$

В случай, че корените са реални, ще има устойчивост на решението, точно тогава, когато корените са по модул по-малки от 1. В случай на комплексни корени на характеристичното уравнение, необходимото и достатъчно условие е модула g да е по-малък от 1. И в реалния и в комплексния случай това е изпълнено, когато са в сила неравенствата

$$-1 < a_2 < 1 - |a_1|.$$

Когато тези неравенства са изпълнени и $D > 0$ – устойчиво монотонно намаляващо решение; при $D < 0$ – устойчиво колебателно (амплитудите на колебанията стават все по-малки). Ако неравенствата не са изпълнени и $D > 0$ – неустойчиво монотонно растящо решение, при $D < 0$ – неустойчиво колебателно (амплитудите стават все по-големи).

22.4. Модел на Самуелсън–Хикс – решение. Сега се връщаме към хомогенното диференчно уравнение $z_t = (a + k)z_{t-1} - kz_{t-2}$. Ясно е, че $a_1 = (a + k)$ и $a_2 = -k$. Икономическият смисъл на коефициентите a и k налага ограниченията $0 < a < 1$ и $k > 0$. Тогава, за дискриминантата ще имаме

$$D = {a_1}^2 + 4a_2 = (a+k)^2 - 4k,$$

следователно

$$D = 0 \Leftrightarrow (a+k)^2 = 4k \Leftrightarrow a = -k + 2\sqrt{k}.$$

Така получаваме, че

$$D > 0 \Leftrightarrow a > -k + 2\sqrt{k} - \text{монотонност на решението}$$

$$D < 0 \Leftrightarrow a < -k + 2\sqrt{k} - \text{колебателност на решението.}$$

Неравенството $-1 < a_2$ е еквивалентно на неравенството $k < 1$, а неравенството $a_2 < 1 - |a_1|$ – на $a < 1$, което е изпълнено винаги. Така, че за да имаме устойчивост на решението, трябва да е налице неравенството $k < 1$, в противен случай, з нарастването на t z_t все повече ще се отдалечава от стационарното решение $\bar{z} = 0$, а y_t – ще се отдалечава от $\bar{y} = A/(1-a)$. Най-добра представа за възможните видове решения y_t получаваме от рис. 8.

