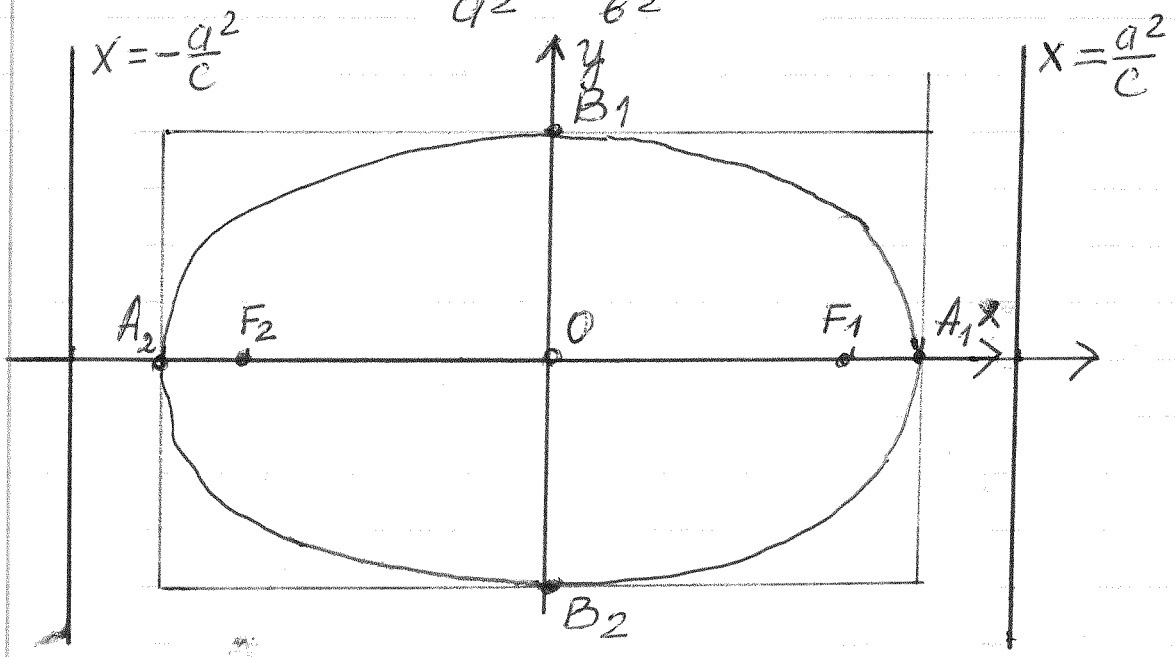
Тема 6. Елипса, хипербола, парабола

Теория

1. Елипса. Нека F_1 и F_2 са две фиксирани точки (фокуси на елипсата), а M – произволна точка на елипсата. Тогава е изпълнено $MF_1 + MF_2 = 2a = const$. От това условие може да се изведе каноничното уравнение на елипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Свойства на елипсата: 1) централно-симетрична крива (т. O е ц-р на симетрия); 2) „сплескана" окръжност (при $a \neq b$ – елипса в собствения смисъл на думата, при $a = b = r$ – окр. с радиус r); 3) затворена крива (може да я начертаем, без прекъсване).

Геометрични величини:

– a, b – полуоси; точките $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$, $B_1(0, b)$ и $B_2(0, -b)$ – върхове

– $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ (приема се, че $a > b$); точките $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$ – фокуси

– $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$ – ексцентрицитет

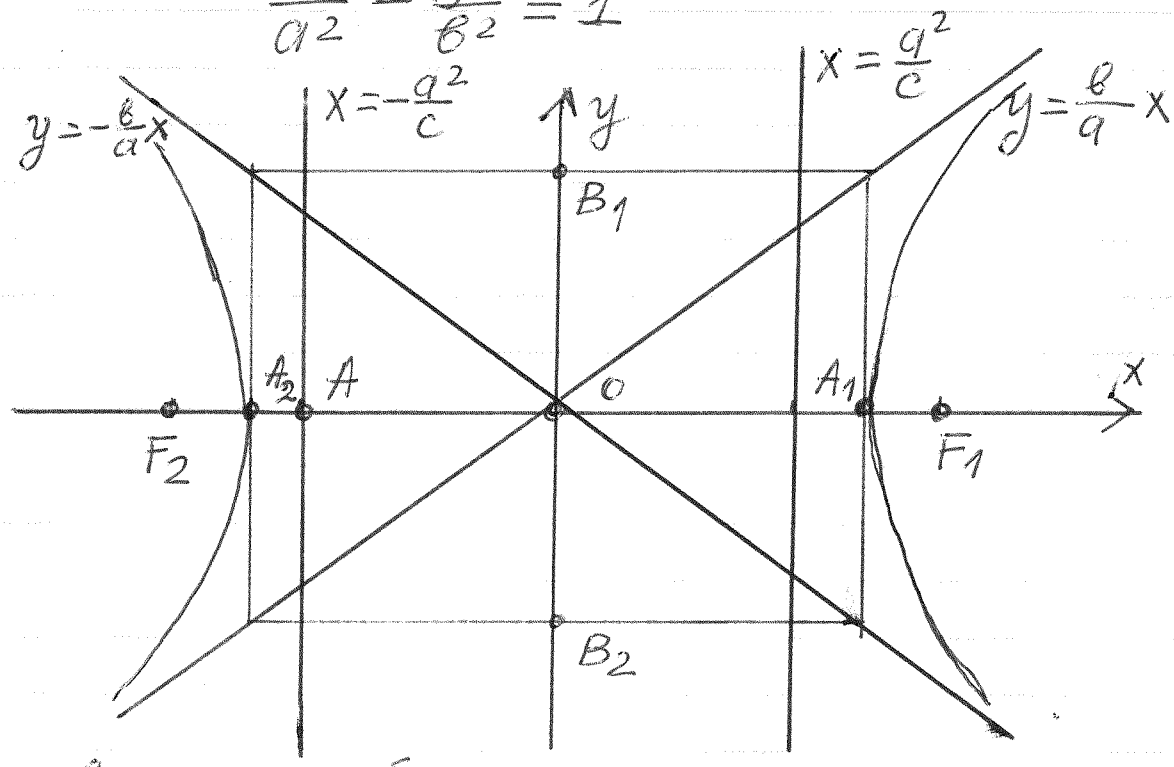
– правите $x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{a^2}{c}$ – директриси

– $p = \frac{b^2}{c}$ – фокален параметър (разстоянието от

фокус до близката до него директриса.

2. Хипербола. F_1 и F_2 са фиксирани точки (фокуси), а M – пр. т. от хиперболата. Тогава е в сила $|MF_1 - MF_2| = 2a = const$. От условието може да се изведе каноничното у-е на хипербола:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Свойства на хиперболата: 1) централно-симетрична крива (т. O – център на симетрия; 2) отворена крива, състояща се от два клона.

Геометрични величини:

– a, b – полуоси; точките $A_1(a,0)$ и $A_2(-a,0)$ – реални върхове на хиперболата, $B_1(0,b)$ и $B_2(0,-b)$ – имагинерни върхове.

