АНАЛИТИЧНА БИЗНЕС ИКОНОМИКА

Асен Христов

Пловдив

2017

СЪДЪРЖАНИЕ

Увод

Предмет на настоящата работа е математическото моделиране на потребителското търсене в бизнес икономиката. Това което характеризира потребителското търсене е неговата огромна роля в бизнес икономическото прогнозиране. Има две основни възможности за построяване на функцията на пазарно търсене на потребителски стоки. При първата, да я наречем иконометрична, се събират емпирични данни за потребителското търсене и след това тази функция се възстановява, като се допуска, че тя е от определен математически вид. При втората, неокласическа възможност, се тръгва от така наречената функция на потребителска полезност, като функцията на индивидуално потребителско търсене се получава от решението на оптимизационната задача на потребителя (максимализиране на потребителската полезност при наличието на бюджетно ограничение). Тогава функцията на пазарно търсене се получава в резултат от агрегирането на всички функции на индивидуално търсене. Познаването на функцията на пазарно търсене е ключов момент от бизнес икономическото планиране, особено в случаите в които фирмата се радва на особено положение на пазара на стоките, които произвежда – монополист, олигополист, монополистичен конкурент. В тези случаи тя има право да разполага с цялото потребителско търсене или с голяма част от него. В случай, че фирмата се конкурира на стоковия пазар, бизнес икономическото прогнозиране (касаещо търсенето) също има важно значение за съставянето на оптимален производствен план.

Бизнес икономиката е съвременно направление в приложната икономика, което използва икономическата теория и математическата методология за анализ на бизнес предприятията и факторите, допринасящи за разнообразието на организационни структури и взаимоотношенията на фирмите с пазарите на стоки, труд и капитал.

Разликата между бизнес икономиката и микроикономиката е, че последната е фундаментална, теоретична икономическа дисциплина, а бизнес икономиката - приложна. Въпреки това, бизнес икономиката ползва методите на микроикономическия анализ и се припокрива с микроикономиката в областта на потребители, фирми, конкуренция и др., като гледа на тези области от един по-практичен ъгъл. Освен това, към бизнес икономиката се отнасят и редица динамични модели като крива на опита, логистична крива и др.

Настоящата работа се състои две части, като в първата част има теория и задачи, а във втората – само задачи. Общо в двете части са разгледани общо 34 задачи-модели, в които са разкрити основни методи на бизнес икономическото прогнозиране на потребителското търсене и предлагане.

В първите три параграфа на първа глава (1.1., 1.2. и 1.3.) от първата част са дадени основни определения за икономика, микроикономика и бизнес икономика съответно. Определено е точното място на микроикономиката в системата на икономическите науки и е направено разграничението между нея и по-приложната бизнес икономика. Очертано е важното място на бизнес икономическото прогнозиране в рамките на бизнес икономиката и са набелязани основните аналитични методи за бизнес икономически изследвания. Параграф 1.4. е посветен на частичния равновесен модел, при който от изравняването на пазарното търсене с пазарното предлагане се определят основните показатели на пазара на определен вид стока – количество и цена. В параграф 1.5. е показана зависимостта на тези два показателя от промени в търсенето и предлагането. В последния за първа глава параграф 1.6. се показва, как се извършва агрегирането на търсене и предлагане. При него се предполага, че пазарът е разбит на отделни сегменти, всеки със своя сегментна функция на търсене (или предлагане) от които по определен начин се получава функцията на пазарно търсене (предлагане), различаваща се от математическата сума на отделните функции. В тази въвеждаща глава са формулирани и решени общо 3 задачи-модели.

Във втората глава на първата част са изложени подходите за оценяване (реконструиране, възстановяване) на функцията на пазарно търсене. В 2.1. се предполага, че търсенето на една потребителска стока зависи само от нейната цена. На база на въведените пазарен капацитет и пределна цена функциите на търсене (от цената) се разпадат на четири вида, като за всеки от тези видове са посочени подходящите математически функции, които могат да ги моделират. Показано е и как се възстановява тази функция чрез използване на собствената ценова еластичност. Най-голямо практично значение имат два вида математически функции на търсене – линейната (адитивна) и степенната (мултипликативна). В параграф 2.2. е направено допускането, че обемът търсене на дадена потребителска стока зависи, освен от нейната цена и от цените на други потребителски стоки. Така, с използването и на кръстосани еластичности, възстановяването на функцията на търсене (вече от две променливи) е много по-прецизно. В параграф 2.3. се прави допускането, че потребителското търсене на дадена стока зависи само от потрбителския доход. На база на въведената доходна еластичност е направена класификация на потребителските стоки – некачествени и качествени, като последните се подразделят на стоки от първа необходимост, луксозни стоки и стоки от междинна група. Разгледани са моделите на шведския икономист Торнквист за трите вида качествени стоки. В частта от този параграф „Обобщени функции на Торнквист“ са въведени (оригинални за тази работа) функции на две променливи – доход и цена, като коефициентите от оригиналните функции на Торнквист се варират до функции от цената. В параграф 2.5. е направено обобщение на подходите, използвани в предишните параграфи на тази глава – разгледана е функция на търсене на три независими икономически променливи: собствената цена на стоката, цена на някаква друга стока и потребителския доход. В параграф 2.5. са положени основите на станалия известен като неокласически подход към темата – въведена е функцията на потребителска полезност за една стока. Забележителната идея на немския икономист Херман Госен (1810-1859), изразена в първия закон на Госен се състои в това, че „всяка потребност в процеса на задоволяване постепенно намалява своята интензивност, докато стигне до 0". Това предопределя математическия вид на тази функция – тя е растяща и вдлъбната. Параграф 2.6. е посветен на обобщение на идеите от предишния параграф – въведена е функцията на потребителска полезност за няколко стоки. Това позволява формулирането и решаването на основната задача на потребителя – как да максимализира своята полезност, спазвайки бюджетното си ограничение. Решението на тази задача води до втория закон на Госен - в условие на оптимален избор, потребителят харчи всеки лев с еднаква маргинална полезност. Освен това, от решението на тази задача се получават и функциите на индивидуално потребителско търсене, зависещи (както в 2.4.) от собствената цена на стоката, цените на други стока и потребителския доход. В последните два параграфа (2.7. и 2.8.) са разгледани двата най-важни примера на многофакторната функция на полезност – адитивната и мултипликативна функция. В тази основна глава са формулирани и решени общо 16 задачи-модели.

Във втората част са разгледани 15 задачи-модели, при които се показва как въз основа на функцията на разходите или на производствената функция се формира функцията на предлагане на фирмата, в случай, че тя е конкурент на пазара на стоки или се формира пазарното равновесие в случай на монополизиране на същия пазар. В задачи 20, 21 и 22 е разгледан случая, когато разходите на фирмата не зависят от продаденото количество (това е характерно за някои нови отрасли като информационните технологии, шоу бизнеса и др.). в този случай се предполага, че фирмата е монополист на пазара и равновесието се постига при максимализиране на оборота. В задачи 23, 24, 25, 26, 27, 28 и 29 е разгледан случая, когато разходите са пропорционални на продаденото количество (разходна функция с постоянни средни променливи разходи). В този случай също се предполага, че фирмата е монополист на стоковия пазар. Равновесието се постига при изравняването на маргиналните приходи с постоянните средни променливи разходи. В зад. 30 е разгледан случая на разходна функция с намаляващи средни променливи. Този случай се свързва с един известен модел в бизнес икономиката, този на кривата на опита (обучението). В задача 31 са разгледани примери на функции на разходите от различен вид. Показано е, че само в случай на разходна функция с нарастващи средни променливи разходи може да се генерира функция на предлагане (характерна за конкурентния пазар в отлика от монополния). В зад. 32 е показано как от функцията на предлагане на конкурентната фирма може да се изведе нейната разходна функция. В зад. 33 е съставен модел на конкурентен отрасъл. Показано е по какъв начин се генерира функцията на отраслово предлагане (чрез агрегация на индивидуалните предлагания) и как чрез изравняването на това предлагане с отрасловото търсене се определят отрасловите цени и количества. По този начин се формира функцията на търсене за фирмата и пазарът определя коя фирма какво количество да произведе. В зад. 34 и 35 са разгледани неокласическите функции на една ресурсна променлива – труда (в зад. 34) или капитала (в зад. 35). Показано е как при известна производствена функция на конкурентната фирма може да се намерят (възстановят) функциите на разходи и предлагане.

Целта на настоящата работа е да обезпечи избираемата дисциплина със същото наименование във ФМИ при ПУ „П. Хилендарски“, но може да бъде полезна както на математици и информатици с интереси в икономиката, така и на икономисти, които искат да направят друг прочит на известни за тях теми.

АНАЛИТИЧНА БИЗНЕС ИКОНОМИКА – I част

1. Икономика и бизнес икономика

1.1. Икономика

Икономиката се състои от икономическата система на дадена страна - работните, капиталовите и природни ресурси, икономическите агенти, които участват социално в производството, обмяната, дистрибуцията и консумирането на стоки и услуги. Икономиката е краен резултат от прогреса, който включва научните и технически открития, историята и социалната организация, както и нейната география, природни ресурси и екология, като основни фактори. Тези фактори определят контекста, съдържанието и съвкупността от условия и параметри, при които икономиката функционира.

Икономическата действителност е субект на икономическата наука. Централна тема на икономиката е как трябва да се използват ограничените ресурси за задоволяване на неограничените потребности на населението, т.е. икономиката трябва да даде отговор на основните въпроси:

- какво трябва да се произведе? (т.е. какви стоки и услуги, и в какви количества)
- как трябва да се произведе? (т.е. с какви и колко ресурси, и по какви технологии)
- за кого е предназначено произведеното? (т.е. кой и колко да потребява произведените стоки и услуги)

Основни елементи на икономиката са:

- стоките - всичко, което подлежи на сделка между икономическите агенти;
- икономически агенти - двете страни в една сделка: купувач и продавач;
- пари - основен вид стока и еквивалент на всички стоки;
- цена - паричен еквивалент на единица количество от дадена стока;

Основни участници в икономиката са:

- отделният индивид - от една страна той се явява потребител на произведените стоки и услуги, а от друга - собственик на ресурси (труд, капитал, земя и др.). Продавайки ресурсите си, той получава доход, а също така, като собственик на капитала на фирмите, получава печалбата на фирмите.
- фирмата - от една страна тя е производител на стоки и услуги, а от друга - потребител на ресурси. Фирмата получава доход от продажбата на стоки и услуги и е собственик на производствените мощности.

Така всички участници в икономиката се явяват едновременно купувачи (търсещи) и продавачи (предлагащи). Взаимодействайки помежду си, продавачите и купувачите създават пазари. Основните видове пазари в икономиката са потребителските пазари и факторните (ресурсни) пазари. Основните ресурсни пазари са трудовите пазари и капиталовите пазари. Основните пазарни понятия са : търсене, предлагане, конкуренция и цени.

Икономическата наука се подразделя на два основни принципа:

- според степента на общност - теоретична икономика, изучаваща процесите на пазарен обмен и избора на начин за използване на ограничените ресурси, и приложна икономика, изучаваща прилагането на теоретичната икономика при функционирането на отделните елементи на икономическата система;
- според мащаба на изследванията - микроикономика, изучаваща поведението на отделните икономически агенти на пазарите, и макроикономика, изучаваща националното стопанство като цяло;

1. 2. Микроикономика

Микроикономиката - от гръцките "μίκρο" - малък и "οίκονομίά" - икономика, през английското "microeconomics" е клон от икономическата наука, който изучава как индивидуалните субекти на икономиката - отделни индивиди и фирми, вземат конкретни решения за разпределянето на стоките на потребителските и ресурсни пазари.

Друго определение: дял от икономиката, който изучава икономическото поведение на единичните потребители и фирми, и разпределяне на общата продукция и доход помежду им. В микроикономиката на отделния индивид се гледа като на доставчик на труд и капитал и като на единствен потребител на краен продукт. От друга страна, предприятието се анализира в ролята си на доставчик на краен продукт и на потребител на труд и капитал. Тази рамка определя картината на микроикономиката във вид на завършен цикъл.

В един от най - известните в света учебници по микроикономика Hall Varian, Microeconomics срещаме следното определение: Микроикономика е изучаването на отделните икономически единици и техните взаимодействия. Тя включва теорията на потребителите, производителите и пазарите, в които те участват.

За да се разбере по - добре предмета и същността на микроикономиката, тя трябва да се съпостави с макроикономиката. Макроикономиката изучава взаимодействието между агрегираните (сумарни) икономически агенти върху агрегираните пазари. Така например, на отделния индивид (потребител) в микроикономиката съответства сектор домакинства, действащ като един икономически агент, а на фирмата - частния сектор. За макроикономиката поведението на отделните потребители и фирми се намира в "черна кутия", не интересуваща макроикономиста. Както пише Х. Вариан, разликата между микроикономиката и макроикономиката е много близо до "микротеорията" и "макротеорията" в статистическата термодинамика. "Микротеорията" изучава поведението на отделните молекули и тяхното взаимодействие, а " макротеорията " - взаимовръзката между агрегираните показатели: температура, обем, налягане и прави изводи за термосистемата.

Едно определение за различията между микроикономиката и макроикономиката е следното: накратко, микроикономиката е икономика на едно нещо в даден момент, а макроикономиката е икономика на всичко наведнъж (Kit Sims Taylo). Трябва да се отбележи, че това поетично определение е вярно само отчасти - в микроикономиката има раздел "общо икономическо равновесие", който се занимава с "всичко наведнъж".

Накрая да отбележим, че дадените по-горе определения рязко разграничават микроикономиката от макроикономиката, но определят неточно предмета на микроикономиката. Социологията, психологията или правото също могат да изучават поведението на отделните икономически единици, но това не ги прави микроикономика. Микроикономиката се интересува от това по какъв начин отделните икономически агенти вземат икономически решения за разпределението на ограничените ресурси при условие, че те действат абсолютно рационално, независимо от другите и без каквито и да било правила на поведение (институции). Именно последните "уговорки" правят от микроикономиката силен и универсален метод на анализ, който често се нарича "неокласическа икономическа теория". Точно тази универсалност е направила възможно пренасянето на микроикономическите методи за анализ на индивидуалния избор от областта на икономиката към всички останали области, в които се прави рационален избор (семейство, приятелство, образование, спорт и др.).

В основата на микроикономическия анализ стои принципът на рационалност, който се състои в това, че всеки участник в икономиката се стреми към постигането на максимален резултат с използване на наличните средства или към това да направи минимални разходи за постигането на определен резултат. Този принцип на абсолютната рационалност в микроикономиката обяснява широкото навлизане на математическите методи в микроикономическия анализ.

Това са, преди всичко, методите на нелинейното (изпъкнало) математическо оптимиране.

1. 3. Бизнес икономика

Бизнес икономиката е съвременно направление в приложната икономика, което използва икономическата теория и математическата методология за анализ на бизнес предприятията и факторите, допринасящи за разнообразието на организационни структури и взаимоотношенията на фирмите с пазарите на стоки, труд и капитал.

Разликата между бизнес икономиката и микроикономиката е, че последната е фундаментална, теоретична икономическа дисциплина, а бизнес икономиката - приложна. Въпреки това, бизнес икономиката ползва методите на микроикономическия анализ и се припокрива с микроикономиката в областта на потребители, фирми, конкуренция и др., като гледа на тези области от един по-практичен ъгъл. Освен това, към бизнес икономиката се отнасят и редица динамични модели като крива на опита, логистична крива и др.

Бизнес и икономическо прогнозиране. То се извършва често за нуждите на бизнес икономиката, като за това се използват т.нар. бизнес индикатори. В икономическата практика се следи поведението на икономическите променливи, за да се установи дали дадена променлива намалява стойностите си преди, по време на или след достигането на връхната точка на икономиката като цяло (обикновено се следи динамиката на БВП), или дали се увеличава преди, по време на, или след най - ниската точка.

Променливи, които се понижават преди пика и се увеличават преди дъното, се наричат водещи (изпреварващи) бизнес индикатори.

Променливи, понижаващи се по време на пика и увеличаващи се по време на дъното, се наричат съвпадащи индикатори.

Променливи, които се понижават след пика и се увеличават след дъното, се наричат последващи (догонващи) бизнес индикатори.

Според националното бюро за икономически изследвания на САЩ:

а) някои важни изпреварващи бизнес индикатори са:

- нови поръчки за дълготрайни потребителски стоки;
- продължителност на средната работна седмица;
- броят на строителните разрешителни;

- цената на акциите на фондовата борса;
- някои цени на едро;
- обемът на парично предлагане;
- новите корпоративни сливания и поглъщания;

б) някои важни съвпадащи бизнес индикатори са:

- нивото на трудова заетост;
- обемът на индустриалното производство;
- корпоративните печалби;

в) някои важни последващи бизнес индикатори са:

- продажбите на едро;
- обемът на запаси в производството;
- личните доходи;

Често икономистите използват изпреварващите бизнес индикатори като средство за бизнес прогнозиране. Това се прави, защото за целите на фирменото управление и планиране, най-голямо значение има откриването на повратните точки в икономическия цикъл - пика и дъното. Откриването на тези повратни точки е най-трудната част от бизнес прогнозирането. Например: понижаването на стойностите на голям брой изпреварващи бизнес индикатори е сигурен признак за наближаването на пик в икономическия цикъл. Увеличаването на голям брой изпреварващи индикатори е сигнал за приближаване на дъното.

За съжаление, водещите индикатори не са много надеждни - често изпращат фалшиви сигнали. Независимо от това, те се наблюдават от близо и се използват като допълнително средство при по-сложните техники на бизнес икономическото прогнозиране.

Методология на бизнес икономиката. Тя се свежда до следните основни направления:

- **бизнес икономическо прогнозиране** - на практика в него се прогнозира динамиката на БВП, което е понятие от макроикономиката. В бизнес икономиката се приема, че макроикономическият цикъл влияе върху вземането на решения от фирмения мениджмънт.
- **иконометрия** - тя съчетава в едно математиката, икономиката и статистиката, и се състои в прилагането на методите на математическата статистика за обработване на емпирични данни. В бизнес икономиката иконометрията се използва за оценяване на

функции: на търсене, на предлагане, на разходи, производствена функция. Основен метод на иконометрията е регресионният анализ.

- **микроикономика в съчетание с изпъкнало оптимиране** - използва се за моделиране на поведението на индивидуалните потребители и фирми, и от там за получаване на техните функции на търсене и предлагане.
- **диференциални уравнения** - използват се в много динамични бизнес икономически модели: крива на опита, модел на разпространение на иновациите и др.

1. 4. Частичен равновесен модел

В този основен икономически модел разглеждаме следните обекти:

- стока за крайно потребление, характеризираща се със своята спецификация, цена и количество;
- потребители - всички индивидуални потребители с интерес да закупят определено количество от стоката на определена цена;
- производители - всички фирми, които могат да доставят определени количества от стоката на определена цена;

Стоката - търсещите я потребители и предлагащите я фирми, образуват пазар на тази стока. В този пазар дефинираме две функции - на търсене (Demand) и предлагане (Supply). Под функция на пазарно търсене $q = x(p)$ ще разбираме количеството на стоката q, което потребителите желаят да придобият при тази цена на стоката p. Под функция на пазарно предлагане $q = y(p)$ ще разбираме количеството q, което фирмите са съгласни да предлагат на цена p. И двете функции са сумарни – количеството $q = x(p)$ включва търсенето от страна на потребителите при цени по-високи от p, съответно предлаганото от производителите количество $q = y(p)$ включва пре

длагането на цени по-ниски от p. Именно, поради горната забележка, естествено следва, че функциите на пазарно търсене и предлагане са

цената, а функцията на предлагане - растяща. От математическа гледна точка е ясно, че при изпълнението на определени (тривиални) условия тези две функции ще изравнят своите стойности. В това се състои моделът на частично пазарно равновесие. Той "излъчва" две равновесни стойности - равновесна цена $p = p_E$ и равновесно количество $q = q_E$, така че да е в сила:

$$x(p_E) = y(p_E) = q_E$$

Моделът се нарича частичен, защото става дума за една точно специфирана стока. Това е в противовес на общото (микроикономическо) равновесие, в което се разглеждат всички стоки и услуги за крайно потребление и ресурсите – свободно време и капитал, и с общото равновесие в макроикономически аспект, при което стоката за крайно потребление се получава в резултат на агрегация на всички потребителски стоки и услуги.