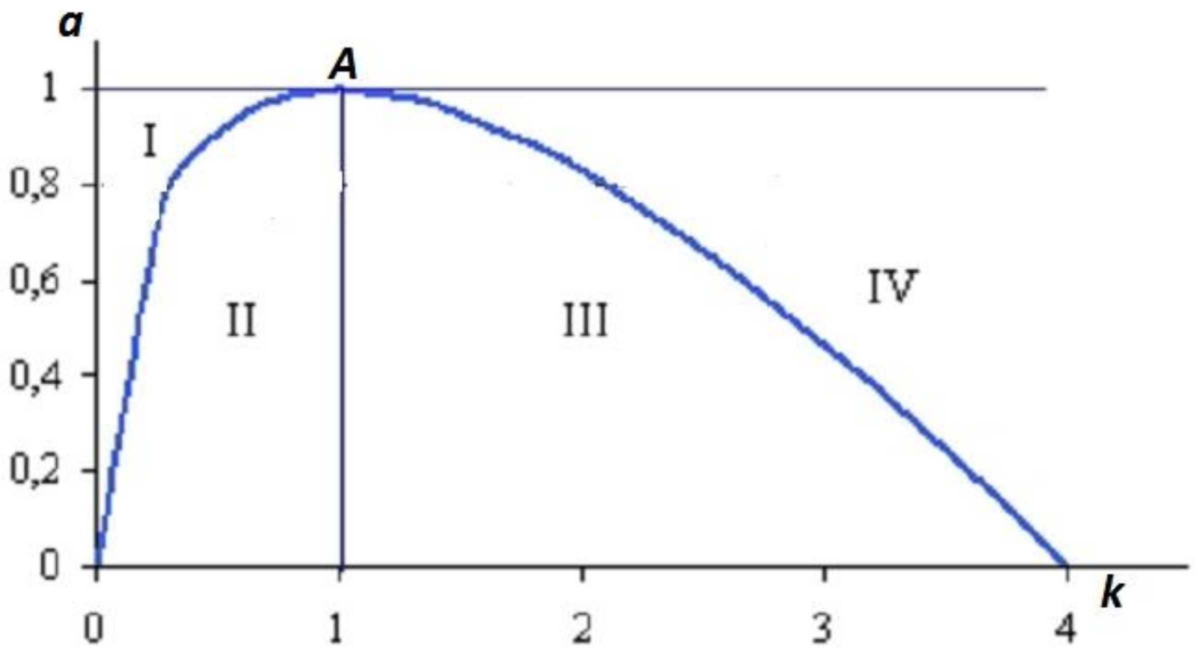


Рис. 8. Различни комбинации на параметрите на модела на Самуелсън–Хикс - a и k

На рис. 8 за координати са избрани параметрите a (свързан с мултипликатора $1/(1-a)$) и акселератора k. Чрез правата $a = 1$ е оградена областта от допустими значения на параметрите – заградена отгоре от тази права, отдолу – от абсцисната ос и отляво – от ординатната ос. Построена е графиката на функцията $a(k) = -k + 2\sqrt{k}$ (равенството, показващо кога дискриминантата се нулира). Тази функция е растяща за $k \in (0,1)$; при $k = 1$ достига максимума си в т. $A(1,1)$, където се допира до правата $a = 1$; след това е намаляваща за $k > 1$, като при $k = 4$ пресича абсцисата ($a(4) = -4 + 2\sqrt{4} = 0$). По този начин областта от допустими значения на параметрите a и k се разделя на четири подобласти –

означени на рис. 8 с I, II, III и IV, в които решението на модела има различно поведение.

- В област I $D > 0$ и $k < 1$. Това съотношение на параметрите обезпечава монотонно изменение на националния доход и постепенното му приближаване към новото стационарно значение.
- В област II $D < 0$ и $k < 1$. При такова съотношение на параметрите ще има колебателно изменение на НД, като колебанията ще стават все по-малки с времето – НД ще се приближава към новото стационарно значение.
- В област III $D < 0$ и $k > 1$. Съчетанията на параметрите, принадлежащи на тази област ще водят до колебателно решения с все по-големи колебания - НД ще се отдалечава от стационарното значение.
- В област IV $D > 0$ и $k > 1$. Решението ще бъде монотонно, но отдалечаващо се от стационарното значение на НД – националният доход ще нараства неограничено.
- При $k = 1$ без значение от стойностите на параметъра a – това е границата на области II и III – ще има колебателно решение, като амплитудите на колебанията ще са равни по между си.