– $c = \sqrt{a^2+b^2}$, точките $F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$ – фокуси

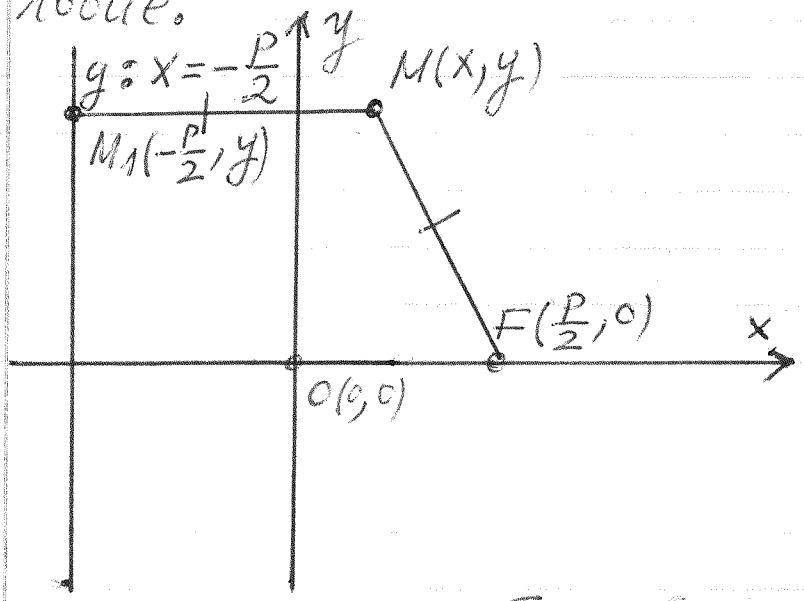
– $e = \frac{c}{a} > 1$ – ексцентрицитет

– правите $x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{a^2}{c}$ – директриси на хиперболата

– правите $y = \pm\frac{b}{a}x$ – асимптоти

– $p = \frac{b^2}{c}$ – разстоянието от фокус до по-близката до него директриса – фокален параметър.

3. Парабола. Нека F е фиксирана точка (фокус), а g – фиксирана права, несъдържаща F (директриса). Тогава параболата е геометричното множество от точки, равноотдалечени от фокуса и директрисата, т.е. $MF = \delta(M; g)$. Да изведем уравнението на параболата от това условие.



Нека $F(\frac{p}{2}, 0)$ е фокуса, а $g: x = -\frac{p}{2}$ – директрисата. Тогава ако $M(x,y)$ е пр. т. от параболата, то $\delta(M; g) = MM_1$, където $M_1(-\frac{p}{2}, y)$ е ортогоналната проекция на M върху g, следователно

$$\delta(M; g) = MM_1 = x + \frac{p}{2}.$$

От друга страна $MF = \sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + (y-0)^2}$. Приравнявайки двете страни получаваме

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2}$$

и след вдигане на квадрат – $(x+\frac{p}{2})^2 = (x-\frac{p}{2})^2 + y^2 \Rightarrow$ $\underline{x^2} + px + \underline{\underline{\frac{p^2}{4}}} = \underline{x^2} - px + \underline{\underline{\frac{p^2}{4}}} + y^2$. След взаимно унищожаване на подобните събираеми, получаваме

$$2px = y^2 -$$

канонично у-е на парабола.

Свойства на параболата: 1) осово-симетрична крива (оста Ox е ос на симетрия), разположена в полуравнината $x > 0$; 2) отворена крива с един клон.

Геометрични величини: p – фокален параметър; $F(\frac{p}{2}, 0)$ – фокус; $g: x = -\frac{p}{2}$ – директриса; $O(0,0)$ – връх на параболата.

4. Общо определение на елипса, хипербола и парабола. Нека g е права, а F – точка на разстояние p от g. Геометричното множество от точки, за които е изпълнено

$$\frac{MF}{\delta(M;g)} = \varepsilon$$

е елипса за $\varepsilon < 1$, парабола за $\varepsilon = 1$ и хипербола (само единият ѝ клон) за $\varepsilon > 1$. Така тези криви се определят само с два параметъра: ексцентрицитета ε и фокалния параметър p.

5. Параметрично представяне на елипса и хипербола:

$$\text{Елипса } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow x = a\cos u;\ y = a\sin u$$

$$\text{Хипербола } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow x = a\,\mathrm{ch}\,u;\ y = a\,\mathrm{sh}\,u$$

Решени задачи

Задача 1. Да се състави каноничното уравнение на елипса, уравненията на директрисите ѝ и да се пресметнат ексцентрицитета и фокалния параметър, ако е известно, че голямата ѝ ос е $2a$, а разстоянието между фокусите ѝ – $\frac{6}{5}a$.

Решение: Разстоянието между фокусите на елипсата е $2c \Rightarrow c = \frac{3}{5}a$. От $c^2 = a^2 - b^2$ получаваме $b = \frac{4}{5}a$, тогава каноничното у-е на елипсата е

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{4a}{5}\right)^2} = 1.$$

За ексцентрицитета получаваме $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3a}{5a} = \frac{3}{5}$, а за фокалния параметър – $p = \frac{b^2}{c} = \frac{16a^2}{25} \cdot \frac{5}{3a} = \frac{16}{15}a$.

Директриси: $x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{5a}{3}$.

Задача 2. Да се намерят пресечните точки на директрисите и асимптотите на хиперболата

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Имаме $a = 4$, $b = 3 \Rightarrow c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{16+9} = 5$. Тогава $x = \pm\frac{a^2}{c} = \pm\frac{16}{5}$ са у-ята на директрисите, а $y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{3}{4}x$ – на асимптотите. Пресечните точки на директрисите и асимптотите са 4, симетрични по между си относно центъра и осите (началото на координатната с-ма и координатните оси). Затова ще намерим една от тях: $y = \frac{3}{4}x$ и $x = \frac{16}{5} \Rightarrow y = \frac{3}{4}\cdot\frac{16}{5} = \frac{12}{5}$ и точката е с координати $(\frac{16}{5}, \frac{12}{5})$. Другите точки са $(\frac{16}{5}, -\frac{12}{5})$, $(-\frac{16}{5}, \frac{12}{5})$ и $(-\frac{16}{5}, -\frac{12}{5})$.

<u>Задача 3.</u> Да се състави каноничното уравнение на хипербола, имаща общи фокуси с елипсата

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1,$$

ако ексцентрицитета ѝ е $\varepsilon = \frac{5}{4}$.

Решение: Параметрите на дадената елипса означаваме с долен индекс 1 (a_1, b_1, c_1), а тези на търсената хипербола – с 2 (a_2, b_2, c_2). Имаме $c_1 = \sqrt{a_1^2 - b_1^2} = \sqrt{49-24} = 5$. От това, че фокусите на елипсата и хиперболата съвпадат, следва че $c_1 = c_2 = 5$. Но $\varepsilon = \frac{c_2}{a_2} = \frac{5}{4} \Rightarrow a_2 = 4$. Тогава от $c_2^2 = a_2^2 + b_2^2$ (за хипербола) получаваме $b_2 = 3$. Каноничното у-е на хиперболата е

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

<u>Задача 4.</u> Дадена е елипсата $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$. Да се съставят каноничните уравнения на парабола и хипербола, които имат имат същите фокални параметри като елипсата, ако ексцентрицитета на хиперболата е реципрочната стойност на ексцентрицитета на елипсата.

Решение: За елипсата имаме $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{8-4}=2$, $p=\frac{b^2}{c}=\frac{4}{2}=2$ и $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Тогава уравнението на параболата със същия фокален параметър ще бъде $x^2=2py=2.2y=4y$.
Означаваме съответните параметри на хиперболата с долен индекс 1 ($a_1, b_1, c_1, \varepsilon_1$ и p_1).
Тъй като $p_1=p=2 \Rightarrow \frac{b_1^2}{c_1}=p_1=2 \Rightarrow b_1^2=2c_1$.
За ексцентрицитета на хиперболата ще имаме $\varepsilon_1=\frac{1}{\varepsilon}=\sqrt{2}$. Тогава $\varepsilon_1=\frac{c_1}{a_1}=\sqrt{2} \Rightarrow a_1=\frac{c_1}{\sqrt{2}}$ и $a_1^2=\frac{c_1^2}{2}$.