Трябва да отбележим, че функциите на пазарно търсене и предлагане се получават от агрегация (сумиране) на всички индивидуални функции на търсене и предлагане.

Еластичност – това е понятие с важно приложение в икономическите анализи. Еластичност се нарича границата на отношението на относителните изменения на $y = f(x)$ и x. Така казано, еластичността показва с колко процента се е променила функцията y при изменението на аргумента x с 1%:

$$E\big(y(x)\big) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\%\Delta y}{\%\Delta x} = \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}{\frac{y}{x}} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = y' \cdot \frac{x}{y}$$

Тъй като

$$d \ln x = \frac{dx}{x} \text{ и } d \ln y = \frac{dy}{y}$$

то еластичността може да се определи и като "логаритмична производна":

$$E\big(y(x)\big) = \frac{d \ln y}{d \ln x}$$

Ценовата еластичност на търсенето – тя се пресмята по формулата:

$$E\big(x(p)\big) = x'(p) \frac{p}{x(p)}$$

и показва с колко процента нараства търсенето на стоката при намаляването на цената ѝ с 1%. Тъй като еластичността запазва знака на производната, ценовата еластичност на търсенето е неположителна при всяка цена. При дадена цена p се казва, че:

- търсенето е съвършено нееластично ако $E\big(x(p)\big) = 0$;
- търсенето е нееластично (или слабо еластично) при $-1 < E(x(p)) < 0$;
- търсенето е еластично (или силно еластично) при $E\big(x(p)\big) < -1$;
- търсенето преминава от нееластично в еластично при $E\big(x(p)\big) = -1$;

Когато се каже, че ценовата еластичност на търсенето расте, се има предвид, че нараства абсолютната ѝ стойност.

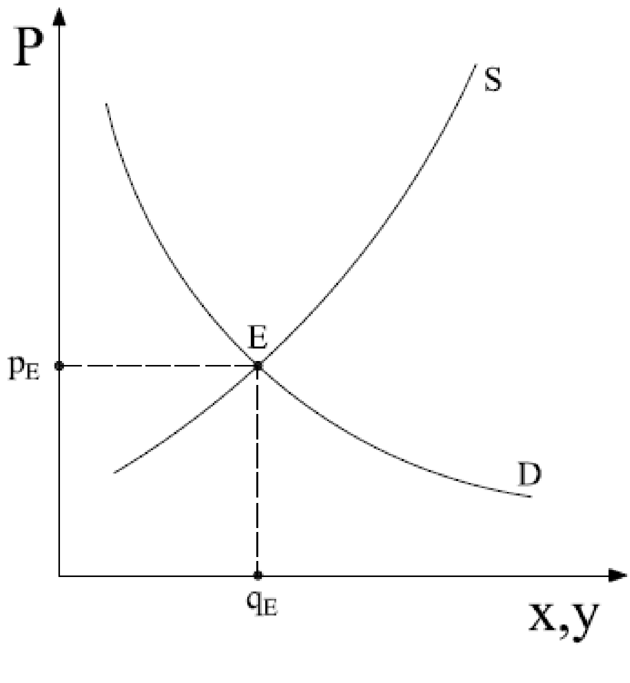
Ценовата еластичност на предлагането – пресмята се формулата:

$$E\big(y(p)\big) = y'(p)\,\frac{p}{y(p)}$$

и показва с колко процента нараства предлагането на стоката при нарастване на цената ѝ с 1%. Тя е неотрицателна за всяка цена. При дадена цена p се казва, че:

- предлагането е съвършено нееластично, ако $E\big(y(p)\big) = 0$;
- предлагането е нееластично (слабо еластично), ако $0 < E\big(y(p)\big) < 1$;
- предлагането е еластично (силно еластично), ако $E\big(y(p)\big) > 1$;
- предлагането преминава от нееластично в еластично, ако $E\big(y(p)\big) = 1$;

Геометрична интерпретация на частичния равновесен модел. Разглеждаме правоъгълна координатна система (фиг.1.4.1), в която по абсцисната ос се променят количествата (на търсене и предлагане), а по ординатната – съответните им цени. Не трябва да ни смущава това, че аргументът на функциите използва ординатата – така е прието в икономиката. Начертаваме графиките на функциите – графиката на функцията на търсене се нарича D - линия, а графиката на функцията на предлагане – S – линия. Точката на пресичане на тези две линии E с координати q_E и p_E е точката на частично пазарно равновесие.



Фиг1.4.1. Геометрична интерпретация на частичен равновесен модел.

Математически функции на търсене и предлагане. Всяка монотонна функция (растяща за функцията на предлагане и намаляваща за функцията на търсене), заемаща неотрицателни стойности при неотрицателен аргумент, може да се използва за моделиране на търсенето и предлагането. Най – използване обаче са адитивните (линейни) функции:

$x(p) = a - bp$ за функция на търсене,

$y(p) = -c + ap$ за функция на предлагане

и мултипликативните (степенни) функции

$x(p) = ap^{-\alpha}$ за функция на търсене,

$y(p) = bp^{\beta}$ за функция на предлагане.

Ако логаритмуваме двете страни на изразите за степенните функции, получаваме

$$\ln x(p) = \ln a - \alpha \ln p,$$

$$\ln y(p) = \ln b + \beta \ln p.$$

Това означава, че ако вместо x, y и p за координатните оси използваме $\ln x, \ln y$ и $\ln p$, то графиките на функциите на търсене и предлагане ще бъдат прави линии. Такива координатни системи, използвани често в икономиката, се наричат координатни системи с двойнологаритмичен мащаб.

Възстановяване (оценяване) на функциите на търсене и предлагане. За да се възстановяват тези функции е необходимо да се съберат емпирични данни – за различните цени какви са количествата на търсене или предлагане. След това се прави избор на математическата функция, която може да се използва за моделиране на търсенето или предлагане. Накрая, според броя на данните се прави интерполация или регресия.

Задача 1. Частичен равновесен модел. Предполага се, че при цена $p = 3$ търсенето на една стока възлиза на 4 количествени единици, а предлагането – на 2; при цена $p = 5$ търсенето е 3, а предлагането – 4. Да се възстановят функциите на търсене и предлагане, да се намерят равновесните цена и количество и да се пресметнат ценовите еластичности на търсенето и предлагането при условие за равновесие, ако функциите са: а) адитивни; б) мултипликативни.

Решение:

а) Нека $x = x(p)$ е адитивна функция на търсене, тогава ще имаме

$$x(p) = a - bp\,.$$

Според данните за функцията на търсене $x(3) = a - 3b = 4$ и $x(5) = a - 5b = 3$. След решаване на тази линейна система получаваме $a = 5{,}5$ и $b = 0{,}5$, така че функцията на търсене е $x(p) = 5{,}5 - 0{,}5p$. Аналогично, адитивната функция на предлагане ще има вида

$$y(p) = -c + dp$$

и от $y(3) = -c + 3d = 2$, $y(5) = -c + 5d = 4$ намираме $c = d = 1$, така че функцията на търсене е $y(p) = -1 + p$. Изравняването на количествата на търсене и предлагане $x(p) = y(p)$ е еквивалентно на уравнението $5{,}5 - 0{,}5p = -1 + p$ с решение $p = 13/3 = 4{,}33$. При тази равновесна цена получаваме равновесното количество $x(13/3) = y(13/3) = 10/3 = 3{,}33$. Да определим ценовите еластичности на търсене и предлагане в условие на равновесие. За ценовата еластичност на търсене ще имаме

$$E\left(x\left(\frac{13}{3}\right)\right) = x'\left(\frac{13}{3}\right)\cdot\frac{\frac{13}{3}}{x\left(\frac{13}{3}\right)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{13}{3}}{\frac{10}{3}} = -\frac{13}{20} = -0{,}65\,,$$

което свидетелства за слабо еластично търсене. За ценовата еластичност на предлагане ще имаме

$$E\left(y\left(\frac{13}{3}\right)\right) = y'\left(\frac{13}{3}\right)\cdot\frac{\frac{13}{3}}{y\left(\frac{13}{3}\right)} = 1\cdot\frac{\frac{13}{3}}{\frac{10}{3}} = \frac{13}{10} = 1{,}3\,,$$

или предлагането е силно еластично.

б) Нека $x = x(p)$ е мултипликативна функция на търсене, тогава ще имаме

$$x(p) = ap^{-\alpha}$$

или след логаритмуване

$$\ln x(p) = \ln a - \alpha \ln p$$

От дадените условия получаваме системата

$$\ln 4 = \ln a - \alpha \ln 3$$

$$\ln 3 = \ln a - \alpha \ln 5$$

Изваждайки второто от първото уравнение получаваме

$$\alpha = \frac{\ln 4 - \ln 3}{\ln 5 - \ln 3} = \frac{1,39 - 1,10}{1,61 - 1,10} = \frac{0,29}{0,51} = 0,57$$

Като заместим получената стойност за α в първото уравнение на системата ще имаме

$$\ln a = \ln 4 + 0,57 \ln 3 = 1,39 + 0,57 \cdot 1,10 = 1,39 + 0,63 = 2,02.$$

След антилогаритмуване получаваме

$$a = e^{2,02} = 7,54.$$

Окончателният вид на функцията на търсене ще бъде

$$x(p) = 7,54p^{-0,57}$$

Аналогично, като използваме числовите данни, възстановяваме функцията на предлагане. В мултипликативен вариант тя ще има вида

$$y(p) = bp^{\beta}$$

Или след логаритмуване

$$\ln y(p) = \ln b + \beta \ln p.$$

Като използваме числовите данни, получаваме

$$\ln 2 = \ln b + \beta \ln 3$$

$$\ln 4 = \ln b + \beta \ln 5$$

изваждаме първото от второто уравнение и получаваме

$$\beta = \frac{\ln 4 - \ln 2}{\ln 5 - \ln 3} = \frac{1,39 - 0,69}{1,61 - 1,10} = \frac{0,70}{0,51} = 1,37.$$

Като заместим получената стойност за β в първото уравнение на системата ще имаме

$$\ln b = \ln 2 - 1,37 \ln 3 = 0,69 - 1,37 \cdot 1,10 = 0,69 - 1,51 = -0,82.$$

След антилогаритмуване получаваме

$$b = e^{-0,82} = 0,44.$$

Окончателният вид на функцията на предлагане ще бъде

$$y(p) = 0{,}44p^{1{,}37}$$

Тогава уравнението на пазарното равновесие

$$q = x(p) = 7{,}54p^{-0{,}57} = 0{,}44p^{1{,}37} = y(p)$$

може да решим по два начина.

Първи начин. След логаритмуване получаваме

$$\ln 7{,}54 - 0{,}57 \ln p = \ln 0{,}44 + 1{,}37 \ln p.$$

Като имаме предвид, че $\ln 7{,}54 = 2{,}02$ ($e^{2{,}02} = 7{,}54$) и $\ln 0{,}44 = -0{,}82$ ($e^{-0{,}82} = 0{,}44$), за $\ln p$ ще имаме

$$\ln p = \frac{\ln 7{,}54 - \ln 0{,}44}{1{,}37 + 0{,}57} = \frac{2{,}02 - (-0{,}82)}{1{,}94} = \frac{2{,}84}{1{,}94} = 1{,}46.$$

Тогава, за $\ln q$ ще имаме

$$\ln q = \ln 7{,}54 - 0{,}57 \ln p = 2{,}02 - 0{,}57 \cdot 1{,}46 = 2{,}02 - 0{,}83 = 1{,}19$$

след антилогаритмуване получаваме

$$p = e^{1{,}46} = 4{,}41 \quad \text{и} \quad q = e^{1{,}19} = 3{,}29.$$

Втори начин. Уравнението на пазарното равновесие умножаваме с $p^{0{,}57}$ и делим на $0{,}44$. Тогава ще имаме

$$p^{1{,}94} = 17{,}14 \quad \text{или} \quad 1{,}94 \ln p = \ln 17{,}14 \Rightarrow \ln p = \frac{\ln 17.14}{1{,}94} = \frac{2{,}84}{1{,}94} = 1{,}46.$$

Тогава за $\ln q$ (и съответно за p и q след антилогаритмуване) получаваме същите резултати. Уравнението $p^{1{,}94} = 17{,}14$ може да се реши и така: двете страни повдигаме на степен $1/1{,}94$, ще имаме

$$(p^{1{,}94})^{\frac{1}{1{,}94}} = 17{,}14^{\frac{1}{1{,}94}} \Rightarrow p = 17{,}14^{0{,}52} = 4{,}38.$$

Тогава за q получаваме

$$q = 7{,}54 \cdot 4{,}38^{-0{,}57} = 7{,}54 \cdot 0{,}43 = 3{,}24.$$

Ясно е, че различието в резултатите е следствие от натрупана грешка от закръгляне (до втори знак след десетичната запетая).

Що се отнася до ценовите еластичности на търсене и предлагане, то трябва да си спомним, че степенните функции са функции с постоянна еластичност (равна на степенния показател), така че

$$E\big(x(p)\big) = -0{,}57 \quad \text{и} \quad E\big(y(p)\big) = 1{,}37$$

1.5. Промяна на равновесието при промяна на търсенето и предлагането

Нека за дадена стока, в определен момент от времето, да са се формирали функции на пазарно търсене и предлагане $x = x_0(p)$ и $y = y_0(p)$, и на базата на тях – равновесна цена p_0 и равновесно количество q_0, т. е.

$$q_0 = x_0(p_0) = y_0(p_0).$$

В друг момент от времето, под въздействието на различни пазарни сили, функциите на търсене и предлагане ще бъдат други - $x = x_1(p)$ и $y = y_1(p)$. Те ще формират и други равновесни стойности p_1 и q_1, така че $q_1 = x_1(p_1) = y_1(p_1)$.

Ще казваме, че търсенето (предлагането) се разширява, ако за всяка цена p е изпълнено

$$x_1(p) \geq x_0(p)(y_1(p) \geq y_0(p)).$$

При изпълнение на обратните неравенства, ще говорим за свиване на търсенето (предлагането). Разбира се, възможно е при едни цени търсенето (предлагането) да се разширява, а при друго – свива, но такива случаи на промяна на търсенето (предлагането) няма да разглеждаме.

При промяна на търсенето (предлагането) става промяна на равновесието – променят се равновесните количества и цени. Тези промени са отразени в табл. 1.5.1.

Таблица 1.5.1.

Промяна на равновесието при промяна на търсенето (предлагането) .

Пазарно търсене	Пазарно предлагане	Равновесна цена	Равновесно количество
$x_1 = x_0$	$y_1 = y_0$	$p_1 = p_0$	$q_1 = q_0$
$x_1 = x_0$	$y_1 > y_0$	$p_1 < p_0$	$q_1 > q_0$
$x_1 = x_0$	$y_1 < y_0$	$p_1 > p_0$	$q_1 < q_0$
$x_1 > x_0$	$y_1 = y_0$	$p_1 > p_0$	$q_1 > q_0$
$x_1 > x_0$	$y_1 > y_0$	не е ясно	$q_1 > q_0$
$x_1 > x_0$	$y_1 < y_0$	$p_1 > p_0$	не е ясно
$x_1 < x_0$	$y_1 = y_0$	$p_1 < p_0$	$q_1 < q_0$
$x_1 < x_0$	$y_1 > y_0$	$p_1 < p_0$	не е ясно
$x_1 < x_0$	$y_1 < y_0$	не е ясно	$q_1 < q_0$

Тези изводи могат да бъдат направени лесно на базата на съответните D - линии и S - линии.

Задача 2. Промени в търсенето и предлагането. Търсенето на стаи под наем в Пловдив се изразява чрез функцията $x(p) = 10 - \frac{p}{15}$, а предлагането – чрез $(p) = -\frac{10}{3} + \frac{p}{15}$, където p е месечния наем, а $x(p)$ и $y(p)$ се измерват в хил. стаи.

а) Да се намерят броя на стаите, отдадени под наем и цената на месечния наем;

б) Същото, като в а), ако търсенето се увеличи с 20% при запазено предлагане;

в) Същото, като в а), ако предлагането се увеличи с 20% при запазено търсене;

г) Същото, като в а), ако предлагането и търсенето едновременно се увеличат с 20%;

д) Как би се отразило на пазарното равновесие от а) настаняването на 3000 ученици и студенти в общежитие (които в противен случай биха търсили стаи под наем). Имайте пред вид, че в общежитията са двама в стая.

Решение:

а) Уравнението на равновесието на пазара на стаи под наем в Пловдив е

$$q = x(p) = 10 - \frac{p}{15} = -\frac{10}{3} + \frac{p}{15} = y(p).$$

Решавайки горното уравнение получаваме равновесните стойности на модела p и q:

$$10 - \frac{p}{15} = -\frac{10}{3} + \frac{p}{15} \Longrightarrow p = 100, \quad q = x(100) = 10 - \frac{100}{15} = \frac{10}{3} = 3{,}333.$$

б) Сега търсенето се е променило (нараснало) при запазено предлагане. Би трябвало да очакваме нарастване както при цената, така и при количеството. Нека с $\bar{x}(p)$ да означим новата функция на търсене, ще имаме

$$\bar{x}(p) = 1{,}2x(p) = 1{,}2\left(10 - \frac{p}{15}\right) = 12 - \frac{1{,}2p}{15}.$$

Тогава уравнението на пазарното равновесие ще бъде

$$q = \bar{x}(p) = 12 - \frac{1{,}2p}{15} = -\frac{10}{3} + \frac{p}{15} = y(p).$$

От решаването на горното уравнение получаваме новите равновесни величини:

$$12 - \frac{1{,}2p}{15} = -\frac{10}{3} + \frac{p}{15} \Longrightarrow p = 104{,}5, \quad q = y(104{,}5) = -\frac{10}{3} + \frac{104{,}5}{15} = 3{,}633.$$

С други думи, при нарастване на търсенето с 20% и запазено предлагане цената се увеличава с 4,5% при увеличено количество с 9%.

в) При нарастване на предлагането и запазване на търсенето, би трябвало да очакваме спад на цената при увеличено потребление. Означаваме с $\bar{y}(p)$ новата функция на предлагане. Ще имаме

$$\bar{y}(p) = 1{,}2y(p) = 1{,}2\left(-\frac{10}{3} + \frac{p}{15}\right) = -4 + \frac{1{,}2p}{15}.$$

Така получаваме уравнението на пазарното равновесие за този модел

$$q = x(p) = 10 - \frac{p}{15} = -4 + \frac{1{,}2p}{15} = \bar{y}(p),$$

което решаваме, за да получим новите равновесни величини. Ще имаме

$$10 - \frac{p}{15} = -4 + \frac{1{,}2p}{15} \Longrightarrow p = 95{,}5, \quad q = x(95{,}5) = 10 - \frac{95{,}5}{15} = 3{,}633.$$

Т.е. при нарастване на предлагането с 20% и запазено търсене цената спада с 4,5% при нарастване на количеството с 9%.

г) При едновременно нарастване на търсенето и предлагането, равновесното количество нараства със сигурност, но за равновесната цена не може да се каже нищо (без да разполагаме с конкретните функции). В нашия случай ще имаме

$$q = 1{,}2x(p) = 1{,}2y(p) \Longrightarrow x(p) = y(p),$$

следователно равновесната цена остава както в а) ($p = 100$), а равновесното количество нараства с 20% в сравнение с това от а), т.е. $q = 1{,}2\frac{10}{3} = 4$.

д) Настаняването на 3000 ученици и студенти в 1,5 хил. стаи в новопостроени общежития би се отразило на пазарното търсене, то би намаляло с 1,5. Ако $\bar{x}(p)$ е новото търсене, то ще имаме

$$\bar{x}(p) = x(p) - 1{,}5 = \left(10 - \frac{p}{15}\right) - 1{,}5 = 8{,}5 - \frac{p}{15}.$$

Тогава уравнението на пазарното равновесие за този модел е

$$q = \bar{x}(p) = 8{,}5 - \frac{p}{15} = -\frac{10}{3} + \frac{p}{15} = y(p).$$

Решенията на горното уравнение са

$$8{,}5 - \frac{p}{15} = -\frac{10}{3} + \frac{p}{15} \Longrightarrow p = 88{,}75 \quad \text{и} \quad q = y(88{,}75) = -\frac{10}{3} + \frac{88{,}75}{15} = 2{,}583.$$

Да отбележим, че сега са настанени много повече ученици и студенти, отколкото в а) – 1500 – безплатно (или при много по-нисък наем от пазарния) и 2583 – при наем от 88,75 лв. – общо 4083 (със 750 повече).