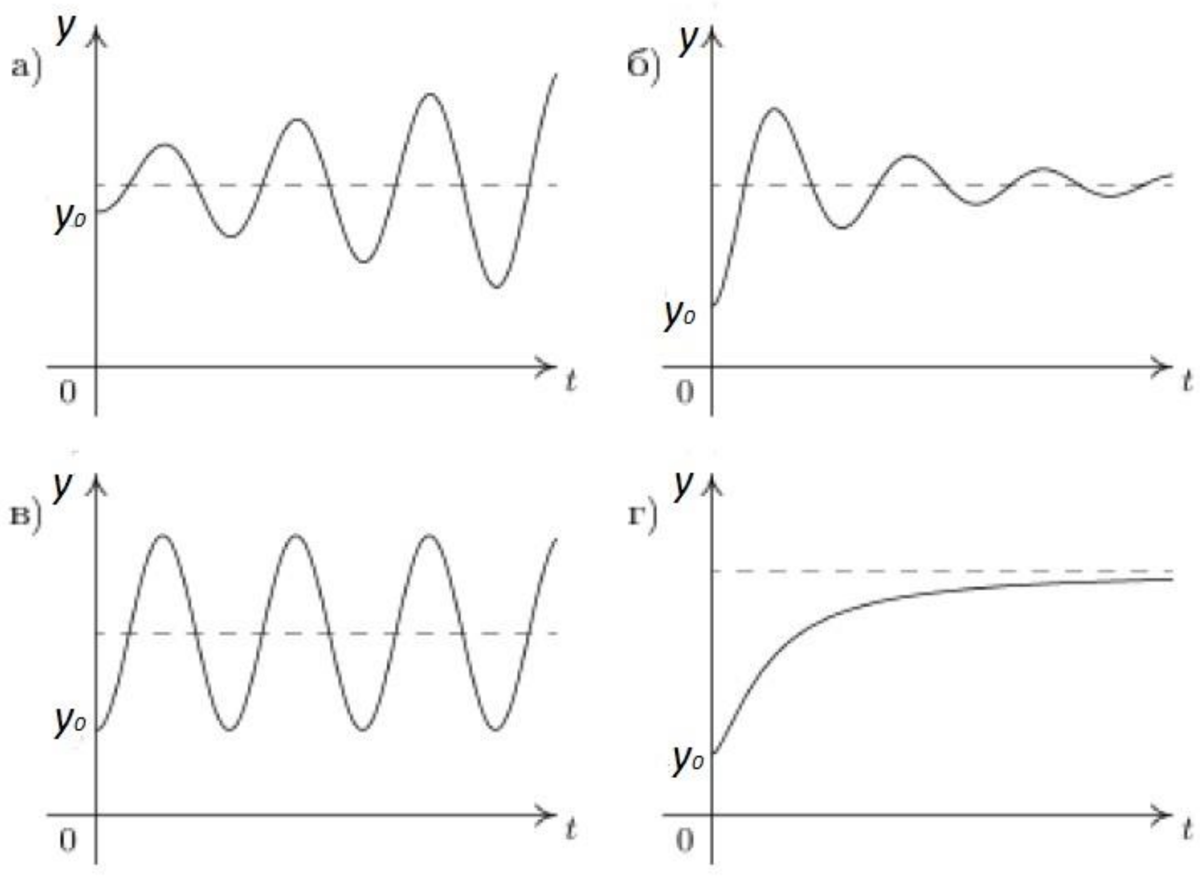


Рис. 9. Някои варианти на решението на модела на Самуелсън–Хикс

На рис. 13 са представени графично някои варианти на поведение във времето на решението на модела на Самуелсън–Хикс при зададени автономни разходи $A_0 = 100$, $A_t = 110$ за $t \geq 1$:

а) $a = 0{,}5,\ k = 1{,}5 > 1$ – тогава $D < 0$ и комбинацията (a, k) се намира в област III – колебателно решение с все по-големи амплитуди – не се стреми към стационарното решение;

б) $a = 0{,}5,\ k = 0{,}8 < 1,\ D < 0$, комбинацията (a, k) се намира в област II - колебателно решение с все по-малки амплитуди – стреми се към стационарното решение при неограничено нарастване на t;

в) $a = 0{,}5,\ k = 1,\ D < 0$, комбинацията (a, k) се намира на границата между областите II и III - колебателно решение с равни амплитуди – не се стреми към стационарното решение;

г) $a = 0{,}8, k = 0{,}25, D > 0$, комбинацията (a, k) се намира в области I - монотонно решение, стремящо се при неограничено нарастване на времето към стационарното решение.

В реалната икономика обикновено акселераторът е по-голям от единица, така че икономически най-достоверно е комбинацията от акселератор и мултипликатор да се намира в областите III или IV.

Пример 36. Дадена е функцията на потребление на домакинствата $C_t = 0{,}8y_{t-1} + 50$ и функцията на търсене от страна на предприемачите на инвестиции $I_t = 250 + k(y_{t-1} - y_{t-2})$. В течение на дълъг период от време до $t = 0$ включително икономиката се намирала в състояние на динамично равновесие. За $t \geq 1$ предприемачите решили, че автономните инвестиции ще бъдат в обем от 350 парични единици. Да се състави динамичната функция на националния доход, ако а) $k = 0{,}25$; б) $k = 0{,}75$; в) $k = 1{,}2$ и г) $k = 2{,}3$.

Решение:

Това означава, че за $t \leq 0$ диференчното уравнение за НД ще бъде

$$y_t = 0{,}8y_{t-1} + 50 + 250 + k(y_{t-1} - y_{t-2}).$$

Стационарното решение $\bar{y}$ на това уравнение се получава от $y_t = y_{t-1} = y_{t-2} = \bar{y}$ или $\bar{y} = 0{,}8\bar{y} + 300 \Longrightarrow \bar{y} = 1500$, като този НД се разпределя така: 1250 за потребление и 250 за инвестиции (всичките – автономни). Така, че можем да приемем $y_0 = 1500$. При $t \geq 1$ автономните инвестиции от 250 стават 350, така че уравнението добива вида

$$\begin{aligned} y_t = 0{,}8y_{t-1} + 50 + 350 + k(y_{t-1} - y_{t-2}) = 0{,}8y_{t-1} + 400 + k(y_{t-1} - y_{t-2}) \\ = (0{,}8 + k)y_{t-1} - ky_{t-2} + 400. \end{aligned}$$

От една страна, от това уравнение получаваме ново стационарно решение $\bar{\bar{y}}$: $\bar{\bar{y}} = 0{,}8\bar{\bar{y}} + 400 \Longrightarrow \bar{\bar{y}} = 2000$, от друга – можем да пресметнем y_1: $y_1 = 0{,}8y_0 + 400 +$

$k(y_0 - y_{-1}) = 0{,}8 \cdot 1500 + 400 = 1600$ (приемаме, че $y_0 = y_{-1} = 1500$). Сега образуваме $z_t = y_t - \bar{\bar{y}} \Longrightarrow y_t = z_t + \bar{\bar{y}}$, за която уравнението става хомогенно:

$$z_t = (0{,}8 + k)z_{t-1} - kz_{t-2}.$$

Характеристичното уравнение на това хомогенно диференчно уравнение е

$$\lambda^2 - (0{,}8 + k)\lambda + k = 0$$

с дискриминанта $D(k) = (0{,}8 + k)^2 - 4k = k^2 - 2{,}4k + 0{,}64$.

