Тема 1. Линейни действия със свободни вектори

Теория

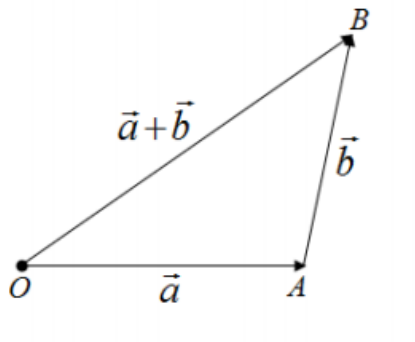
Линейните действия със свободни вектори са събиране на свободни вектори и умножение на свободен вектор с (реално) число. Правила за събиране на свободни вектори:

- правило на триъгълника – събиране на вектори, за които краят на първия съвпада с началото на втория (фиг. 1)

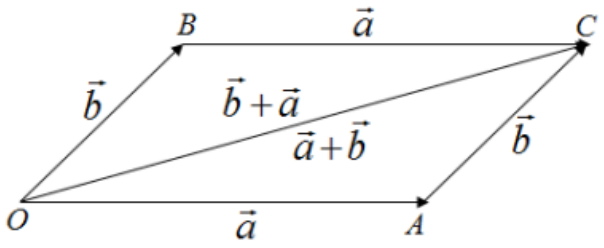
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

- правило на успоредника – събиране на вектори с общо начало (фиг. 2)

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow OABC \text{ е успоредник}$$



фиг. 1



фиг. 2

Два свободни вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни, точно когато са линейно зависими, т.е. $\vec{b} = \lambda\vec{a},\ \lambda \in R$.

Три свободни вектора в пространството са компланарни, точно когато са линейно зависими, т.е. поне един от тях може да се представи като линейна комбинация на останалите два.

Всеки четири свободни вектора в геометричното векторно пространство са линейно зависими.

Решени задачи

Задача 1. Нека точката M лежи на отсечката AB, като я дели вътрешно в отношение $AM:MB = m:n$. Ако точката O е произволна, докажете, че

$$\overrightarrow{OM} = \frac{n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{n+m}.$$

Като използвате горното равенство, докажете, че M е среда на отсечката AB, точно когато

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right).$$

Решение:

От съотношението $AM:MB = m:n$ се вижда, че е изпълнено

$$\overrightarrow{AM} = \frac{m}{n+m}\overrightarrow{AB}.$$

Тъй като имаме $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, то като заместим в горното равенство, получаваме

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \frac{m}{n+m}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)$$

$$\overrightarrow{OM} = \left(1 - \frac{m}{n+m}\right)\overrightarrow{OA} + \frac{m}{n+m}\overrightarrow{OB} = \frac{n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{n+m}.$$

Ако M е среда на отсечката AB, тогава $m = n = 1$ и като заместим m и n в последното равенство, получаваме

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right).$$

Задача 2. Нека ΔABC е произволен триъгълник и O е произволна точка. Докажете еквивалентността на следните три условия:

(а) точката G е медицентър на ΔABC;

(б) изпълнено е равенството $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$;

(в) за вектора $\overrightarrow{OG}$ е в сила представянето

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right).$$

Решение:

Първо ще докажем, че от (а) следва (в). Точката G е медицентър на ΔABC ако тя е пресечна точка на медианите на триъгълника, освен това ги разделя в отношение 2:1, считано от върховете. Нека CC_1 е една от медианите, тогава ще е изпълнено съотношението $CG: GC_1 = 2: 1$. По силата на задача 1 ще имаме ($m = 2$ и $n = 1$)

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC_1}.$$

Но тъй като точката C_1 е среда на отсечката AB, то ще следва (пак от задача 1)

$$\overrightarrow{OC_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right).$$

Като заместим $\overrightarrow{OC_1}$ от последното равенство в предпоследното равенство получаваме

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right).$$

Сега ще докажем, че от (в) следва (б). Горното равенство е изпълнено за произволна точка O (тя не е необходимо дори да принадлежи на равнината на ΔABC). Ако в него поставим $O \equiv G$, тогава получаваме $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ ($\overrightarrow{GG} = \vec{0}$).

Накрая ще докажем, че от (б) следва (а). Векторното равенство $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ е еквивалентно на векторното равенство $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}$. Нека точката D (в равнината на триъгълника) е така избрана, че четириъгълника $GADB$ е успоредник. Тогава (според правилото на успоредника) ще имаме $\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}$. Така получаваме, че $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{GD}$. Освен това в успоредника диагоналите взаимно се разполовяват, следователно точка C_1 (средата на AB) ще бъде пресечната точка на диагоналите. Това показва, че C_1 разполовява и диагонала GD, следователно

$$\overrightarrow{GC_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CG}.$$

Това показва, че точката G за която е изпълнено векторното равенство $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ трябва да лежи на медианата CC_1 и да я дели в отношение 2:1, считано от върха C, а доколкото този връх е избран произволно, то можем да считаме, че точката G е медицентър на ΔABC.

Задача 3. В четириъгълника $ABCD$ точките M, N, P и Q са средите съответно на страните AB, BC, CD и DA, а точките K и L са средите съответно на диагоналите

AC и BD. Докажете, че отсечките MP, NQ и KL се пресичат в една точка и се разполовяват от нея.

Решение:

Нека точките O_1, O_2 и O_3 са среди съответно на отсечките MP, NQ и KL. Ще трябва да докажем, че тези три точки съвпадат.

Тъй като O_1 е среда на MP, то ще бъде в сила векторното равенство

$$\overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP}\right).$$

Но точките M и P са среди съответно на отсечките AB и CD, затова са изпълнени равенствата

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) \text{ и } \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right).$$

Като заместим последните равенства в равенството за $\overrightarrow{OO_1}$, получаваме

$$\overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right).$$

Аналогично, за радиус-векторите на точките O_2 и O_3 можем да получим равенствата

$$\overrightarrow{OO_2} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right) \text{ и } \overrightarrow{OO_3} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right).$$

Това показва, че $\overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{OO_2} = \overrightarrow{OO_3}$, следователно $O_1 \equiv O_2 \equiv O_3$ (знакът $\equiv$ се използва за съвпадение, в случая, на точки).

Задача 4. Нека $ABCD$ е произволен четириъгълник и точката O е произволна. Означаваме с M, N, P и Q средите съответно на AB, BC, CD и DA. Нека точката O_1 е симетрична на O относно M, O_2 е симетрична на O относно N, O_3 е симетрична на O относно P и O_4 е симетрична на O относно Q. Докажете, че фигурата $O_1O_2O_3O_4$ е успоредник.

Решение:

Четириъгълникът $O_1O_2O_3O_4$ ще бъде успоредник, точно когато е изпълнено векторното равенство $\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{O_4O_3}$.

Тъй като точката O_1 е симетрична на O относно M, то точките O, M и O_1 ще бъдат разположени на една права (в този ред) и $OM = MO_1$. На векторен език това означава, че е изпълнено равенството $\overrightarrow{OO_1} = 2\overrightarrow{OM}$. От друга страна, M е среда на отсечката AB, от което следва, че е изпълнено

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right).$$

Като отчетем двете равенства, получаваме че $\overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Аналогично, за другите точки O_2, O_3 и O_4 получаваме равенствата $\overrightarrow{OO_2} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OO_3} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OO_4} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}$.

Тогава, за $\overrightarrow{O_1O_2}$ ще имаме

$$\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{OO_2} - \overrightarrow{OO_1} = \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) - \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AC},$$

а за

$$\overrightarrow{O_4O_3} = \overrightarrow{OO_3} - \overrightarrow{OO_4} = \left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right) - \left(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}\right) = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AC}.$$

Задача 5. Нека $ABCD$ е успоредник. Точката M лежи на страната AB, като $AM : MB = 1 : 5$. Точката N лежи на диагонала AC, като $AN : NC = 1 : 6$. Докажете, че точките D, N и M са колинеарни и намерете отношението $DN : NM$.

Решение:

Избираме база $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Тогава от $AM : MB = 1 : 5$ ще следва, че е изпълнено векторното равенство

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{6}\vec{a}.$$

Аналогично, от $AN : NC = 1 : 6$ ще следва, че

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{7}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{7}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{7}\left(\vec{a} + \vec{b}\right).$$

Сега изразяваме $\overrightarrow{DN}$ и $\overrightarrow{NM}$ чрез векторите от базата:

$$\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{7}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) - \vec{b} = \frac{1}{7}\vec{a} - \frac{6}{7}\vec{b},$$

$$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{7}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \frac{1}{42}\vec{a} - \frac{1}{7}\vec{b}.$$

От горните две равенства се вижда, че $\overrightarrow{DN} = 6\overrightarrow{NM}$, което показва, че D, N и M са колинеарни и $DN: NM = 6: 1$.

Задача 6. В ΔABC точката M е среда на AB. Точките N и P лежат съответно на страните AC и BC, като $AN: NC = 2: 1$, а $BP: PC = 3: 2$. Медианата CM пресича отсечката NP в точка Q. Намерете отношенията, в които Q дели отсечките CM и NP.

Решение:

Избираме база $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Тогава от $AN: NC = 2: 1$ и $BP: PC = 3: 2$ получаваме съответно

$$\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\vec{a} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{CP} = \frac{2}{5}\vec{b}.$$

Точката $Q = CM \cap NP$ лежи на CM. Това означава, че за някакво λ (неизвестно засега) е в сила равенството $\overrightarrow{CQ} = \lambda\overrightarrow{CM}$. Но M е среда на AB, следователно в сила е $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$. Така получаваме

$$\overrightarrow{CQ} = \frac{\lambda}{2}\vec{a} + \frac{\lambda}{2}\vec{b}.$$

Същата точка Q лежи и на NP, следователно за някакво μ (също неизвестно) ще е в сила $\overrightarrow{NQ} = \mu\overrightarrow{NP}$. Тъй като

$$\overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{CQ} - \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CQ} - \frac{1}{3}\vec{a} \text{ и } \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{CP} - \overrightarrow{CN} = \frac{2}{5}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a},$$

то ще имаме

$$\overrightarrow{CQ} - \frac{1}{3}\vec{a} = \mu\left(\frac{2}{5}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}\right) \Longrightarrow \overrightarrow{CQ} = \frac{1-\mu}{3}\vec{a} + \frac{2\mu}{5}\vec{b}.$$

Сравняваме двата получени израза за $\overrightarrow{CQ}$:

$$\overrightarrow{CQ} = \frac{\lambda}{2}\vec{a} + \frac{\lambda}{2}\vec{b} = \frac{1-\mu}{3}\vec{a} + \frac{2\mu}{5}\vec{b}.$$

Тъй като един вектор (в случая $\overrightarrow{CQ}$) притежава единствено представяне в дадена база, то (сравнявайки коефициентите пред базовите вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ съответно) получаваме

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{1-\mu}{3} \quad \text{и} \quad \frac{\lambda}{2} = \frac{2\mu}{5}.$$

Това е система от две уравнения с две неизвестни (параметрите λ и μ), чиито решения са $\lambda = \frac{4}{11}$ и $\mu = \frac{5}{11}$. Така получаваме

$$\overrightarrow{CQ} = \frac{4}{11}\overrightarrow{CM} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{NQ} = \frac{5}{11}\overrightarrow{NP}.$$

Последните две равенства показват, че са изпълнени съотношенията $CQ: QM = 4: 7$ и $NQ: QP = 5: 6$.

Тема 2. Координатни системи

Теория

Координатна система в пространството $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ наричаме система от три ненулеви и линейно независими вектори $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ и $\overrightarrow{e_3}$ с начало в точката O. Такава най-обща координатна система (без други ограничения) наричаме афинна. Съответно $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ е равнинна координатна система. Тогава един произволен вектор $\vec{p}$ се представя еднозначно като линейна комбинация на базовите вектори)

$$\vec{p} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}$$

и коефициентите в това представяне се наричат координати на вектора: x – абсциса, y – ордината и z – апликата.

Нека точките A и B са зададени с координатите си $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$, т.е. радиус-векторите им $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ имат координатите – $\overrightarrow{OA}(x_A, y_A, z_A)$ и $\overrightarrow{OB}(x_B, y_B, z_B)$. Тогава координатите на насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ намираме по следния начин

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_B, y_B, z_B) - (x_A, y_A, z_A) = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).$$

Средата M на отсечката AB има координати

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z_M = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

Ако точките A, B и C не са колинеарни и $C(x_C, y_C, z_C)$, то медицентъра G на ΔABC има координати

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \quad z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}.$$

Смяна на координатна система. Нека координатната система $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ е заменена с друга координатна система $K' = O'\overrightarrow{e_1'}\overrightarrow{e_2'}$, като $O'(a, b)$, $\overrightarrow{e_1'}(t_{11}, t_{21})$ и $\overrightarrow{e_2'}(t_{12}, t_{22})$ относно K. Формули за обща смяна на координатната система в равнината

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Транслация

$$\left| \begin{array}{l} x = x' + a \\ y = y' + b \end{array} \right.$$

Ротация на ортонормирана координатна система на ъгъл α

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\varepsilon \sin\alpha \\ \sin\alpha & \varepsilon \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

където $\varepsilon = \pm 1$, като при $\varepsilon = +1$ K и K' са с еднаква ориентация, а при $\varepsilon = -1$ са противоположно ориентирани.

Една координатна система се нарича ортонормирана, ако координатните ´и вектори имат дължини единица и са взаимноперпендикулярни.

Координатната система, с която работим по подразбиране (освен ако не е споменато друго), е дясна ортонормирана.

Просто отношение на три точки върху една права. Простото отношение (ABC) на точките A, B и C, лежащи върху една права, се определя като реалното число λ, за което $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{BC}$. От последното равенство се вижда, че λ < 0, ако C е вътрешна за отсечката AB и λ > 0, ако C е външна за отсечката AB. Ако трите точки имат следните координати $A(a), B(b), C(c)$ относно дадена координатна система върху правата, то простото им отношение се пресмята чрез формулата

$$\lambda = \frac{c - a}{c - b}.$$

Решени задачи

Задача 1. Дадени са точките:

(а) $A(6,0,1)$, $B(-1,3,2)$, $C(5,1,-3)$, $D(6,1,3)$;

(б) $A(5,1,3)$, $B(6,2,7)$, $C(4,1,4)$, $D(5,0,-2)$;

(в) $A(1,0,1)$, $B(2,0,2)$, $C(3,1,2)$, $D(5,1,4)$

Да се изследва взаимното положение на правите AB и CD и в случай, че се пресичат, да се намерят координатите на пресечната им точка.