Заместваме a_1^2 и b_1^2 в $c_1^2=a_1^2+b_1^2$ и получаваме

$$c_1^2=\frac{c_1^2}{2}+2c_1 \Rightarrow \frac{c_1^2}{2}=2c_1 \Rightarrow c_1=4$$

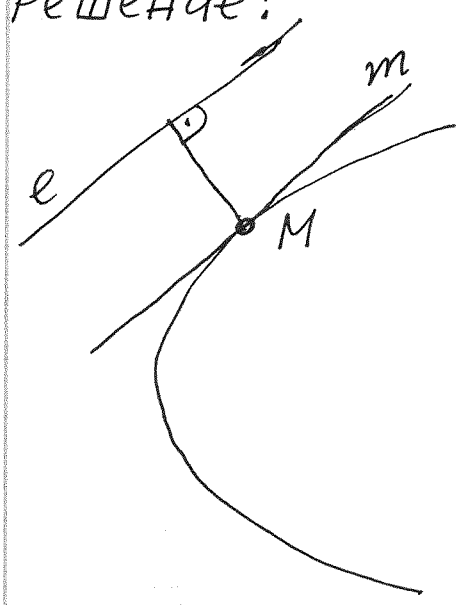
$$a_1=\frac{c_1}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2};\ b_1^2=2c_1=8 \Rightarrow b_1=2\sqrt{2}$$

Така получихме равнораменната ($a=b$) хипербола

$$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1.$$

<u>Задача 5.</u> Да се намери разстоянието между параболата $y^2=64x$ и правата $4x+3y+46=0$.

Решение:



Разстоянието от параболата до правата е разстоянието от тази точка M на параболата, която е най-близко разположена до правата. Тази точка M се намира така: намираме права m, успоредна на дадената права e и допирателна към параболата – M е точката на допиране. Пр. m ще има общо у-е $4x+3y+C$ с някакъв (все още) неопределен параметър C.

Този параметър c ще намерим от условието за допиране: параболата и пр. т се допират точно тогава, когато системата

$$\begin{cases} y^2 = 64x \\ 4x+3y+c=0 \end{cases}$$

притежава единствено решение. Тъй като (от у-ето на правата) $4x=-3y+c$, то като заместим в у-ето на параболата получаваме

$$y^2=16.4x=16(-3y-c)=-48y-16c.$$

Всичко се свежда до това у-ето от втора степен за у $y^2+48y+16c=0$ да притежава единствено решение. Това е еквивалентно на нулиране на дискриминантата: $D=(-24)^2-16c=0 \Leftrightarrow c=\frac{24^2}{16}=36$. Тогава квадратното у-е $y^2+48y+16.36=(y+24)^2=0$ притежава единственото решение $y=-24$ и $x=\frac{1}{4}(-3y-c)=\frac{1}{4}(-3(-24)-36)=$ $=9$. Получихме координатите на т $M(9,-24)$. Сега намираме разстоянието $\delta(M;\ell)$ използвайки нормалното у-е на ℓ:

$$\delta(M;\ell)=\frac{|4.9+3(-24)+46|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{10}{5}=2.$$

<u>Задача 6.</u> Да се параметризират кривите

$$C_1: 9x^2+4y^2+36x-8y+4=0,$$
$$C_2: 4x^2-25y^2-16x+50y-109=0.$$

Решение: Допълваме изразите за x и y до точни квадрати. За кривата C_1 ще имаме

$9(x^2+4x)+4(y^2-2y)+4=9(x^2+4x+4-4)+$ $4(y^2-2y+1-1)=9(x+2)^2-36+4(y-1)^2-4+4=$ $=9(x+2)^2+4(y-1)^2-36=0 \Rightarrow 9(x+2)^2+4(y-1)^2=36$ $\Rightarrow \frac{9(x+2)^2}{36}+\frac{4(y-1)^2}{36}=1 \Rightarrow \frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}=1.$

Ако $x+2=2\cos u$ и $y-1=3\sin u$, то получава-

ме тъждеството $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$, следователно параметризацията на c_1 е

$$c_1: x = -2 + 2\cos u;\ y = 1 + 3\sin u.$$

За c_2: $4x^2 - 25y^2 - 16x + 50y - 109 = 4(x^2 - 4x) - 25(y^2 - 2y) - 109 = 4(x^2 - 4x + 4 - 4) - 25(y^2 - 2y + 1 - 1) - 109 = 4(x-2)^2 - 16 - 25(y-1)^2 + 25 - 109 = 4(x-2)^2 - 25(y-1)^2 - 100 = 0 \Rightarrow 4(x-2)^2 - 25(y-1)^2 = 100$

$$\Rightarrow \frac{4(x-2)^2}{100} - \frac{25(y-1)^2}{100} = 1 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{25} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1.$$

При $x - 2 = 5\,\mathrm{ch}\,u$ и $y - 1 = 2\,\mathrm{sh}\,u$ получаваме тъждеството $\mathrm{ch}^2 u - \mathrm{sh}^2 u = 1$, следователно параметризацията на c_2 е

$$c_2: x = 2 + 5\,\mathrm{ch}\,u;\ y = 1 + 2\,\mathrm{sh}\,u.$$

<u>Задача 7.</u> Да се състави уравнението на множеството от точки в равнината, равноотдалечени от окръжността $K_1: x^2 + y^2 + 6x = 0$ и

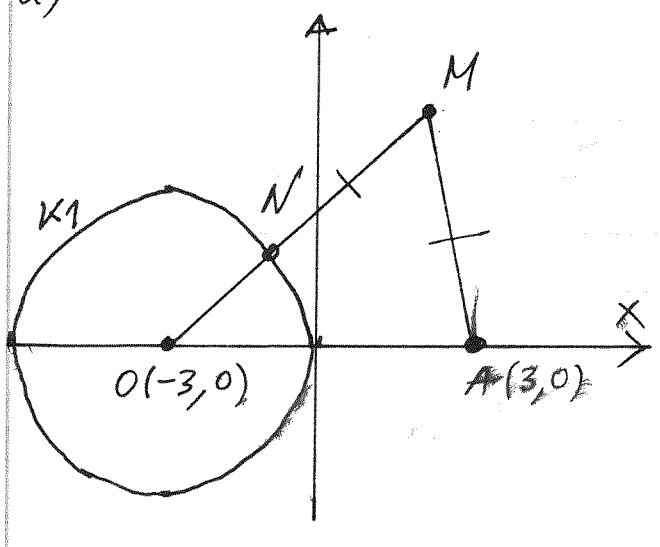
а) точката $A(3,0)$

б) окръжността $K_2: x^2 + y^2 = 8x + 7$.

Ако това са фокални криви, да се намери ексцентрицитета ε и фокалния параметър p.

Решение:

а)



Нека M е произволна т. от това множество. Съединяваме т. M с ц-ра на $K_1: (x-3)^2 + y^2 = 3^2$ и нека $N = K_1 \cap MO$, тогава разстоянието от M до K_1 е $MN = MO - r = MO - 3$. Тъй като $MN = MA \Rightarrow$ $MO - MA = MN + r - MA = r = 3 \Rightarrow$ множеството от точки е хипербола (десния й клон) с фокуси O и A. Тогава $c = 3$, а от $MO - MA = 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$. От $b = \sqrt{c^2 - a^2} \Rightarrow b = \sqrt{9 - \frac{9}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ $\left(b^2 = \frac{27}{4}\right)$.