а) При $k = 0{,}25$ имаме $D(0{,}25) = 0{,}25^2 - 2{,}4 \cdot 0{,}25 + 0{,}64 = 0{,}1025 \Longrightarrow \sqrt{D} \cong 0{,}32$. Тогава ще имаме два реални корена

$$\lambda_{1,2} = \frac{(0{,}8 + 0{,}25) \pm 0{,}32}{2} \Longrightarrow \lambda_1 = 0{,}365 \text{ и } \lambda_2 = 0{,}685.$$

Тогава решението на хомогенното уравнение за z_t ще бъде

$$z_t = A_1(0{,}365)^t + A_2(0{,}685)^t,$$

а решението на нехомогенното уравнение за $y_t = z_t + \bar{\bar{y}}$:

$$y_t = A_1(0{,}365)^t + A_2(0{,}685)^t + 2000.$$

Константите A_1 и A_2 определяме от началните условия $y_0 = 1500$ и $y_1 = 1600$. Получаваме $A_1 \cong 180$ и $A_2 \cong -680$. Така, динамичната функция на националния доход ще бъде

$$y_t = 180(0{,}365)^t - 680(0{,}685)^t + 2000.$$

Очевидно, в този случай ще имаме монотонно нарастващ НД, стремящ се (при неограничено нарастване на времето) към $\bar{\bar{y}} = 2000$ (област I).

б) При $k = 0{,}75$ имаме $D(0{,}75) = 0{,}75^2 - 2{,}4 \cdot 0{,}75 + 0{,}64 = -0{,}5975 \Longrightarrow \sqrt{-D} \cong 0{,}77$. Тогава за двата комплексно-спрегнати корена ще имаме

$$\lambda_{1,2} = \frac{(0{,}8 + 0{,}75) \pm 0{,}77i}{2} \Longrightarrow \lambda_1 = 0{,}775 - 0{,}3865i \text{ и } \lambda_2 = 0{,}775 + 0{,}3865i.$$

За модула g получаваме $g = \sqrt{(0{,}775)^2 + (0{,}3865)^2} \cong 0{,}866$, а за аргумента ω: $\omega = arctg\frac{0{,}3865}{0{,}775} \cong 0{,}464$, следователно решението на хомогенното уравнение на z_t ще бъде

$$z_t = (0{,}866)^t(A_1 cos 0{,}464t + A_2 sin 0{,}464t),$$

а на нехомогенното за $y_t = z_t + \bar{\bar{y}}$:

$$y_t = (0{,}866)^t(A_1 cos 0{,}464t + A_2 sin 0{,}464t) + 2000.$$

Константите A_1 и A_2 определяме от началните условия $y_0 = 1500$ и $y_1 = 1600$. Получаваме $A_1 = -500$ и $A_2 \cong -26{,}9$. Така, динамичната функция на националния доход ще бъде

$$y_t = 2000 - (0{,}866)^t(500 \cdot cos0{,}464t + 26{,}9 \cdot sin0{,}464t).$$

В този случай ще имаме циклично изменение на НД във времето, като амплитудите ще стават все по-малки и НД ще се стреми към $\bar{\bar{y}} = 2000$ (област II).