1.6. Агрегиране на търсенето и предлагането

Агрегирана функция на търсене. Предполагаме, че имаме n на брой обособени пазарни сегмента, всеки със своя функция на търсене $x_1(p)$, $x_2(p)$, …, $x_n(p)$, като всички те образуват общ пазар. Как да намерим сумарната (агрегирана) функция на търсене $x(p)$.

1. Определяме всички стойности на p, при които сегментните функции на търсене се нулират и ги подреждаме по възходящ ред:
   $p_1 < p_2 < \dots < p_k$; $k \leq n$, защото някои от функциите се анулират за едно и също p. Възможно е, евентуално $p_k = \infty$.
2. За всяко $i = 1, 2, \dots, k$ сумираме онези сегментни функции, нулиращи се при $p = p_i$. Така получаваме новите функции $x_1(p)$, $x_2(p)$, …, $x_k(p)$.
3. Окончателно получаваме

$$x(p)=\begin{cases} x_1(p)+\ \dots\ +x_k(p) \text{при } p\in[0,p_1) \\ x_2(p)+\ \dots\ +x_k(p) \text{при } p\in[p_1,p_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ x_k(p) \qquad\qquad \text{при } p\in[p_{k-1},p_k) \\ 0 \qquad\qquad\qquad \text{при } p\in[p_k,\infty) \end{cases}$$

Агрегирана функция на предлагане. Нека за даден пазар имаме n на брой пазарни сегмента, всеки със своя функция на предлагане $y_1(p), y_2(p), \dots, y_n(p)$.

1. Определяме всички стойности на p, за които сегментните функции на предлагане се анулират и ги подреждаме по възходящ ред: $p_1, p_2, \dots, p_k$; $k\leq n$, защото евентуално някои от тях се анулират за едни и същи стойности на p. Възможно е $p_1=0$.
2. За всяко $i=1,2,\dots,k$ сумираме онези функции, нулиращи се при $p=p_i$. Така получаваме новите функции $y_1(p), y_2(p), \dots, y_k(p)$.
3. Окончателно получаваме

$$y(p)=\begin{cases} 0 \qquad\qquad\qquad \text{при } p\in[0,p_1) \\ y_1(p) \qquad\qquad \text{при } p\in[p_1,p_2) \\ y_1(p)+y_2(p) \qquad \text{при } p\in[p_2,p_3) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ y_1(p)+\ \dots\ +y_k(p) \text{при } p\in[p_k,\infty) \end{cases}$$

Задача 3. Равновесие на няколко пазара – поотделно и заедно. Търсенето и предлагането на захар в Пловдив се задава чрез функциите $x_1=1700-800p_1$ и $y_1=400p_1-400$, а в Стара Загора - $x_2=1050-600p_2$ и $y_2=200p_2-150$ (цените се измерват в лв. за кг, а количествата – в т).

а) Да се намерят равновесните цени и количества на продажби на захар в Пловдив и Стара Загора;

б) Да допуснем, че е възможен безплатен превоз на захарта в двете посоки. Да се намерят новите равновесни цена и количества, както и количеството транспортирана захар;

в) Да се намерят новите равновесни цена и количества, както и количеството транспортирана захар при цена на транспорта 0,10 лв. за кг.

Решение:

а) За равновесието на пазара на захар в Пловдив ще имаме

$$q_1=x_1(p_1)=1700-800p_1=400p_1-400=y_1(p_1).$$

Решаването на това уравнение ни дава равновесните цена и количество в Пловдив:

$$1700 - 800p_1 = 400p_1 - 400 \Longrightarrow 1200p_1 = 2100 \Longrightarrow p_1 = \frac{7}{4} = 1{,}75;$$

$$q_1 = x_1\left(\frac{7}{4}\right) = 1700 - 800 \cdot \frac{7}{4} = 300.$$

Уравнението на пазарното равновесие в Стара Загора е

$$q_2 = x_2(p_2) = 1050 - 600p_2 = 200p_2 - 150 = y_2(p_2).$$

От неговото решаване получаваме равновесните величини за този пазар:

$$1050 - 600p_2 = 200p_2 - 150 \Longrightarrow 800p_2 = 1200 \Longrightarrow p_2 = 1{,}50;$$

$$q_2 = x_2(1{,}50) = 1050 - 600 \cdot 1{,}50 = 150.$$

б) Нека сега да разгледаме общия пазар на захар, получил се от обединението на двата пазара. Тогава на този пазар ще има само една цена, следователно $p_1 = p_2 = p$. Освен това, на този пазар ще действат сумарни (агрегирани) функции на търсене и предлагане.

Да намерим сумарната функция на търсене. Функцията на търсене за пловдивския пазар е дефинирана за $p \in (0; 2{,}125)$ (в този интервал функцията $x_1 = 1700 - 800p$ е положителна), а старозагорската – за $p \in (0; 1{,}75)$. Следователно, при $p \in (0; 1{,}75)$ ще има търсене в двата града, а за $p \in (1{,}75; 2{,}125)$ – само в Пловдив. Въз основа на това съставяме функцията на сумарно търсене на захар:

$$x(p) = \begin{cases} x_1 + x_2 = 2750 - 1400p \text{ за } p \in (0; 1{,}75) \\ x_1 = 1700 - 800p \quad \text{за} \quad p \in (1{,}75; 2{,}125) \end{cases}$$

По аналогичен начин съставяме функцията на сумарно предлагане. Предлагането на захар в Пловдив се реализира при $p \in (1{,}00; \infty)$, а предлагането в Стара Загора – при $p \in (0{,}75; \infty)$. Така, при $p \in (0{,}75; 1)$ ще има предлагане само в Стара Загора, а при $p \in (1{,}00; \infty)$ - и в двата града. Следователно, сумарната функция на предлагане ще бъде

$$y(p) = \begin{cases} y_2 = 200p - 150 \quad \text{за} \quad p \in (0{,}75; 1) \\ y_1 + y_2 = 600p - 550 \text{ за } p \in (1{,}00; \infty) \end{cases}$$

Равновесната цена за общия пазар ще се получи при изравняване на сумарното търсене със сумарното предлагане. Тези две функции съществуват едновременно в ценовите интервали $(0{,}75; 1)$, $(1; 1{,}75)$ и $(1{,}75; 2{,}125)$. В първият интервал търсене съществува и в двата града, а предлагане – само в Стара Загора; във втория има търсене и предлагане и в двата града; а в третия – търсенето е само в Пловдив, а предлагането – в двата града. Пресичането на двете начупени линии – на търсенето и предлагането може да се реализира само в един от интервалите. Да вземем средния интервал - $p \in (1; 1{,}75)$. Тогава от

$$x(p) = 2750 - 1400p = 600p - 550 = y(p)$$

получаваме $p = 1{,}65$. Тъй като $1{,}65 \in (1; 1{,}75)$, то това е равновесната цена за този модел. Равновесното количество получаваме от

$$q = x(1{,}65) = y(1{,}65) = 440.$$

Какво е положението в двата града? В Пловдив: търсенето е $x_1 = x_1(1{,}65) = 380$, а предлагането - $y_1 = y_1(1{,}65) = 220$. В Стара Загора: търсене - $x_2 = x_2(1{,}65) = 60$, предлагане - $y_2 = y_2(1{,}65) = 180$. Очевидно ще имаме $x_1 - y_1 = y_2 - x_2 = 120$ – 120 т от старозагорското предлагане ще задоволяват пловдивското търсене. Вижда се, че при обединението на пазарите облагодетелствани са потребителите от по-скъпия пазар (преди обединението) и производителите от по-евтиния, а ощетени – производителите от по-скъпия и потребителите от по-евтиния.

в) Тъй като от решението на а) вече знаем, че пловдивският пазар на захар е по-скъп, то транспортирането на захар ще е в една посока – от по-евтиния старозагорски пазар към по-скъпия пловдивски. Ако положим за $p = p_2$ цената в Стара Загора, то цената на захарта в Пловдив ще бъде $p_1 = p + 0{,}1$ – цената в Стара Загора, оскъпена с транспортните разходи. Сега трябва да изразим всички функции на търсене и предлагане чрез p. Старозагорските функции вече са изразени. За пловдивските получаваме

$$x_1(p) = x_1(p + 0{,}1) = 1700 - 800(p + 0{,}1) = 1620 - 800p \text{ за } p \in (0; 2{,}025)$$

$$y_1(p) = y_1(p + 0{,}1) = 400(p + 0{,}1) - 400 = 400p - 360 \text{ за } p \in (0{,}90; \infty)$$

Така за функциите на сумарно търсене и предлагане получаваме нови изрази:

$$x(p) = \begin{cases} x_1 + x_2 = 2670 - 1400p \text{ за } p \in (0; 1{,}75) \\ x_1 = 1620 - 800p \quad \text{за} \quad p \in (1{,}75; 2{,}025) \end{cases}$$

$$y(p) = \begin{cases} y_2 = 200p - 150 \quad \text{за} \quad p \in (0{,}75; 0{,}90) \\ y_1 + y_2 = 600p - 510 \text{ за } p \in (0{,}90; \infty) \end{cases}$$

За интервала $p \in (0{,}90; 1{,}75)$ ще имаме

$$x(p) = y(p) \Leftrightarrow 2670 - 1400p = 600p - 510 \Leftrightarrow p = 1{,}59$$

$$q = x(1{,}59) = y(1{,}59) = 444$$

Какво е положението в двата града? В Пловдив: търсенето е $x_1 = x_1(1{,}59) = 348$, а предлагането - $y_1 = y_1(1{,}59) = 276$. В Стара Загора: търсене - $x_2 = x_2(1{,}59) = 96$, предлагане - $y_2 = y_2(1{,}59) = 168$. Очевидно ще имаме $x_1 - y_1 = y_2 - x_2 = 72$ – 72 т от старозагорското предлагане ще задоволяват пловдивското търсене. Очевидно, цената в Стара Загора ще бъде $p_2 = p = 1{,}59$, а цената в Пловдив - $p_1 = p + 0{,}1 = 1{,}69$. Вижда се, че при този модел на общ пазар с отчитане на транспортните разходи има омекотяване на ефектите от сливането на двата пазара (в сравнение с б)).

2. Възстановяване на функцията на търсене

Функцията на търсене може да се възстанови (оцени) по два начина:

- като се използват емпирични данни (иконометричен начин);
- чрез прилагане на принципа на рационалност (микроикономически начин);

2.1. Възстановяване на функцията на търсене на цената

Под пазарен капацитет q_0 ще разбираме максималното възможно количество от стоката, което може да се продаде. Пазарният капацитет се получава чрез допускането, че стоката се подарява, т.е.

$$q_0 = x(0) => q_0 > x(p) \text{ за } \forall_p$$

Под пределна цена ще разбираме максималната цена, на която стоката може да се закупи, т.е.

$$p_0 : x(p_0) = 0$$

При $q_0 = \infty$ пазарът е неограничен, а при $p_0 = \infty$ – липсва пределна цена, т.е. за всяка произволна цена ще се намерят купувачи.

Тези параметри на търсенето са особено важни за бизнес икономическия анализ на фирмата, особено ако тя има монополни (или олигополни) позиции на този пазар.

От гледна точка на съществуването или не на пазарен капацитет и пределна цена можем да направим следната класификация на функцията на търсене (от цената):

- с пазарен капацитет и пределна цена. Типичен пример $x(p) = (a - bp)^\alpha$, в частност при $\alpha = 1$ линейната функция;
- с пазарен капацитет без пределна цена. Пример $x(p) = \frac{a}{p+c}$. И наистина $x(0) = \frac{q}{c} = q_0 < \infty$,

но $\lim\limits_{p\to\infty} x(p) = \lim\limits_{p\to\infty} \frac{a}{p+c} = 0$, т.е. $p_0 = \infty$;

- без пазарен капацитет с пределна цена. Пример $x(p) = -a + \frac{b}{p}$. Имаме $x(0) = \lim\limits_{p\to 0} x(p) = \lim\limits_{p\to 0}(-a + \frac{b}{p}) = \infty => q_0 = \infty. x(p) = 0 => -a + \frac{b}{p} = 0 <=> p_0 = \frac{b}{a}$

- без пазарен капацитет без пределна цена. Типичен пример за това е степенната функция $x(p) = ap^{-\alpha}$.

Задача 4. Пазарен капацитет с пределна цена. Капацитетът на пазара на една стока възлиза на 6 количествени единици, а пределната цена за потребителите е $p = 10$. Да се моделира функцията на пазарно търсене чрез функция от типа $x(\ p) = (a - bp)^{\alpha}$, ако за $p = 5$ търсенето е: а) 2; б) 3; в) 4. Във всеки от случаите да се пресметне ценовата еластичност на търсенето при цена $p = 5$.

Решение:

Това че пазарният капацитет е 6 количествени единици означава, че при $p = 0$ $x = 6$ или

$$x(\ 0) = a^{\alpha} = 6.$$

Нека да преобразуваме израза за $x(\ p)$. Ще имаме

$$x(\ p) = (a - bp)^{\alpha} = a^{\alpha}\left(1 - \frac{b}{a}p\right)^{\alpha} = 6(1 - cp)^{\alpha}.$$

Това, че пределната цена за потребителите е $p = 10$ означава, че при $p = 10$ имаме $x = 0$ или

$$x(10) = 6(1 - 10c)^{\alpha} = 0 \Rightarrow c = 0{,}1 \quad \text{и} \quad x(\ p) = 6(1 - 0{,}1p)^{\alpha}.$$

Нека сега, за $p = 10$ $x = d$, тогава

$$x(\ 5) = 6 \cdot 0{,}5^{\alpha} = d \Rightarrow 0{,}5^{\alpha} = \frac{d}{6}.$$

а) За $d = 2$ получаваме

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} = \frac{1}{3} \Rightarrow 2^{\alpha} = 3 \Rightarrow \alpha \ln 2 = \ln 3, \alpha = \frac{\ln 3}{\ln 2} = \frac{1{,}10}{0{,}69} = 1{,}59.$$

Тогава функцията на търсене ще бъде

$$x(\ p) = 6(1 - 0{,}1p)^{1{,}59}.$$

б) За $d = 3$ ще имаме $0{,}5^{\alpha} = 0{,}5$. Получаваме линейната функция ($\alpha = 1$) на търсене

$$x(\ p) = 6(1 - 0{,}1p) = 6 - 0{,}6p.$$

в) За $d = 4$ получаваме

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} = \frac{2}{3} \Longrightarrow 2^{\alpha} = \frac{3}{2}$$

$$\Longrightarrow \alpha \ln 2 = \ln 3 - \ln 2, \alpha = \frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 2} = \frac{1,10 - 0,69}{0,69} = \frac{0,41}{0,69} = 0,59.$$

Така функцията на търсене добива вида

$$x(\,p) = 6(1 - 0,1p)^{0,59}.$$

Да пресметнем съответните еластичности. В общия случай (за произволно α и p) ще имаме

$$E\big(x(p)\big) = x'(p)\frac{p}{x(p)} = -0,6\alpha(1 - 0,1p)^{\alpha-1}\frac{p}{6(1 - 0,1p)^{\alpha}} = -\frac{0,1\alpha p}{1 - 0,1p}.$$

За $p = 5$ получаваме

$$E\big(x(5)\big) = -\alpha.$$

Тогава, в случай а) ще имаме $E\big(x(5)\big) = -1,59$ (силно еластично търсене), за б) получаваме $E\big(x(5)\big) = -1$ и за в) $E\big(x(5)\big) = -0,59$ (слабо еластично търсене). В първия случай графиката на функцията на търсене е вдлъбната, а в третия – изпъкнала.

Задача 5. Пазарен капацитет без пределна цена. За потребителското търсене на дадена стока е известно, че: 1) търсенето и не надвишава 70 хил. броя; 2) при всяка (дори и много висока) цена има някакво търсене; 3) при цена от 3 лв. за брой се търсят 40 хил. броя от стоката. Моделирайте търсенето на тази стока чрез функция от вида $x(p) = \frac{a}{p+c}$. Построете D-линията за стоката. Пресметнете ценовата еластичност на търсене при цена от 3 лв. за брой.

Решение:

Условие 1) означава, че

$$x(0) = \frac{a}{c} = 70 \Longrightarrow a = 70c \quad \text{и} \quad x(p) = \frac{70c}{p + c}.$$

Според условие 3)

$$x(3) = \frac{70c}{3 + c} = 40 \Longrightarrow 70c = 120 + 40c \Longrightarrow c = 4 \;\text{ и }\; x(p) = \frac{280}{p + 4}.$$

Условие 2) е автоматично изпълнено, защото

$$\lim_{p\to\infty} x(p) = \lim_{p\to\infty} \frac{280}{p+4} = 0,$$

следователно не съществува (крайна) пределна цена.

Ценовата еластичност за произволна цена p е

$$E\big(x(p)\big) = x'(p)\frac{p}{x(p)} = -\frac{280}{(p+4)^2}\frac{p(p+4)}{280} = -\frac{p}{p+4}.$$

Следователно при цена от 3 лв. тя е

$$E\big(x(3)\big) = -\frac{3}{7}.$$

Вижда се, че такава функция моделира слабо еластично търсене за всички стойности на p ($E\big(x(p)\big) > -1$).

Задача 6. Неограничен пазар с пределна цена. За потребителското търсене на дадена стока е известно, че: 1) търсенето и е неограничено (при много ниски цени); 2) тя не се търси при цена, по-висока от 16 лв.; 3) при цена от 4 лв. се търсят 3 хил. броя от стоката. Моделирайте потребителското търсене на тази стока, като използвате функция от вида $x(p) = -a + \frac{b}{p}$. Какво може да се каже за ценовата еластичност на търсенето.

Решение:

Условие 2) означава, че

$$x(16) = -a + \frac{b}{16} = 0 \Longrightarrow b = 16a \quad \text{и} \quad x(p) = -a + \frac{16a}{p}.$$

Според условие 3)

$$x(4) = -a + \frac{16a}{4} = 3a = 3 \Longrightarrow a = 1 \quad \text{и} \quad x(p) = -1 + \frac{16}{p}.$$

Условие 1) е автоматично изпълнено, защото

$$\lim_{p\to 0} x(p) = \lim_{p\to 0}\left(-1 + \frac{16}{p}\right) = \infty.$$

За произволна стойност на p ценовата еластичност на търсене е

$$E\big(x(p)\big) = x'(p)\frac{p}{x(p)} = -\frac{16}{p^2}\frac{p}{\left(-1+\frac{16}{p}\right)} = -\frac{16}{16-p}.$$

Тогава за $p \in (0{,}16)$ ще имаме $E\big(x(p)\big) < -1$, следователно става дума за силно еластично търсене при всяка възможна цена.

Възстановяване на функцията на търсене от цената чрез използване на ценовата еластичност. Ще разгледаме два примера.

1. **Функция на търсене с константна еластичност.** Поставяме си въпроса да намерим всички функции с константна еластичност, т.е. изпълняващи условието
$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{x}{y} = c = const.$$

Умножаваме горното равенство с dx и делим на x, получаваме

$$\frac{dy}{y} = c\frac{dx}{x}$$

Интегрираме двете страни на последното равенство. Ще имаме

$\ln y = c\ln x + \ln c_0$, където $\ln c_0$ е интеграционната константа. След извършване на действията, окончателно получаваме

$$y = c_0 x^c,$$

т.е. степеннтата функция (и само тя) е функция с константна еластичност, като тази еластичност е равна на степента.

Нека сега, за дадено търсене да имаме следните данни: при цена на p_1 търсеното количество е q_1 , а ценовата еластичност $-\varepsilon$. Тогава ще имаме

$$x(p) = ap^{-\varepsilon}\text{ , където}$$

коефицента a ще определим от другото условие

$$q_1 = ap_1^{-\varepsilon} \Rightarrow a = q_1 p_1^{\varepsilon}$$

и окончателно

$$x(p) = q_1 p_1^{\varepsilon} p^{-\varepsilon}$$

е функцията на търсене при тези данни за търсенето.