Тогава каноничното уравнение на хиперболата е

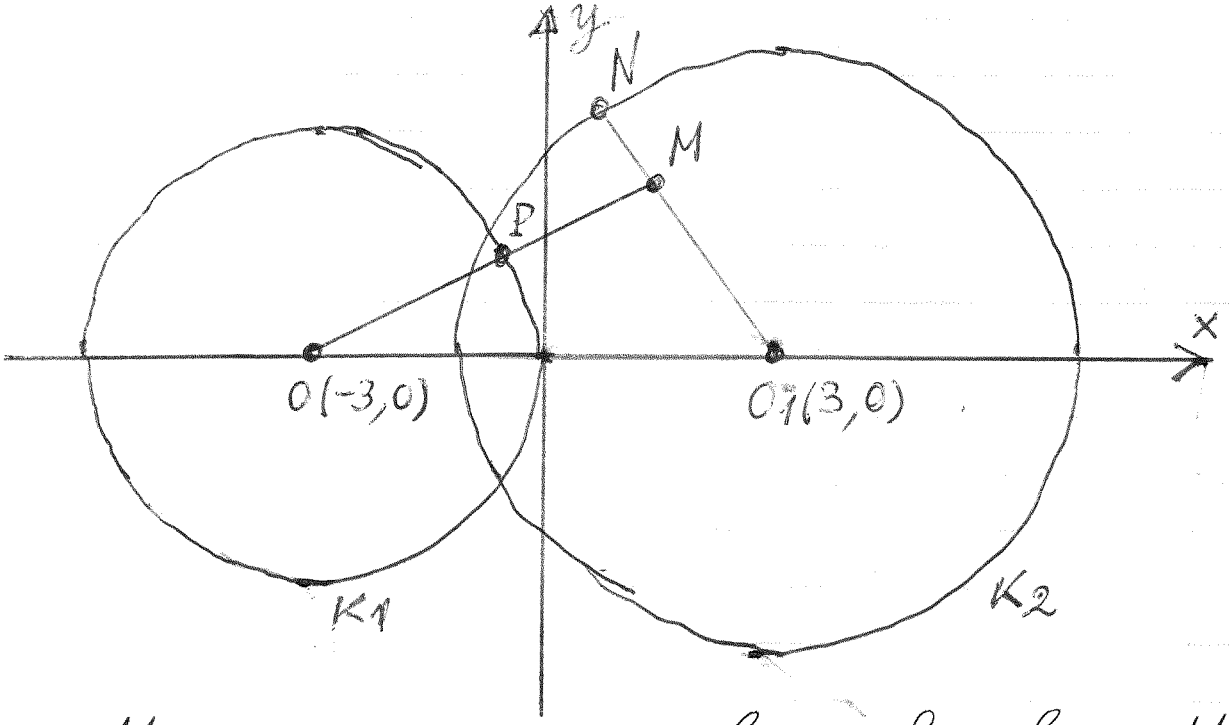
$$\frac{x^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1.$$

Тя има ексцентритицитет $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{3.2}{3}=2$ и фокален параметър $p=\frac{b^2}{c}=\frac{27}{4.3}=\frac{27}{12}=\frac{9}{4}$.

б) За окръжността k_2 ще имаме

$$x^2-6x+y^2-7=(x^2-6x+9-9)+y^2-7=$$
$$=(x-3)^2-9+y^2-7=(x-3)^2+y^2-16=0, \text{ т.е.}$$
$$(x-3)^2+y^2=4^2,$$

следователно центъра ѝ е $O_1(3,0)$ и радиус $r_1=4$.



Нека M е пр. т. от множеството; свързваме M с O_1 и нека $N=O_1M\cap K_2$; свързваме M с O и нека $P=OM\cap K_1$. Трябва да е изпълнено условието $MN=MP$. Но $MN=O_1N-O_1M=r_1-O_1M=4-O_1M$; $MP=OM-OP=OM-r=OM-3$. Тогава $MN=MP \iff 4-O_1M=OM-3 \iff OM+O_1M=7 \Rightarrow$ множеството от точки е елипса с фокуси O и O_1. Тъй като при елипсата имаме $O_1M+OM=2a \Rightarrow a=\frac{7}{2}$. Параметърът c е половината от разстоянието м/у фокусите $\Rightarrow c=3$. Тогава ще имаме $b=\sqrt{a^2-c^2}=$ $=\sqrt{\frac{49}{4}-9}=\frac{\sqrt{13}}{2}$. Получаваме елипсата с канонично у-е

$$\frac{x^2}{\left(\frac{7}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2}=1 \text{ с } \varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{6}{7} \text{ и } p=\frac{b^2}{c}=\frac{13}{12}.$$

Тема 7. Хомогенни координати и безкрайни елементи

Теория

Тези координати на точки, които разглеждахме в предишните теми, сега ще наричаме нехомогенни координати и ще бележим с (X, Y). Въвеждаме хомогенни координати в евклидовата равнина по следния начин: за $\forall$ т. $M(X, Y)$ съпоставяме тройката (x, y, t), така че да са изпълнени равенствата:

$$X = \frac{x}{t}; \quad Y = \frac{y}{t}$$

Нехомогенните координити са еднозначно определени, докато хомогенните се определят с точност до ненулев множител, т.е. (x, y, t) и $(\lambda x, \lambda y, \lambda t)$ определят една и съща точка при $\lambda \neq 0$. Към обикновенните (крайни) точки присъединяваме точки, за които $t = 0$, т.е. $U(x, y, 0)$. Тези точки ще наричаме безкрайни. Ако (x, y) са координатите на направляващ вектор на дадено направление (асоцииращо се с всички прави, за които векторът е колинеарен), то $U_\infty(x, y, 0)$ е безкрайната точка, съответна на това направление. Под разширена евклидова равнина ще разбираме обикновената равнина, допълнена с безкрайните точки. Всичко казано по горе важи и за тримерното евклидово пространство.

Уравнения на права в хомогенни координати

– точково параметрично у-е:

$$\ell : M = \alpha M_1 + \beta M_2,$$

където $M(x, y, t)$ е пр.т. от ℓ (текуща), а M_1 и M_2 – фиксирани точки от ℓ

– скаларно параметрично у-е

Ако $M_1(x_1, y_1, t_1)$ и $M_2(x_2, y_2, t_2)$, ще имаме

$$\ell: \begin{cases} x = \alpha x_1 + \beta x_2 \\ y = \alpha y_1 + \beta y_2 \\ z = \alpha t_1 + \beta t_2 \end{cases}$$

– общо у-е на права в равнината

$$\ell: Ax + By + Ct = 0$$

<u>Уравнение на равнина в хомогенни координати</u>

– точково параметрично у-е:

$$\alpha: \ M = \alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3$$

– скаларно параметрично у-е: Ако $M(x, y, z, t)$ е текуща т. от α, а $M_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3, t_3)$ – фиксирани точки, ще имаме

$$\alpha: \begin{cases} x = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 \\ y = \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 \\ z = \alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 \\ t = \alpha t_1 + \beta t_2 + \gamma t_3 \end{cases}$$

– общо у-е на равнина в пространството:

$$\alpha: Ax + By + Cz + Dt = 0.$$

<u>Двойно отношение на 4 точки</u> P_i $(i = \overline{1,4})$ върху права се означава с $(P_1 P_2 P_3 P_4)$ и се определя от частното на простите отношения:

$$(P_1 P_2 P_3 P_4) = \frac{(P_1 P_2 P_3)}{(P_1 P_2 P_4)}$$

Ако $P_i(x_i)$ $(i = \overline{1,4})$, координатният запис на горното равенство е

$$(P_1 P_2 P_3 P_4) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} \cdot \frac{x_4 - x_2}{x_4 - x_1}$$

Ако $(P_1 P_2 P_3 P_4) = -1$, четирите колинеарни точки образуват хармонична група. Казва се, че първата група точки $P_1 P_2$ е хармонично спрегната на втората група $P_3 P_4$ и обратно.

Двойното отношение $(ABC U_\infty)$ съвпада с простото отношение (ABC).

Точката C е среда на отсечката AB точно тогава, когато $(ABC U_\infty) = -1$.

Задачи

Задача 1. В разширеното тримерно пространство са дадени точките:

(а) $A(3,-2,4,6)$; $B(3,2,0,3)$;

(б) $A(4,2,-3,1)$, $B(0,4,21,0)$;

(в) $A(3,-2,4,0)$, $B(3,4,7,0)$.

Определете дали правата AB е крайна или безкрайна и определете безкрайните ѝ точки.

Решение: (а) И двете точки A и B са крайни. Произволна т. $M(x,y,z,t)\in AB$ се задава е $M=\alpha A+\beta B$ или

$$(x,y,z,t)=\alpha(3,-2,4,6)+\beta(3,2,0,3)=$$
$$=(3\alpha+3\beta,-2\alpha+2\beta,4\alpha,6\alpha+3\beta)$$

Една точка е безкрайна, ако $t=0 \Leftrightarrow 6\alpha+3\beta=0$, $\beta=-2\alpha$. Като заместим в израза за (x,y,z,t) получаваме $(x,y,z,t)=(3\alpha-6\alpha,-2\alpha-4\alpha,4\alpha,0)=$ $=(-3\alpha,-6\alpha,4\alpha,0)$. Разделяме четирите координати на точката с (-3α) и получаваме

$$U_{AB}(3,6,-4,0).$$

(б) Правата е крайна, защото съдържа поне ед на крайна т. — A. От друга страна, т. $B=U_{AB}$.