Решение:

(а) Допускаме, че правите се пресичат и $M = AB \cap CD$. Тъй като M е от AB, то ще съществува реално число λ, такова че $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$, следователно $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)$ или $\overrightarrow{OM} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} = (1-\lambda)(6,0,1) + \lambda(-1,3,2) = (6 - 7\lambda, 3\lambda, 1+\lambda)$. Аналогично, M е от CD и за някаква стойност на μ ще бъде изпълнено $\overrightarrow{OM} = (1-\mu)\overrightarrow{OC} + \mu\overrightarrow{OD} = (1-\mu)(5,1,-3) + \mu(6,1,3) = (5+\mu, 1, -3 + 6\mu)$. Тъй като точката M (радиус-векторът $\overrightarrow{OM}$) притежава еднозначни координати, то ще бъдат изпълнени равенствата

$$6 - 7\lambda = 5 + \mu, \;\; 3\lambda = 1, \;\; 1 + \lambda = -3 + 6\mu.$$

От второто уравнение получаваме $\lambda = \frac{1}{3}$, а след заместване в първото уравнение - $\mu = -\frac{4}{3}$. като заместим получените стойности на λ и μ получаваме грешно твърдение ($\frac{4}{3} = -11$), следователно системата е противоречива и правите не се пресичат. Тогава остават две възможности: да са успоредни или кръстосани. Ако са успоредни, би трябвало векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ да са колинеарни (координатите им да са пропорционални). Имаме $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-1,3,2) - (6,0,1) = (-7,3,1)$; $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = (6,1,3) - (5,1,-3) = (1,0,6)$. Тези вектори не са колинеарни, следователно, правите AB и CD са кръстосани.

(б) $M \in AB \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} = (1-\lambda)(5,1,3) + \lambda(6,2,7) = (5+\lambda, 1+\lambda, 3+4\lambda)$; $M \in CD \Leftrightarrow (1-\mu)\overrightarrow{OC} + \mu\overrightarrow{OD} = (1-\mu)(4,1,4) + \mu(5,0,-2) = (4+\mu, 1-\mu, 4-6\mu)$. Получаваме системата

$$5 + \lambda = 4 + \mu \;\; 1 + \lambda = 1 - \mu \;\; 3 + 4\lambda = 4 - 6\mu.$$

От първите две уравнения получаваме $\lambda = -\frac{1}{2}$ и $\mu = \frac{1}{2}$. Като заместим тези стойности в третото уравнение, то се превръща в тъждество, което показва, че системата е съвместима определена. Като заместим $\lambda = -\frac{1}{2}$ в координатите на M, зависещи от λ, получаваме, че $M = AB \cap CD$ има координати $\left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$.

(в) В този случай за базовите вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ на правите получаваме $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2,0,2) - (1,0,1) = (1,0,1)$ и $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = (5,1,4) - (3,1,2) = (2,0,2)$. Ясно е, че векторите са колинеарни: $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$ и правите са успоредни или съвпадат. Допускаме, че те съвпадат, тогава точката C ще бъде от правата AB и за някаква стойност на λ ще бъде изпълнено равенството $\overrightarrow{OC} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$ или $(3,1,2) = (1-\lambda)(1,0,1) + \lambda(2,0,2) = (1+\lambda, 0, 1+\lambda)$. Ясно е, че това е невъзможно, следователно правите са успоредни.

Задача 2. Дадени са точките:

(а) $A(1,0,-1)$, $B(6,2,4)$, $C(5,0,-3)$, $D(5,2,1)$, $E(-1,0,3)$;

(б) $A(1,2,-1)$, $B(-5,3,3)$, $C(5,1,1)$, $D(0,1,4)$, $E(4,2,2)$;

(в) $A(5,4,2)$, $B(9,8,3)$, $C(1,0,1)$, $D(2,3,3)$, $E(4,1,0)$.

Да се изследва взаимното положение на правата AB и равнината CDE и в случай, че се пресичат, да се намерят координатите на пресечната им точка.

Решение:

(а) Допускаме, че правата AB пробожда равнината CDE и този пробод е точката M ($M = AB \cap CDE$). Доколкото M е точка от правата AB, за нея е изпълнено $\overrightarrow{OM} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} = (1-\lambda)(1,0,-1) + \lambda(6,2,4) = (1+5\lambda, 2\lambda, -1+5\lambda)$.

Нека системата от вектори $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CE}$ образува база на равнината CDE. (Трябва да проверим, че тези вектори са неколинеарни: $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = D(5,2,1) - (5,0,-3) = (0,2,4)$, $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OC} = (-1,0,3) - (5,0,-3) = (-6,0,6)$ – наистина са такива!). Тогава векторът $\overrightarrow{CM}$ ще се разлага еднозначно в тази база: $\overrightarrow{CM} = \mu\overrightarrow{CD} + \nu\overrightarrow{CE} \Longrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC} = \mu\left(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}\right) + \nu\left(\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OC}\right) \Longrightarrow \overrightarrow{OM} = (1-\mu-\nu)\overrightarrow{OC} + \mu\overrightarrow{OD} + \nu\overrightarrow{OE} = (1-\mu-\nu)(5,0,-3) + \mu(5,2,1) + \nu(-1,0,3) = (5-6\nu, 2\mu, -3+4\mu+6\nu)$. Сравнявайки координатите на M в тези две представяния, получаваме системата

$$1 + 5\lambda = 5 - 6\nu, \qquad 2\lambda = 2\mu, \qquad -1 + 5\lambda = -3 + 4\mu + 6\nu$$

От три уравнения за трите неизвестни λ, μ и ν. От второто уравнение получаваме $\mu = \lambda$, а от първото - $\nu = \frac{1}{6}(4 - 5\lambda)$; заместваме μ и ν в третото уравнение и получаваме уравнение с едно неизвестно – λ, от което намираме $\lambda = \frac{1}{3}$. Окончателно, решението на системата е $\lambda = \mu = \frac{1}{3}$, $\nu = \frac{7}{18}$. Следователно системата е съвместима определена и съществува единствена точка $M = AB \cap CDE$. Нейните координати определяме като заместим $\lambda = \frac{1}{3}$ в първото представяне на $\overrightarrow{OM}$, получаваме $M\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

(б) Ще имаме $\overrightarrow{OM} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} = (1-\lambda)(1,2,-1) + \lambda(-5,3,3) = (1 - 6\lambda, 2 + \lambda, -1 + 4\lambda)$ и $\overrightarrow{OM} = (1-\mu-\nu)\overrightarrow{OC} + \mu\overrightarrow{OD} + \nu\overrightarrow{OE} = (1-\mu-\nu)(5,1,1) + \mu(0,1,4) + \nu(4,2,2) = (5 - 5\mu - \nu, 1 + \nu, 1 + 3\mu + \nu)$. Системата е

$$1 - 6\lambda = 5 - 5\mu - \nu, \qquad 2 + \lambda = 1 + \nu, \qquad -1 + 4\lambda = 1 + 3\mu + \nu.$$

От второто уравнение получаваме $\nu = \lambda + 1$, а от първото - $\mu = \frac{1}{5}(3 + 5\lambda)$. Като заместим в третото уравнение, получаваме противоречие, следователно, системата е несъвместима и правата AB не пресича равнината CDE, това означава, че тя е успоредна на нея.

(в) $\overrightarrow{OM} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} = (1-\lambda)(5,4,2) + \lambda(9,8,3) = (5 + 4\lambda, 4 + 4\lambda, 2 + \lambda)$ и $\overrightarrow{OM} = (1-\mu-\nu)\overrightarrow{OC} + \mu\overrightarrow{OD} + \nu\overrightarrow{OE} = (1-\mu-\nu)(1,0,1) + \mu(2,3,3) + \nu(4,1,0) = (1 + \mu + 3\nu, 3\mu + \nu, 1 + 2\mu - \nu)$. Системата е

$$5 + 4\lambda = 1 + \mu + 3\nu, \qquad 4 + 4\lambda = 3\mu + \nu, \qquad 2 + \lambda = 1 + 2\mu - \nu.$$

От първите две уравнения получаваме $\lambda = \nu - 1$ и $\mu = \nu$. Като заместим в третото уравнение, получаваме тъждество (изпълнено за всяка стойност на ν), следователно, системата е съвместима неопределена (с безброй много решения), като решенията зависят от един параметър (в случая ν). Това показва, че правата AB се съдържа в равнината CDE.

Задача 3. Относно дясно (положително) ориентирана координатна система $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ в равнината са дадени точките $O'(2,-3)$, $A_1'(1,1)$, $A_2'(3,-6)$ и $M(5,-1)$. Ако $\overrightarrow{e_1'} = \overrightarrow{O'A_1'}$ и $\overrightarrow{e_2'} = \overrightarrow{O'A_2'}$, да се определи:

(а) ориентацията на координатната система $K' = O'\overrightarrow{e_1'}\overrightarrow{e_2'}$;

(б) координатите на M относно K'.

Решение:

(а) ориентацията на координатната система $K' = O'\overrightarrow{e_1'}\overrightarrow{e_2'}$ се определя от знакът на детерминантата на матрицата на прехода от база K към база K'. Тази матрица T има за стълбове координатите на базовите вектори $\overrightarrow{e_1'}$ и $\overrightarrow{e_2'}$. Имаме $\overrightarrow{e_1'} = \overrightarrow{O'A_1'} = \overrightarrow{OA_1'} - \overrightarrow{OO'} = (1,1) - (2,-3) = (-1,4)$; $\overrightarrow{e_2'} = \overrightarrow{O'A_2'} = \overrightarrow{OA_2'} - \overrightarrow{OO'} = (3,-6) - (2,-3) = (1,-3)$. Тогава матрицата на прехода е

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix},$$

като детерминантата е $|T| = (-1)(-3) - 1 \cdot 4 = -1$, следователно ориентацията се сменя. Тъй като ориентацията на старата координатна система K е положителна, то ориентацията на новата координатна система K' е отрицателна (ляво ориентирана).

(б) Координатите на M относно K' са (по дефиниция) коефициентите при разлагането на радиус-вектора $\overrightarrow{O'M}$ по базата $\overrightarrow{e_1'}$ и $\overrightarrow{e_2'}$ или

$$\overrightarrow{O'M} = x'\overrightarrow{e_1'} + y'\overrightarrow{e_2'} = x'(-1,4) + y'(1,-3) = (-x' + y', 4x' - 3y').$$

От друга страна, $\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'} = (5,-1) - (2,-3) = (3,2)$.

Като сравним двете представяния на $\overrightarrow{O'M}$ получаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} -x' + y' = 3 \\ 4x' - 3y' = 2 \end{array} \right.$$

с решение $x' = 11$ и $y' = 14$.

Задача 4. Относно координатна система $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ са дадени точките $A(2,1)$, $B(3,0)$, $C(1,4)$. Да се намери координатна система $K' = O'\overrightarrow{e_1'}\overrightarrow{e_2'}$, спрямо която $A(1,6)$, $B(1,9)$, $C(3,1)$.

Решение:

Нека координатите спрямо K да са: $O'(a,b)$, $\overrightarrow{e_1'}(x,y)$, $\overrightarrow{e_2'}(z,t)$. Това, че A има координати $(1,6)$ спрямо K' означава, че е изпълнено равенството

$$\overrightarrow{O'A} = 1\overrightarrow{e_1'} + 6\overrightarrow{e_2'} = 1(x,y) + 6(z,t) = (x + 6z, y + 6t).$$

От друга страна ще имаме

$$\overrightarrow{O'A} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OO'} = (2,1) - (a,b) = (2 - a, 1 - b).$$

Като сравним двете представяния на $\overrightarrow{O'A}$ получаваме уравненията

$$a + x + 6z = 2 \quad \text{и} \quad b + y + 6t = 1.$$

Аналогично, за точка B получаваме

$$\overrightarrow{O'B} = 1\overrightarrow{e_1'} + 9\overrightarrow{e_2'} = 1(x, y) + 9(z, t) = (x + 9z, y + 9t),$$

$$\overrightarrow{O'B} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OO'} = (3,0) - (a, b) = (3 - a, -b),$$

$$a + x + 9z = 3 \quad \text{и} \quad b + y + 9t = 0.$$

За точка C ще имаме

$$\overrightarrow{O'C} = 3\overrightarrow{e_1'} + 1\overrightarrow{e_2'} = 3(x, y) + 1(z, t) = (3x + z, 3y + t),$$

$$\overrightarrow{O'C} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OO'} = (1,4) - (a, b) = (1 - a, 4 - b),$$

$$a + 3x + z = 1 \quad \text{и} \quad b + 3y + t = 4.$$

Получените 6 уравнения за 6 неизвестни a, b, x, y, z, t могат да се разглеждат като две системи – всяка с по три уравнения за три неизвестни. Първо разглеждаме системата за a, x, z:

$$\left|\begin{array}{l} a + x + 6z = 2 \\ a + x + 9z = 3 \\ a + 3x + z = 1 \end{array}\right.$$

с разширена матрица

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Сменяме местата на втория и трети ред и изваждаме първия ред от другите два, получаваме

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

Тази матрица е диагонализирана, от третия ред получаваме $z = \frac{1}{3}$, от втория - $x = \frac{1}{3}$ и от първия - $a = -\frac{1}{3}$.

Аналогично разглеждаме системата за b, y, t:

$$\left|\begin{array}{l} b+y+6t=1 \\ b+y+9t=0 \\ b+3y+t=4 \end{array}\right.$$

с разширена матрица

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 9 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Тя се различава от другата само по последния стълб, затова след същите преобразувания получаваме

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right).$$

От третия ред получаваме $t=-\frac{1}{3}$, от втория - $y=\frac{2}{3}$ и от третия - $b=\frac{7}{3}$.

Окончателно получаваме $O'\left(-\frac{1}{3},\frac{7}{3}\right)$, $\overrightarrow{e_1'}\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$, $\overrightarrow{e_2'}\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

Задача 5. Относно ортонормирана координатна система $K=O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ е дадена точката $M(2,-5)$. Да се намерят координатите на M относно координатна система:
(а) K', получена чрез транслация на K, определена от вектора $\vec{v}(-1,3)$;

(б) K'', получена чрез ротация на K' с център O и ъгъл $\frac{\pi}{6}$.

(в) Намерете трансформационните формули, чрез които от K се получава K'' и обратно.