2. **Линейна (адитивна) функция на търсене.** Нека данните да са същите, както по – горе. Търсим функция от вида

$$x(p) = a - bp.$$

Заместваме първото условие и получаваме

$$x(p_1) = a - bp_1 = q_1 => a = bp_1 + q_1$$

и

$$x(p) = q_1 + b(p_1 - p)$$

Намираме еластичността на горната функция за произволно :

$$\mathrm{E}\big(x(p)\big) = x'(p)\frac{p}{x(p)} = -b\frac{p}{q_1 + b(p_1 - p)}$$

Тогава за $p = p_1$ ще имаме $\mathrm{E}(x(p_1) = -b\frac{p_1}{q_1} = -\varepsilon => b = \frac{q_1}{p_1}$ и

$$x(p) = q_1 + \frac{q_1}{p_1}(p_1 - p) = q_1(2 - \frac{p}{p_1})$$

Задача 7. Възстановяване на функцията на търсене чрез ценовата еластичност. За потребителското търсене на картофи е известно, че при цена от 1 лв. за кг се търсят 3 т и ценовата еластичност на търсенето е $-\frac{1}{3}$. Да се състави функцията на търсене, ако се приеме, че: а) ценовата еластичност на търсенето е постоянна; б) функцията на търсене е линейна; в) функцията на търсене е от вида $x = (a - bp)^2$. Прогнозирайте търсенето на картофи при цена от 1,40 лв. за килограм.

Решение:

Условието на задачата означава, че

$$x(1) = 3 \quad \text{и} \quad E\big(x(1)\big) = -\frac{1}{3}.$$

а) Тъй като функцията на търсене е с постоянна еластичност, тя трябва да бъде степенна функция $x(p) = ap^{\alpha}$, като степенният показател съвпада с еластичността. Ще имаме

$$x(p) = ap^{-\frac{1}{3}}.$$

От първото условие получаваме

$$x(1) = a1^{-\frac{1}{3}} = 3 \Longrightarrow x(p) = 3p^{-\frac{1}{3}}.$$

б) Предполагаме, че линейната функция на търсене е от вида $x(p) = a - bp$. Първото от тези условия означава, че

$$x(1) = a - b = 3 \Longrightarrow a = 3 + b \quad \text{и} \quad x(p) = 3 + b - bp.$$

За еластичността на функцията ще имаме

$$E\big(x(p)\big) = x'(p)\frac{p}{x(p)} = -\frac{bp}{3+b-bp}.$$

Тогава второто условие е еквивалентно на

$$\mathrm{E}\big(\mathrm{x}(1)\big) = -\frac{\mathrm{b}}{3+\mathrm{b}-\mathrm{b}} = -\frac{\mathrm{b}}{3} = -\frac{1}{3} \Longrightarrow \mathrm{b} = 1 \quad \text{и} \quad \mathrm{x}(\mathrm{p}) = 4-\mathrm{p}.$$

в) Преобразуваме функцията на търсене

$$x(p) = (a-bp)^2 = a^2\left(1-\frac{b}{a}p\right)^2 = a^2(1-cp)^2.$$

От първото от тези условия получаваме, че

$$x(1) = a^2(1-c)^2 = 3 \Longrightarrow a^2 = \frac{3}{(1-c)^2} \quad \text{и} \quad x(p) = \frac{3}{(1-c)^2}(1-cp)^2.$$

За еластичността на тази функция ще имаме

$$E\big(x(p)\big) = x'(p)\frac{p}{x(p)} = \frac{3}{(1-c)^2}2(1-cp)(-c)\frac{p(1-c)^2}{3(1-cp)^2} = -\frac{2cp}{1-cp}.$$

Тогава

$$E\big(x(1)\big) = -\frac{2c}{1-c} = -\frac{1}{3} \Longrightarrow 6c = 1-c, c = \frac{1}{7}.$$

Окончателно за функцията на търсене получаваме

$$x(p) = \frac{3}{\left(1-\frac{1}{7}\right)^2}\left(1-\frac{1}{7}p\right)^2 = \frac{49}{12}\left(1-\frac{1}{7}p\right)^2$$

Сега да направим прогноза за търсенето при $p = 1{,}4$. В случай а) ще имаме

$$x(1{,}4) = 3 \cdot 1{,}4^{-\frac{1}{3}} = 2{,}68.$$

(Друг подход: $\ln x(1{,}4) = \ln 3 - \frac{1}{3}\ln 1{,}4 = 1{,}10 - \frac{1}{3}0{,}33 = 1{,}10 - 0{,}11 = 0{,}99$. Антилогаритмуваме и получаваме $x(1{,}4) = e^{0{,}99} = 2{,}69$). В случай на линейна функция ще имаме $x(1{,}4) = 4 - 1{,}4 = 2{,}6$. И накрая, в случай в) получаваме

$$x(p) = \frac{49}{12}\left(1-\frac{1}{7}1{,}4\right)^2 = \frac{49}{12}\frac{16}{25} = \frac{196}{75} = 2{,}61.$$

2.2. Влияние на цената на други стоки върху търсенето на дадена стока.

Логично е да се допусне, че търсенето на една стока ще зависи и от цената на други стоки. Ще разгледаме обема на търсенето на дадената стока x като функция на две променливи – нейната цена p и цената на друга стока p_1 :

$$x = x(p, p_1)$$

Ако при нарастване на цената p_1 , нараства и търсеното потребление x (x има положителна реакция на p_1) или

$$\frac{\partial x}{\partial p_1} > 0$$

стоката с цена p_1 ще наричаме заместваща стока за стоката с цена p (субститут, суплемент). В противен случай (x е с отрицателна реакция на p_1) или

$$\frac{\partial x}{\partial p_1} < 0 -$$

допълваща стока (комплемент).

Ако

$$\frac{\partial x}{\partial p_1} = 0,$$

т.е. x не реагира на p_1 – неутрална стока.

Кръстосана ценова еластичност. Тя се получава по следния начин

$$\mathrm{E}\big(x(p_1)\big) = \frac{\partial x(p, p_1)}{\partial p_1} \cdot \frac{p_1}{x(p, p_1)}$$

Тъй като кръстосаната еластичност запазва знака на частната производна, то кръстосаната еластичност ще бъде положителна (отрицателна, нула) при заместване (допълване, неутралитет) на стоката с цена p_1 спрямо стоката с цена p.

Кръстосаните еластичности имат голямо значение при бизнес икономическите изследвания, затова във водещите страни с развита пазарна икономика периодично се публикуват таблици с измерени кръстосани еластичности на основни потребителски стоки. В тези таблици главният диагонал се запълва от собствените еластичности на търсенето на стоките.

Най – използваните функции на две променливи за моделирането на функция на търсене са:

- адитивните (линейни) функции
$$x(p, p_1) = a - bp + \varepsilon c p_1 \text{ и}$$
- мултипликативните (степенни) функции
$$x(p, p_1) = a p^{-\alpha} p_1^{\varepsilon\beta},$$

където $= +1$, ако стоката е заместваща, $\varepsilon = -1$, ако е допълваща и $\varepsilon = 0$ - неутрална. В последния случай функцията е на една променлива.

Задача 8. Кръстосана еластичност. Прогнозирайте измененията в цената и количеството продадени ябълки, ако е известно, че ценовата еластичност на предлагането е 1,5, ценовата еластичност на търсенето е $-1{,}0$, кръстосаната еластичност на търсенето на ябълки по отношение на цената на бананите е 0,5 и бананите са поевтинели с 20%. А каква ще бъде промяната в оборота от продажба на ябълки?

Решение:

Предполагаме, че както функцията на предлагане, така и функцията на търсене са с постоянна еластичност. Тогава функцията на предлагане ще има вида

$$y(p) = a p^{1{,}5},$$

а функцията на търсене –

$$x(p) = b p^{-1} {p_1}^{0{,}5},$$

където p е цената на ябълките, p_1 – цената на бананите, а a и b – коефициенти (чиито стойности не можем да определим, но от това, както се вижда по-долу, не зависи решението). Пазарното равновесие на пазара на банани се обуславя от равенството

$$q = y(p) = a p^{1{,}5} = b p^{-1} {p_1}^{0{,}5} = x(p)$$

Горното равенство умножаваме с p и делим на a, тогава получаваме

$$p^{2{,}5} = \frac{b}{a} {p_1}^{0{,}5}.$$

Горното равенство степенуваме на степен $1/2{,}5 = 0{,}4$. За равновесната цена на ябълките ще имаме

$$p = \left(\frac{b}{a}\right)^{0,4} {p_1}^{0,2}.$$

За равновесното количество получаваме

$$q = ap^{1,5} = a\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{0,4} {p_1}^{0,2}\right)^{1,5} = a\left(\frac{b}{a}\right)^{0,6} {p_1}^{0,3} = a^{0,4}b^{0,6}{p_1}^{0,3}.$$

Така получихме параметрите на пазарното равновесие на пазара на ябълки като функции само от цената на бананите. Ако p_1 е старата цена на бананите, то новата цена ${p_1}'$ ще бъде ${p_1}' = 0{,}8p_1$ (съответстваща на 20% поевтиняване). Тогава за новата цена на ябълките p' ще имаме

$$p' = \left(\frac{b}{a}\right)^{0,4} {p_1}'^{0,2} = \left(\frac{b}{a}\right)^{0,4} (0{,}8p_1)^{0,2} = \left(\frac{b}{a}\right)^{0,4} 0{,}8^{0,2}{p_1}^{0,2} = 0{,}8^{0,2}p = 0{,}956p.$$

С други думи, цената на ябълките намаля с $0{,}044p$ или имаме поевтиняване с $4{,}4\%$.

За новото равновесно количество на ябълките q' ще имаме

$$q' = a^{0,4}b^{0,6}{p_1}'^{0,3} = a^{0,4}b^{0,6}(0{,}8p_1)^{0,3} = a^{0,4}b^{0,6}0{,}8^{0,3}{p_1}^{0,3} = 0{,}8^{0,3}q = 0{,}935q$$

или количеството продадени ябълки е спаднало с $0{,}065q$, т.е. с $6{,}5\%$.

Оборота от продажба на ябълки преди промяната в цената на бананите е $R = pq$. След тази промяна ще имаме

$$R' = p'q' = (0{,}956p)(0{,}935q) = 0{,}956 \cdot 0{,}935 \cdot pq = 0{,}894R.$$

Следователно, след поевтиняването на бананите, оборотът от продажба на ябълки спада с $10{,}6\%$.

Задача 9. Прогнози в зависимост от конкуренцията. Нека p е цената на известна марка лютеница, p_1 – цената на основната конкурентна марка лютеница, x – количеството на търсене на първата марка (за седмица) и y – количеството на предлагане за същата марка. Известни са следните данни табл.2.2.1.

Таблица 2.2.1.

p	p_1	x	y
2	2,5	10000	10000
2	2	8750	
2,5	2	7370	13060

Моделирайте търсенето и предлагането на първата марка лютеница посредством мултипликативни функции и намерете равновесните пазарни величини за тази марка в зависимост от цената на конкурентната марка. Какви ще бъдат тези равновесни величини при $p_1 = 2$ и при $p_1 = 3$?

Решение:

Първо да възстановим функцията на търсене. В мултипликативен вариант тя би трябвало да има вида

$$x(p,\, p_1) = ap^{-\alpha}\, {p_1}^{\alpha_1}.$$

(степенният показател на p_1 е положителен, защото стоките са взаимно допълващи се). Логаритмуваме горното равенство и получаваме

$$\ln x(p,\, p_1) = \ln a - \alpha \ln p + \alpha_1 \ln\, p_1.$$

Заместваме данните за функцията на търсене (предполагаме, че търсенето и предлагането се измерват в хиляди броя за седмица) и получаваме системата от три уравнения за трите неизвестни $\ln a$, α и α_1

$$\ln a - \alpha \ln 2 + \alpha_1 \ln 2{,}5 = \ln 10$$

$$\ln a - \alpha \ln 2 + \alpha_1 \ln 2 = \ln 8{,}75$$

$$\ln a - \alpha \ln 2{,}5 + \alpha_1 \ln 2 = \ln 7{,}37$$

След пресмятане на логаритмите ще имаме

$$\ln a - 0{,}69\alpha + 0{,}92\alpha_1 = 2{,}30$$

$$\ln a - 0{,}69\alpha + 0{,}69\alpha_1 = 2{,}17$$

$$\ln a - 0{,}92\alpha + 0{,}69\alpha_1 = 2{,}00$$

Решаваме горната система по метода на Гаус. Разширената матрица е

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}69 & 0{,}92 & 2{,}30 \\ 1 & -0{,}69 & 0{,}69 & 2{,}17 \\ 1 & -0{,}92 & 0{,}69 & 2{,}00 \end{array}\right)$$

Изваждаме последователно първия ред от втория и третия ред и получаваме

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}69 & 0{,}92 & 2{,}30 \\ 0 & 0 & -0{,}23 & -0{,}13 \\ 0 & -0{,}23 & -0{,}23 & -0{,}30 \end{array}\right)$$

От второто уравнение ще имаме $0{,}23\alpha_1 = 0{,}13 \Longrightarrow \alpha_1 = \frac{0{,}13}{0{,}23} = 0{,}57$. Заместваме намерената стойност на α_1 в третото уравнение и получаваме

$$0{,}23\alpha + 0{,}23 \cdot 0{,}57 = 0{,}30 \Longrightarrow \alpha = \frac{0{,}30 - 0{,}13}{0{,}23} = \frac{0{,}17}{0{,}23} = 0{,}74.$$

Сега заместваме α и α_1 в първото уравнение за да определим $\ln a$. Ще имаме

$$\ln a - 0{,}69 \cdot 0{,}74 + 0{,}92 \cdot 0{,}57 = 2{,}30 \Longrightarrow \ln a = 2{,}30 + 0{,}51 - 0{,}52 = 2{,}29.$$

Антилогаритмуваме и получаваме

$$a = e^{2{,}29} = 9{,}87.$$

Така окончателният вид на функцията на търсене е

$$x(p,\, p_1) = 9{,}87p^{-0{,}74}\, {p_1}^{0{,}57}.$$

Сега ще възстановим функцията на предлагане, която в мултипликативен вариант трябва да има вида

$$y(p) = bp^{\beta}$$

или след логаритмуване

$$\ln y(p) = \ln b + \beta \ln p.$$

Използваме данните от условието и получаваме

$$\ln 10 = \ln b + \beta \ln 2$$

$$\ln 13{,}06 = \ln b + \beta \ln 2\,,5.$$

След пресмятане на логаритмите ще имаме

$$2{,}30 = \ln b + 0{,}67\beta$$

$$2{,}57 = \ln b + 0{,}92\beta.$$

От второто уравнение изваждаме първото и получаваме $0{,}23\beta = 0{,}27 \Longrightarrow \beta = \frac{0{,}27}{0{,}23} = 1{,}17$. Заместваме намерената стойност на β в първото уравнение, за да намерим $\ln b$. Ще имаме

$$\ln b = 2{,}30 - 0{,}67 \cdot 1{,}17 = 2{,}30 - 0{,}81 = 1{,}49.$$

След антилогаритмуване получаваме $b = e^{1{,}49} = 4{,}44$, тогава окончателния вид на функцията на предлагане ще бъде

$$y(p) = 4{,}44p^{1{,}17}.$$

Изравняваме функциите на търсене и предлагане, за да получим уравнението на частично равновесие

$$q = y(p) = 4{,}44p^{1{,}17} = 9{,}87p^{-0{,}74}\, {p_1}^{0{,}57} = x(p,\ p_1).$$

Умножаваме двете страни на равенството с $p^{0{,}74}$ и делим на 4,44. Тогава получаваме

$$p^{1{,}91} = 2{,}22\, {p_1}^{0{,}57}.$$

Степенуваме двете страни на равенството с $1/1{,}91 = 0{,}52$. Ще имаме

$$(p^{1{,}91})^{\frac{1}{1{,}91}} = (2{,}22\, {p_1}^{0{,}57})^{0{,}52} \quad \text{или } p = 2{,}22^{0{,}52}\, {p_1}^{0{,}3} = 1{,}51\, {p_1}^{0{,}3}.$$

Заместваме намерения израз за p в израза за функцията на предлагане и получаваме

$$q = y(p) = 4{,}44p^{1{,}17} = 4{,}44(1{,}51\, {p_1}^{0{,}3})^{1{,}17} = 4{,}44 \cdot 1{,}51^{1{,}17}\, {p_1}^{0{,}35} = 7{,}19\, {p_1}^{0{,}35}.$$

Така окончателно равновесните стойности за цената $p = 1{,}51\, {p_1}^{0{,}3}$ и количеството $q = 7{,}19\, {p_1}^{0{,}35}$ на първата марка лютеница са функции само от цената на втората (конкурентна) марка лютеница. Така давайки стойности на p_1 можем да намираме параметрите на пазарното равновесие за първата марка. В табл.2.2.2 са пресметнати тези параметри за $p_1 = 2$ и $p_1 = 3$.

Таблица 2.2.2.

p_1	p	q	$R = pq$
2	1,85	9,16	16,95
3	2,10	10,56	22,18

Друг подход за определяне на параметрите на пазарното равновесие на първата марка. Логаритмуваме двете страни на уравнението на частично равновесие и получаваме

$$\ln q = \ln 4{,}44 + 1{,}17 \ln p = \ln 9{,}87 - 0{,}74 \ln p + 0{,}57 \ln\ p_1$$

Тъй като $\ln 4{,}44 = 1{,}49$ $(e^{1{,}49} = 4{,}44)$ и $\ln 9{,}87 = 2{,}29$ $(e^{2{,}29} = 9{,}87)$, то последното от равенство получаваме

$$\ln p = 0{,}42 + 0{,}3 \ln\ p_1.$$

Замествайки получения израз за $\ln p$ в израза за $\ln q$ намираме

$$\ln q = 1{,}98 + 0{,}35 \ln\ p_1$$

2.3. Функция на търсенето от дохода

След цената на стоката, доходът на потребителя е важен фактор, определящ търсенето. Затова ще разгледаме функция на търсенето от дохода:

$$x = x(I).$$

Дадена стока се нарича малоценна (некачествена), ако търсенето й реагира отрицателно на дохода, т.е. $x'(I) < 0$ и ценна (качествена, нормална) при $x'(I) > 0$. Т.е. при нормалните стоки с нарастването на доходите на потребителите, нараства и търсенето им. Доколкото потребителските доходи нарастват (през по–голямата част от времето), некачествените стоки постепенно отпадат от пазара.

Доходна еластичност на търсенето. За да можем да подразделим ценните стоки в няколко групи, е необходимо да въведем понятието доходна еластичност на търсенето. Ще имаме

$$\mathrm{E}\big(x(I)\big) = x'(I)\frac{I}{x(I)}$$

Стоките с нееластично (слабо еластично) търсене по дохода $0 < \mathrm{E}(x(I)) < 1$ са стоките от първа необходимост. При тях с нарастване на доходите, потреблението им расте с по–бавен темп от темпа на доходите и обратното. Това обстоятелство се обяснява с важността на тези стоки за ежедневното потребление. От тази гледна точка, една страна се възприема за толкова по–развита, колкото по–малък процент отделят гражданите й за храна. Стоките с еластично (силно еластично) търсене по дохода $\mathrm{E}(x(I)) > 1$ са луксозните стоки. Стоките, при които потреблението расте със същия темп, както доходите $\mathrm{E}\big(x(I)\big) = 1$ се наричат обикновено стоки от втора необходимост. Тук най–често попадат мебели, електроуреди и въобще домашно обзавеждане и оборудване. Друг е въпросът, че повечето стоки се държат по различен начин при различни нива на доходите – при по–ниски доходи като луксозни стоки, а при по – високи - като стоки от първа необходимост.

Функции на Торнквист. Шведският икономист Торнквист е предложил специални функции за трите групи стоки:

$$x(I) = \frac{a_0 I}{a_1 + I} \text{ за стоките от първа необходимост}$$

$$x(I) = a_0 \frac{I - a_1}{I + a_2} \text{ за междинната група стоки и}$$

$$x(I) = a_0 I \frac{I - a_1}{I + a_2} \text{ за луксозните стоки}$$

Задача 10. Стока от първа необходимост. В един град, при средна заплата от 800 лв. са се купували 10000 хляба. След 2 години средната заплата в града се увеличила с 25%, а потреблението на хляб – с 13,6% (цената на хляба се запазила). Моделирайте функцията на пазарно търсене от дохода чрез функцията на Торнквист

$$x(I) = \frac{a_0 I}{a_1 + I} \quad \text{за стоките от първа необходимост}$$

Прогнозирайте потреблението на хляб при допълнително увеличение на средната заплата с 20%. Какви изводи могат да се направят чрез доходната еластичност на търсенето?