(в) Правата е безкрайна, защото A и B са безкрайни. Всичките ѝ безкрайни т-ки се получават от $U_\infty=\alpha A+\beta B$ или покоординатно

$$(x,y,z,t)=\alpha(3,-2,4,0)+\beta(3,4,7,0)=$$
$$=(3(\alpha+\beta),-2\alpha+4\beta,4\alpha+7\beta,0).$$

Задача 2. Намерете общите безкрайни точки на равнините:

(а) $\alpha: x+y-3=0$, $\beta: 2x+3y+z-4=0$;

(б) $\alpha: x+2y-3z+4=0$, $\beta: 2x+4y-6z+7=0$.

Решение: (а) Уравненията на равнините в хомогенни координати са: $\alpha: x+y-3t=0$ и $\beta: 2x+3y+z-4t=0$. Безкрайните точки едновременно удовлетворяват $t=0$, така че техните първи три координат ще са решенията на системата

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+3y+z=0 \end{cases}$$

От първото у-е имаме $y=-x$, заместваме във второто: $2x+3(-x)+z=0 \Rightarrow z=x$. Тогава за координатите на единствената безкрайна т., обща за двете равнини ще имаме $U_\infty(x,-x,x,0)$ или ако разделим на x: $U_\infty(1,-1,1,0)$.

(б) Равнините са успоредни ($\vec{N}_\beta(2,4,-6)=2\vec{N}_\alpha(1,2,-3)$), следователно общите им точки ще покриват една безкрайна права. Тя се задава със системата

$$x+2y+3z=0,\ t=0$$

Нека $x=\alpha$, $y=\beta \Rightarrow z=\frac{1}{3}(-\alpha-2\beta)$. Тогава ще имаме $M(x,y,z,t)=(\alpha,\beta,-\frac{1}{3}\alpha-\frac{2}{3}\beta,0)=$
$=\alpha(1,0,-\frac{1}{3},0)+\beta(0,1,-\frac{2}{3},0)$.

<u>Задача 3.</u> Върху една права са дадени точките $A(1)$, $B(2)$, $C(3)$, $D(4)$. Намерете:

(а) $(ABCD)$;

(б) т. F, такава че A,B,C,F да образуват хармонична група.

Решение: (а) Прилагаме формулата за пресмятане на двойно отношение и получаваме

$$(ABCD)=\frac{3-1}{3-2}\cdot\frac{4-2}{4-1}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

(б) нека $F(x)$. Тогава въз основата на същата формула ще имаме

$$(ABCF)=\frac{3-1}{3-2}\cdot\frac{x-2}{x-1}=-1 \Rightarrow$$

$2x-4=-x+1 \Rightarrow 3x=5$ и $x=\frac{5}{3}$, $F(\frac{5}{3})$ е тази точка.

<u>Тема 8. Проективни свойства на криви от втора степен</u>

<u>Теория</u>

Крива от втора степен има у-е от вида

$$c: a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

или в хомогенни координати:

$$c: a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2a_{13}xt+2a_{23}yt+a_{33}t^2=0$$

Разглеждаме изразите

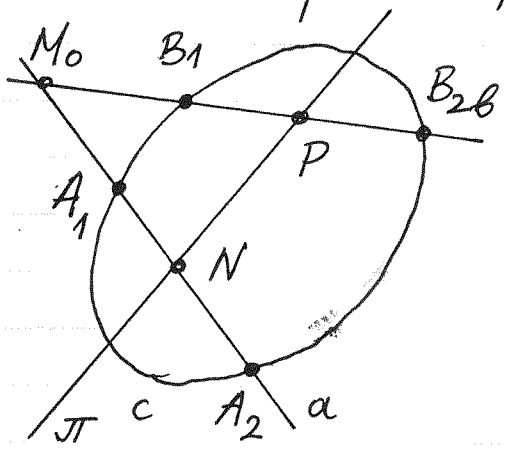
$$F_1(x,y,t)=\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,t)=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}t$$

$$F_2(x,y,t)=\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,t)=a_{12}x+a_{22}y+a_{23}t$$

$$F_3(x,y,t)=\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial t}(x,y,t)=a_{13}x+a_{23}y+a_{33}t,$$

които се наричат полупроизводни на $F(x,y,t)=$ $=a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2a_{13}xt+2a_{23}yt+a_{33}t^2$. С $F_i(M_0)$ $(i=1,2,3)$ означаваме стойностите на $F_i(x,y,t)$ за т. $M_0(x_0,y_0,t_0)$ (т.е. при $x=x_0, y=y_0, t=t_0$).

<u>Поляра</u> на дадена точка относно крива от втора степен е геометричното място на точки, хармонично спрегнати на дадената точка относно точките на пресичане на кривата със секателните прави през дадената точка. На чертежа са прекарани две секателни през т. M_0 – а и в.



Пр. а пресича кривата с в точки A_1 и A_2, а пр. в – в точки B_1 и B_2. Точките $N\in a$ и $P\in в$ са избрани така, че $(A_1A_2M_0N)=-1$ и $(B_1B_2M_0P)=-1$, тогава пр. $\pi=NP$ е полярата на т. M_0 отн. с. Уравнението на полярата на т. M_0 отн с се определя от

$$\pi: F_1(M_0)x+F_2(M_0)y+F_3(M_0)t=0.$$

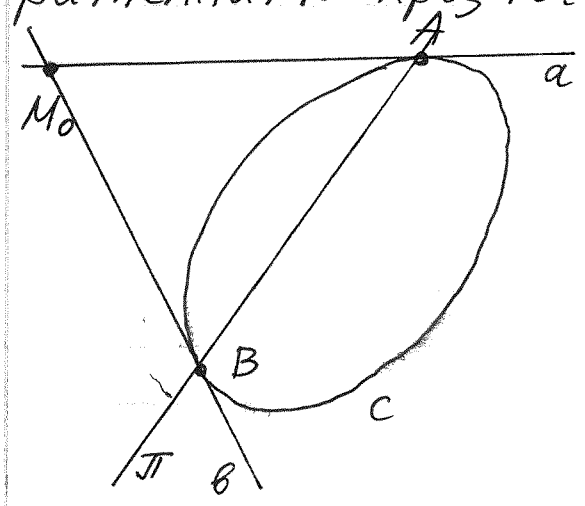
Точката M_0 се нарича полюс на π. Така се формира полярно съответствие, което е взаимнооднозначно: на всяка точка от разширената евклидова равнина съответства единствена права – поляра на точката, отн. с, като точката е полюс на тази права.

Важни свойства:

1. Ако една точка лежи на кривата, то нейната поляра е допирателната към кривата в тази точка.

2. Ако една точка лежи на полярата на друга точка, то втората точка лежи на полярата на първата. Двете точки се наричат спрегнати.

3. Полярата на външна точка относно криваот втора степен съдържа допирните точки на допирателните през точката към кривата.



Основна задача: дадена е кр. с и т. M_0, външна за с. Трябва да намерим допирателните през M_0 към с.

1) Намираме полярата π на т. M_0 относно с;

2) Намираме пресечните точки A и B на π с с;

3) Въпросните допирателни са $a = M_0A$ и $в = M_0B$.

Решени задачи.

1. Намерете полярата на т. $M(0,-1)$ относно кривата от 2 степен с: $8x^2-y^2+10xy-8x-2y+4=0$.

Решение: Привеждаме с спрямо хомогенни координати – $c: 8x^2-y^2+10xy-8xt-2yt+4t^2=0$.