Решение:

(а) Прилагаме формулите за транслация по вектор $\vec{v}(-1,3)$:

$$\left|\begin{array}{l} x=x'-1 \\ y=y'+3 \end{array}\right.$$

Тъй като $x=2$ и $y=-5$, то получаваме $x'=3$ и $y'=-8$.

(б) Прилагаме формулите за ротация на ъгъл $\alpha=\frac{\pi}{6}$ ($\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

или

$$x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x'' - \frac{1}{2}y''$$

$$y' = \frac{1}{2}x'' + \frac{\sqrt{3}}{2}y''.$$

Ако използваме обратната матрица, получаваме

$$x'' = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'$$

$$y'' = -\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'$$

Тъй като $x' = 3$ и $y' = -8$, получаваме $x'' = \frac{1}{2}\left(3\sqrt{3} - 8\right)$ и $y'' = -\frac{1}{2}\left(3 + 8\sqrt{3}\right)$.

(в) Като заместим във формулите за транслацията x' и y' от формулите за ротацията, получаваме

$$\left| \begin{array}{l} x = \frac{\sqrt{3}}{2}x'' - \frac{1}{2}y'' - 1 \\ y = \frac{1}{2}x'' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'' + 3 \end{array} \right.$$

Ако във вторите формули за ротацията заместим $x' = x + 1$ и $y' = y - 3$ ще имаме

$$x'' = \frac{\sqrt{3}}{2}(x+1) + \frac{1}{2}(y-3) = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - 3\right)$$

$$y'' = -\frac{1}{2}(x+1) + \frac{\sqrt{3}}{2}(y-3) = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{2}\left(1 + 3\sqrt{3}\right).$$

Задача 6. Дадени са точките $A\left(\frac{7}{2}\right)$ и $C(-2)$. Намерете точка $B(x)$ от правата AC, ако C дели отсечката AB вътрешно в отношение $5:2$.

Решение:

Тъй като C дели отсечката AB вътрешно в отношение $5:2$, ще имаме

$$(ABC) = -\frac{5}{2}.$$

От друга страна имаме

$$(ABC) = \frac{c-a}{c-b} = \frac{-2-\frac{7}{2}}{-2-x} = \frac{11}{2(2+x)}.$$

Така, за определянето на неизвестното x получаваме уравнението

$$\frac{11}{2(2+x)} = -\frac{5}{2} \Longrightarrow 10 + 5x = -11 \text{ и } x = -\frac{21}{5}.$$

Тема 3. Метрични действия със свободни вектори

Теория

Скаларното произведение $\vec{a}\vec{b}$ на свободните вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се дефинира като реалното число

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \cos \measuredangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right).$$

Следователно за скаларния квадрат на вектора $\vec{a}$ е изпълнено $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$. Евклидовата дължина на вектора $\vec{a}$ се определя от $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$. Скаларното произведение притежава следните свойства:

- $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\,\vec{a}$ (комутативност);
- $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\,\vec{c}$ (дистрибутивност);
- $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda\left(\vec{a}\vec{b}\right)$ (хомогенност);
- $\vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ (неотрицателност).

Ъгъл между два вектора

$$\cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

Необходимо и достатъчно условие скаларното произведение на два ненулеви вектора да е равно на нула е те да са перпендикулярни.

Векторното произведение на свободните вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е векторът $\vec{a} \times \vec{b}$, притежаващ свойствата:

(a) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$;

(b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$ и $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$;

(c) ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са линейно независими, то $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a} \times \vec{b}$ образуват дясно ориентирана база в тримерното пространство.

Свойства на векторното произведение:

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (антикомутативност);
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ (дистрибутивност);
- $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ (хомогенност);
- $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a}\vec{c}.\vec{b} - \vec{b}\vec{c}.\vec{a}$ и $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a}\vec{c}.\vec{b} - \vec{a}\vec{b}.\vec{c}$ (двойно векторно произведение).

От последното тъждество следва тъждеството на Якоби

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}.$$

Необходимо и достатъчно условие векторното произведение на два ненулеви вектора да е равно на нула е те да са колинеарни.

Смесеното произведение на свободните вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се дефинира чрез

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}).$$

Необходимо и достатъчно условие смесеното произведение на три ненулеви вектора да е равно на нула е те да са компланарни.

Произведения в координати. Ако относно ортонормирана координатна система са дадени векторите $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ и $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$, то:

$$\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3, \qquad \vec{a}^2 = {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2, \qquad |\vec{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2};$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right) = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1);$$

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Друга формула за пресмятане на векторното произведение:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Геометрично приложение:

(а) пресмятане на лицето на успоредник и триъгълник, определени от неколинеарните вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по формулите

$$S_{\text{усп.}} = |\vec{a} \times \vec{b}|, \;\; S_{\Delta} = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

(б) пресмятане на обема на паралелепипед и триъгълна пирамида (тетраедър), определени от некомпланарните вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ по формулите

$$V_{\text{пар.}} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|, \qquad V_{\text{тет.}} = \frac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$

Решени задачи

Задача 1. Пресметнете:

(а) стойността на израза $\vec{a}^2 - \sqrt{3}\vec{a}\vec{b} + 5\vec{b}^2$, ако $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = 30^0$. ;

(б) ъгъла между векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ако $\vec{a}(1, -1,1)$, $\vec{b}(5,1,1)$;

(в) вектора $\vec{v}(x, y)$, за който $\vec{v}\vec{a} = 13$, $\vec{v}\vec{b} = -3$, ако $\vec{a}(3, -1)$, $\vec{b}(-1,1)$;

(г) вектора $\vec{v}(x, y, z)$, който $|\vec{v}| = 1$, $\vec{v} \perp \vec{a}$, $\vec{v} \perp \vec{b}$, ако $\vec{a}(1, -1,1)$, $\vec{b}(5,1,1)$;

(д) векторното произведение на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и вектора $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})$, ако $\vec{a}(1,2,-1)$, . $\vec{b}(2,1,3)$.

Решение:

(а) Имаме $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 4$, $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = 2.1.\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, $\vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 1$, следователно $\vec{a}^2 - \sqrt{3}\vec{a}\vec{b} + 5\vec{b}^2 = 4 - \sqrt{3}.\sqrt{3} + 1 = 2$.

(б) Използваме формулата

$$\cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

Пресмятаме

$$\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 1.5 + (-1).1 + 1.1 = 5,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3},$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{5^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

Като заместим във формулата, получаваме

$$\cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{5}{\sqrt{3}.3\sqrt{3}} = \frac{5}{9}.$$

Следователно, за търсения ъгъл γ получаваме $\gamma = arccos\frac{5}{9}$.

(в) От $\vec{v}\vec{a} = 13$ ще имаме $\vec{v}\vec{a} = (x,y)(3,-1) = 3x - y = 13$; от $\vec{v}\vec{b} = -3$ получаваме $\vec{v}\vec{b} = (x,y)(-1,1) = -x + y = -3$. Така за неизвестните координати x и y на вектора $\vec{v}$ получаваме системата

$$\left|\begin{array}{l} 3x - y = 13 \\ -x + y = -3 \end{array}\right.$$

с решение $x = 5$, $y = 2$, $\vec{v}(5,2)$.

(г) След като неизвестният вектор $\vec{v}$ е перпендикулярен на двата (неколинеарни) вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то той ще е колинеарен на векторното им произведение, т.е.

$$\vec{v} = \lambda(\vec{a}\times\vec{b}).$$

Да пресметнем векторното произведение $(\vec{a} \times \vec{b})$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right) = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}\right) = (-2,4,6).$$

(Може да проверим, че скаларните произведения на така получения вектор с $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са нули.) Тогава ще имаме $\vec{v} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \lambda(-2,4,6) = (-2\lambda, 4\lambda, 6\lambda)$. Множителят λ ще определим от условието $|\vec{v}| = 1$. Ще имаме $(-2\lambda)^2 + (4\lambda)^2 + (6\lambda)^2 = 1 \Longrightarrow 56\lambda^2 = 1 \Longrightarrow \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{56}} = \pm\frac{1}{2\sqrt{14}}$. така получаваме векторите

$$\vec{v} = \pm\frac{1}{\sqrt{14}}(-1,2,3).$$

(д) Пресмятаме векторното произведение $\vec{a} \times \vec{b}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right) = \left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right)$$
$$= (7, -5, -3).$$

Пресмятаме израза $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$, използвайки свойствата на векторното произведение:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a} - \vec{b} \times \vec{b}.$$

Горното равенство е следствие от дистрибутивността на векторното произведение. Тъй като произведение на колинеарни вектори е нула, то $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{b} = \vec{0}$. От антикомутативността имаме $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$. Така окончателно получаваме

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = -2(\vec{a} \times \vec{b}) = -2(7, -5, -3) = (-14,10,6).$$

Задача 2. Нека M и N са средите съответно на диагоналите AC и BD на четириъгълника $ABCD$. През A е прекарана права l, успоредна на CD, и върху l е взета точка P такава, че $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{CD}$. Намерете връзката между векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, при която $BP \perp MN$.

Решение:

Тъй като $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{CD}$, то ще имаме

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB}.$$

Тъй като M и N са среди на AC и BD съответно, ще бъдат изпълнени векторните равенства

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right).$$

Тогава за $\overrightarrow{MN}$ ще имаме

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right).$$

Но $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD}$, следователно $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right)$.

Условието $BP \perp MN$ е еквивалентно на $\overrightarrow{BP}\overrightarrow{MN} = 0$. Но

$$\overrightarrow{BP}\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB}\right)\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CD}^2 - \overrightarrow{AB}^2\right) = \frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{CD}\right|^2 - \left|\overrightarrow{AB}\right|^2\right).$$

Така получаваме $\left|\overrightarrow{CD}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{CD}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$, т.е. $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са вектори с равни големини.

Задача 3. Намерете дължината на ъглополовящата на вътрешния ъгъл при върха A в триъгълника ABC, ако $A(-2,0)$, $B(6,6)$ и $C(1,-4)$.

Решение:

Нека L е точката от страната AB, така че AL да е вътрешната ъглополовяща. От една страна L ще принадлежи на тази вътрешна ъглополовяща (като права). Нека $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ са вектори, избрани по следния начин

$$\vec{v}_1 = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} \quad \text{и} \quad \vec{v}_2 = \frac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}.$$

Тогава $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ ще са единични вектори по правите AB и AC и вектора $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ ще бъде колинеарен с вътрешната ъглополовяща. Тогава за някаква стойност на λ ще имаме $\overrightarrow{AL} = \lambda(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$. Тъй като $\overrightarrow{AB} = (6,6) - (-2,0) = (8,6)$ и $\overrightarrow{AC} = (1,-4) - (-2,0) = (3,-4)$, ще имаме

$$\vec{v}_1 = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{(8,6)}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{1}{10}(8,6) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right),$$

$$\vec{v}_2 = \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{(3,-4)}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{1}{5}(3,-4) = \left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right),$$

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right) = \left(\frac{7}{5},-\frac{1}{5}\right),$$

$$\overrightarrow{AL} = \lambda(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \lambda\left(\frac{7}{5},-\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{7\lambda}{5},-\frac{\lambda}{5}\right).$$

От друга страна L е точка от BC, следователно за някаква стойност на μ е изпълнено $\overrightarrow{BL} = \mu\overrightarrow{BC} \Longrightarrow \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AB} = \mu\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) \Longrightarrow \overrightarrow{AL} = (1-\mu)\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} = (1-\mu)(8,6) + \mu(3,-4) = (8-5\mu, 6-10\mu)$. Така за двата параметъра λ и μ получаваме системата (сравнявайки първите и вторите координати на двете представяния на $\overrightarrow{AL}$)

$$\frac{7\lambda}{5} = 8 - 5\mu \quad \text{и} \quad -\frac{\lambda}{5} = 6 - 10\mu$$

с решения $\lambda = \frac{10}{3}$ и $\mu = \frac{2}{3}$. тогава получаваме $\overrightarrow{AL}\left(\frac{14}{3},-\frac{2}{3}\right)$. Тогава за дължината на ъглополовящата на вътрешния ъгъл при върха A намираме

$$|\overrightarrow{AL}| = \sqrt{\left(\frac{14}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{200} = \frac{10}{3}\sqrt{2}.$$

Задача 4. Да се намери разстоянието от точка $A(1,1)$ до правата, определена от точките $B(-3,4)$ и $C(13,-4)$.

Решение:

Нека D е петата на перпендикуляра, спуснат от A към BC, тогава отсечката AD ще бъде височина в ΔABC и ще бъде изпълнено

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{AD}|.$$

От друга страна имаме

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.$$

Сравнявайки тези два израза за лицето на триъгълника, получаваме

$$\left|\overrightarrow{AD}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}.$$

Тъй като векторите $\overrightarrow{AB} = (-3,4) - (1,1) = (-4,3)$ и $\overrightarrow{AC} = (13,-4) - (1,1) = (12,-5)$ са двумерни, а векторното произведение е операция, определена за тримерни вектори, допълваме векторите с трета координата нула - $\overrightarrow{AB}(-4,3,0)$ и $\overrightarrow{AC}(12,-5,0)$. Тогава ще имаме $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0,0,-16)$ и $\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 16$. За вектора $\overrightarrow{BC}$ получаваме $\overrightarrow{BC} = (13,-4) - (-3,4) = (16,-8)$, $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(16)^2 + (-8)^2} = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$. Така окончателно намираме

$$\left|\overrightarrow{AD}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{16}{8\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Задача 5. Дадени са точките $A(0,0,-2,)$, $B(4,0,-4)$, $C(2,0,0)$ и $D(5,3,-3)$. Намерете точките M и N съответно от правите AB и CD така, че правата MN да бъде ос на правите AB и CD. Намерете разстоянието между кръстосаните прави AB и CD.