Решение:

Използвайки данните получаваме

$$x(0{,}8) = \frac{0{,}8a_0}{a_1 + 0{,}8} = 10$$

$$x(1{,}0) = \frac{a_0}{a_1 + 1} = 11{,}36$$

(заплатата се измерва в хил. лв., а количеството хляб – в хил. бр.). Така получаваме линейна система с две уравнения за определяне на двете неизвестни

– коефициентите a_0 и a_1 от функцията на Торнквист за стока от първа необходимост

$$10a_1 + 8 = 0{,}8a_0$$

$$11{,}36a_1 + 11{,}36 = a_0$$

Заместваме a_0 от второто уравнение в първото и получаваме

$$10a_1 + 8 = 0{,}8(11{,}36a_1 + 11{,}36) = 9{,}09a_1 + 9{,}09 \Longrightarrow 0{,}91a_1 = 1{,}09 \Longrightarrow a_1 = \frac{1{,}09}{0{,}91} = 1{,}2$$

Сега пресмятаме a_0: $a_0 = 11{,}36 \cdot 1{,}2 + 11{,}36 = 25$. Окончателният вид на функцията на Торнквист е

$$x(I) = \frac{25I}{1{,}2 + I}$$

Това ни позволява да правим прогнози. Така например, при допълнително увеличение на средната заплата с 20%, т.е. от $I = 1{,}0$ до $I = 1{,}2$ ще имаме

$$x(1{,}2) = \frac{25 \cdot 1{,}2}{1{,}2 + 1{,}2} = \frac{30}{2{,}4} = 12{,}5\,,$$

или повишение на потреблението с $12{,}5 - 11{,}36 = 1{,}14$ хил. бр., което прави

$$\frac{1{,}14}{11{,}36}100 = 10\%$$

Да пресметнем доходната еластичност на тази функция на Торнквист. Ще имаме

$$E\big(x(I)\big) = x'(I)\,\frac{I}{x(I)} = \frac{25(1{,}2 + I) - 25I}{(1{,}2 + I)^2} \cdot I \cdot \frac{1{,}2 + I}{25I} = \frac{1{,}2}{1{,}2 + I}$$

Очевидно, за всяка стойност на I ще имаме $E\big(x(I)\big) < 1$, т.е. на еднопроцентно нарастване на дохода ще отговаря по-малко от еднопроцентно увеличение на потреблението, което отговаря на представите ни за стока от първа необходимост.

Задача 11. Стока от втора необходимост. В един град, в три последователни години средната работна заплата и потреблението на табуретки са се изменяли така:

	Средна работна заплата (лв.)	Потребление на табуретки (бр.)
Първа година	1000	1667
Втора година	1100	1935
Трета година	1200	2188

Моделирайте функцията на пазарно търсене от дохода чрез функцията на Торнквист

$$x(I) = a_0 \frac{I - a_1}{I + a_2}$$ за междинната група от стоки.

Прогнозирайте потреблението на табуретки при изменението на средната работна заплата до 1300 и 1500 лв. Какви изводи могат да се направят чрез доходната еластичност на търсенето?

Решение:

Ще търсим функция от вида

$$x(I) = a_0 \frac{I - a_1}{I + a_2}$$

За да определим неизвестните коефициенти a_0, a_1, a_2 ще използваме дадените условия

$$x(1) = a_0 \frac{1 - a_1}{1 + a_2} = 1{,}667$$

$$x(1{,}1) = a_0 \frac{1{,}1 - a_1}{1{,}1 + a_2} = 1{,}935$$

$$x(1{,}2) = a_0 \frac{1{,}2 - a_1}{1{,}2 + a_2} = 2{,}188$$

(доходът I се измерва в хил.лв., а броят на табуретки - хил.бр.). Получаваме

$$a_0 - a_0 a_1 = 1{,}667 + 1{,}667 a_2$$

$$1{,}1 a_0 - a_0 a_1 = 2{,}1285 + 1{,}935 a_2$$

$$1{,}2 a_0 - a_0 a_1 = 2{,}6256 + 2{,}188 a_2$$

Така достигаме до следната линейна система

$$\left| \begin{array}{l} a_0 a_1 - a_0 + 1{,}667 a_2 = -1{,}667 \\ a_0 a_1 - 1{,}1 a_0 + 1{,}935 a_2 = -2{,}1285 \\ a_0 a_1 - 1{,}2 a_0 + 2{,}188 a_2 = -2{,}6256 \end{array} \right.$$

с неизвестни a_0a_1, a_0, a_2. Решаваме я и получаваме

$$a_0a_1 = 5, a_0 = 10, a_2 = 2 \Longrightarrow \ a_1 = 0{,}5$$

Така, възстановената функция на търсенето от дохода има вида

$$x(I) = 10\frac{I - 0{,}5}{I + 2}$$

Ясно се вижда,че за да може горната функция да изпълнява ролята на функция на търсене е необходимо $I > 0{,}5$

Да пресметнем първата производна. Ще имаме

$$x'(I) = \frac{25}{(I + 2)^2}$$

Тогава за доходната еластичност получаваме

$$\mathrm{E}\big(x(I)\big) = x'(I)\frac{I}{x(I)} = \frac{25}{(I + 2)^2} \cdot \frac{I(I + 2)}{10(I - 0{,}5)} = \frac{2{,}5I}{(I + 2)(I - 0{,}5)}$$

Да решим уравнението

$$\mathrm{E}\big(x(I)\big) = \frac{2{,}5I}{(I + 2)(I - 0{,}5)} = 1$$

Получаваме квадратното уравнение

$$I^2 - I - 1 = 0$$

с положителен корен

$$I_0 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx \frac{1 + 2{,}236}{2} = 1{,}618$$

След като

$$\mathrm{E}\big(x(1)\big) = \frac{5}{3} > 1,$$

то по метода на интервалите установяваме,че

$$\mathrm{E}\big(x(I)\big) > 1 \text{ при } 0{,}5 < I < I_0 \approx 1{,}618$$

$$\mathrm{E}\big(x(I)\big) < 1 \text{ при } I > I_0$$

т.е. при ниски доходи ($I \in (0{,}5; 1{,}618)$) стоката има поведение на луксозна, а за високи доходи ($I \in (1{,}618; +\infty)$) – на стока от първа необходимост.

Получената в явен вид функция на търсенето от дохода може да служи за прогнозиране. Така например

$$x(1{,}3) = 10\frac{1{,}3 - 0{,}5}{1{,}3 + 2} = \frac{8}{3{,}2} = 2{,}5$$

$$x(1{,}5) = 10\frac{1{,}5 - 0{,}5}{1{,}5 + 2} = \frac{10}{3{,}5} \approx 2{,}857$$

Задача 12. Луксозни стоки. При доходи от 1500 лв. на месец софийските адвокати купували 1800 делови кожени чанти, при доходи от 2000 лв. – 4000 бр., а при доходи от 3000 лв. – 9000 бр. Моделирайте функцията на пазарно търсене от дохода чрез функцията на Торнквист

$$x(I) = a_0 I\frac{I - a_1}{I + a_2} \quad \text{за луксозните стоки}$$

Прогнозирайте потреблението на при доходи от 4000 лв. Какви изводи могат да се направят чрез доходната еластичност на търсенето?

Решение:

Използвайки данните получаваме

$$x(1{,}5) = 1{,}5a_0\frac{1{,}5 - a_1}{1{,}5 + a_2} = 1{,}8$$

$$x(2) = 2a_0\frac{2 - a_1}{2 + a_2} = 4$$

$$x(3) = 3a_0\frac{3 - a_1}{3 + a_2} = 9$$

Така получаваме линейна система от три уравнения за три неизвестни – a_0, a_0a_1, a_2 (за a_0, a_1 и a_2 системата не е линейна).

$$2{,}25a_0 - 1{,}5a_0a_1 - 1{,}8a_2 = 2{,}7$$

$$4a_0 - 2a_0a_1 - 4a_2 = 8$$

$$9a_0 - 3a_0a_1 - 9a_2 = 27$$

с разширена матрица

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2{,}25 & -1{,}5 & -1{,}8 & 2{,}7 \\ 4 & -2 & -4 & 8 \\ 9 & -3 & -9 & 27 \end{array}\right).$$

Разделяме втория ред на 4 и разменяме местата на първите два реда, получаваме

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}5 & -1 & 2 \\ 2{,}25 & -1{,}5 & -1{,}8 & 2{,}7 \\ 9 & -3 & -9 & 27 \end{array}\right)$$

Умножаваме първия ред с $-2{,}25$ и прибавяме към втория; след това умножаваме първия ред с -9 и прибавяме към третия; получаваме

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}5 & -1 & 2 \\ 0 & -0{,}375 & 0{,}45 & -1{,}8 \\ 0 & 1{,}5 & 0 & 9 \end{array}\right).$$

От последния ред получаваме $1{,}5a_0a_1 = 9 \Longrightarrow a_0a_1 = 6$. Заместваме получения резултат във вторият ред: $0{,}45a_2 = 0{,}375 \cdot 6 - 1{,}8 = 2{,}25 - 1{,}8 = 0{,}45 \Longrightarrow a_2 = 1$. Заместваме намерените стойности за a_0a_1 и a_2 в първия ред и получаваме $a_0 = 0{,}5 \cdot 6 + 1 \cdot 1 + 2 = 6$. Тогава $a_1 = a_0a_1/a_0 = 6/6 = 1$. Окончателно за функцията на Торнквист ще имаме

$$x(I) = 6I\frac{I-1}{I+1}$$

Получената функция ни дава възможност да прогнозираме потреблението на чанти при друго ниво на доходи, например 4000 лв.

$$x(I) = 6 \cdot 4\frac{4-1}{4+1} = 24\frac{3}{5} = 14{,}4$$

За доходната еластичност ще имаме

$$E\big(x(I)\big) = x'(I)\frac{I}{x(I)} = \frac{(12I-6)(I+1)-(6I^2-6I)}{(I+1)^2} \cdot I \cdot \frac{I+1}{6I(I-1)} = \frac{I^2+2I-1}{I^2-1}$$

Числителят на $E\big(x(I)\big)$ има положителен корен $-1+\sqrt{2}$, а знаменателят – 1. По метода на интервалите установяваме, че $E\big(x(I)\big) > 0$ за $I \in \big(0, -1+\sqrt{2}\big) \cup (1, \infty)$. За стойности на $I \in (1, \infty)$ (доходи, по-големи от 1000 лв.) числителят е по-голям от знаменателя, следователно $E\big(x(I)\big) > 1$, което отговаря на очакванията ни за стока с луксозно потребление.

Обобщени функции на Торнквист

Задача 13. Нека при условията на задача 10 да допуснем, че цената на хляба е 0,8 лв. за брой. Да се опитаме да моделираме потреблението на хляб като функция на две променливи – цената и дохода, като при $p = 0{,}8$ е валидна получената функция на Торнквист, т.е

$$x(p = 0{,}8, I) = \frac{25I}{1{,}2 + I},$$

като влиянието на цената става чрез

а) коефициента a_0 във съответната функция на Торнквист или

$$x(p, I) = \frac{a_0(p)I}{1{,}2 + I},$$

б) коефициента a_1 във съответната функция на Торнквист или

$$x(p, I) = \frac{25I}{a_1(p) + I}.$$

И в двата случая предполагаме, че това влияние е линейно и ценовата еластичност (при цена $p = 0{,}8$ и доход $I = 0{,}8$) е $-0{,}2$. Въз основа на тези две обобщени функции на Торнквист да се прогнозира потреблението на хляб при всевъзможните комбинации на доход от 1200 лв. и 1500 лв. и цена на хляба 0,9 лв. и 1 лв.

Решение:

а) Търсим двуфакторната функция на потреблението от вида

$$x(p, I) = \frac{a_0(p)I}{1{,}2 + I}$$

Ако гледаме на дохода I като на параметър, получваме функция на една променлива - цената p, чиято първа производна е

$$x'(p) = \frac{I}{1{,}2 + I}\mathrm{a}'_0(p)$$

От горния израз се вижда, че

$$x'(p) < 0 \Leftrightarrow \mathrm{a}'_0(p) < 0$$

Това ни подсказва, че трябва да търсим линейната функция $a_0(p)$ от вида

$$a_0(p) = \alpha - \beta p; \alpha, \beta > 0$$

$$\mathrm{a}_0'(p) = -\beta$$

При $p = 0{,}8$ получаваме

$$a_0(0{,}8) = \alpha - 0{,}8\beta = 25 \Longrightarrow \alpha = 25 + 0{,}8\beta$$

и ще имаме

$$a_0(p) = 25 + 0{,}8\beta - \beta p$$

За да определим единствения вече параметър β, от който зависи $a_0(p)$ ще използваме дадената ценова еластичност на функцията $x(p)$. Ще имаме

$$\mathrm{E}\big(x(p)\big) = x'(p)\frac{p}{x(p)} = \frac{I}{1{,}2 + I} \cdot \frac{p(1{,}2 + I)}{a_0(p)I}\mathrm{a}_0'(p) = \frac{p}{a_0(p)}\mathrm{a}_0'(p) = \mathrm{E}\big(a_0(p)\big)$$

$$\mathrm{E}\big(a_0(p)\big) = -\frac{\beta p}{25 + 0{,}8\beta - \beta p}$$

За $p = 0{,}8$ получаваме

$$\mathrm{E}\big(a_0(0{,}8)\big) = -\frac{0{,}8\beta}{25} = -0{,}2$$

$$\beta = \frac{5}{0{,}8} = 6{,}25,$$

следователно ще имаме

$$a_0(p) = 25 + 0{,}8 \cdot 6{,}25 - 6{,}25p = 30 - 6{,}25p$$

Така окончателният вид на двуфакторната функция на търсене ще бъде

$$x(p, I) = \frac{(30 - 6{,}25p)I}{1{,}2 + I}$$

На базата на получения израз за тази функция можем да направим прогноза за потреблението на хляб при различни стойности на тяхната цена и потребителския доход.

За всевъзможните комбинации между $p = 0{,}9,\ I = 1{,}2$; $p = 0{,}9,\ I = 1{,}5$; $p = 1,\ I = 1{,}2$; $p = 1,\ I = 1{,}5$ получаваме

$$x(0{,}9; 1{,}2) = \frac{(30 - 6{,}25 \cdot 0{,}9)1{,}2}{1{,}2 + 1{,}2} = \frac{24{,}375 \cdot 1{,}2}{2{,}4} \approx 12{,}1875$$

$$x(0{,}9;1{,}5)=\frac{(30-6{,}25\cdot 0{,}9)1{,}5}{1{,}2+1{,}5}=\frac{24{,}375\cdot 1{,}5}{2{,}7}\approx 13{,}452$$

$$x(1;1{,}2)=\frac{(30-6{,}25\cdot 1{,}0)1{,}2}{1{,}2+1{,}2}=\frac{23{,}75\cdot 1{,}2}{2{,}4}\approx 11{,}875$$

$$x(1;1{,}5)=\frac{(30-6{,}25\cdot 1{,}0)1{,}5}{1{,}2+1{,}5}=\frac{23{,}75\cdot 1{,}5}{2{,}7}\approx 13{,}194$$

Горните резултати нанасяме в табл.2.3.1

Таблица 2.3.1

	$I=1{,}2$	$I=1{,}5$
$p=0{,}9$	12,188	13,542
$p=1$	11,875	13,194

б) Сега търсим двуфакторната функция на потреблението във вида

$$x(p,I)=\frac{25I}{a_1(p)+I}$$

Тъй като първата производна на горната функция (при I - параметър) е

$$x'(p)=25I\left(-\frac{1}{(a_1(p)+I)^2}\right)\mathrm{a}_1'(p)=-\frac{25Ia_1'(p)}{(a_1(p)+I)^2},$$

$$\text{то } x'(p)<0 \Leftrightarrow a_1'(p)>0\,,$$

следователно линейната функция $a_1(p)$ трябва да е от вида

$$a_1(p)=\alpha+\beta p;\alpha,\beta>0$$

$$\mathrm{a}_1'(p)=\beta$$

При $p=0{,}8$ получаваме

$$a_1(0{,}8)=\alpha+0{,}8\beta=1{,}2\Rightarrow\alpha=1{,}2-0{,}8\beta$$

и

$$a_1(p)=1{,}2-0{,}8\beta+\beta p$$

За да определим коефициента β ще използваме дадената еластичност (при $p = 0{,}8$ и $I = 0{,}8$). Ще имаме

$$\mathrm{E}\big(x(p)\big) = x'(p)\frac{p}{x(p)} = -\frac{25Ia_1'(p)}{(a_1(p)+I)^2}\cdot\frac{(a_1(p)+I)p}{25I} = -\frac{pa_1'(p)}{a_1(p)+I}$$

за всяко p и I. За $p = 0{,}8$ и $I = 0{,}8$ получаваме

$$\mathrm{E}\big(x(0{,}8)\big) = -\frac{0{,}8\beta}{1{,}2+0{,}8} = -0{,}2 \Rightarrow \beta = \frac{0{,}4}{0{,}8} = 0{,}5$$

и функцията $a_1(p)$ има вида

$$a_1(p) = 1{,}2 - 0{,}8\cdot 0{,}5 + 0{,}5p = 0{,}8 + 0{,}5p$$

Тогава, окончателният вид на двуфакторната функция на търсене е

$$x(p,I) = \frac{25I}{0{,}8+0{,}5p+I}$$

Използвайки този израз пресмятаме

$$x(0{,}9;1{,}2) = \frac{25\cdot 1{,}2}{0{,}8+0{,}5\cdot 0{,}9+1{,}2} = \frac{30}{2{,}45} \approx 12{,}245$$

$$x(0{,}9;1{,}5) = \frac{25\cdot 1{,}5}{0{,}8+0{,}5\cdot 0{,}9+1{,}5} = \frac{37{,}5}{2{,}75} \approx 13{,}636$$

$$x(1;1{,}2) = \frac{25.1{,}2}{0{,}8+0{,}5\cdot 1{,}0+1{,}2} = \frac{30}{2{,}5} = 12$$

$$x(1;1{,}5) = \frac{25.1{,}5}{0{,}8+0{,}5\cdot 1{,}0+1{,}5} = \frac{37{,}5}{2{,}8} \approx 13{,}393$$

Получените резултати нанасяме в табл. 2.3.2

Таблица 2.3.2

	$I = 1{,}2$	$I = 1{,}5$
$p = 0{,}9$	12,245	13,636
$p = 1$	12,000	13,393

Задача 14. Нека при условието на задача 11 да допуснем, че цената на табуретките е 40 лв. Да се опитаме да моделираме потреблението на табуретки като функция на две променливи – цената и дохода, като при $p = 40$ е валидна получената функция на Торнквист, т.е

$$x(p = 40, I) = 10\frac{I - 0{,}5}{I + 2},$$

като влиянието на цената става чрез

а) коефициента a_0 във съответната функция на Торнквист или

$$x(p, I) = a_0(p)\frac{I - 0{,}5}{I + 2},$$

б) коефициента a_1 във съответната функция на Торнквист или

$$x(p, I) = 10\frac{I - a_1(p)}{I + 2},$$

в) коефициента a_2 във съответната функция на Торнквист или

$$x(p, I) = 10\frac{I - 0{,}5}{I + a_2(p)}$$

И в трите случая предполагаме, че това влияние е линейно и ценовата еластичност (при цена $p = 40$ и доход $I = 1{,}0$) е $-0{,}4$. Въз основа на тези три обобщени функции на Торнквист да се прогнозира потреблението на табуретки при всевъзможните комбинации на доход от 1300 лв. и 1500 лв. и цена на кожените чанти 50 лв. и 60 лв.