Пресмятаме полупроизводните F_1, F_2 и F_3:

$$F_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,t) = 8x+5y-4t$$

$$F_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,t) = 5x-y-t$$

$$F_3 = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial t}(x,y,t) = -4x-y+4t$$

Тъй като $M(0,-1,1)$ в хомогенни координати, ще имаме $F_1(M)=8.0+5(-1)-4.1=-9$; $F_2(M)=5.0-(-1)-1=0$; $F_3(M)=-4.0-(-1)+4.1=5$. Тогава у-ето на полярата π в хомогенни координати ще бъде $\pi: -9x+0y+5t=0$ или $9x-5t=0$, а в нехомог. $-9x-5=0$.

Забележка. Условията на задачите са в нехомогенни координати. За да решим задачите, привеждаме в хомогенни, но отговорът трябва да е отново в нехомогенни координати.

<u>Задача 2.</u> Намерете допирателните прави към кривата $c: y^2-2x=0$ в общите ѝ точки с правата $\ell: y-2=0$.

Решение. Привеждаме в хомогенни координати $c: y^2-2xt=0$ и $\ell: y-2t=0$.

Намираме общите точки: от $y-2t=0 \Rightarrow y=2t$, заместваме в $y^2-2xt=0 \Rightarrow 4t^2-2xt=2t(2t-x)=0$. Получаваме две възможности: $t=0$ или $x=2t$. В първия случай имаме безкрайната точка $U_\infty(1,0,0)$, а във втория – крайна т. с координати $(2t,2t,t)\sim(2,2,1)$ (с нехомогенни координати $(2,2)$).

Поради св-во 1., трябва да намерим полярите на тези точки – те ще са съответните допирателни. Нека $M(2,2,1)$. Ще имаме

$$F_1(x,y,t)=-t \quad F_1(1,0,0)=0 \quad F_1(2,2,1)=-1$$
$$F_2(x,y,t)=y \quad F_2(1,0,0)=0 \quad F_2(2,2,1)=2$$
$$F_3(x,y,t)=-x \quad F_3(1,0,0)=-1 \quad F_3(2,2,1)=-2$$

Тогава допирателните са: 1) $\omega: t=0$ (безкрайната права на разширената евклидова равнина); 2) $-x+2y-2t=0$ или $x-2y+2t=0$. В нехомогенни координати: $x-2y+2=0$.

<u>Задача 3.</u> Намерете точка Q, спрегната на точката $P(1,-1)$, относно кривата $c: x^2-3y^2+2xy-6x+1=0$, ако Q лежи на правата $\ell: x+2y-1=0$.

Решение: Трябва първо да намерим правата $p=\pi(P)$, поради св-во 2. $Q\in p \Rightarrow Q=p\cap\ell$.

Привеждаме в хомогенни координати: $P(1,-1,1)$ и $c: x^2-3y^2+2xy-6xt+t^2=0$. Ще имаме

$F_1(x,y,t) = x + y - 3t \quad F_1(1,-1,1) = -3$
$F_2(x,y,t) = x - 3y \quad F_2(1,-1,1) = 4$
$F_3(x,y,t) = -3x + t \quad F_3(1,-1,1) = -2$

Така получаваме $p = \pi(P): -3x + 4y - 2t = 0$ или $p: 3x - 4y + 2 = 0$ – в нехомогенни координати. Тогава координатите на т. $Q = p \cap \ell$ ще са решенията на системата

$$\begin{cases} 3x - 4y + 2 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0, \end{cases}$$

или $y = \frac{1}{2}$, $x = 0$. Така получаваме $Q(0, \frac{1}{2})$.

<u>Задача 4.</u> Намерете полюса на правата $\ell: 2x + 5y - 1 = 0$ относно кривата $c: x^2 + y^2 + 6xy - 4x + 2y = 0$.

Решение. Привеждаме уравненията в хомогенни координати: $\ell: 2x + 5y - t = 0$ и $c: x^2 + y^2 + 6xy - 4xt + 2yt = 0$. Ако т. $L(x,y,t)$ е полюс на ℓ, то ℓ е поляра на L, следователно $F_1(x,y,t) = 2\lambda$, $F_2(x,y,t) = 5\lambda$ и $F_3(x,y,t) = -\lambda$ (защото $2\lambda x + 5\lambda y - \lambda t = 0$ е у-е на същата пр. ℓ). Ще имаме

$$F_1(x,y,t) = x + 3y - 2t = 2\lambda$$
$$F_2(x,y,t) = 3x + y + t = 5\lambda$$
$$F_3(x,y,t) = -2x + y = -\lambda$$

От последното у-е имаме $y = 2x - \lambda$, заместваме във второто $3x + 2x - \lambda + t = 5\lambda \Rightarrow x = \frac{6}{5}\lambda - \frac{1}{5}t$. Пак се връщаме в третото: $y = 2(\frac{6}{5}\lambda - \frac{1}{5}t) - \lambda = \frac{7}{5}\lambda - \frac{2}{5}t$. Сега заместваме x и y в първото уравнение: $\frac{6}{5}\lambda - \frac{1}{5}t + 3(\frac{7}{5}\lambda - \frac{2}{5}t) - 2t = 2\lambda \Leftrightarrow \frac{17}{5}\lambda = \frac{17}{5}t \Rightarrow t = \lambda$. За x и y ще имаме $x = \frac{6}{5}\lambda - \frac{1}{5}\lambda = \lambda$ и $y = \frac{7}{5}\lambda - \frac{2}{5}\lambda = \lambda$. Така полюсът L ще има хомогенни координати $(\lambda, \lambda, \lambda) \sim (1,1,1)$ и нехомогенни координати $L(1,1)$.

<u>Задача 5.</u> Намерете допирателните прави през точката $A(-1,-1)$ към кривата от втора степен $c: 2x^2 + 2xy - 2x + 2y + 1 = 0$.

Решение. Първо проверяваме дали т. A принадлежи на c: $2(-1)^2 + 2(-1)(-1) - 2(-1) + 2(-1) + 1 = 2 + 2 + 2 - 2 + 1 = 5 \neq 0 \Rightarrow A \bar{\in} c$.

Сега ще следваме алгоритъма от теорията.
1) Намираме полярата $a = \pi(A)$. В хомогенни координати ще имаме $A(-1,-1,1)$ и $c: 2x^2+2xy-2xt+2yt+t^2=0$.

$$F_1(x,y,t) = 2x+y-t \qquad F_1(-1,-1,1) = -4$$
$$F_2(x,y,t) = x+t \qquad F_2(-1,-1,1) = 0$$
$$F_3(x,y,t) = -x+y+t \qquad F_3(-1,-1,1) = 1$$

Получаваме $a = \pi(A): -4x+t=0$
2) Намираме пресечните точки на пр. a и c. За намирането на координатите на пресечните точки ще трябва да решим системата

$$\begin{cases} 4x-t=0 \\ 2x^2+2xy-2xt+2yt+t^2=0 \end{cases}$$

От първото у-е имаме $t=4x$, което заместваме във второто: $2x^2+2xy-8x^2+8xy+16x^2 = 10x^2+10xy = 10x(x+y)=0$. Има две възможности
– $x=0 \Rightarrow t=0$, точката е $(0,y,0) \sim (0,1,0)$ – безкр.т.
– $y=-x$, точката е $(x,-x,4x) \sim (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1)$ – кр.т.
3) Съставяме у-ята на допирателните (в нехомотенни координати). В първия случай безкрайната точка с координати $(0,1,0)$ има колинеарен вектор $(0,1)$, който задава това направление. Следователно у-ето на тази допирателна (в безкрайността, т.е. асимптота) е

$$\frac{x+1}{0} = \frac{y+1}{1} \Rightarrow x+1=0$$

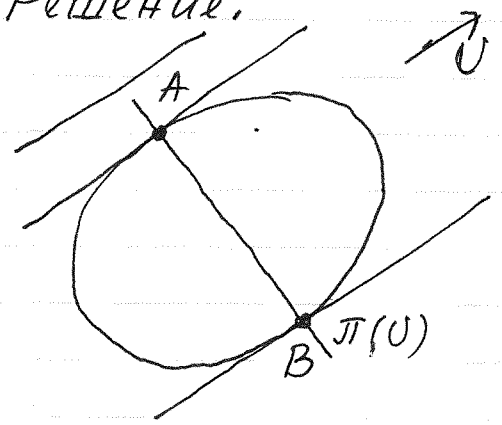
Във втория случай допирателната е правата през двете точки $A(-1,-1)$ и точката с координати $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$. У-ето е

$$\frac{x+1}{\frac{1}{4}+1} = \frac{y+1}{-\frac{1}{4}+1} \Rightarrow \frac{x+1}{5} = \frac{y+1}{3}$$

Общото у-е на тази права е $3x-5y-2=0$.
<u>Задача 6.</u> Да се намери допирателната ℓ към кривата $c: 12x^2-16y^2-192=0$, ако ℓ е успоредна на правата $x+y+2020=0$ и точката на допиране

има положителна абсциса. Да се намери параметъра p на кривата $c_1: y^2+2px=0$, ако ℓ е допирателна и за нея.