Решение:

Да припомним, че ос на двойка кръстосани прави е права, перпендикулярна и на двете. $M \in AB$, тогава за някаква стойност на λ ще бъде в сила

$$\overrightarrow{OM} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} = (1-\lambda)(0,0,-2,) + \lambda(4,0,-4) = (4\lambda, 0, -2-2\lambda).$$

Аналогично, $N \in CD$, следователно, за някаква стойност на μ ще е изпълнено

$$\overrightarrow{ON} = (1-\mu)\overrightarrow{OC} + \mu\overrightarrow{OD} = (1-\mu)(2,0,0) + \mu(5,3,-3) = (2+3\mu, 3\mu, -3\mu).$$

Тогава за $\overrightarrow{MN}$ ще имаме

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} &= (2+3\mu, 3\mu, -3\mu) - (4\lambda, 0, -2-2\lambda)\\ &= (2+3\mu-4\lambda, 3\mu, -3\mu+2+2\lambda).\end{aligned}$$

Стойностите на параметрите λ и μ ще намерим от условията $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}\overrightarrow{AB} = 0$ и $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}\overrightarrow{CD} = 0$. Тъй като $\overrightarrow{AB} = (4,0,-4) - (0,0,-2,) = (4,0,-2)$ и $\overrightarrow{CD} = (5,3,-3) - (2,0,0) = (3,3,-3)$, то ще имаме

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}\overrightarrow{AB} &= 4.(2+3\mu-4\lambda) + 0.3\mu - 2.(-3\mu+2+2\lambda)\\ &= 8 + 12\mu - 16\lambda + 6\mu - 4 - 4\mu = 18\mu - 20\lambda + 4 = 0,\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{MN}\overrightarrow{CD} = 3.(2+3\mu-4\lambda)+3.3\mu-3.(-3\mu+2+2\lambda)$$
$$= 6+9\mu-12\lambda+9\mu+9\mu-6-6\lambda = 27\mu-18\lambda = 0.$$

Така получихме системата

$$\left|\begin{array}{l} 18\mu-20\lambda+4=0 \\ 27\mu-18\lambda=0 \end{array}\right.$$

с решения $\lambda = \frac{1}{2}$ и $\mu = \frac{1}{3}$. Като заместим намерените стойности на λ и μ в изразите за $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$ съответно, получаваме $M(2,0,-3)$ и $N(3,1,-1)$.

Действително, правите AB и CD са кръстосани – ако бяха успоредни, горната система би имала безброй много решения, а ако бяха пресичащи се, тя не би притежавала решение. Разстоянието между две кръстосани прави е дължината на остаотсечка, т.е. на MN, и тъй като $\overrightarrow{MN} = N(3,1,-1)-(2,0,-3) = (1,1,2)$, то

$$\left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}\,.$$

Задача 6. Дадени са точките $A(-1,2,3)$, $B(0,4,4)$, $C(2,0,2)$, $D(-1,3,2)$. Намерете разстоянието от точката D до равнината ABC.

Решение:

Разстоянието от точката D до равнината ABC е височината h на триъгълната пирамида $ABCD$, ако ABC е основата. В сила е формулата

$$V_{ABCD} = \frac{S_{\Delta ABC}\cdot h}{3} \Longrightarrow h = \frac{3V_{ABCD}}{S_{\Delta ABC}}\,.$$

От друга страна, са изпълнени формулите

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| \quad \text{и} \quad V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AD}\right|.$$

Така получаваме

$$h = \frac{\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}.$$

Имаме $\overrightarrow{AB} = (0,4,4)-(-1,2,3) = (1,2,1)$, $\overrightarrow{AC} = (2,0,2)-(-1,2,3) = (3,-2,-1)$, $\overrightarrow{AD} = (-1,3,2)-(-1,2,3) = (0,1,-1)$,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \right) = (0,4,-8),$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{0^2 + 4^2 + (-8)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5},$$

$$\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AD} = (0,4,-8)(0,1,-1) = 0 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + (-8) \cdot (-1) = 12.$$

$$h = \frac{\left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|} = \frac{|12|}{4\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Задача 7. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и нека $\overrightarrow{AB} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{a}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Намерете ъгъла между векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ако е известно, че $|\vec{a}| = \left|\vec{b}\right| = 1$ и $\left|\overrightarrow{AM}\right| = \frac{\sqrt{13}}{4}$, където AM е медианата в ΔABC.

Решение:

За да опростим израза за $\overrightarrow{AB}$ прилагаме първата формула за двойно векторно произведение $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} = \vec{a}\vec{c}.\vec{b} - \vec{b}\vec{c}.\vec{a}$ – в нея заменяме $\vec{c}$ с $\vec{a}$ и получаваме

$$\overrightarrow{AB} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{a} = \vec{a}\vec{a}.\vec{b} - \vec{b}\vec{a}.\vec{a} = \vec{a}^2.\vec{b} - \vec{a}\vec{b}.\vec{a}.$$

Заместваме $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 1$, $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \cos \measuredangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \cos \measuredangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = x$ (положили сме $x = \cos \measuredangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$):

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - x\vec{a}.$$

Тогава за $\overrightarrow{AM}$ получаваме

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{b} - x\vec{a} + \vec{b}\right) = \vec{b} - \frac{x}{2}\vec{a}.$$

Тогава ще имаме

$$\overrightarrow{AM}^2 = \left(\vec{b} - \frac{x}{2}\vec{a}\right)^2 = \vec{b}^2 - x\vec{a}\vec{b} + \frac{x^2}{4}\vec{a}^2.$$

В последната формула заместваме $\vec{b}^2 = \left|\vec{b}\right|^2 = 1$, $\vec{a}\vec{b} = x$, $\vec{a}^2 = 1$ и получаваме

$$\overrightarrow{AM}^2 = 1 - x^2 + \frac{x^2}{4} = 1 - \frac{3}{4}x^2.$$

От друга страна имаме

$$\overrightarrow{AM}^2 = \left|\overrightarrow{AM}\right|^2 = \left(\frac{\sqrt{13}}{4}\right)^2 = \frac{13}{16}.$$

Сравняваме двата резултата за $\overrightarrow{AM}^2$ и получаваме

$$1 - \frac{3}{4}x^2 = \frac{13}{16} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \text{ и } x = \pm\frac{1}{2}.$$

Така намираме, че $x = \cos\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \pm\frac{1}{2}$, което показва, че ъгъла между векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е 60^0 или 120^0.

Задача 8. Да се докаже, че ако $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{a} \times \vec{b}$ и $\overrightarrow{DC} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, то тетраедърът $ABCD$ има обем

$$V = \frac{1}{6}|\vec{a}\vec{c}|(\vec{a} \times \vec{b})^2.$$

Решение:

Съгласно формулата за обем на тетраедър обемът ще възлиза на

$$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{DA}\overrightarrow{DB}\overrightarrow{DC}\right| = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DB})\overrightarrow{DC}\right| = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})\right)\left((\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}\right)\right|.$$

(в горния израз имаме две двойни векторни произведения $\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})$ и $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, които са в скаларно произведение помежду си). За да преобразуваме първото от тях, ще използваме втората формула за двойно векторно произведение $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a}\vec{c}.\vec{b} - \vec{a}\vec{b}.\vec{c}$, като заместваме $\vec{b}$ с $\vec{a}$ и $\vec{c}$ с $\vec{b}$. Получава се

$$\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a}\vec{b}.\vec{a} - \vec{a}\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}\vec{b}.\vec{a} - \vec{a}^2\vec{b}.$$

Първата формула за двойно векторно произведение я прилагаме директно:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a}\vec{c}.\vec{b} - \vec{b}\vec{c}.\vec{a}.$$

Заместваме получените изрази във формулата за V

$$V = \frac{1}{6}\left|(\vec{a}\vec{b}.\vec{a} - \vec{a}^2.\vec{b})(\vec{a}\vec{c}.\vec{b} - \vec{b}\vec{c}.\vec{a})\right|$$
$$= \frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b} \cdot \vec{a}\vec{c} \cdot \vec{a}\vec{b} - \vec{a}\vec{b} \cdot \vec{b}\vec{c} \cdot \vec{a}^2 - \vec{a}^2 \cdot \vec{a}\vec{c} \cdot \vec{b}^2 + \vec{a}^2 \cdot \vec{b}\vec{c} \cdot \vec{a}\vec{b}\right|.$$

Второто и четвъртото събираемо в горната сума са равни помежду си, но с обратен знак, затова ги съкращаваме и получаваме

$$V = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b} \cdot \vec{a}\vec{c} \cdot \vec{a}\vec{b} - \vec{a}^2 \cdot \vec{a}\vec{c} \cdot \vec{b}^2\right| = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{c}\left(\left(\vec{a}\vec{b}\right)^2 - \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2\right)\right|$$
$$= \frac{1}{6}|\vec{a}\vec{c}|\left|\left(\vec{a}\vec{b}\right)^2 - \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2\right|.$$

Остава да преобразуваме израза $\left(\vec{a}\vec{b}\right)^2 - \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 = \left(|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\gamma\right)^2 - |\vec{a}|^2\left|\vec{b}\right|^2 = |\vec{a}|^2\left|\vec{b}\right|^2\cos^2\gamma - |\vec{a}|^2\left|\vec{b}\right|^2 = |\vec{a}|^2\left|\vec{b}\right|^2(\cos^2\gamma - 1) = -|\vec{a}|^2\left|\vec{b}\right|^2 sin^2\gamma = -\left(|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin\gamma\right)^2 = -\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|^2$. Като заместим преобразувания израз във формулата за V, получаваме формулата, която трябва да се докаже.

Тема 4. Уравнения на права и окръжност в равнината

Теория

Уравнения на права в най-обща (афинна) координатна система. Нека правата l е зададена с колинеарен вектор $\vec{l}(l_1, l_2)$ и произволна точка от нея $M_0(x_0, y_0)$. Тогава ако $M(x, y)$ е произволна точка от правата, ще имаме $\overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{l}$ (където λ е произволно реално число) или

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \lambda\vec{l}.$$

Това уравнение се нарича векторно параметрично уравнение на права. То задава взаимно еднозначно съответствие между множеството от точките от l и множеството $\mathbb{R}$ на реалните числа – за всяка точка $M \in l$ съществува единствено $\lambda \in \mathbb{R}$ и за всяко число $\lambda \in \mathbb{R}$ съществува единствена точка $M \in l$, така че да е верен горния запис.

Ако запишем горното равенство в координати, получаваме

$$(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(l_1, l_2)$$

или

$$\left|\begin{array}{l} x = x_0 + \lambda l_1 \\ y = y_0 + \lambda l_2. \end{array}\right.$$

Това е скаларно параметричното уравнение на права.

Ако изразим параметъра λ, ще имаме

$$(\lambda =)\frac{x-x_0}{l_1}=\frac{y-y_0}{l_2}-$$

канонично уравнение на права. В горния израз не трябва да смятаме, че се дели на l_1 и l_2 – те са координатите на колинеарен вектор, затова едно от тях (но не и двете) може да е нула.

Ако правата е зададена с две свои точки $M_0(x_0,y_0)$ и $M_1(x_1,y_1)$, то можем да смятаме, че $\vec{l}=\overrightarrow{M_0M_1}$, тогава ще имаме

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}-$$

това е уравнение на права през две точки.

Ако тези две точки са пресечните точки на правата l с абсцисата и ординатата съответно, т.е. $M_0(p,0)$, $M_1(0,q)$, от горното уравнение получаваме

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1-$$

отрезово уравнение на права (числата p и q се наричат отрези на правата със съответните оси).

Уравнения на права в ортонормирана координатна система. Нека правата l е зададена с нормален вектор $\overrightarrow{n_l}(A,B)$ (такъв е всеки вектор, перпендикулярен на правата) и произволна точка от нея $M_0(x_0,y_0)$. Тогава ако $M(x,y)$ е произволна точка от правата, ще имаме

$$\overrightarrow{n_l}\perp\overrightarrow{M_0M}\Leftrightarrow\overrightarrow{n_l}\overrightarrow{M_0M}=0.$$

Това записано в координати изглежда така

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0-$$

уравнение на права по точка и нормала (само при ортонормирана к. с. скаларното произведение е равно на сумата от произведенията на координатите!). след разкриване на скобите получаваме

$$Ax+By-(Ax_0+By_0)=0.$$

Полагаме $C=-(Ax_0+By_0)$ и получаваме общото уравнение на права

$$Ax + By + C = 0.$$

Това е най-важното уравнение на права в равнината. Когато срещнем израза „да се намери правата“, трябва да намерим общото ѝ уравнение.

Ако в ортонормирана координатна система правата l има колинеарен вектор $\vec{l}(l_1, l_2)$, то вектор с координати $(-l_2, l_1)$ е нормален и обратно – ако вектора $\overrightarrow{n_l}(A, B)$ е нормален, то вектор с координати $(-B, A)$ е колинеарен.

Общо уравнение, при което нормалният вектор е нормиран (с единична големина) се нарича нормално уравнение на права. То има вида

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

Обикновено се използва за намиране на разстояние от точка до права. Нека точката е $N(x', y')$, тогава разстоянието $\delta(N; l)$ от точката N до правата l се пресмята, като в лявата страна на нормалното ѝ уравнение заместим x и y с x' и y' съответно:

$$\delta(N; l) = \frac{|Ax' + By' + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Уравнението

$$y = kx + q$$

се нарича декартово уравнение на права. Геометричното значение на коефициентите е следното: $k = tg\alpha$, α ъгълът, който правата сключва с положителната посока на оста Ox, а q е отреза с оста Oy. Уравнението

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

е уравнение на права по точка и ъглов коефициент.

Две прави в равнината. Разглеждаме правите l_1 и l_2 с общи уравнения

$$l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Възможни са три случая

1) при $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ правите съвпадат, т.е. $l_1 \equiv l_2$;
2) при $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ правите са успоредни, т.е. $l_1 \parallel l_2$;

3) при $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ правите се пресичат, т.е. $l_1 \cap l_2 = S$.

В случай на пресичане под сноп прави през т. S разбираме множеството от всички прави, минаващи през точката S. Тогава чрез уравнението

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

се задават всички прави от този сноп.

Окръжност в равнината. Една окръжност k се задава чрез центъра си $C(x_0, y_0)$ и радиуса си r. Ако $M(x, y)$ е произволна точка от окръжността $k(C; r)$, то ще е изпълнено

$$\left|\overrightarrow{CM}\right| = r \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}^2 = r^2 \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 -$$

това е каноничното уравнение на окръжност.

Въпросът кога изразът

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$$

задава окръжност се решава по следния начин: допълва се до точен квадрат

$$x^2 + 2 \cdot \frac{m}{2}x + \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{4} + y^2 + 2 \cdot \frac{n}{2}y + \frac{n^2}{4} - \frac{n^2}{4} + p = 0$$

$$\left(x + \frac{m}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{n}{2}\right)^2 = \frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} - p.$$

Така получаваме, че необходимото и достатъчно условие $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$ да задава окръжност е $\frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} - p > 0$. Тогава имаме окръжност с център $C\left(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}\right)$ и радиус $r = \sqrt{\frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} - p}$.