Решение:

а) Търсим двуфакторната функция на потреблението от вида

$$x(p, I) = a_0(p)\frac{I - 0{,}5}{I + 2}$$

Ако гледаме на дохода I като на параметър, получваме функция на една променлива - цената p, чиято първа производна е

$$x'(p) = \frac{I - 0{,}5}{I + 2}a_0'(p)$$

От горния израз се вижда, че

$$x'(p) < 0 \Leftrightarrow a_0'(p) < 0$$

Това ни подсказва, че трябва да търсим линейната функция $a_0(p)$ от вида

$$a_0(p) = \alpha - \beta p; \alpha, \beta > 0$$

При $p = 40$ получаваме

$$a_0(40) = \alpha - 40\beta = 10 \Longrightarrow \alpha = 10 + 40\beta$$

и ще имаме

$$a_0(p) = 10 + 40\beta - \beta p$$

За да определим единствения вече параметър β, от който зависи $a_0(p)$ ще използваме дадената ценова еластичност на функцията $x(p)$. Ще имаме

$$\mathrm{E}\big(x(p)\big) = x'(p)\frac{p}{x(p)} = \mathrm{a}_0'(p)\frac{p}{a_0(p)} = \mathrm{E}\big(a_0(p)\big)$$

За $p = 40$ получаваме

$$\mathrm{E}\big(x(40)\big) = -\frac{40\beta}{a_0(40)} = -\frac{4}{10}$$

Тъй като $a_0(40) = 10$, то получаваме за $\beta = 0{,}1$, следователно ще имаме

$$a_0(p) = 10 + 40 \cdot 0{,}1 - 0{,}1 \cdot p = 14 - 0{,}1p$$

Така окончателният вид на двуфакторната функция на търсене ще бъде

$$x(p, I) = (14 - 0{,}1p)\frac{I - 0{,}5}{I + 2}$$

На базата на получения израз за тази функция можем да направим прогноза за потреблението на табуретки при различни стойности на тяхната цена и потребителския доход.

За всевъзможните комбинации между $p = 50,\ I = 1{,}3$; $p = 50,\ I = 1{,}5$; $p = 60,\ I = 1{,}3$; $p = 60,\ I = 1{,}5$ получаваме

$$x(50; 1{,}3) = (14 - 0{,}1 \cdot 50)\frac{1{,}3 - 0{,}5}{1{,}3 + 2} \approx 2{,}182$$

$$x(50; 1{,}5) = (14 - 0{,}1 \cdot 50)\frac{1{,}5 - 0{,}5}{1{,}5 + 2} \approx 2{,}571$$

$$x(60; 1{,}3) = (14 - 0{,}1 \cdot 60)\frac{1{,}3 - 0{,}5}{1{,}3 + 2} = 2$$

$$x(60; 1{,}5) = (14 - 0{,}1 \cdot 60)\frac{1{,}5 - 0{,}5}{1{,}5 + 2} \approx 2{,}286$$

Горните резултати нанасяме в табл. 2.3.3.

Таблица 2.3.3

	$I = 1{,}3$	$I = 1{,}5$
$p = 50$	2,182	2,571
$p = 60$	2,000	2,286

б) Сега търсим двуфакторната функция на потреблението във вида

$$x(p, I) = 10\frac{I - a_1(p)}{I + 2}$$

Тъй като първата производна на горната функция (при I - параметър) е

$$x'(p) = -\frac{10a_1'(p)}{I + 2},$$

$$\text{то } x'(p) < 0 \Leftrightarrow a_1'(p) > 0\ ,$$

следователно линейната функция $a_1(p)$ трябва да е от вида

$$a_1(p) = \alpha + \beta p; \alpha, \beta > 0$$

При $p = 40$ получаваме

$$a_1(40) = \alpha + 40\beta = 0{,}5 \Rightarrow \alpha = 0{,}5 - 40\beta$$

и

$$a_1(p) = 0{,}5 - 40\beta + \beta p$$

За да определим коефициента β ще използваме дадената еластичност (при $p = 40$ и $I = 1$). Ще имаме

$$\mathrm{E}\big(x(p)\big) = x'(p)\frac{p}{x(p)} = -\frac{a_1'(p)p}{I - a_1(p)}$$

за всяко p и $I.$ За $p = 40$ и $I = 1$ получаваме

$$\mathrm{E}\big(x(40)\big) = -\frac{40\beta}{1 - 0{,}5} = -\frac{4}{10} \Rightarrow \beta = 0{,}005$$

и функцията $a_1(p)$ има вида

$$a_1(p) = 0{,}3 + 0{,}005p$$

Тогава, окончателният вид на двуфакторната функция на търсене е

$$x(p, I) = 10\frac{I - 0{,}3 - 0{,}005p}{I + 2}$$

Използвайки този израз пресмятаме

$$x(50; 1{,}3) = 10\frac{1{,}3 - 0{,}3 - 0{,}005 \cdot 50}{1{,}3 + 2} \approx 2{,}273$$

$$x(50; 1{,}5) = 10\frac{1{,}5 - 0{,}3 - 0{,}005 \cdot 50}{1{,}5 + 2} \approx 2{,}714$$

$$x(60; 1{,}3) = 10\frac{1{,}3 - 0{,}3 - 0{,}005 \cdot 60}{1{,}3 + 2} \approx 2{,}121$$

$$x(60; 1{,}5) = 10\frac{1{,}5 - 0{,}3 - 0{,}005 \cdot 60}{1{,}5 + 2} \approx 2{,}571$$

Получените резултати нанасяме в табл. 2.3.4.

Таблица 2.3.4

	$I = 1{,}3$	$I = 1{,}5$
$p = 50$	2,273	2,714
$p = 60$	2,121	2,571

в) Двуфакторната функция на търсене трябва да има вида

$$x(p, I) = 10\frac{I - 0{,}5}{I + a_2(p)}$$

Тъй като производната на функцията на търсене от цената (при $I -$ параметър) е

$$x'(p) = -\frac{10(I - 0{,}5)a_2'(p)}{\left(I + a_2(p)\right)^2}$$

то $x'(p) < 0 \Leftrightarrow a_2'(p) > 0$.

Следователно линейната функция $a_2(p)$трябва да е от вида

$$a_2(p) = \alpha + \beta p; \alpha, \beta > 0$$

При $p = 40$ получаваме

$$a_2(40) = \alpha + 40\beta = 2 \Longrightarrow \alpha = 2 - 40\beta$$

и

$$a_2(p) = 2 - 40\beta + \beta p$$

Намираме еластичността на търсенето относно цената за произволни цени и доход:

$$\mathrm{E}\big(x(p)\big) = x'(p)\frac{p}{x(p)} = -\frac{a_2'(p)p}{I + a_2(p)}$$

При $p = 40$ и $I = 1$ ще имаме

$$\mathrm{E}\big(x(40)\big) = -\frac{40\beta}{I + 2} = -\frac{4}{10} \Rightarrow \beta = 0{,}03$$

Така получаваме окончателния вид на $a_2(p)$:

$$a_2(p) = 0{,}8 + 0{,}03p$$

и на $x(p, I)$:

$$x(p, I) = 10\frac{I - 0{,}5}{I + 0{,}8 + 0{,}03p}$$

Това ни дава възможност да извършим прогноза за потребителското търсене при различни стойности на цената и дохода.

При $p = 50,\ I = 1{,}3$; $p = 50,\ I = 1{,}5$; $p = 60,\ I = 1{,}3$; $p = 60,\ I = 1{,}5$

$$x(50; 1{,}3) = 10\frac{1{,}3 - 0{,}5}{1{,}3 + 0{,}8 + 0{,}03 \cdot 50} \approx 2{,}222$$

$$x(50; 1{,}5) = 10\frac{1{,}5 - 0{,}5}{1{,}5 + 0{,}8 + 0{,}03 \cdot 50} \approx 2{,}632$$

$$x(60; 1{,}3) = 10\frac{1{,}3 - 0{,}5}{1{,}3 + 0{,}8 + 0{,}03 \cdot 60} \approx 2{,}051$$

$$x(60; 1{,}5) = 10\frac{1{,}5 - 0{,}5}{1{,}5 + 0{,}8 + 0{,}03 \cdot 60} \approx 2{,}439$$

Получените резултати нанасяме в табл. 2.3.5.

Таблица 2.3.5

	$I = 1{,}3$	$I = 1{,}5$
$p = 50$	2,222	2,632
$p = 60$	2,051	2,439

Задача 15. Нека при условието на задача 12 да допуснем, че цената на кожените чанти е 100 лв. Да се опитаме да моделираме потреблението на кожени чанти като функция на две променливи – цената и дохода, като при $p = 100$ е валидна получената функция на Торнквист, т.е

$$x(p = 100, I) = 6I\frac{I-1}{I+1},$$

като влиянието на цената става чрез

а) коефициента a_0 във съответната функция на Торнквист или

$$x(p, I) = a_0(p)I\frac{I-1}{I+1},$$

б) коефициента a_1 във съответната функция на Торнквист или

$$x(p, I) = 6I\frac{I-a_1(p)}{I+1},$$

в) коефициента a_2 във съответната функция на Торнквист или

$$x(p, I) = 6I\frac{I-1}{I+a_2(p)}$$

И в трите случая предполагаме, че това влияние е линейно и ценовата еластичност (при цена $p = 100$ и доход $I = 1{,}5$) е $-0{,}5$. Въз основа на тези три обобщени функции на Торнквист да се прогнозира потреблението на кожени чанти при всевъзможните комбинации на доход от 3000 лв. и 4000 лв. и цена на кожените чанти 120 лв. и 150 лв.

Решение:

а) Търсим двуфакторната функция на потреблението от вида

$$x(p, I) = a_0(p)I\frac{I-1}{I+1}$$

Ако гледаме на дохода I като на параметър , получваме функция на една променлива - цената p, чиято първа производна е

$$x'(p) = \left(I\frac{I-1}{I+1}\right)a_0'(p)$$

От горния израз се вижда, че

$$x'(p) < 0 \Leftrightarrow a_0'(p) < 0$$

Това ни подсказва, че трябва да търсим линейната функция $a_0(p)$ от вида

$$a_0(p) = \alpha - \beta p; \alpha, \beta > 0$$

При $p = 100$ получаваме

$$a_0(100) = \alpha - 100\beta = 6 \Rightarrow \alpha = 6 + 100\beta$$

и ще имаме

$$a_0(p) = 6 + 100\beta - \beta p$$

За да определим единствения вече параметър β , от който зависи $a_0(p)$ще използваме дадената ценова еластичност на функцията $x(p)$. Ще имаме

$$\mathrm{E}\big(x(p)\big) = x'(p)\frac{p}{x(p)} = a_0'(p)I\frac{I-1}{I+1}\cdot\frac{p(I+1)}{a_0(p)I(I-1)} = \frac{a_0'(p)p}{a_0(p)} = \mathrm{E}\big(a_0(p)\big)$$

За $p = 100$ получаваме

$$\mathrm{E}\big(a_0(100)\big) = -\frac{\beta}{a_0(100)}\cdot 100 = -0{,}5$$

Тъй като $a_0(100) = 6$, то получаваме за $\beta = 0{,}03$, следователно ще имаме

$$a_0(p) = 6 + 100.0{,}03 - 0{,}03\cdot p = 9 - 0{,}03p$$

Така окончателният вид на двуфакторната функция на търсене ще бъде

$$x(p, I) = (9 - 0{,}03p)I\frac{I-1}{I+1}$$

На базата на получения израз за тази функция можем да направим прогноза за потреблението на кожени чанти при различни стойности на тяхната цена и потребителския доход.

За всевъзможните комбинации между $p = 120,\ I = 3$; $p = 120,\ I = 4$; $p = 150,\ I = 3$; $p = 150,\ I = 4$ получаваме

$$x(120; 3) = (9 - 0{,}03\cdot 120)3\frac{3-1}{3+1} = 5{,}4\cdot 3\cdot\frac{2}{4} = 8{,}1$$

$$x(120; 4) = (9 - 0{,}03\cdot 120)4\frac{4-1}{4+1} = 5{,}4\cdot 4\cdot\frac{3}{5} \approx 12{,}96$$

$$x(150; 3) = (9 - 0{,}03\cdot 150)3\frac{3-1}{3+1} = 4{,}5\cdot 3\cdot\frac{2}{4} \approx 6{,}75$$

$$x(150;4) = (9 - 0{,}03 \cdot 150)4\frac{4-1}{4+1} = 4{,}5 \cdot 4 \cdot \frac{3}{5} \approx 10{,}8$$

Горните резултати нанасяме в табл. 2.3.6.

Таблица 2.3.6.

	$I = 3$	$I = 4$
$p = 120$	8,1	12,96
$p = 150$	6,75	10,8

б) Сега търсим двуфакторната функция на потреблението във вида

$$x(p, I) = 6I\frac{I - a_1(p)}{I + 1}$$

Тъй като първата производна на горната функция (при I - параметър) е

$$x'(p) = -\frac{6a_1'(p)}{I + 1},$$

$$\text{то } x'(p) < 0 \Leftrightarrow a_1'(p) > 0 \text{ ,}$$

следователно линейната функция $a_1(p)$ трябва да е от вида

$$a_1(p) = \alpha + \beta p; \alpha, \beta > 0$$

При $p = 100$ получаваме

$$a_1(100) = \alpha + 100\beta = 1 \Rightarrow \alpha = 1 - 100\beta$$

и

$$a_1(p) = 1 - 100\beta + \beta p$$

За да определим коефициента β ще използваме дадената еластичност (при $p = 100$ и $I = 1{,}5$). Ще имаме

$$\mathrm{E}\big(x(p)\big) = x'(p)\frac{p}{x(p)} = -\frac{6Ia_1'(p)}{I + 1} \cdot \frac{p(I + 1)}{6I\big(I - a_1(p)\big)} = -\frac{a_1'(p)p}{I - a_1(p)}$$

за всяко p и $I.$ За $p = 100$ и $I = 1{,}5$ получаваме

$$\mathrm{E}\big(x(100)\big) = -\frac{100\beta}{1{,}5 - 1} = -0{,}5 \Rightarrow \beta = 0{,}0025$$

и функцията $a_1(p)$ има вида

$$a_1(p) = 0{,}75 + 0{,}0025p$$

Тогава, окончателният вид на двуфакторната функция на търсене е

$$x(p, I) = 6I\frac{I - 0{,}75 - 0{,}0025p}{I + 1}$$

Използвайки този израз пресмятаме

$$x(120{,}3) = 6 \cdot 3\frac{3 - 0{,}75 - 0{,}0025 \cdot 120}{3 + 1} \approx 8{,}775$$

$$x(120{,}4) = 6 \cdot 4\frac{4 - 0{,}75 - 0{,}0025 \cdot 120}{4 + 1} \approx 14.16$$

$$x(150{,}3) = 6 \cdot 3\frac{3 - 0{,}75 - 0{,}0025 \cdot 150}{3 + 1} \approx 8{,}438$$

$$x(150{,}4) = 6 \cdot 4\frac{4 - 0{,}75 - 0{,}0025 \cdot 150}{4 + 1} \approx 13{,}8$$

Получените резултати нанасяме в табл. 2.3.7

Таблица 2.3.7

	$I = 3$	$I = 4$
$p = 120$	8,775	14,16
$p = 150$	8,438	13,8

в) Двуфакторната функция на търсене трябва да има вида

$$x(p, I) = 6I\frac{I - 1}{I + a_2(p)}$$

Тъй като производната на функцията на търсене от цената (при $I -$ параметър) е

$$x'(p) = -\frac{6I(I - 1)}{\left(I + a_2(p)\right)^2}a_2'(p)$$

то $x'(p) < 0 \Leftrightarrow \mathrm{a}_2'(p) > 0$.

Следователно линейната функция $a_2(p)$трябва да е от вида

$$a_2(p) = \alpha + \beta p; \alpha, \beta > 0$$

При $p = 100$ получаваме

$$a_2(100) = \alpha + 100\beta = 1 \Longrightarrow \alpha = 1 - 100\beta$$

и

$$a_2(p) = 1 - 100\beta + \beta p$$

Намираме еластичността на търсенето относно цената за произволни цени и доход:

$$\mathrm{E}\big(x(p)\big) = x'(p)\frac{p}{x(p)} = -\frac{pa_2'(p)}{I + a_2(p)}$$

При $p = 100$ и $I = 1{,}5$ ще имаме

$$\mathrm{E}\big(x(100)\big) = -\frac{100\beta}{1{,}5 + 1} = -0{,}5 \Longrightarrow \beta = 0{,}0125$$

Така получаваме окончателния вид на $a_2(p)$:

$$a_2(p) = 1 - 100 \cdot 0{,}0125 + 0{,}0125 \cdot p$$

$$a_2(p) = -0{,}25 + 0{,}0125p$$

и на $x(p, I)$:

$$x(p, I) = x(p, I) = 6I\frac{I - 1}{I - 0{,}25 + 0{,}0125p}$$

Това ни дава възможност да извършим прогноза за потребителското търсене при различни стойности на цената и дохода.

При $p = 120,\ I = 3; p = 120,\ I = 4; p = 150,\ I = 3; p = 150,\ I = 4$

$$x(120{,}3) = 6 \cdot 3\frac{3 - 1}{3 - 0{,}25 + 0{,}0125 \cdot 120} \approx 8{,}471$$

$$x(120{,}4) = 6 \cdot 4\frac{4 - 1}{4 - 0{,}25 + 0{,}0125 \cdot 120} \approx 13{,}714$$

$$x(150{,}3) = 6 \cdot 3\frac{3 - 1}{3 - 0{,}25 + 0{,}0125 \cdot 150} \approx 7{,}784$$

$$x(150{,}4) = 6 \cdot 4\frac{4 - 1}{4 - 0{,}25 + 0{,}0125 \cdot 150} \approx 12{,}8$$

Получените резултати нанасяме в табл. 2.3.8.

Таблица 2.3.8

	$I = 3$	$I = 4$
$p = 120$	8,471	13,714
$p = 150$	7,784	12,8

2.4. Функция на търсене на много променливи

В най–общия случай би трябвало да си представим потребителското търсене като функция на много променливи: собствената ѝ цена p, потребителския доход I и цените на стоките, по отношение на които търсенето реагира $p_1, p_2, \cdots, p_n$, т.е. ще имаме

$$x = x(p; I; p_1, p_2, \cdots, p_n)$$

Най–разпространените математически функции, използвани за такова моделиране са:

- адитивна

$$x = a - bp + cI + d_1 p_1 + \cdots + d_k p_k - d_{k+1} p_{k+1} - \cdots - d_n p_n \text{ ,}$$

където стоките $1, \dots, k$ са заместители, а $k + 1, \dots, n$ – допълващи.

- мултипликативна

$$x = a p^{-\alpha} I^{\beta} p_1^{\gamma_1} \dots p_k^{\gamma_k} p_{k+1}^{-\gamma_{k+1}} \dots p_n^{-\gamma_n}$$

В случай, че пазарното предлагане зависи само от цената, то равновесното уравнение ще има вида

$$q = x(p, I, p_1) = y(p)$$

и ще ”излъчи” равновесни стойности p_E и q_E , които обаче ще бъдат различни при различните комбинации от p_1 и I , т.е. ще бъдат функции на две независими променливи:

$$p_{\mathrm{E}} = p_{\mathrm{E}}(p_1, I) \text{ и } q_{\mathrm{E}} = q_{\mathrm{E}}(p_1, I)$$

Изучаването на реакцията на величините p_{E} и q_{E} на изменението на икономическите променливи p_1 и I се нарича сравнителна статика на модела.

Задача 16. Равновесие, зависещо от цената на конкуренцията и от дохода. Функцията на търсене на лаптопи е

$$x = 250 p^{-0{,}7} p_1^{0{,}4} I^2,$$

където x – количество лаптопи в хил. бр., p – цена на лаптопи в хил. лв., p_1 – цена на таблети в хил. лв., I – доход в хил. лв. Функцията на предлагане на лаптопи е

$$y = 120p^{1,3}$$

Да се намерят равновесните величини на модела като функция на p_1 и I и да се пресметнат стойностите им при следната прогноза: 2015 г. - $p_1 = 0{,}2$ и $I = 0{,}8$; 2016 г. - $p_1 = 0{,}16$ и $I = 0{,}9$; 2017 г. - $p_1 = 0{,}13$ и $I = 1{,}0$.

Решение:

Първи начин. Уравнението на частично пазарно равновесие на пазара на лаптопи е

$$q = y(p) = 120p^{1,3} = 250p^{-0,7}\,{p_1}^{0,4}I^2 = x(p,\, p_1, I).$$

Умножаваме двете страни на горното равенство с $p^{0,7}$ и делим на 120, получаваме уравнението

$$p^2 = \frac{25}{12}\,{p_1}^{0,4}I^2,$$

което след коренуване добива вида

$$p = \frac{5}{2\sqrt{3}}\,{p_1}^{0,2}I = 1{,}443\,{p_1}^{0,2}I.$$

За равновесното количество лаптопи получаваме

$$q = y(p) = 120p^{1,3} = 120(1{,}443\,{p_1}^{0,2}I)^{1,3} = 120 \cdot 1{,}443^{1,3}\,{p_1}^{0,26}I^{1,3} = 193{,}3\,{p_1}^{0,26}I^{1,3}.$$

След като получихме основните величини на пазарното равновесие, изразени чрез p_1 и I, ние можем да ги пресмятаме за произволни комбинации на p_1 и I. В табл.2.4.1 това е направено за данните от задачата.