Решение.



Тъй като търсената допирателна ℓ е успоредна на дадената права $m: x+y+2020=0$, то тя съдържа същата безкрайна т. U (на m). Нормалният вектор на m е $(1,1)$, следователно $(-1,1)$ е колинеарен вектор, а U ще има координати $U(-1,1,0)$.

Ако намерим полярата $\pi(U)$ на U и общите точки A и B на тази поляра с c, то допирателните ще са прави, успоредни на m през A и B съответно. Да намерим полярата $\pi(U)$. У-е то на c в хомогенни координати е $c: 12x^2-16y^2-192t^2$. Тогава ще имаме

$$F_1(x,y,t)=12x \qquad F_1(-1,1,0)=-12$$
$$F_2(x,y,t)=-16y \qquad F_2(-1,1,0)=-16$$
$$F_3(x,y,t)=-192t \qquad F_3(-1,1,0)=0$$

Следователно у-ето на полярата $\pi(U)$ е $-12x-16y=0$ или $\pi(U): 3x+4y=0$. Координатите на точките A и B ще бъдат решенията на системата:

$$\begin{cases} 3x+4y=0 \\ 12x^2-16y^2-192t^2=0 \end{cases}$$

От първото у-е имаме $y=-\frac{3}{4}x$, заместваме във второто и получаваме $12x^2-\cancel{16}\frac{9}{\cancel{16}}x^2-192t^2=$ $=3x^2-192t^2=3(x^2-64t^2)=0 \Rightarrow x=\pm 8t$. При $x=8t$ получаваме $y=-6t$ и т. $A(8t,-6t,t)\sim(8,-6,1)$ или $A(8,-6)$ (нехомогенни). Тя е с положителна абсциса (знаци другата точка не ни интересува). Правата ℓ можем да зададем по точка и нормала:

$$1(x-8)+1(y+6)=x+y-2=0$$

Сега може да се прехвърлим към другата крива $c_1: y^2+2px=0$. Правата $x+y-2=0$ ще е допира-

телна, ако системата

$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ y^2+2px=0 \end{cases}$$

притежава единствено решение. Заместваме $x=2-y$ от първото у-е във второто и получаваме $y^2+2p(2-y)=y^2-2py+4p=0$. За да има системата единствено решение, трябва това квадратно у-е да има единствено решение, което се подсигурява от нулева дискриминанта, т.е. $D=(-p)^2-4p=p^2-4p=0 \Rightarrow p=4\ (p\neq 0)$.

Тема 9. Афинни свойства на криви от 2 степен

Теория

1. Афинна класификация. За кривата от 2 ст. $C: a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}t^2+2a_{12}xy+2a_{13}xt+2a_{23}yt=0$ разглеждаме матрицата

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Съществува взаимно еднозначно съответствие (с точност до реален множител) между множествата от всички симетрични матрици и всички криви от втора степен. Разглеждаме и адюнгираното количество A_{33} на елемента a_{33}

$$A_{33}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}^2.$$

Афинната класификация на кривите от 2 степен се прави според стойностите на $|A|=\det(A)$ и A_{33}:

– кривата е неизродена, точно когато $|A|\neq 0$. При $A_{33}>0$ – елипса; при $A_{33}=0$ – парабола и при $A_{33}<0$ – хипербола;

– кривата е изродена, точно когато $|A|=0$. В та-

къв случай тя се разпада: а) на две пресичащи се прави, ако $A_{33} < 0$ (изродена крива от хиперболичен тип) и б) на две комплексно спрегнати прави, ако $A_{33} > 0$ (изродена крива от елиптичен вид).

2. Център. Център на крива от 2 степен се нарича полюсът на безкрайната права $\omega: t=0$, относно с. Следователно, центърът е решение на системата $F_1(x,y,t) = F_2(x,y,t) = 0$ или

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}t = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23}t = 0 \end{cases}$$

Елипсата и хиперболата имат един краен център (централни криви), а параболата – един безкраен център.

3. Безкрайни точки и асимптоти. Ако в уравнението на кривата от 2 ст. с положим $t=0$, получаваме уравнението

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0,$$

което задава безкрайните точки на с. Като разделим горното у-е на y^2 получаваме

$$a_{11}\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{x}{y}\right) + a_{22} = 0$$

с дискриминанта $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -A_{33}$.

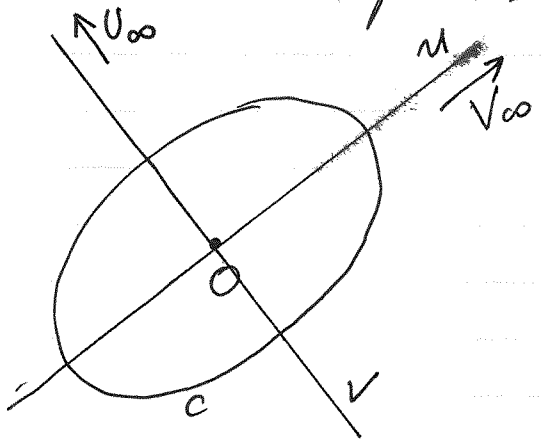
Тогава, ако с е елипса ($A_{33} > 0 \Rightarrow D < 0$) у-ето няма реални корени, следователно елипсата не притежава безкрайни точки.

При ~~хипер~~ парабола ($A_{33} = D = 0$) ще има една безкрайна точка.

При хипербола ($A_{33} < 0 \Rightarrow D > 0$) има две безкрайни точки.

Асимптота на крива от втора степен се нарича допирателна в безкрайна точка от кривата. Тъй като центърът е полюс на безкрайната права, то асимптота съдържа центъра на кривата. Следователно, хиперболата има две крайни асимптоти, параболата – една (ω), а елипсата – няма.

4. Диаметър. Всички поляри на безкрайните точки се наричат диаметри. Тъй като центърът е полюс на безкрайната права ω, то диаметрите съдържат центъра и обратното (всички прави през центъра са диаметри). Ясно е, че асимптотите също се явяват диаметри. Спрегнати диаметри се наричат такива диаметри, всеки от които е поляра на безкрайната точка на другия.



На чертежа се предполага, че $u = \pi(U_\infty)$ и $v = \pi(V_\infty)$. (O е центърът на c). Тогава u и v са двойка спрегнати диаметри.

Решени задачи.

Задача 1. Направете афинна класификация на кривите от втора степен от семейството $c_\lambda: x^2 + \lambda y^2 - 4xy + 4x - 2y + 1 = 0$ в зависимост от стойностите на реалния параметър λ.