Решени задачи

Задача 1. Намерете уравнението на правата:

(а) през точката $M(1, -1)$, сключваща ъгъл 135^0 с оста Ox;

(б) през точката $N(3, -1)$, успоредна на оста Ox;

(в) пресичаща осите Ox и Oy съответно в точките $A(2,0)$, $B(0,-5)$;

(г) минаваща през точките $M_1(-4,-6)$ и $M_2(2,3)$;

(д) през точката $M(1,-1)$, успоредна на правата $p: 3x - y + 3 = 0$;

(е) през точката $P(-3,4)$, перпендикулярна на правата $q: 11x + 8y - 4 = 0$.

Решение:

(а) Ще използваме уравнението на права по точка и ъглов коефициент. Тъй като правата сключва ъгъл 135^0 с оста Ox ще имаме $k = tg\alpha = tg135^0 = -1$. Тогава получаваме

$$y - (-1) = -(x - 1) \Longrightarrow y + 1 = -x + 1.$$

Общото уравнение на тази права е $x + y = 0$.

(б) Тъй като правата е успоредна на оста Ox, то векторът $\vec{l}(1,0)$ е колинеарен за нея. Тогава, като използваме каноничното уравнение, получаваме

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-(-1)}{0}.$$

Общото уравнение на тази права е $y + 1 = 0$.

(в) В този случай използваме отрезовото уравнение. Тъй като отрезите са $p = 2$ и $q = -5$, получаваме

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-5} = 1.$$

Общото уравнение на тази права е $5x - 2y - 10 = 0$.

(г) Може да ползваме уравнение на права през две точки - $M_1(-4,-6)$ и $M_2(2,3)$. Ще имаме

$$\frac{x-(-4)}{2-(-4)} = \frac{y-(-6)}{3-(-6)} \Longrightarrow \frac{x+4}{6} = \frac{y+6}{9} \Longrightarrow \frac{x+4}{2} = \frac{y+6}{3} \Longrightarrow 3x + 12 = 2y + 12.$$

Общото уравнение на тази права е $3x - 2y = 0$.

(д) Ако означим търсената права с q, то от $q \parallel p$ следва, че нормалният вектор за p $\overrightarrow{n_p}(3,-1)$ е такъв и за q, т. е. $\overrightarrow{n_q}(3,-1)$. Тогава за q можем да използваме уравнението на права по точка и нормала:

$$3(x-1)+(-1)\big(y-(-1)\big)=0.$$

Общото уравнение на правата q е $3x-y-4=0$.

(е) Ако означим търсената права с p, то от $p \perp q$ следва, че нормалният вектор за q $\overrightarrow{n_q}(11{,}8)$ е колинеарен вектор за p, т.е. $\vec{p}(11{,}8)$. Ще използваме каноничното уравнение на права:

$$\frac{x-(-3)}{11}=\frac{y-4}{8} \Longrightarrow \frac{x+3}{11}=\frac{y-4}{8} \Longrightarrow 8x+24=11y-44.$$

Общото уравнение на правата p е $8x-11y-68=0$.

Задача 2. Относно афинна координатна система $K=O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$, за която $|\overrightarrow{e_1}|=2$, $|\overrightarrow{e_2}|=1$ и $\measuredangle(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})=60^0$, са дадени точката $M(3,-2)$ и правата p: $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{3}$. Да се намери уравнението на права l през M, която е: (а) успоредна на p; (б) перпендикулярна на p.

Решение:

(а) Тъй като $l \parallel p$ следва, че колинеарният вектор за p $\vec{p}(-2{,}3)$ е такъв и за l, т. е. $\vec{l}(-2{,}3)$ и можем да използваме каноничното уравнение на права

$$\frac{x-3}{-2}=\frac{y-(-2)}{3} \Longrightarrow \frac{x-3}{-2}=\frac{y+2}{3} \Longrightarrow 3x-9=-2y-4.$$

Общото уравнение на правата l е $3x+2y-5=0$.

(б) От $l \perp p$ следва, че колинеарният вектор за p $\vec{p}(-2{,}3)$ е нормален вектор за l, т.е. $\overrightarrow{n_l}(3,-1)$. Сега обаче не можем да използваме уравнението по точка и нормала, защото то е валидно само за ортонормирана координатна система (основава се на формулата за скаларно произведение $(a_1,a_2)(b_1,b_2)=a_1b_1+a_2b_2$). Но, разбира се, ще е изпълнено $\overrightarrow{n_l}\overrightarrow{M_0M}=0$. Така че, трябва да изведем формула за скаларно произведение, валидно за тази координатна система. Ще имаме

$$\begin{aligned}(a_1,a_2)(b_1,b_2) &= (a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2})(b_1\overrightarrow{e_1}+b_2\overrightarrow{e_2})\\ &= a_1b_1\overrightarrow{e_1}^2+(a_1b_2+a_2b_2)\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}+a_2b_2\overrightarrow{e_2}^2.\end{aligned}$$

Заместваме $\overrightarrow{e_1}^2=|\overrightarrow{e_1}|^2=4$, $\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}=|\overrightarrow{e_1}||\overrightarrow{e_2}|\cos 60^0=2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=1$ и $\overrightarrow{e_2}^2=|\overrightarrow{e_2}|^2=1$ и получаваме

$$(a_1,a_2)(b_1,b_2)=4a_1b_1+a_1b_2+a_2b_2+a_2b_2$$

към скаларното произведение $\overrightarrow{n_l}\overrightarrow{M_0M} = (A, B)(x - x_0, y - y_0) = 0$ и получаваме

$$4A(x - x_0) + A(y - y_0) + B(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,$$

което е уравнението на права по точка и нормала за тази координатна система. Заместваме в горното уравнение $A = -2$, $B = 3$, $x_0 = 3$, $y_0 = -2$ и получаваме

$$\begin{aligned} -8(x - 3) - 2(y + 2) + 3(x - 3) + 3(y + 2) &= -5(x - 3) + (y + 2) \\ = -5x + 15 + y + 2 &= -5x + y + 17 = 0. \end{aligned}$$

Общото уравнение на правата l е $5x - y - 17 = 0$.

Задача 3. Дадени са точката $A(1,2)$ и правата p: $3x - y - 11 = 0$. Намерете:

(а) точка A' – ортогонално-симетрична на A относно p;

(б) права p' – симетрична на p относно A;

(в) точка P от p, която е равноотдалечена от точките A и $B(-1,2)$;

Решение:

(а) Ясно е, че $AA' \perp p$ и ако с A_1 означим пресечната точка на AA' с p ($A_1 = AA' \cap p$, ще имаме $AA_1 = A_1A'$. Затова първо намираме спомагателната права a, минаваща през A (тя ще съдържа точките A_1 и A'). Тъй като $a \perp p$ нормалният вектор на p $\overrightarrow{n_p}(3, -1)$ ще колинеарен на a, т. е. $\vec{a}(3, -1)$. Това дава възможност да използваме каноничното уравнение:

$$\frac{x - 1}{3} = \frac{y - 2}{-1} \Longrightarrow -x + 1 = 3y - 6.$$

Общото уравнение на правата a е $x + 3y - 7 = 0$.

Тъй като $A_1 \in a$ и $A_1 \in p$, нейните координати (x, y) ще удовлетворяват и двете уравнения, т. е. ще бъдат решения на системата

$$\left| \begin{array}{l} x + 3y - 7 = 0 \\ 3x - y - 11 = 0, \end{array} \right.$$

след решаване на която получаваме $A_1(4,1)$. Точката A_1 е среда на отсечката AA', следователно нейните координати са средно аритметични на координатите на A и A'. Това показва, че съответните координати на A, A_1 и A' (в този ред) са последователни членове на аритметични прогресии. Отчитайки това получаваме $A'(7,0)$.

(б) Правата p' (като централно-симетричен образ на p) е успоредна на p, следователно нормалният вектор на p $\overrightarrow{n_p}(3,-1)$ ще е нормален вектор и на p'. От друга страна, ако означим $A_2 = a \cap p'$, ще имаме $A_1A = AA_2$, т.е. A е среда на отсечката A_1A_2 и съответните координати на A_1, A и A_2 (в този ред) са последователни членове на аритметични прогресии. От тук получаваме $A_2(-2,3)$. Това ни дава възможност да намерим уравнението на p' използвайки уравнението на права по точка и нормала:

$$3\big(x-(-2)\big)+(-1)(y-3)=0.$$

Общото уравнение на правата q е $3x-y+9=0$.

(в) Това, че P е равноотдалечена от точките $A(1,2)$ и $B(-1,2)$ означава, че тя лежи на симетралата на отсечката AB. Ако означим тази симетрала с c, то: 1) тя ще минава през средата $C(0,2)$ на AB и 2) $c \perp AB \Longrightarrow \overrightarrow{n_c} = \overrightarrow{BA}(2,0)$. Тогава може да намерим уравнението на c чрез уравнение на права по точка и нормала:

$$2(x-0)+0(y-2)=0.$$

Общото уравнение на правата c е $x=0$. Тогава $P = c \cap p$, т. е. координатите на P са решения на системата $x=0$; $3x-y-11=0$. Получаваме $P(0,-11)$.

Задача 4. Дадена е точка $A(1,7)$. Ако правите $p: 2x+3y-10=0$ и $q: x=-3+2s$, $y=s$ са симетрали на страните през върха A на ΔABC, намерете:

(а) координатите на върховете B и C;

(б) уравненията на страните на ΔABC;

(в) периметъра и лицето на ΔABC.

Решение:

(а) Нека p и q са симетрали съответно на страните AB и AC на ΔABC, тогава точките B и C са ортогонално-симетрични точки на A относно правите p и q (съответно) и координатите им могат да намерят по начина описан в решението на зад. 3 (а).

Означаваме с C_1 и B_1 средите на AB и AC съответно. Уравнението на правата AB може да се намери като се използва, че: 1) $\overrightarrow{n_{AB}} = \vec{p}(-3,2)$ и 2) $A(1,7) \in AB$. От уравнението на права по точка и нормала получаваме

$$-3(x-1)+2(y-7)=0.$$

Общото уравнение на правата AB е $3x - 2y + 11 = 0$. Тогава координатите на $C_1 = AB \cap p$ са решенията на системата

$$\begin{cases} 2x + 3y - 10 = 0 \\ 3x - 2y + 11 = 0. \end{cases}$$

Получаваме $C_1(-1,4)$. Тогава (от аритметичните прогресии) намираме $B(-3,1)$.

Аналогично, уравнението на AC се намира от: 1) $\overrightarrow{n_{AC}} = \vec{q}(2,1)$ (координатите на колинеарния вектор са коефициентите пред параметъра в скаларно параметричното уравнение на правата) и 2) $A(1,7) \in AC$. От уравнението на права по точка и нормала получаваме

$$2(x-1) + 1(y-7) = 0.$$

Общото уравнение на правата AC е $2x + y - 9 = 0$. Координатите на $B_1 = AC \cap q$ са решенията на системата

$$2x + y - 9 = 0;\ x = -3 + 2s;\ y = s.$$

За да я решим, заместваме $x = -3 + 2s$ и $y = s$ в уравнението на AC: $2(-3 + 2s) + s - 9 = 0 \Longrightarrow -6 + 4s + s - 9 = 0 \Longrightarrow s = 3$. Като заместим намерената стойност на s в $x = -3 + 2s$ и $y = s$ получаваме $B_1(3,3)$. Тогава (от аритметичните прогресии) намираме $C(5,-1)$.

(б) В решението на (а) намерихме уравненията на страните AB: $3x - 2y + 11 = 0$ и AC: $2x + y - 9 = 0$. Тъй като имаме координатите на $B(-3,1)$ и $C(5,-1)$, уравнението на BC можем да намерим като използваме уравнение на права през две точки:

$$\frac{x-(-3)}{5-(-3)} = \frac{y-1}{-1-1} \Longrightarrow \frac{x+3}{8} = \frac{y-1}{-2} \Longrightarrow -2x - 6 = 8y - 8.$$

Общото уравнение на правата BC е $2x + 8y - 2 = 0$.

(в) За дължините на страните на ΔABC ще имаме

$$AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = |(-3,1) - (1,7)| = |(-4,-6)| = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13};$$

$$AC = \left|\overrightarrow{AC}\right| = |(5,-1) - (1,7)| = |(4,-8)| = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5};$$

$$BC = \left|\overrightarrow{BC}\right| = |(5,-1) - (-3,1)| = |(8,-2)| = \sqrt{8^2 + (-2)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}.$$

Периметъра P на ΔABC е

$$P = AB + AC + BC = 2\sqrt{13} + 4\sqrt{5} + 2\sqrt{17}.$$

Лицето на триъгълника можем да пресметнем по формулата

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}|(-4,-6,0) \times (4,-8,0)| = \frac{1}{2}|(0,0,56)| = 28.$$

Задача 5. Намерете права от снопа, съдържащ правите $l_1: x + y = 0$ и $l_2: x + 2y - 1 = 0$, която е на разстояние 1 от точката $A(1,0)$.

Решение:

Тъй като правите l_1 и l_2 се пресичат: $l_1 \cap l_2 = S(-1,1)$, правите от снопа прави, определен от S ще се задават с уравнението

$$\lambda(x + y) + \mu(x + 2y - 1) = 0, \text{за } (\lambda, \mu) \neq (0,0).$$

Последното уравнение може да се преобразува така

$$(\lambda + \mu)x + (\lambda + 2\mu)y - \mu = 0.$$

Тъй като става дума за разстояние от точка до права, то горното уравнение трябва да се приведе до нормално уравнение, т. е. лявата страна да се раздели с големината на нормалния вектор $(\lambda + \mu, \lambda + 2\mu)$. Ще имаме

$$|(\lambda + \mu, \lambda + 2\mu)| = \sqrt{(\lambda + \mu)^2 + (\lambda + 2\mu)^2} = \sqrt{2\lambda^2 + 6\lambda\mu + 5\mu^2}.$$

Тогава нормалното уравнение ще бъде

$$\frac{(\lambda + \mu)x + (\lambda + 2\mu)y - \mu}{\sqrt{2\lambda^2 + 6\lambda\mu + 5\mu^2}} = 0.$$

За разстоянието от точка $A(1,0)$ до произволна права l от снопа получаваме

$$\delta(A; l) = \frac{|(\lambda + \mu) \cdot 1 + (\lambda + 2\mu) \cdot 0 - \mu|}{\sqrt{2\lambda^2 + 6\lambda\mu + 5\mu^2}} = \frac{|\lambda + \mu - \mu|}{\sqrt{2\lambda^2 + 6\lambda\mu + 5\mu^2}}$$
$$= \frac{|\lambda|}{\sqrt{2\lambda^2 + 6\lambda\mu + 5\mu^2}} = 1.$$

Трябва да решим уравнението $\sqrt{2\lambda^2 + 6\lambda\mu + 5\mu^2} = |\lambda|$. След повдигане на квадрат получаваме $2\lambda^2 + 6\lambda\mu + 5\mu^2 = \lambda^2$ или $\lambda^2 + 6\lambda\mu + 5\mu^2 = 0$. Последното уравнение разделяме на μ^2 и получаваме

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + 6\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + 5 = 0 \Rightarrow \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)_{1,2} = -3 \pm \sqrt{3^2 - 5} = -3 \pm 2 \Rightarrow \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)_1 = -5, \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)_2 = -1.$$

За първото решение можем да считаме (с точност до множител), че $(\lambda, \mu) = (-5,1)$. Тогава ще имаме правата $-4x - 3y - 1 = 0$ или $4x + 3y + 1 = 0$. За второто решение - $(\lambda, \mu) = (-1,1)$ и $y - 1 = 0$.