Таблица 2.4.1.

	величини				
	екзогенни		ендогенни		
година	p_1	I	p	q	$R = pq$
2015	0,2	0,8	0,836	95,17	79,56
2016	0,16	0,9	0,900	104,7	94,23
2017	0,13	1,0	0,960	113,7	109,2

Втори начин. След логаритмуване на уравнението на частично пазарно равновесие получаваме

$$\ln 250 - 0{,}7 \ln p + 0{,}4 \ln\ p_1 + 2 \ln I = \ln 120 + 1{,}3 \ln p = \ln q.$$

След пресмятане на логаритмите и преобразования за $\ln p$ ще имаме

$$\ln p = 0{,}365 + 0{,}2 \ln\ p_1 + \ln I,$$

а за $\ln q$ получаваме

$$\ln q = 5{,}265 + 0{,}26 \ln\ p_1 + 1{,}3 \ln I.$$

От тези формули можем да пресмятаме $\ln p$ и $\ln q$ (и $\ln R = \ln p + \ln q$), а след антилогаритмуване – p и q (и R). Така например, според данните за 2015 г. получаваме

$$\ln p = 0{,}365 + 0{,}2 \ln 0{,}2 + \ln 0{,}8 = 0{,}365 - 0{,}322 - 0{,}223 = -0{,}18,$$

$$\ln q = 5{,}265 + 0{,}26 \ln 0{,}2 + 1{,}3 \ln 0{,}8 = 5{,}265 - 0{,}418 - 0{,}290 = 4{,}557,$$

$$\ln R = \ln p + \ln q = -0{,}18 + 4{,}557 = 4{,}377,$$

$$p = e^{-0{,}18} = 0{,}835,\ \ q = e^{4{,}557} = 95{,}30 \ \text{ и } \ R = e^{4{,}377} = 79{,}60.$$

(Разликите идват от закръглянето.)

2.5. Неокласическа функция на потребителска полезност на една променлива

За да приложим принципа на рационалност в теорията на потребителите, ще трябва да въведем функцията на потребителска полезност. Тя измерва удовлетвотението, което получава потребителят при притежаване на определена стока в обем $x: u = u(x)$. Естествено е, че това удовлетворение нараства с увеличаването на количеството. Според първия закон на Госен, темпът на това нарастване намалява с увеличаването на x.

Математически, това се изразява с изпълнението на условията за първата и втората производна на функцията на полезност:

1. $u'(x) > 0$
2. $u''(x) = (u'(x))' < 0$

Горното означава, че графиката на функцията на полезност е растяща и вдлъбната.

Математически функции, които често се използват за моделиране на потребителската полезност са:

1. степенната функция
$$u(x) = ax^{\alpha} \text{ за } \alpha \epsilon (0,1) \text{ и}$$

2. квадратната функция
$$u(x) = ax - bx^2$$

За последната трябва да отбележим, че тъй като

$$u'(x) = a - 2bx \text{ и}$$

$$u'(x) > 0 <=> x < \frac{a}{2b},$$

то тя може да изпълнява ролята на функция на полезност само при това ограничение за x (тъй като $u''(x) = -2b < 0$, второто условие е автоматично изпълнено).

2.6. Неокласическа функция на полезност на много променливи

Нека интересите на потребителя се разпростират върху n на брой стоки, като $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е един набор от количества на тези стоки (потребителски набор). Върху множеството от всички потребителски набори (т.е. всички наредени ... – орки неотрицателни реални числа) дефинираме функция на потребителска полезност на много променливи по следния начин: ако фиксираме количествата на всички стоки без една, функцията удовлетворява условията за функция на полезност на една променлива, т.е.

1. $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ за $i = 1,2, \ldots, n$ и
2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} < 0$ за $= 1,2, \ldots, n$.

Така достигаме до възможността за формулиране на основната задача на потребителя: да се максимализира полезността, при положение, че разходите по придобиване на стоките не надхвърля дохода. Ако p_1 е цената на първата стока, то $p_1 x_1$ е разходът за придобиването на количество x_1 от нея, тогава $p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n$ е разходът за придобиването на потребителския набор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Математически, горната задача изглежда така

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to max$$

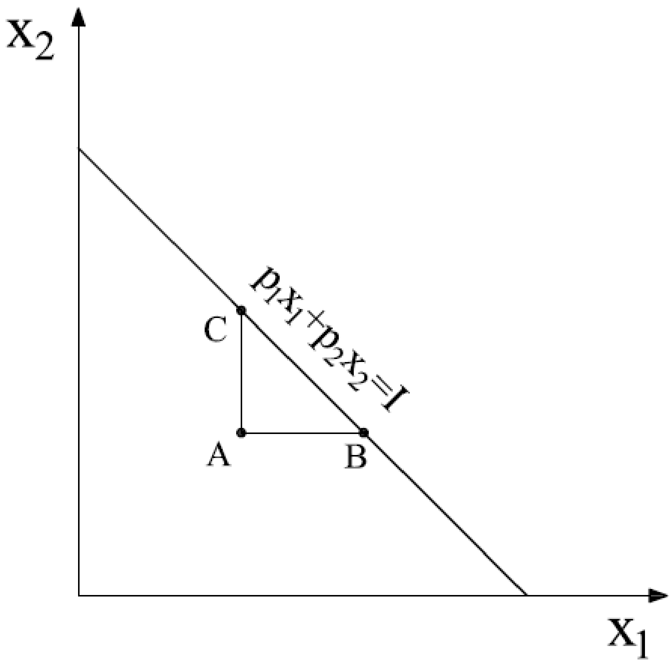
$$\text{при } p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n \leq I$$

Последното неравенство се нарича бюджетно ограничение на потребителя.

Решаването на основната задача на потребителя води до два резултата:

1. За да се достигне максимализиране на потребителската полезност е необходимо да се похарчи целия доход, т.е. неравенството на бюджетното ограничение да се превърне в равенство
$$p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n = I$$

И наистина (при $n = 2$), ако допуснем, че максимумът на полезността е достигнат в т. A (фиг.2.6.1) , нележаща на правата $p_1x_1 + p_2x_2 = I$, то очевидно в т. B (и в т. C), потребителската полезност има по–голяма стойност, отколкото в т. A, защото т. B има по–голяма x_1 – координата и същата x_2 – координата, като т. A (свойство 1 на неокласическата функция на полезност).



Фиг 2.6.1. Линия на бюджетни ограничения

2. За потребителския набор, максимализиращ функцията на полезност е изпълнено условието

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{p_1} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x_2}}{p_2} = \cdots = \frac{\frac{\partial u}{\partial x_n}}{p_n} = \lambda$$

Последните равенства са известни като втори закон на Госен. Първите частни производни на функцията на полезност по количествата на стоките $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$ се наричат маргинални полезности. Тъй като частните $\frac{\partial u}{\partial x_i}/p_i$, $i = 1,2, \dots, n$ показват каква е маргиналната полезност на един похарчен лев, то вторият закон на Госен може да се изкаже така: в условие на оптимален избор, потребителят харчи всеки лев с еднаква маргинална полезност. Тогава λ ще наричаме маргинална полезност на похарчените пари (от потребителя).

Обосноваването на верността на втория закон на Госен се получава по следния начин. Да допуснем, че за първата и втората стока е изпълнено неравенството $\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{p_1} > \frac{\frac{\partial u}{\partial x_2}}{p_2}$

Тогава, тъй като потребителят получава за всеки похарчен лев от първата стока, по–голяма маргинална полезност, той има сметка да увеличи нейното потребление. Но съгласно свойство 2 на функцията на полезност $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ е намаляваща функция и с увеличаването на x_1 , $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ ще се намали. Освен това, нарастването на x_1 е за сметка на намаляването на x_2 , което пък води до нарастване на $\frac{\partial u}{\partial x_2}$. И така, до изравняването на двата израза в горното неравество.

Ясно е, че при решаването на основната потребителска задача, ние получаваме такъв потребителски набор $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, който максимализира функцията на полезност $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при изпълнение на бюджетното ограничение $p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n \leq I$ и при дадени цени $p_1, p_2, \dots, p_n$ и доход I. Така получените количества от стоките $x_1, x_2, \dots, x_n$, следователно ще бъдат функции на $p_1, p_2, \dots, p_n; I$. Така от решаването на основната потребителска задача, ние намираме функциите на търсене

$$x_1 = x_1(p_1, p_2, \dots, p_n; I)$$

$$x_2 = x_2(p_1, p_2, \dots, p_n; I)$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$x_n = x_n(p_1, p_2, \dots, p_n; I)$$

Така се оказва, че функцията на полезност и бюджетът пораждат (в условие на оптимален потребителски избор) функциите на търсене. Т.е. функцията на търсене е следствие от принципа на рационалност, приложен спрямо потребителите.

2.7. Адитивна функция на полезност на много променливи

Тя се получава чрез сумирането на няколко функции на полезност на една променлива:

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = u_1(x_1) + u_2(x_2) + \cdots + u_n(x_n)$$

Тогава условието от втория закон на Госен добива вида

$$\frac{u_1^{'}}{p_1} = \frac{u_2^{'}}{p_2} = \cdots = \frac{u_n^{'}}{p_n}$$

Задача 17. Функцията на търсене възниква от функцията на полезност. Адитивен модел. Индивид има функции на полезност за две стоки: $u(x) = \ln x$ и $v(y) = 2\ln y$, като полезността от двете стоки е сума от двете функции на полезност. Цените на стоките са p_x и p_y, а общия доход на индивида – I. Намерете функциите на търсене на индивида за тези две стоки.

Решение:

Потребителят извършва оптимален избор, ако е изпълнено условието

$$\frac{u'(x)}{p_x} = \frac{v'(y)}{p_y} = \lambda,$$

т.е. той трябва да изхарчва всеки свой лев с еднаква маргинална полезност. В предвид на дадените функции на полезност, горното условие добива вида

$$\frac{1}{p_x x} = \frac{1}{2\, p_y y} \Leftrightarrow p_x x = 2\, p_y y.$$

Предполага се, че целият бюджет ще бъде похарчен за тези две стоки. Бюджетното уравнение е

$$p_x x + p_y y = I.$$

Тъй като от условието за оптималност имаме $p_x x = 2\, p_y y$, то заествайки в бюджетното уравнение получаваме

$$2\, p_y y + p_y y = 3 p_y y = I \Longrightarrow y = \frac{I}{3p_y} \text{ и } x = \frac{2\, p_y y}{p_x} = \frac{2I}{3p_x}.$$

Това са въпросните функции на търсене (зависещи от дохода и цената). Явно в този случай двете стоки са неутрални, защото всяка от функциите на търсене не зависи от цената на другата стока.

Задача 18. Индивид има функции на полезност за две стоки: $u(x) = 20x - x^2$ и $v(y) = 40y - 0{,}5y^2$, като полезността от двете стоки е сума от двете функции на полезност. Цените на стоките са $p_x = 2$ и $p_y = 1$, а общия доход на индивида, използван за тези две стоки е I. Определете интервала на изменение на I, оптималните количества от двете стоки в зависимост от дохода и при конкретни стойности на I – 30, 35 и 40.

Решение:

Условието за оптимален потребителски избор е

$$\frac{u'(x)}{p_x} = \frac{v'(y)}{p_y} = \lambda,$$

Тъй като маргиналната полезност на първата стока е $u'(x) = 20 - 2x$, то от условието $u'(x) \geq 0$, получаваме $x \leq 10$. Аналогично, маргиналната полезност на втората стока е $v'(y) = 40 - y$, следователно $y \leq 40$. В горното равенство заместваме маргиналните полезности и съответните цени и получаваме

$$\frac{20 - 2x}{2} = \frac{40 - y}{1} \Leftrightarrow y = 30 - x.$$

Бюджетното равенство за тази задача е

$$p_x x + p_y y = 2x + y = I.$$

Като заместим y с $30 - x$ в последното уравнение, получаваме

$$x = I - 30 \Rightarrow y = 60 - I.$$

Условието $0 \leq x \leq 10$ е еквивалентно на $30 \leq I \leq 40$, а условието $0 \leq y \leq 40$ – на $20 \leq I \leq 60$. Сечението на двете множества е $30 \leq I \leq 40$. За дадените стойности на бюджета I получаваме следните разпределения на потреблението на двете стоки табл.2.7.1.

Таблица 2.7.1

I	x	y
30	0	30
35	5	25
40	10	20

2.8. Мултипликативна функция на полезност на много променливи

Тя има вида

$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ при $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$

Да разгледаме случая $= 2$. Тогава ще имаме

$$u(x_1 x_2) = ax_1^{\alpha} x_2^{\beta}\ , \alpha + \beta = 1$$

Тогава условието за оптималност

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{p_1} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x_2}}{p_2}$$

добива вида

$$\frac{a\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta}}{p_1} = \frac{a\beta x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1}}{p_2}$$

или

$$\frac{\alpha x_2}{\beta x_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

От последното равенство получаваме

$$\frac{p_1 x_1}{p_2 x_2} = \frac{\alpha}{\beta}$$

следователно съотношението на изхарчените пари за стоките е равно на съотношението на степенните показатели във функцията на полезност. Последното не се променя и в случай, че $+\beta \neq 1$. Като заместим $p_2 x_2 = \frac{\beta}{\alpha} p_1 x_1$ в бюджетното ограничение $p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$ получаваме и $x_2 = \frac{\beta I}{p_2} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) p_1 x_1 = I => x_1 = \frac{\alpha I}{p_1}$

Така получихме функциите на търсене в този случай.

Задача 19. Функцията на търсене възниква от функцията на полезност. Мултипликативен модел. Разглеждаме три пазара – на кашкавал, сирене и имитационен продукт с растителни мазнини (лъжесирене). На тези пазари съществуват три групи потребители – двама богати, трима средни и петима бедни. Богатите заделят по 100 лв. общо за трите стоки в съотношение 60% за кашкавал и 40% за сирене. Средните – по 50 лв. – 30% за кашкавал, 60% за сирене и 10% за лъжесирене. Бедните – 20 лв. – 10% за кашкавал, 50% за сирене и 40% за лъжесирене. Функциите на предлагане на тези стоки са линейни, освен това е известно, че предлагането на кашкавала започва от 7 лв., на сиренето – от 4 лв., а на лъжесиренето – от 2 лв. При предлагане от по 25 кг. За всяка от стоките цените са – 15 лв. за кашкавала, 8 лв. за сиренето и 3 лв. за лъжесиренето. Да се намерят индивидуалните и пазарни функции на търсене на всяка една от стоките; функциите им на предлагане; равновесните цени и количества и потреблението на всяка от стоките от страна на всеки от участниците в тези пазари.

Решение:

Ако функцията на полезност на потребителя е мултипликативна

$$U = a{x_1}^{\alpha_1}{x_2}^{\alpha_2}{x_3}^{\alpha_3} \text{ като } \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

и общият бюджет за всички стоки е I, т.е. бюджетното равенство е

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = I,$$

тогава, в условие на оптимален избор, съотношението между разходите за отделните стоки ще съвпада със съотношението между степенните показатели във функцията на полезност:

$$p_1 x_1 : p_2 x_2 : p_3 x_3 = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3.$$

Тогава ще имаме

$$p_1 x_1 = \alpha_1 I,\ \ p_2 x_2 = \alpha_2 I,\ \ p_3 x_3 = \alpha_3 I.$$

Означаваме индивидуалните функции на търсене с ${x_i}^k$, като долният индекс е за стоката (1- кашкавал, 2 – сирене и 3 – лъжесирене), а горния – за вида потребител (1 – богат, 2 – среден и 3 – беден).

Съгласно казаното по-горе, индивидуалните функции на търсене на богатия потребител ще бъдат

$${x_1}^1 = \frac{60}{p_1},\ \ {x_2}^1 = \frac{40}{p_2},\ \ {x_3}^1 = 0;$$

за средния –

$${x_1}^2 = \frac{15}{p_1},\ \ {x_2}^2 = \frac{30}{p_2},\ \ {x_2}^2 = \frac{5}{p_3};$$

а за бедния –

$${x_1}^3 = \frac{2}{p_1},\ \ {x_2}^3 = \frac{10}{p_2},\ \ {x_2}^3 = \frac{8}{p_3}.$$

Сега ще съставим сумарните функции на търсене за трите стоки. За първата стока (кашкавала) тя ще бъде

$$x_1(p_1) = 2x_1{}^1 + 3x_1{}^2 + 5x_1{}^3 = \frac{120}{p_1} + \frac{45}{p_1} + \frac{10}{p_1} = \frac{175}{p_1};$$

за втората стока (сиренето) –

$$x_2(p_2) = 2x_2{}^1 + 3x_2{}^2 + 5x_2{}^3 = \frac{80}{p_2} + \frac{90}{p_2} + \frac{50}{p_2} = \frac{220}{p_2}$$

и за третата (лъжесиренето) –

$$x_3(p_3) = 2x_3{}^1 + 3x_2{}^2 + 5x_2{}^3 = 0 + \frac{15}{p_3} + \frac{40}{p_3} = \frac{55}{p_3}.$$

Сега трябва да възстановим функциите на предлагане на стоките, като използваме данните за тях. За първата стока линейната функция на предлагане трябва да бъде

$$y_1(p_1) = -a_1 + b_1p_1,$$

като коефициентите a_1 и b_1 определяме от

$$y_1(7) = -a_1 + 7b_1 = 0 \quad \text{и} \quad y_1(15) = -a_1 + 15b_1 = 25.$$

Като решим горната система получаваме

$$a_1 = \frac{175}{8}, b_1 = \frac{25}{8} \quad \text{и} \quad y_1(p_1) = -\frac{175}{8} + \frac{25}{8}p_1.$$

Аналогично, линейната функция на предлагане за втората стока ще бъде

$$y_2(p_2) = -a_2 + b_2p_2,$$

като $y_2(4) = -a_2 + 4b_2 = 0$ и $y_2(8) = -a_2 + 8b_2 = 25$. Решението е

$$a_2 = 25, b_2 = \frac{25}{4} \quad \text{и} \quad y_2(p_2) = -25 + \frac{25}{4}p_2.$$

Линейната функция на предлагане за третата стока ще е

$$y_3(p_3) = -a_3 + b_3p_3,$$

като $y_3(2) = -a_3 + 2b_3 = 0$ и $y_3(3) = -a_3 + 3b_3 = 25$. Решението е

$$a_3 = 50, b_3 = 25 \quad \text{и} \quad y_3(p_3) = -50 + 25p_3.$$

След като получихме функциите на пазарно търсене и предлагане за трите стоки, можем да съставим уравненията на пазарно равновесие за тях и от решенията им да получим равновесните величини – цени и количества. За първата стока ще имаме

$$q_1 = x_1(p_1) = \frac{175}{p_1} = -\frac{175}{8} + \frac{25}{8}p_1 = y_1(p_1),$$

откъдето получаваме квадратното уравнение за p_1

$$p_1{}^2 - 7p_1 - 56 = 0$$

с положителен корен

$$p_1 = \frac{7 + \sqrt{49 + 224}}{2} \approx 11{,}76.$$

За равновесното количество на първата стока ще имаме

$$q_1 = x_1(11{,}76) = y_1(11{,}76) = 14{,}88.$$

Аналогично, уравнението на пазарното равновесие за втората стока е

$$q_2 = x_2(p_2) = \frac{220}{p_2} = -25 + \frac{25}{4}p_2 = y_2(p_2).$$

Квадратното уравнение за p_2 ще бъде

$$5p_2{}^2 - 20p_2 - 176 = 0$$

с положителен корен

$$p_2 = \frac{10 + \sqrt{100 + 880}}{5} \approx 8{,}26.$$

а равновесното количество на тази стока е

$$q_2 = x_2(8{,}26) = y_2(8{,}26) = 26{,}63.$$

За третата стока получаваме

$$q_3 = x_3(p_3) = \frac{55}{p_3} = -50 + 25p_3 = y_3(p_3),$$

$$5p_3{}^2 - 10p_3 - 11 = 0,$$

$$p_3 = \frac{5 + \sqrt{25 + 55}}{5} \approx 2{,}79,$$

$$q_3 = x_3(2{,}79) = y_3(2{,}79) = 19{,}71.$$

Сега трябва да видим как тези равновесни количества ще бъдат разпределени между отделните потребители. За първата стока (долният индекс е 1) ще имаме: за индивидуален богат потребител

$$q_1{}^1 = x_1{}^1(p_1) = \frac{60}{11{,}76} = 5{,}10;$$

за среден потребител

$$q_1{}^2 = x_1{}^2(p_1) = \frac{15}{11{,}76} = 1{,}28;$$

за беден потребител

$$q_1{}^3 = x_1{}^3(p_1) = \frac{2}{11{,}76} = 0{,}17.$$

За втората стока (долният индекс е 2) получаваме:

$$q_2{}^1 = x_2{}^1(p_2) = \frac{40}{8{,}26} = 4{,}84;$$

за среден потребител

$$q_2{}^2 = x_2{}^2(p_2) = \frac{30}{8{,}26} = 3{,}63;$$

за беден потребител

$$q_2{}^3 = x_2{}^3(p_2) = \frac{10}{8{,}26} = 1{,}21;$$

За третата стока (долният индекс е 3) ще имаме:

$$q_3{}^1 = x_3{}^1(p_3) = 0;$$

за среден потребител

$$q_3{}^2 = x_3{}^2(p_3) = \frac{5}{2{,}79} = 1{,}79;$$

за беден потребител

$$q_3{}^3 = x_3{}^3(p_3) = \frac{8}{2{,}79} = 2{,}87.$$

АНАЛИТИЧНА БИЗНЕС ИКОНОМИКА – II част

Задачи

20. **Максимализиране на оборота.** Потребителското търсене на продукта, предлаган от една фирма се изразява чрез функцията $p = 50 - 0{,}5x$. Първоначално фирмата предлага 30 броя от продукта. Ако целта на фирмата е максимализиране на приходите от продажбата на продукта, да се определи:
а) каква ценова политика трябва да проведе фирмата при тези дадености;
б) какъв е максимално възможния оборот и при каква цена се постига той;
в) как да реагира фирмата, ако търсенето се съкрати с 50%.