Решение: Съставяме матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

за c_λ. За детерминантата ѝ ще имаме $|A| = \lambda + 4 + 4 - 4\lambda - 1 - 4 = 3 - 3\lambda$. Тогава $|A| = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \Rightarrow$ при $\lambda = 1$ кривата ще е изродена, а при $\lambda \neq 1$ – неизродена. Пресмятаме $A_{33} = \lambda - 4$. Тогава при $\lambda \in (4, +\infty)$ $(A_{33} > 0)$ c_λ е елипса; при $\lambda = 4$ $(A_{33} = 0)$ – парабола, а при $\lambda \in (-\infty; 1) \cup (1, 4)$ $(A_{33} < 0, |A| \neq 0)$ – хипербола. При $\lambda = 1$ c_1 е изродена крива от хиперболичен тип, т.е. двойка пресичащи се прави.

Задача 2. Намерете центъра на кривата от 2ст.:

(а) $c_1: x^2 + 2y^2 + 3t^2 - 2xy - 4xt - 6yt = 0$

(б) $c_2: x^2+y^2+3t^2-2xy-4xt-6yt=0$.

Решение: (а) Системата, определяща координатите на центъра е:

$$F_1(x,y,t)=x-y-2t=0$$
$$F_2(x,y,t)=-x+2y-3t=0$$

Решенията са $x=3t$, $y=5t$, следователно центъра има ~~не~~хомогенни координати $(3t,5t,t)\sim(3,5,1)$ и нехомогенни координати $(3,5)$.

(б) В този случай координатите на центъра се определят от

$$F_1(x,y,t)=x-y-2t=0$$
$$F_2(x,y,t)=-x+y-3t=0$$

Като съберем уравненията, получаваме $t=0$, следователно центърът е безкраен (c_2 е парабола), а от първото у-е: $x=y$. Центърът U_∞ има координати $(x,x,0)\sim(1,1,0)$.

<u>Задача 3</u>. Да се установи, че кривата $c: 3x^2+7y^2+10xy+4x+2y+4$ е хипербола и да се намерят асимптотите ѝ.

Решение: Уравнението на с в хомогенни координати е $c: 3x^2+7y^2+10xy+4xt+2yt+4t^2=0$, а у-е то за координатите на безкрайните точки.

$$3x^2+10xy+7y^2=0$$

или

$$3\left(\frac{x}{y}\right)^2+10\left(\frac{x}{y}\right)+7=0$$

Получаваме $\left(\frac{x}{y}\right)_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-21}}{3}=\frac{-5\pm2}{3}=\begin{cases}-\frac{7}{3}\\-1\end{cases}$

Тъй като с притежава две безкрайни точки $U_1(7,-3,0)$ и $U_2(1,-1,0)$, тя е хипербола. Тъй като асимптотите съединяват центъра с безкрайните т-ки, ще трябва да намерим координатите на центъра от системата

$$F_1(x,y,t)=3x+5y+2t=0$$
$$F_2(x,y,t)=5x+7y+t=0$$

Умножаваме първото у-е с 5, а второто - с (-3) и събираме: $4y+7t=0 \Rightarrow y=-\frac{7}{4}t$. Заместваме в първото у-е: $3x+5(-\frac{7}{4}t)+2t = 3x-\frac{27}{4}t=0 \Rightarrow x=\frac{9}{4}t$. Получаваме координатите на ц-ра О: $(\frac{9}{4}t, -\frac{7}{4}t, t) \sim (\frac{9}{4}, -\frac{7}{4}, 1)$ $\Rightarrow O(\frac{9}{4}, -\frac{7}{4})$ в нехомогенни координати.
Безкрайната точка $U_1(7,-3,0)$ съответства на вектор $\vec{u}_1(7,-3)$, който е колинеарен на единия диаметър, следователно $\vec{n}_1(3,7)$ е нормален. Съставяме у-ето на този диаметър по точка и нормала:

$$3(x-\frac{9}{4})+7(y+\frac{7}{4})=3x-\frac{27}{4}+7y+\frac{49}{4}=$$

$$=3x+7y+\frac{11}{2}=0$$

За другия диаметър ще имаме: $U_2(1,-1,0) \to \vec{u}_2(1,-1) \Rightarrow \vec{n}_2(1,1)$ и

$$1(x-\frac{9}{4})+1(y+\frac{7}{4})=x-\frac{9}{4}+y+\frac{7}{4}=$$

$$=x+y-\frac{1}{2}=0.$$

<u>Задача 4.</u> Намерете успоредния на оста Ox диаметър на кривата $c: 2x^2-3y^2+5xy+3x+16y=0$ и спрегнатия му диаметър.
Решение: Тъй като диаметър е всяка права през центъра на с, то трябва да намерим центъра О на с. Системата за неговите координати е ($c: 2x^2-3y^2+5xy+3xt+16yt=0$ в хомогенни координати):

$$F_1(x,y,t)=2x+\frac{5}{2}y+\frac{3}{2}t=0$$
$$F_2(x,y,t)=\frac{5}{2}x-3y+8t=0$$

или

$$\begin{cases} 4x+5y+3t=0 \\ 5x-6y+16t=0 \end{cases}$$

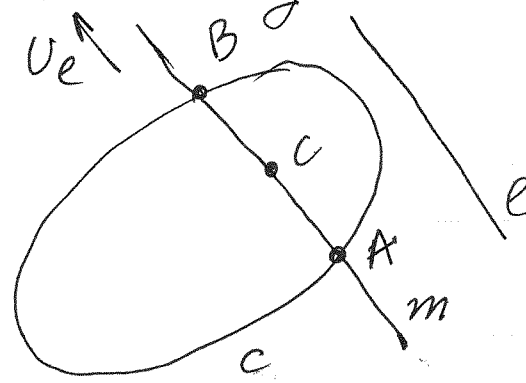
Умножаваме първото у-е с 5, а второто - с (-4) и

събираме: $49y-49t=0 \Rightarrow y=t$. Заместваме в първото у-е: $4x+5t+3t=0 \Rightarrow x=-2t$.
Тогава $O(-2t,t,t)\sim(-2,1,1) \Rightarrow O(-2,1)$ в нехомогенни координати.
Права, успоредна на Ox има уравнение $y=const$, следователно d има у-е $d: y=1$.
Колинеарният вектор на диаметъра d е $\vec{d}(1,0)$, който съответства на безкрайната т-ка $U_d(1,0,0)$. Търсеният спрегнат диаметър d_1 ще бъде поляра на U_d. Ще имаме

$$F_1(x,y,t)=2x+\frac{5}{2}y+\frac{3}{2}t \qquad F_1(1,0,0)=2$$
$$F_2(x,y,t)=\frac{5}{2}x-3y+8t \qquad F_2(1,0,0)=\frac{5}{2}$$
$$F_3(x,y,t)=\frac{3}{2}x+8y \qquad F_3(1,0,0)=\frac{3}{2}$$

Така получаваме $d_1: 2x+\frac{5}{2}y+\frac{3}{2}t=0$ в хомогенни координати или $d_1: 4x+5y+3=0$ – в нехомогенни.

<u>Зад. 5.</u> Намерете множеството от средите на онези хорди на кривата $c: 3x^2+5y^2+7xy+4x+5y+1=0$, които са успоредни на правата $e: x+y+1=0$.



Решение: Нека m е една такава хорда, а ако A и B са пресечните точки на пр. m с кривата c, C е средата на отс. AB, то $(ABCU_e)=-1$ $\Rightarrow$ C е точка, спрегната на безкр. т. U_e $\Rightarrow$ множеството от всички точки от вида на C (средите на всички хорди, успоредни на e) ще е диаметъра, поляра на $U_e(-1,1,0)$. Ще имаме

$$F_1(x,y,t)=3x+\frac{7}{2}y+2t \qquad F_1(-1,1,0)=\frac{1}{2}$$
$$F_2(x,y,t)=\frac{7}{2}x+5y+\frac{5}{2}t \qquad F_2(-1,1,0)=\frac{3}{2}$$
$$F_3(x,y,t)=2x+\frac{5}{2}y+\frac{1}{2}t \qquad F_3(-1,1,0)=\frac{1}{2}$$

Тогава диаметърът ще има у-е $\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}t=0$ в хомогенни координати и $x+3y+1=0$ в нехомог.