Задача 6. Ако някое от уравненията задава окръжност:

(а) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$;

(б) $3x^2 - 3y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$;

(в) $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 1 = 0$;

(г) $x^2 + y^2 + 2x - y + 5 = 0$,

намерете центъра и радиуса ѝ.

Решение:

(а) Делим уравнението на 3 и получаваме

$$x^2 + y^2 - 2x + \frac{4}{3}y - \frac{1}{3} = 0.$$

Коефициентите m, n и p в израза $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$ в този конкретен случай са $m = -2$, $n = \frac{4}{3}$ и $p = -\frac{1}{3}$. Прилагаме критерия за окръжност:

$$\frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} - p = \frac{(-2)^2}{4} + \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2}{4} - \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{4}{9} + \frac{1}{3} = \frac{16}{9} = \left(\frac{4}{9}\right)^2 > 0.$$

Тъй като критерият е изпълнен, получаваме, че изразът задава окръжност с център $C\left(1, -\frac{2}{3}\right)$ и радиус $r = \frac{4}{3}$.

(б) Изразът не задава окръжност, защото коефициентите пред x^2 и y^2 са различни (в случая с равни абсолютни стойности, но различни знаци).

(в) Решаваме чрез допълване на изразите за x и y съответно до точен квадрат. Ще имаме

$$x^2 + y^2 + 2x - 10y + 1 = x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + 1 - 1 + y^2 - 2 \cdot 5 \cdot y + 25 - 25 + 1$$
$$= (x+1)^2 + (y-5)^2 - 25 = 0 \text{ или } (x+1)^2 + (y-5)^2 = 25.$$

Последното е уравнение на окръжност с център $C(-1,5)$ и радиус $r = 5$.

(г) Прилагаме критерия при $m = 1$, $n = -1$ и $p = 5$. Ще имаме

$$\frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} - p = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 5 = -\frac{9}{2} < 0.$$

Според критерия, изразът не задава окръжност.

Задача 7. Намерете уравнението на окръжността:

(а) през точките $A(3,0)$ и $B(-1,2)$, ако центърът ѝ лежи на правата $l: x + 2y - 3 = 0$. Намерете допирателните към окръжността, които са успоредни на l. Намерете допирателните към окръжността, минаващи през точка $C(-2,2)$.

(б) описана около триъгълника с върхове $A(1,-1)$, $B(1,1)$, $C(5,3)$.

Решение:

(а) Очевидно, AB е хорда на окръжността. Ще използваме едно важно свойство на хордите, а именно, че права, минаваща през средата на хорда и перпендикулярна на нея е диаметрална права за окръжността. Средата D на хордата AB има координати $(1,1)$. Намираме права d с нормален вектор $\overrightarrow{n_d} = \overrightarrow{BA} = (3,0) - (-1,2) = (4,-2)$ и минаваща през D (чрез уравнение на права по точка и нормала):

$$4(x-1) - 2(y-1) = 0.$$

Общото уравнение на d е $2x - y - 1 = 0$. Тогава центърът O на окръжността ще лежи на d, следователно $O = d \cap l$ и координатите му са решения на системата

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0. \end{cases}$$

Получаваме $O(1,1)$ ($O \equiv D$ защото хордата AB се оказа диаметър на окръжността). За радиуса r на тази окръжност ще имаме

$$r = \left|\overrightarrow{OA}\right| = |(2,-1)| = \sqrt{5}.$$

Тогава уравнението на търсената окръжност е

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5.$$

Всички прави, успоредни на l имат същия нормален вектор като нея, следователно имат уравнения $x + 2y + c = 0$ при различни стойности на параметъра c. Две от тези прави ще бъдат допирателни към окръжността, ако сеченията им с нея се състоят от по една точка, т. е. системата

$$\left| \begin{array}{c} x + 2y + c = 0 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 5 \end{array} \right.$$

притежава единствено решение. Тъй като от линейното уравнение имаме $x = -2y - c$ и като заместим в другото уравнение получаваме

$$(-2y - c - 1)^2 + (y-1)^2 = 5,$$

то единствеността на решението на системата се свежда до единственост на решението на последното квадратно уравнение с параметър. След преработване получаваме

$$5y^2 + 2(2c+1)y + (c+1)^2 - 4 = 0.$$

Последното уравнение има един корен точно тогава, когато дискриминантата му е нула. Пресмятаме

$$\begin{aligned} D = (2c+1)^2 - 5[(c+1)^2 - 4] &= 4c^2 + 4c + 1 - 5c^2 - 10c + 15 \\ &= -c^2 - 6c + 16 = 0. \end{aligned}$$

Уравнението $D = 0 \Leftrightarrow c^2 + 6c - 16 = 0$ има решения $c_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9+16} = 3 \pm 5 \Longrightarrow c_1 = 8$ и $c_2 = -2$. Така получаваме двете прави, които отговарят на условията $x + 2y + 8 = 0$ и $x + 2y - 2 = 0$.

Нека m е произволна права, минаваща през точка $C(-2,2)$. Ако $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$ е нормалния ѝ вектор, то

$$\lambda(x+2) + \mu(y-2) = \lambda x + \mu y + 2\lambda - 2\mu = 0$$

е уравнението ѝ (с точност до множител). Всъщност, това е най-общото уравнение на сноп прави, зададен от C. Тази права ще бъде допирателна към окръжността точно тогава, когато е на разстояние от центъра ѝ, равно на радиуса, т. е.

$$\delta(O; m) = \frac{|\lambda \cdot 1 + \mu \cdot 1 + 2\lambda - 2\mu|}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} = \frac{|3\lambda - \mu|}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} = \sqrt{5}.$$

Повдигаме на квадрат и получаваме $(3\lambda - \mu)^2 = 5(\lambda^2 + \mu^2)$ или $9\lambda^2 - 6\lambda\mu + \mu^2 = 5\lambda^2 + 5\mu^2$. Получаваме уравнението $4\lambda^2 - 6\lambda\mu - 4\mu^2$, което (след делене на $2\mu^2$) преобразуваме в

$$2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 - 3\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) - 2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)_{1,2} = \frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{3^2+16}\right) = \frac{1}{2}(3 \pm 5) \Rightarrow \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)_1 = 4, \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)_2 = -1.$$

Така получаваме правите: за $(\lambda, \mu) = (4,1)$ $4x + y + 6 = 0$ и за $(\lambda, \mu) = (-1,1)$ $x - y + 4 = 0$.

(б) Точките $D_1(1,0)$ и $D_2(3,1)$ са среди на хордите AB и AC съответно. Построяваме диаметралните прави $d_1: D_1 \in d_1; \overrightarrow{AB}(0,2) \perp d_1$ и $d_2: D_2 \in d_2; \overrightarrow{AC}(4,4) \perp d_2$ (те са и симетрали на AB и AC съответно). Като използваме уравнение на права по точка и нормала, ще имаме $d_1: 0(x-1) + 2(y-0) = 0$ и $d_2: 4(x-3) + 4(y-1) = 0$. Общите уравнения на тези прави са $d_1: y = 0$ и $d_2: x + y - 4 = 0$. Тъй като центърът на окръжността O е сечение на диаметрите d_1 и d_2, получаваме $O(4,0)$. За радиуса на тази окръжност ще имаме

$$r^2 = \left(\overrightarrow{OA}\right)^2 = (-3,-1)^2 = (-3)^2 + (-1)^2 = 10.$$

Тогава уравнението на окръжността е

$$(x-4)^2 + (y-0)^2 = 10.$$

Тема 5. Уравнения на права, равнина и сфера в пространството

Теория

Уравнения на права. Всички афинни уравнения на права в равнината (с допълване на третата координата) са валидни и в тримерното пространство. Нека правата l е зададена с колинеарен вектор $\vec{l}(l_1, l_2, l_3)$ и произволна точка от нея $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Тогава ако $M(x, y, z)$ е произволна точка от правата, ще имаме $\overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{l}$ (където λ е произволно реално число) или

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \lambda\vec{l}.$$

Това уравнение се нарича векторно параметрично уравнение на права. То задава взаимно еднозначно съответствие между множеството от точките от l и множеството $\mathbb{R}$ на реалните числа – за всяка точка $M \in l$ съществува единствено $\lambda \in \mathbb{R}$ и

за всяко число $\lambda \in \mathbb{R}$ съществува единствена точка $M \in l$, така че да е верен горния запис.

Ако запишем горното равенство в координати, получаваме

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(l_1, l_2, l_3)$$

или

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda l_1 \\ y = y_0 + \lambda l_2 \\ z = z_0 + \lambda l_3 \end{cases}$$

Това е система скаларно параметрични уравнения на права.

Ако изразим параметъра λ, ще имаме

$$(\lambda =) \frac{x - x_0}{l_1} = \frac{y - y_0}{l_2} = \frac{z - z_0}{l_3} -$$

канонична система уравнения на права. В горния израз не трябва да смятаме, че се дели на l_1, l_2 и l_3 – те са координатите на колинеарен вектор, затова едно от тях (но не и трите) може да е нула.

Ако правата е зададена с две свои точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$, то можем да смятаме, че $\vec{l} = \overrightarrow{M_0M_1}$, тогава ще имаме

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} -$$

това е система от уравнения на права през две точки.

Уравнения на равнина. Нека равнина α е зададена с нейна фиксирана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и два компланарни вектора $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ и $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ и нека $M(x, y, z)$ е произволна точка от равнината, тогава за вектора $\overrightarrow{M_0M}$ ще е валидно еднозначното представяне $\overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ за двойката реални числа (λ, μ) или

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}.$$

Това е векторно параметрично уравнение на равнина.

Ако запишем горното равенство в координати, получаваме

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3)$$

или

$$\left|\begin{array}{l} x = x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{array}\right.$$

Това е система от скаларно параметрични уравнения на равнина. Горната система е валидна в най-обща (афинна) координатна система; следващите уравнения се отнасят за ортонормирана координатна система.

Фактът, че векторите $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ е еквивалентен на нулирането на тяхното смесено произведение:

$$\vec{u}\vec{v}\overrightarrow{M_0M} = 0.$$

Като приложим формулата за смесено произведение в координати, получаваме

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Като следствие можем да получим детерминантно уравнение на равнина през три точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ (ако положим $\vec{u} = \overrightarrow{M_0M_1}$ и $\vec{v} = \overrightarrow{M_0M_2}$):

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Нека равнината α е зададена с нормален вектор $\overrightarrow{N_\alpha}(A, B, C)$ (такъв е всеки вектор, перпендикулярен на равнината) и произволна точка от нея $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Тогава ако $M(x, y, z)$ е произволна точка от правата, ще имаме

$$\overrightarrow{N_\alpha} \perp \overrightarrow{M_0M} \Leftrightarrow \overrightarrow{N_\alpha}\overrightarrow{M_0M} = 0.$$

Това записано в координати изглежда така

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 -$$

уравнение на равнина по точка и нормала (само при ортонормирана к. с. скаларното произведение е равно на сумата от произведенията на координатите!). След разкриване на скобите получаваме

$$Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0.$$

Полагаме $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$ и получаваме общото уравнение на права

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Това е най-важното уравнение на равнина в пространството. Когато срещнем израза „да се намери равнината“, трябва да намерим общото ѝ уравнение.

Ако равнина е зададена с точка M_0 и два компланарни вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$, лесно получаваме нормалния вектор $\overrightarrow{N_\alpha}$ като тяхно векторно произведение: $\overrightarrow{N_\alpha} = \vec{u} \times \vec{v}$.

Общо уравнение, при което нормалният вектор е нормиран (с единична големина) се нарича нормално уравнение на равнина. То има вида

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0.$$

Обикновено се използва за намиране на разстояние от точка до права. Нека точката е $N(x', y', z')$, тогава разстоянието $\delta(N; \alpha)$ от точката N до равнината α се пресмята, като в лявата страна на нормалното ѝ уравнение заместим x, y и z с x', y' и z' съответно:

$$\delta(N; \alpha) = \frac{|Ax' + By' + Cz' + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Две равнини в пространството. Разглеждаме равнините α_1 и α_2 с общи уравнения

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{и } \alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Възможни са три случая

1) ако $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ равнините съвпадат, т.е. $\alpha_1 \equiv \alpha_2$;
2) ако $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ равнините са успоредни, т.е. $\alpha_1 \parallel \alpha_2$;
3) ако $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ равнините се пресичат, т.е. $\alpha_1 \cap \alpha_1 = l$.

Това е още една възможност за задаване на права в пространството (като сечение на две равнини). В случай на пресичане под сноп равнини през пр. l разбираме множеството от всички равнини, съдържащи правата l. Тогава чрез уравнението

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

се задават всички равнини от този сноп.

Сфера в пространството. Една сфера S се задава чрез центъра си $C(x_0, y_0, z_0)$ и радиуса си R. Ако $M(x, y, z)$ е произволна точка от сферата $S(C; R)$, то ще е изпълнено

$$\left|\overrightarrow{CM}\right| = R \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}^2 = R^2 \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 -$$

това е каноничното уравнение на сфера.

Решени задачи

Задача 1. Дадени са точките $A(3, -2,2)$, $B(1,0,4)$, $C(0,0,5)$, правата $g: \frac{x-5}{5} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+1}{1}$ и равнината $\alpha: 2x - 3y + z + 7 = 0$. Намерете уравнението на равнината:

(а) през A и B, успоредна на g;

(б) през A и g;

(в) през A и B, перпендикулярна на α;

(г) през A, перпендикулярна на g;

(д) през B, успоредна на α;

(е) през A, B, C.