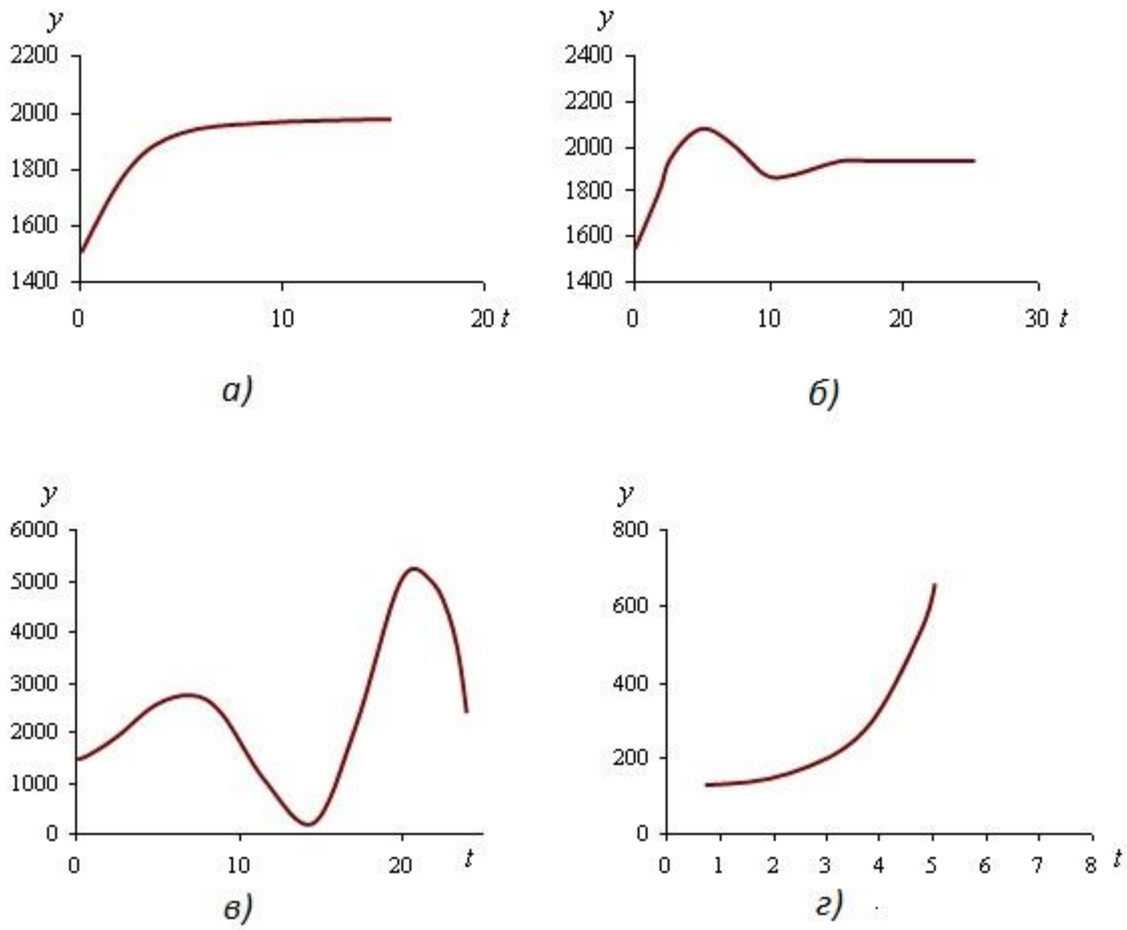


Рис. 10. Графики на динамичните функции на националния доход от пример 20

На рис. 10 са дадени графиките на динамичните функции на националния доход според данните на а), б), в) и г).

Литература

1. А. Христов, Математически основи на макроикономиката, http://fmi-plovdiv.org/manev/Asen/MOMaIk.htm

2. Тарасевич Л., Гребенников П., Леусский А., МАКРОЭКОНОМИКА, Москва, Высшее образование, 2006, ISBN 5-9692-0044-1, http://economicus.ru/site/grebenikov/E_Macro/index.html

3. Мицкевич А. А., Сборник заданий по экономике, изд. Вита Прес, Москва, 1998, ISBM 5-7755-0053-9

4. Задачи по экономике, https://ecson.ru/economics/

5. Йордан В. Йорданов, Лекции по макроикономика, София, 2012

6. М. В. Облаухова, Математические модели макроэкономике, Новосибирск, 2012

7. В. А. Колемаев, Математическая экономика, Юнити, Москва, 2002, ISBM 5-238-00464-8

8. О. О. Замков, А. В. Толстопятекко, Ю. Н. Черемных, Математические методы в экономике, Москва, „Дело и Сервис“, 1999, ISBM 5-86509-054-2

9. А. М. Попов, В. Н. Сотников, Экономико-математические методы и модели, Москва, Юрайт, 2011, ISBN 978-5-9916-1378-1

10. Б. И. Герасимов, Н. П. Пучков, Д. Н. Протасов, Дифференциальные динамические модели, изд. ГОУ ВПО ТГТУ, Тамбов, 2010, ISBN 978-5-8265-0947-0

11. О. А. Кузнецова, Экономико-математическое моделирование, Самара, 2013

12. А. М. Ахтямов, Математические модели экономических процесов, Уфа, РИЦ БашГу, 2009

13. J. Garın, Robert Lester, Eric Sims, Intermediate Macroeconomics, This Version: 3.0.0, 2018

14. Matthias Doepke, Andreas Lehnert, Andrew W. Sellgren, MACROECONOMICS, University of Chicago, 1999