Решение:

(а) Векторите $\overrightarrow{AB}(-2,2,2)$ и колинеарният вектор на g $\vec{g}(5,3,1)$ са компланарни на търсената равнина β, следователно векторното им произведение

$$\overrightarrow{AB} \times \vec{g} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}\right) = (-4,12,-16)$$

е нормален вектор на β, такъв е и векторът $(1, -3,4)$ (получен чрез делене на -4), т. е. $\overrightarrow{N_\beta}(1, -3,4)$. Може да съставим уравнението на β по точка A и нормала $\overrightarrow{N_\beta}$:

$$1(x - 3) + (-3)\big(y - (-2)\big) + 4(z - 2) = 0.$$

Общото уравнение на β е $x - 3y + 4z - 17 = 0$.

(б) Тъй като търсената равнина γ съдържа правата g, тя съдържа всички нейни точки, например точката $D(5,3,-1)$. Така че сведохме до случая, разгледан в (а): компланарните вектори са $\overrightarrow{AD}(2,5,-3)$ и $\vec{g}(5,3,1)$; векторното им произведение е

$$\overrightarrow{AD} \times \vec{g} = \left(\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}\right) = (14,-17,-19) = \overrightarrow{N_\gamma}.$$

Съставяме уравнението на γ по точка A и нормала $\overrightarrow{N_\gamma}$

$$14(x-3) + (-17)\big(y-(-2)\big) + (-19)(z-2) = 0.$$

Общото уравнение на γ е $14x - 17y - 19z - 38 = 0$.

(в) От това, че дадената равнина α е перпендикулярна на търсената равнина δ следва, че нормалният вектор $\overrightarrow{N_\alpha}(2,-3,1)$ на α е компланарен на δ. Така че сведохме до случая, разгледан в (а): компланарните вектори са $\overrightarrow{AB}(-2,2,2)$ и $\overrightarrow{N_\alpha}(2,-3,1)$; векторното им произведение е

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{N_\alpha} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}\right) = (8,6,2) \parallel (4,3,1) = \overrightarrow{N_\delta}.$$

Съставяме уравнението на δ по точка A и нормала $\overrightarrow{N_\delta}$

$$4(x-3) + 3\big(y-(-2)\big) + 1(z-2) = 0.$$

Общото уравнение на γ е $4x + 3y + z - 8 = 0$.

(г) Тъй като търсената равнина ε е перпендикулярна на правата g, то колинеарният вектор на g $\vec{g}(5,3,1)$ е нормален вектор за ε: $\overrightarrow{N_\varepsilon}(5,3,1)$. Съставяме уравнението на ε по точка $A(3,-2,2)$ и нормала:

$$5(x-3) + 3\big(y-(-2)\big) + 1(z-2) = 0.$$

Общото уравнение на γ е $5x + 3y + z - 11 = 0$.

(д) Търсената равнина ζ е успоредна на α, следователно двете равнини имат едни и същи нормални вектори: $\overrightarrow{N_\zeta} = \overrightarrow{N_\alpha} = (2,-3,1)$. Съставяме уравнението на ε по точка $B(1,0,4)$ и нормала:

$$2(x-1) + (-3)(y-0) + 1(z-4) = 0.$$

Общото уравнение на ζ е $2x - 3y + z - 6 = 0$.

(е) Векторите $\overrightarrow{AB}(-2,2,2)$ и $\overrightarrow{AC}(-3,2,3)$ са компланарни на търсената равнина η, следователно векторното им произведение

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}\right) = (2,0,2)$$

е нормален вектор на η, такъв е и вектора $(1,0,1)$. Съставяме уравнението на η по точка $B(1,0,4)$ и нормала $\overrightarrow{N_\eta}(1,0,1)$:

$$1(x-1) + 0(y-0) + 1(z-4) = 0.$$

Общото уравнение на η е $x + z - 5 = 0$.

Задача 2. Намерете уравнението на равнина, която:

(а) съдържа точката $A(2,3,1)$ и правата $l: 3x - 2y + 5z - 2 = 0, x - 4y + z + 3 = 0$;

(б) съдържа правата $l: 2x + y - z + 1 = 0, x - y + z - 1 = 0$ и е перпендикулярна на равнината $\alpha: x + 2y + 3z + 5 = 0$;

(в) съдържа правата $l: 2x - 3y - z = 0, 4x + y + 5z - 28 = 0$ и е на разстояние $\sqrt{14}$ от координатното начало.

Решение:

(а) След като правата l се съдържа в (или е успоредна на) търсената равнина β, колинеарният ѝ вектор $\vec{l}$ е компланарен на β. От друга страна, ако една права е зададена като сечение на две равнини (както е в случая), колинеарният и вектор ще е векторното произведение на нормалните вектори. Тези нормални вектори в случая са $\overrightarrow{N_1}(3,-2,5)$ и $\overrightarrow{N_2}(1,-4,1)$. Ще имаме

$$\overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2} = \left(\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}\right) = (18,2,-10) \parallel (9,1,-5) = \vec{l}.$$

Сега можем да вземем една произволна точка B от правата l. За целта ще параметризираме – нека, например, $y = s$. От второто уравнение за l получаваме $x = 4s - z - 3$, заместваме в първото: $3(4s - z - 3) - 2s + 5z - 2 = 0 \Longrightarrow 10s + 2z - 11 = 0 \Longrightarrow z = 5{,}5 - 5s$, $x = 4s - (5{,}5 - 5s) - 3 = -8{,}5 + 9s$. При $s = 1$ получаваме точката $B(0{,}5; 1; 0{,}5)$. Тъй като A и B са от β, то $\overrightarrow{AB}(-1{,}5; -2; -0{,}5)$ е компланарен вектор на β. Такъв ще е и вектора $-2\overrightarrow{AB} = (3; 4; 1)$. Така получихме два компланарни вектори на β - $\vec{l}(9,1,-5)$ и $(3; 4; 1)$ – векторното им произведение е нормален вектор на β. Получаваме

$$\vec{l} \times (3;4;1) = \left(\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -5 & 9 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\right) = (21,-24,33) \parallel (7,-8,11) = \overrightarrow{N_\beta}.$$

Съставяме уравнението на β по точка $A(2,3,1)$ и нормала $\overrightarrow{N_\beta}(7,-8,11)$:

$$7(x-2) - 8(y-3) + 11(z-1) = 0.$$

Общото уравнение на β е $7x - 8y + 11z - 1 = 0$.

(б) От параметричното уравнение на правата l ще вземем една произволна точка от l (и от търсената равнина γ) и вектор $\vec{l}$, компланарен с γ. Имаме $x = s$; от първото уравнение - $y = z - 2s - 1$; от второто - $s - (z - 2s - 1) + z - 1 = 3s = 0 \Longrightarrow s = 0$ и $x = 0$, $y = z - 1$. Така получихме, че $x = s$ не може да бъде параметър на правата (защото всички нейни точки имат първа координата нула). Тогава избираме друг параметър $z = u$, тогава параметричното уравнение на l е: $x = 0 + 0u$, $y = -1 + 1u$, $z = 0 + 1u$. Тогава (при $u = 0$) точката е $B(0,-1,0)$ и $\vec{l}(0,1,1)$.

Друг компланарен вектор за равнината γ е нормалният вектор $\overrightarrow{N_\alpha}(1,2,3)$ на α. Можем вече да получим един нормален вектор на търсената равнина

$$\overrightarrow{N_\gamma} = \vec{l} \times \overrightarrow{N_\alpha} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) = (1,1,-1).$$

Съставяме уравнението на γ по точка $B(0,-1,0)$ и нормала $\overrightarrow{N_\gamma}(1,1,-1)$:

$$1(x-0) + 1(y+1) - 1(z-0) = 0.$$

Общото уравнение на γ е $x + y - z + 1 = 0$.

(в) Търсената равнина η принадлежи на снопа равнини, съдържащ l, следователно има уравнение

$$\begin{aligned} &\lambda(2x - 3y - z) + \mu(4x + y + 5z - 28) \\ &\qquad = (2\lambda + 4\mu)x + (-3\lambda + \mu)y + (-\lambda + 5\mu)z - 28\mu = 0 \end{aligned}$$

за някаква двойка числа (λ, μ) (с точност до множител). Тъй като е дадено разстоянието от точка до правата, а то се измерва чрез нормалното уравнение, трябва да пресметнем големината на нормалния вектор:

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{N_\eta}\right| &= \sqrt{(2\lambda + 4\mu)^2 + (-3\lambda + \mu)^2 + (-\lambda + 5\mu)^2} = \sqrt{14\lambda^2 + 42\mu^2} \\ &= \sqrt{14}\sqrt{\lambda^2 + 3\mu^2}. \end{aligned}$$

Тогава нормалното уравнение на η е

$$\frac{(2\lambda+4\mu)x+(-3\lambda+\mu)y+(-\lambda+5\mu)z-28\mu}{\sqrt{14}\sqrt{\lambda^2+3\mu^2}}=0,$$

а разстоянието $\delta(O;\eta)$ от началото на координатната система $O(0,0,0)$ до равнината -

$$\frac{|(2\lambda+4\mu)\cdot 0+(-3\lambda+\mu)\cdot 0+(-\lambda+5\mu)\cdot 0-28\mu|}{\sqrt{14}\sqrt{\lambda^2+3\mu^2}}=\frac{|28\mu|}{\sqrt{14}\sqrt{\lambda^2+3\mu^2}}=\sqrt{14}$$
$$\Longrightarrow |28\mu|=14\sqrt{\lambda^2+3\mu^2}\Longrightarrow |2\mu|=\sqrt{\lambda^2+3\mu^2}.$$

След повдигане на квадрат получаваме $4\mu^2=\lambda^2+3\mu^2$; $\mu^2=\lambda^2$ или $\mu=\pm\lambda$. В случай на " $+$ " можем да вземем двойката $(\lambda,\mu)=(1,1)$ и получаваме

$$\eta_1: 6x-2y+4z-28=0.$$

При " $-$ " - $(\lambda,\mu)=(-1,1)$ и

$$\eta_2: 2x+4y+6z-28=0.$$

Задача 3. Дадени са т. $M(1,-3,4)$ и правата $a: 2x-y+z-3=0, x+3y-z-1=0$. Намерете уравнението на права през M:

(а) успоредна на a;

(б) перпендикулярна на равнината, определена с второто уравнение на a.

Решение:

(а) Тъй като двете прави (дадената a и търсената b) са успоредни, те имат един и същ колинеарен вектор: $\vec{b}=\vec{a}$, така че трябва да намерим $\vec{a}$. Ако означим двете равнини на които правата a е сечение с α и β, то $\vec{a}$ ще бъде векторно произведение на $\overrightarrow{N_\alpha}(2,-1,1)$ и $\overrightarrow{N_\beta}(1,3,-1)$:

$$\overrightarrow{N_\alpha}\times\overrightarrow{N_\beta}=\left(\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}\right)=(-2,3,7)\parallel(2,-3,-7)=\vec{a}=\vec{b}.$$

Вече можем да запишем каноничното уравнение на b (по $\vec{b}$ и M)

$$b: \frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-4}{-7}.$$

(б) Търсената права c е перпендикулярна на равнината β, следователно нормалният вектор на β $\overrightarrow{N_\beta}(1,3,-1)$ е колинеарен на c: $\overrightarrow{N_\beta}=\vec{c}$. Можем да съставим каноничното уравнение на c (по $\vec{c}$ и M)

$$c: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-4}{-1}.$$

Задача 4. Намерете ортогонално-симетрична точка на точката $M(3,1,-4)$ относно:

(а) точката $A(0,-1,1)$;

(б) равнината $\alpha: x - 4y + z + 23 = 0$ и разстоянието от M до α;

(в) правата $l: x = -1 + 2s, y = -4 - s, z = -1 - s$ и разстоянието от M до l.

Решение:

(а) Нека с M' означим образа на т. M при централна симетрия с център A. От свойствата на централната симетрия ще имаме $MA = AM'$, следователно A е среда на отсечката MM' и координатите ѝ са средно аритметични на координатите на M и M'. Тогава съответните координати на M, A и M' са последователни членове на три аритметични прогресии. Така получаваме $M'(-3,-3,6)$.

(б) С M'' означаваме образа на т. M при симетрия относно α. От свойствата на симетрия относно равнина следва, че M'' е образ на M при централна симетрия с център т. M_1 – петата на перпендикуляра на т. M към α. Затова построяваме спомагателна права $m: M \in m, m \perp \alpha$ (чрез тази права се спуска въпросния перпендикуляр). От $m \perp \alpha \Longrightarrow \vec{m} = \overrightarrow{N_\alpha}(1,-4,1)$. Можем да съставим каноничното уравнение на m (по $\vec{m}$ и M)

$$m: \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+4}{1}.$$

Тогава ще имаме $M_1 = m \cap \alpha$ (казва се, че т. M_1 е прибод на m с α). За да намерим т. M_1 трябва уравнението на пробождащата права m да е скаларно параметрично. Ще имаме

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+4}{1} = s \Longrightarrow x = 3 + s, y = 1 - 4s, z = -4 + s.$$

Заместваме така получените x, y и z (зависещи от s) в уравнението на α и получаваме уравнение с едно неизвестно – параметъра s:

$$x - 4y + z + 23 = (3 + s) - 4(1 - 4s) + (-4 + s) + 23 = 18 + 18s = 0.$$

Решението на това уравнение е $s = -1$ и като заместим тази стойност на s в скаларно параметричното уравнение, получаваме координатите на $M_1(2,5,-5)$. Тогава (като използваме решението на (а)), получаваме координатите на $M''(1,9,-6)$.

Разстоянието от M до α ще съвпада с разстоянието от M до петата на перпендикуляра M_1. Ще имаме

$$\delta(M;\alpha) = \left|\overrightarrow{MM_1}\right| = |(-1,4,-1)| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Разбира се, същият резултат би се получил, ако използваме нормалното уравнение на α.

(в) С M''' означаваме образа на т. M при симетрия относно l и нека β е спомагателна равнина през т. M и перпендикулярна на l. От свойствата на симетрия относно права (осева симетрия в пространството) следва, че M''' е образ на M при централна симетрия с център т. $M_2 = l \cap \beta$.

Първо намираме уравнението на спомагателната равнина β. Тъй като тя е перпендикулярна на l, нормалният ѝ вектор $\overrightarrow{N_\beta} = \vec{l}(2,-1,-1)$. Така можем да съставим уравнението на β по точка и нормала (M и $\overrightarrow{N_\beta}$):

$$2(x-3) - 1(y-1) - 1(z+4) = 0.$$

Общото уравнение на β е $2x - y - z - 9 = 0$.

Сега ще намерим координатите на т. M_2 като прибод на l с β. Заместваме x, y и z (зависещи от s) от скаларно параметричното уравнение на l в уравнението на β и получаваме уравнение с едно неизвестно – параметъра s:

$$2x - y - z - 9 = 2(-1+2s) - (-4-s) - (-1-s) - 9 = -6 + 6s = 0.$$

Решението на това уравнение е $s = 1$ и като заместим тази стойност на s в скаларно параметричното уравнение, получаваме координатите на $M_2(1,-5,-2)$. Тогава (като използваме решението на (а)), получаваме координатите на $M''(-1,-11,0)$.

Разстоянието от M до l ще съвпада с разстоянието от M до M_2. Ще имаме

$$\delta(M;l) = \left|\overrightarrow{MM_2}\right| = |(-2,-6,2)| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 + 2^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}.$$

Задача 5. Намерете трансверзалата на кръстосаните прави:

(а) $l: x = 1 + s, y = 2 - s, z = 1 + s; m: x = t, y = 3 + t, y = -3 + 2t$, лежаща в равнината $\alpha: x + y + 2z - 3 = 0$;

(б) $l: x + y = 0, x - y + z + 4 = 0$; $m: x + 3y - 1 = 0; y + z - 2 = 0$ през точката $A(2,3,1)$;

(в) $l: \frac{x-10}{5} = \frac{y+7}{4} = \frac{z}{1}$; $m: \frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z}{1}$, успоредна на правата $n: \frac{x+2}{8} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-3}{1}$;

(г) $l: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{1}$; $m: x = 1 + 2s, y = -2s, z = -1 + s$, перпендикулярна на тези прави (ос на правите). Да се намери разстоянието между пеавите.

Решение:

(а) Да припомним дефиницията на трансферзала: права, пресичаща две кръстосани прави в пространството. От дефиницията се вижда, че за всяка двойка кръстосани прави съществуват безкрайно много трансферзали, така че за да може да се определи една от тях, трябва да има допълнително условие (както е в случая).

Нека $L \in l$ и $M \in m$, така че LM да е въпросната трансферзала. Тъй като всички точки на правата LM лежат в α, то и точките L и M, следователно $L = l \cap \alpha$ и $M = m \cap \alpha$.

Трябва да намерим координатите на т. L като прибод на l с α: заместваме x, y и z от скаларно параметричното уравнение на l в уравнението на α

$$(1 + s) + (2 - s) + 2(1 + s) - 3 = 2 + 2s = 0 \Longrightarrow s = -1.$$

Заместваме $s = -1$ в x, y и z от скаларно параметричното уравнение на l и намираме координатите на $L(0,3,0)$.

Аналогично намираме координатите на M: заместваме x, y и z от скаларно параметричното уравнение на m в уравнението на α

$$t + (3 + t) + 2(-3 + 2t) - 3 = -6 + 6t = 0 \Longrightarrow t = 1.$$

Заместваме $t = 1$ в x, y и z от скаларно параметричното уравнение на m и намираме координатите на $M(1,4,-1)$.

За колинеарния вектор $\overrightarrow{LM}$ получаваме $\overrightarrow{LM} = (1,4,-1) - (0,3,0) = (1,1-1)$. Тогава каноничното уравнение на търсената трансферзала е

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-0}{-1}.$$

(б) Ще построим спомагателните равнини α и β, като α съдържа т. A и пр. l, а β – A и m. Нека $L \in l$ и $M \in m$, така че LM да е въпросната трансферзала. Тъй като равнината α съдържа всички точки от пр. l, тя ще съдържа и т. L, а следователно и всички точки на трансферзалата, включително т. M. Така получаваме, че $M = m \cap \alpha$. Аналогично ще имаме $L = l \cap \beta$.

Можем да съставим уравнението на α като равнина от снопа, определен от равнините, чиито сечение е пр. l, т.е. $x + y = 0, x - y + z + 4 = 0$. Ще имаме

$$\lambda(x + y) + \mu(x - y + z + 4) = (\lambda + \mu)x + (\lambda - \mu)y + \mu z + 4\mu = 0.$$

Сега ще намерим съотношението $\lambda : \mu$ от условието, че т. A се съдържа в тази равнина

$$(\lambda + \mu)2 + (\lambda - \mu)3 + \mu \cdot 1 + 4\mu = 5\lambda + 4\mu = 0.$$

Получаваме $\lambda : \mu = -4 : 5$. Ако вземем $\lambda = -4$ и $\mu = 5$ ще имаме

$$\alpha : x - 9y + 5z + 20 = 0.$$

Координатите на т. M ще бъдат решенията на системата

$$\left| \begin{array}{c} x + 3y - 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \\ x - 9y + 5z + 20 = 0. \end{array} \right.$$

(първите две уравнения задават пр. m, а последното – α). Изразяваме $x = 1 - 3y$ от първото уравнение и $z = 2 - y$ от второто и заместваме в третото: $1 - 3y - 9y + 5(2 - y) + 20 = 31 - 17y \Longrightarrow y = \frac{31}{17}$, $x = 1 - 3 \cdot \frac{31}{17} = -\frac{42}{17}$, $z = 2 - \frac{31}{17} = \frac{3}{17} \Longrightarrow M\left(-\frac{42}{17}, \frac{31}{17}, \frac{3}{17}\right)$.

По същия начин намираме равнината β и т. L:

$$\lambda(x + 3y - 1) + \mu(y + z - 2) = \lambda x + (3\lambda + \mu)y + \mu z + (-\lambda - 2\mu) = 0$$

$$\lambda \cdot 2 + (3\lambda + \mu)3 + \mu \cdot 1 + (-\lambda - 2\mu) = 10\lambda + 2\mu = 0 \Longrightarrow \frac{\lambda}{\mu} = -\frac{1}{5}.$$

Ако вземем $\lambda = 1$ и $\mu = -5$ ще имаме

$$\alpha : x - 2y - 5z + 9 = 0.$$

Системата за определяне на координатите на т. L ще бъде

$$\left|\begin{array}{c} x+y=0 \\ x-y+z+4=0 \\ x-2y-5z+9=0. \end{array}\right.$$

От първото изразяваме $x=-y$, поставяме във второто и получаваме $z=2y-4$; заместваме x и z в третото: $-y-2y-5(2y-4)+9=29-13y=0 \Longrightarrow y=\frac{29}{13}, x=-\frac{29}{13}, z=2\cdot\frac{29}{13}-4=\frac{6}{13} \Longrightarrow L\left(-\frac{29}{13},\frac{29}{13},\frac{6}{13}\right)$.

За колинеарния вектор $\overrightarrow{LM}$ получаваме

$$\overrightarrow{LM}=\left(-\frac{42}{17},\frac{31}{17},\frac{3}{17}\right)-\left(-\frac{29}{13},\frac{29}{13},\frac{6}{13}\right)=\left(-\frac{53}{221},-\frac{90}{221},-\frac{63}{221}\right)$$

следователно вектор с координати $(53,90,63)$ също ще е колинеарен с търсената трансферзала. Тогава каноничното ѝ уравнение е

$$\frac{x+\frac{29}{13}}{53}=\frac{y-\frac{29}{13}}{90}=\frac{z-\frac{6}{13}}{63}.$$

Нека LM да е въпросната трансферзала. Поучаваме параметричното уравнение на пр. l:

$$l:\frac{x-10}{5}=\frac{y+7}{4}=\frac{z}{1}=s \Longrightarrow x=10+5s, y=-7+4s, z=s.$$

Тогава т. L ще има координати $L(1+5s,-7+4s,s)$ за някаква (засега неизвестна) стойност на s.

Аналогично, за пр. m и т. M ще имаме

$$m:\frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z}{1}=t \Longrightarrow x=-3+2t, y=5+3t, z=t$$

и $M(-3+2t,5+3t,t)$ за неизвестна стойност на t.

За вектора $\overrightarrow{LM}$ получаваме $\overrightarrow{LM}=(-3+2t,5+3t,t)-(10+5s,-7+4s,s)=(2t-5s-13,3t-4s+12,t-s)$.

Тъй като двете прави (неизвестната трансферзала LM и дадената пр. n) са успоредни, то направляващите им вектори са колинеарни, т. е. $\overrightarrow{LM}=\lambda\vec{n}$ или

$$(2t-5s-13,4t-4s+12,t-s)=\lambda(8,7,1).$$

Това води до системата

$$\left|\begin{array}{l} 2t-5s-13=8\lambda \\ 3t-4s+12=7\lambda \\ \quad t-s=\lambda. \end{array}\right.$$

Решаваме горната система и получаваме $\lambda=\frac{49}{6}, s=-\frac{62}{3}, t=-\frac{25}{2}$; $L\left(-\frac{307}{3},-\frac{227}{3}-\frac{62}{3}\right)$; $M\left(-28,-\frac{65}{2},-\frac{25}{2}\right)$; $\overrightarrow{LM}\left(\frac{446}{6},\frac{259}{6},\frac{49}{6}\right)$. Тогава каноничното уравнение на търсената трансферзала е

$$\frac{x+28}{446}=\frac{y+\frac{65}{2}}{259}=\frac{z+\frac{25}{2}}{49}.$$

(г) Нека LM да е въпросната трансферзала. Поучаваме параметричното уравнение на пр. l:

$$l: \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{1}=t \Longrightarrow x=1+2t, y=2+4t, z=3+t.$$

Тогава т. L ще има координати $L(1+2t, 2+4t, 3+t)$ за някаква (засега неизвестна) стойност на t.

Т. M ще има координати $M(1+2s,-2s,-1+s)$ за неизвестна стойност на параметъра s.

За вектора $\overrightarrow{LM}$ ще имаме $\overrightarrow{LM}=(1+2s,-2s,-1+s)-(1+2t,2+4t,3+t)=(2s-2t,-2s-4t-2,s-t-4)$.

Неизвестните s и t можем да определим от условията, че неизвестната транссферзала LM (а това значи и $\overrightarrow{LM}$) е перпендикулярна на направляващите вектори на правите l и m - $\vec{l}$ и $\vec{m}$ съответно. $\overrightarrow{LM}\perp\vec{l}(2,4,1)\Leftrightarrow\overrightarrow{LM}\vec{l}=0\Leftrightarrow 2(2s-2t)+4(-2s-4t-2)+1\cdot(s-t-4)=-3s-21t-12=0$; $\overrightarrow{LM}\perp\vec{m}(2,-2,1)\perp\overrightarrow{LM}\vec{m}=0\Leftrightarrow 2(2s-2t)-2(-2s-4t-2)+1\cdot(s-t-4)=9s+3t=0$.

Така достигнахме до следната система за определяне на стойностите на s и t:

$$\left|\begin{array}{l} s+7t=-4 \\ 3s+t=0 \end{array}\right.$$

Решенията на системата са $s=\frac{1}{5}$ и $t=-\frac{3}{5}$, откъдето получаваме $L\left(-\frac{1}{5},-\frac{2}{5},\frac{12}{5}\right), M\left(\frac{7}{5},-\frac{2}{5},-\frac{4}{5}\right), \overrightarrow{LM}\left(\frac{8}{5},0,-\frac{16}{5}\right)\parallel(1,0,-2)$. Скаларно параметричното уравнение на оста LM на кръстосаните прави l и m (по т. $L\left(-\frac{1}{5},-\frac{2}{5},\frac{12}{5}\right)$ и в-р $(1,0,-2)$) ще бъде $x=-\frac{1}{5}+u, y=-\frac{2}{5}, z=\frac{12}{5}-2u$.

Разстоянието между двете прави (дължината нам оста отсечка е

$$|\overrightarrow{LM}| = \sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2 + 0^2 + \left(-\frac{16}{5}\right)^2} = \frac{8}{5}\sqrt{5}.$$

Задача 6. Намерете уравнение на сфера с радиус 6, която се допира до равнината $\alpha: x + 2y - 2z + 1 = 0$ в точката $A(3, y, 2)$, ако сферата и точката $M(0,1,2)$ са в едно полупространство относно α.

Решение:

Тъй като точка A е от α, то замествайки нейните координати в уравнението на α ще получим тъждество, откъдето определяме втората координата на т. A: $3 + 2y - 2 \cdot 2 + 1 = 0 \Longrightarrow y = 0$ и $A(3,0,2)$.

Тъй като допирателната равнина към сфера е перпендикулярна към диаметъра на сферата, минаващ през точката на допиране, то ако през A прекараме права a, перпендикулярна на α, тя ще съдържа центъра на сферата. От $a \perp \alpha$ следва, че $\vec{a} = \overrightarrow{N_\alpha}(1,2,-2)$. Тогава можем да съставим скаларно параметричното уравнение на пр. a (по A и $\vec{a}$): $a: x = 3 + t, y = 0 + 2t, z = 2 - 2t$.

Тъй като търсената точка O е център на сферата, а радиуса е $R = 6$, толкова ще бъде разстоянието от т. O до допирателната равнина α. Първо, да намерим нормалното уравнение на α. Тъй като за големината на нормалния вектор на α имаме $|\overrightarrow{N_\alpha}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$, то нормалното уравнение е

$$\frac{x + 2y - 2z + 1}{3} = 0,$$

а разстоянието на т. $O(3 + t, 2t, 2 - 2t)$ (като точка от пр. a

$$\frac{|3 + t + 2 \cdot 2t - 2(2 - 2t) + 1|}{3} = \frac{|9t|}{3} = 6$$

Получаваме уравнението $|t| = 2 \Longrightarrow t = \pm 2$. За $t = 2$ ще имаме $O_1(5,4,-2)$, а за $t = -2$ - $O_2(1,-4,6)$. Трябва да видим какъв е знака на лявата страна на уравнението на α ако в него заместим координатите на съответните точки.

$$O_1(5,4,-2): 5 + 2 \cdot 4 - 2(-2) + 1 = +18,$$

$$O_2(1,-4,6): 1 + 2(-4) - 2 \cdot 6 + 1 = -18,$$

$$M(0,1,2): 0 + 2(-1) - 2 \cdot 2 + 1 = -5.$$

Тъй като изразите за O_2 и M са с еднакви знаци, значи те се намират в едно полупространство, относно α, $O \equiv O_2$ и уравнението на сферата е

$$(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-6)^2 = 6^2.$$