Решение.

а) $p = 50 - 0{,}5x$ е обратната функция на търсене, следователно функцията на търсене е $x = 100 - 2p$. Тъй като първоначалното предлагане е $x = 30$, то това предлагане би се реализирало (съгласно функцията на търсене) при цена $p = 35$ (и оборот $R = px = 35 \cdot 30 = 1050$). Тъй като ценовата еластичност на търсене за $p = 35$ е

$$E\big(x(p)\big) = x'(p)\,\frac{p}{x(p)} = -\frac{2p}{100 - 2p} = -2,$$

то при тази цена оборотът не е максимален (защото това се получава при $E\big(x(p)\big) = -1$). От друга страна, ценовата еластичност на търсене е намаляваща функция, следователно, за да се увеличи оборота трябва да се понижи цената и да се увеличи продаваното количество.

б) От $E\big(x(p)\big) = -1$ получаваме $p = 35$, а от функцията на търсене - $x = 50$. Тези стойности водят до максималния оборот $R = px = 25 \cdot 50 = 1250$. Такъв резултат може да се получи и директно. Изразяваме оборота R като функция на една променлива – x:

$$R = R(x) = p(x)x = (50 - 0{,}5x\ )x = 50x - 0{,}5x^2.$$

След диференциране получаваме

$$R'(x) = 50 - x.$$

Условието от първи ред е

$$R'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 50 \text{ и } p = 25.$$

в) Предполагаме, че търсенето се е съкратили с 50%. Тогава, ако $\bar{x}$ е новото търсене, ще имаме

$$\bar{x} = 0{,}5x = 0{,}5(100 - 2p) = 50 - p \Longrightarrow p(\bar{x}) = 50 - \bar{x}.$$

Тогава за новия оборот $\bar{R}$ получаваме

$$\bar{R} = \bar{R}(\bar{x}) = p(\bar{x})\bar{x} = (50 - \bar{x})\bar{x} = 50\bar{x} - \bar{x}^2.$$

Условието от първи ред е

$$\bar{R}'(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow 50 - 2\bar{x} = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = 25 \text{ и } p = 25.$$

Т.е. при съкращаване на търсенето с 50% цената се запазва, а продаденото количество и оборота от продажби се съкращават също с 50%.

21. **Конкуренция на пазара на сървърни операционни системи.** Предполага се, че $x_W(p) = a - bp$ е функцията на търсене на *Windows* на *Microsoft*, а всички потенциални потребители, не закупили операционната система *Windows* ще се снабдят с *Linux* безплатно. Разходите на *Microsoft* за разработването на *Windows* са d (постоянните разходи, не зависещи от реализирания брой копия). Каква е оптималната цена за реализация на едно копие на *Windows*? Колко ще бъдат клиентите на *Windows* и *Linux*?

Решение.

Тъй като $x_W(0) = a$, то капацитетът на този пазар е a. Тогава (тъй като всички потребители, които не са закупили *Windows* придобиват безплатно *Linux*):

$$x_L(p) = a - x_W(p) = bp,$$

където с $x_L(p)$ сме означили остатъчната функция на търсене на безплатната операционна система *Linux*.

Задачата, която стои пред корпорацията *Microsoft* е да определи така цената c, че печлбата ѝ да е максимална

$$\Pi_W = px_W(p) - d = p(a - bp) - d \to max$$

Тъй като

$$\Pi_W(p) = ap - bp^2 - d$$

условието от I-ви ред ще бъде

$$\Pi_W{}'(c) = a - 2bp = 0 \Leftrightarrow p_0 = \frac{a}{2b}$$

Тогава ще имаме

$$x_W(p_0) = a - b\frac{a}{2b} = \frac{a}{2} = x_L(p_0)$$

За максималната печалба на *Microsoft* получаваме

$$\Pi_W(p_0) = p_0 x_W(p_0) - d = \frac{a}{2b}\frac{a}{2} - d = \frac{a^2}{4b} - d$$

Така доказахме следното твърдение

Твърдение. Оптималната цена на лиценза на платения софтуер $p_0 = \frac{a}{2b}$ максимализира печалбата на комерсиалния производител в размер на $\Pi_W(p_0) = \frac{a^2}{4b} - d$, като при това комерсиалният и некомерсиален производител делят пазара по равно: $x_W(p_0) = \frac{a}{2} = x_L(p_0)$.

За отбелязване е, че всичко се свежда до обема на пазара и функцията на потребителското търсене. Така например, ако е изпълнено неравенството $a < 2\sqrt{bd}$ дори и максималната печалба би била всъщност минимална загуба.

22. **Концерт на Шакира в София.** Концертна агенция планира да организира концерт на Шакира в София. Изследване е показало, че ценовата еластичност на търсене на билети за концерта се задава чрез функцията $E\big(x(p)\big) = -0{,}5 - 0{,}025p$. Известно е, че при цена на билета от 40 лв. на концерта ще дойдат 5000 души.

а) Определете оптималната цена на билетите, при която агенцията ще получи максимална печалба.

б) Определете функцията на търсене на билети за концерта.

в) Оценете, дали агенцията ще може да се справи без спонсори, при положение, че разходите за организиране на концерта са 250000 лв.

г) Ще може ли концерта да се състои в зала Арена Армеец, при положение че капацитетът и е 12470 места.

Забележка: Използвайте приближенията $e \approx 2{,}72$, $\sqrt{e} \approx 1{,}65$, $\sqrt{2} \approx 1{,}41$).

Решение.

а) Условието за максимализиране на оборота е

$$E\big(x(p)\big) = -0{,}5 - 0{,}025p = 0 \Longrightarrow p = 20.$$

Следователно, при цена на билетите от 20 лв. оборотът ще бъде максимален.

б) Тъй като

$$E\big(x(p)\big) = x'(p)\frac{p}{x(p)} = \frac{dx}{dp}\frac{p}{x} = -0{,}5 - 0{,}025p,$$

то за неизвестната функция на търсене $x(p)$ получаваме диференциално уравнение с разделени променливи. Умножаваме двете страни на това уравнение с dp и делим на p, получаваме

$$\frac{dx}{x} = -\frac{0{,}5}{p} - 0{,}025.$$

Интегрираме двете страни на горното уравнение:

$$\ln x = \ln C - 0{,}5\ln p - 0{,}025\,p.$$

Антилогаритмуваме и получаваме

$$x = \frac{C}{\sqrt{p}}e^{-0{,}025p}.$$

За определянето на интеграционната константа C ще използваме условието $x(40) = 5$. Ще имаме

$$x(40) = \frac{C}{\sqrt{40}}e^{-0{,}025\cdot 40} = \frac{C}{2e\sqrt{10}} = 5 \Longrightarrow C = 10e\sqrt{10}$$

и

$$x(p) = \frac{10\sqrt{10}}{\sqrt{p}}e^{1-0{,}025p}.$$

в) Сега да пресметнем максималния оборот, който се получава при $p = 20$. Първо пресмятаме търсенето за $p = 20$. Ще имаме

$$x(20) = \frac{10\sqrt{10}}{\sqrt{20}}e^{1-0{,}025\cdot 20} = \frac{10}{\sqrt{2}}\sqrt{e} = \frac{10\cdot 1{,}65}{1{,}41} = 11{,}7,$$

следователно при цена от 20 лв. ще бъдат продадени 11700 билета. Тогава оборота е

$$R(20) = 20\cdot 11{,}7 = 234\ \text{хил. лв.}$$

Тъй като фиксираните разходи по организирането на концерта са 250 хил. лв., то организаторите няма да се справят без спонсори.

г) Концертът може да се състои в зала Арена Армеец, защото продадените 11700 билета (в условие на максимализиране на оборота и на п0ечалбата) са по-малко от 12470 места в залата.

23. **Функция на разходи с постоянни средни променливи разходи.** Дневното търсене на чипс x се описва чрез линейна функция на цената p . Известно е, че при цена от 1,20 лв. за опаковка чипса преставa да се купува, а максималните приходи от продажби се реализират при 450 опаковки. При каква цена магазинът реализира максимална печалба от продажбата на чипса, ако го купува по 0,80 лв. за брой. Попълнете таблица за обем продажби, постъпления от продажби и печалба при цени 0,8 лв., 1 лв. Начертайте графика на тези три функции на цената p.

Решение.

Ако функцията на търсене е линейна, то и обратната ѝ функция ще бъде линейна. Нека

$$p(x) = a - bx$$

е обратната функция на търсене. Тъй като

$$p(0) = a = 1{,}2,$$

то видът на функцията ще бъде

$$p(x) = 1{,}2 - bx$$

Тогава

$$R(x) = xp(x) = x(1{,}2 - bx) = 1{,}2x - bx^2$$

ще е оборота от продажби. Условието от първи ред за максимализиране на оборота е

$$R'(x) = 1{,}2 - 2bx = 0.$$

От това, че оборотът е максимален при $x = 450$, получаваме

$$1{,}2 - 2 \cdot 450b = 0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{750} \quad \text{и} \quad p(x) = 1{,}2 - \frac{x}{750}.$$

Цената, максимализираща оборота ще бъде

$$p(450) = 1{,}2 - \frac{450}{750} = 1{,}2 - 0{,}6 = 0{,}6.$$

Сега предполагаме, че функцията на разходите е линейна - $C(x) = 0{,}8x$ (предполага се, че няма други разходи освен разходите по закупуване на яйцата). Тогава от условието за максимализиране на печалбата на монопола

$$R'(x) = C'(x) \Leftrightarrow 1{,}2 - \frac{x}{375} = 0{,}8$$

получаваме $x = 150$. При това количество цената ще бъде $p(150) = 1{,}2 - \frac{150}{750} = 1{,}2 - 0{,}2 = 1$. Тогава максималният оборот ще възлиза на 150.

Да изразим обема продажби, постъпленията от продажби и печалбата като функции на цената. За обема на продажби получаваме

$$x = x(p) = 900 - 750p$$

за оборота –

$$R = R(p) = px(p) = p(900 - 750p) = 900p - 750p^2$$

и за печалбата

$$\begin{aligned} \Pi = R - C = R(p) - C\big(x(p)\big) &= 900p - 750p^2 - 0{,}8(900 - 750p) \\ &= 1500p - 750p^2 - 720. \end{aligned}$$

Въз основа на получените формули попълваме таблицата за обем продажби, постъпления от продажби и печалба при цени 0,8 лв., 1 лв.

p	x	R	C	П
0,8	300	240	240	0
1,0	150	150	120	30

24. **Правилно ли е да се стремим да максимализираме оборота?** Търговец продава стока с линейна функция на търсене, която закупува за цена на едро p_0 лв. за брой. Да се покаже, че стратегията „максимален оборот“ никога не води до максимална печалба. С колко трябва да се увеличи цената, максимализираща оборота, за да се постигне максимална печалба от продажбата на стоката.

Решение.

Предполагаме, че обратната функция на търсене има вида

$$p(x) = a - bx.$$

Тогава функцията на оборота ще бъде

$$R(x) = xp(x) = x(a - bx) = ax - bx^2.$$

От условието от първи ред за максимализиране на оборота

$$R'(x) = a - 2bx = 0$$

получаваме оптималните стойност за количеството $x = a/2b$ и цената $p = a/2$. Тъй като търговеца закупува (на едро) стоката за цена p_0, то разходите му ще бъдат

$$C(x) = p_0 x + c_0,$$

където c_0 са някакви други (не зависещи от оборота) разходи. Тогава, от условието от първи ред за максимализиране на печалбата на монопола

$$R'(x) = C'(x)$$

получаваме

$$a - 2bx = p_0 \Leftrightarrow x = \frac{a - p_0}{2b} \quad \text{и} \quad p = a - b\frac{a - p_0}{2b} = \frac{a}{2} + \frac{p_0}{2}.$$

Така доказахме твърдението:

Твърдение. Нека търговец продава стока с линейна функция на търсене, която закупува за цена на едро p_0 лв. за брой. Стратегията „максимален оборот" никога не води до максимална печалба. Към цената, максимализираща оборота трябва да се добави $p_0/2$ за да се получи цена, максимализираща печалбата.

25. Специализиран магазин за яйца е установил, че ако продава яйцата по 0,24 лв. бройката, ще продава 12000 броя на месец, а при цена от 0,40 лв. яйцата престават да се продават. Да се установят цената и количеството, при които се достига максимален оборот. Ако магазинът закупува яйцата по цена на едро от 0,20 лв. за брой, при какви цена и количество печалбата ще е максимална. Нека 1250 лв. е месечната издръжка на магазина. Оценете неговата рентабилност.

Решение.

Предполагаме, че обратната функция на търсене има вида

$$p(x) = a - bx.$$

Тогава, от данните на задачата получаваме

$$p(0) = a = 0{,}4 \Longrightarrow p(x) = 0{,}4 - bx$$

и

$$p(12) = 0{,}4 - 12b = 0{,}24 \Leftrightarrow b = \frac{1}{75} \quad \text{и} \quad p(x) = 0{,}4 - \frac{x}{75}.$$

Тогава функцията на оборота ще бъде

$$R(x) = xp(x) = x\left(0{,}4 - \frac{x}{75}\right) = 0{,}4x - \frac{x^2}{75}.$$

От условието от първи ред за максимализиране на оборота

$$R'(x) = 0{,}4 - \frac{2x}{75} = 0$$

се получаваме оптималните стойност за количеството, цената и оборота

$$x = 15, \;\; p = p(15) = 0{,}4 - \frac{15}{75} = 0{,}2 \quad \text{и} \quad R = xp = 15 \cdot 0{,}2 = 3$$

Съгласно условието на задачата, за функцията на разходите ще имаме

$$C(x) = 0{,}2x + 1{,}25$$

Тогава от условието от първи ред за максимализиране на печалбата на монопола ще имаме

$$R'(x) = C'(x) \Leftrightarrow 0{,}4 - \frac{2x}{75} = 0{,}2 \Leftrightarrow x = 7{,}5 \quad \text{и} \quad p = 0{,}3.$$

При тази стойност на x за приходите, разходите и печалбата получаваме

$$R = R(7{,}5) = 2{,}25, \;\; C = C(7{,}5) = 2{,}75, \;\; \Pi = R - C = -0{,}5.$$

Явно, магазинът не е рентабилен, защото при цена и количество, максимализиращи печалбата, той работи на загуба.

26. Козметична компания продава 400 опаковки крем за лице при цена 4 лв.

а) До какво ниво може да се вдигне цената, за да се продават 300 опаковки, ако е известно, че ценовата еластичност на търсене е -2 ;

б) Да се възстанови функцията на търсене на крема, при предположение, че тя е линейна;

в) Ако разходите за производството на крема са пропорционални на произведените (и продадени) бройки и максималната печалба се постига при цена 4 лв. , да се намери себестойността на крема.

Решение.

а) Като използваме ценовата еластичност на търсенето, получаваме

$$E\big(x(p)\big) = \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p}} = -2 \Longrightarrow \frac{\Delta x}{x} = -2\frac{\Delta p}{p}.$$

От друга страна, за $x = 400$ имаме $400 + \Delta x = 300 \Longrightarrow \Delta x = -100$ и $\Delta x/x = -1/4$. Тогава $\Delta p/p = 1/8$ и тъй като $p = 4 \Longrightarrow \Delta p = 0{,}5$ и $p + \Delta p = 4{,}5$.

б) Предполагаме, че функцията на търсене е линейна, тогава тя ще има вида

$$x(p) = a - bp.$$

От условието

$$x(4) = a - 4b = 400$$

получаваме $a = 400 + 4b$ и $x(p) = 400 + 4b - bp$. За ценовата еластичност на търсене ще имаме

$$E\big(x(p)\big) = x'(p)\frac{p}{x(p)} = -\frac{bp}{400 + 4b - bp},$$

следователно

$$E\big(x(4)\big) = -2 \Leftrightarrow -\frac{4b}{400} = -2 \Leftrightarrow b = 200 \quad \text{и} \quad x(p) = 1200 - 200p$$

в) Тъй като $x(p) = 1200 - 200p$, то за функцията на оборота (с аргумент цената) получаваме $R(p) = px(p) = p(1200 - 200p) = 1200p - 200p^2$. Изразяваме и разходите като функция на p: $C(p) = cx(p) = c(1200 - 200p) = 1200c - 200cp$, където с c сме означили търсената себестойност (разходи на брой). Тогава от условието от първи ред за максимализиране на печалбата на монопола получаваме

$$R'(p) = C'(p) \Leftrightarrow 1200 - 400p = -200c.$$

Като имаме предвид, че печалбата достига своя максимум при цена $p = 4$, то $R'(4) = C'(4) \Leftrightarrow 1200 - 400 \cdot 4 = -200c$ и получаваме $c = 2$.

27. Функцията на търсене на космически полети на кораба Space Ship 2 има вида $x = 300 - 0{,}5p$, където p е цената в хил. \$, а x – годишния брой полети. Известно е, че компанията е установила цена, при която ценовата еластичност е -2. Да се намери тази цена и годишния брой полети. При положение, че тази цена максимизира печалбата, а общата издръжка е пропорционална на броя на полетите, да се намери себестойността на един полет.

Решение.

За ценовата еластичност имаме

$$E\big(x(p)\big) = x'(p)\frac{p}{x(p)} = -\frac{0{,}5p}{300 - 0{,}5p}.$$

От $E\big(x(p)\big) = -2$ получаваме $p = 400$ и $q = x(400) = 300 - 0{,}5 \cdot 400 = 100$.

Обратната функция на търсене е $p(x) = 600 - 2x$, тогава за приходите (като функция на количеството) получаваме $R(x) = xp(x) = x(600 - 2x) = 600x - 2x^2$. Тогава за маргиналните приходи ще имаме $R'(x) = 600 - 4x$.

Тъй като разходите на фирмата са $C(x) = cx$, където c е разхода (себестойността) за един полет, то $C'(x) = c$.

Монополът максимализира печалбата си при количество (и цена), изравняващо маргиналния приход с маргиналния разход. Тъй като това става при цена $p = 400$ и количество $q = 100$, то ще имаме

$$R'(100) = C'(100) \Leftrightarrow 600 - 4 \cdot 100 = c \Leftrightarrow c = 200.$$

Тогава максималната печалба на фирмата ще бъде

$$\Pi = R(100) - C(100) = 400 \cdot 100 - 200 \cdot 100 = 20000 = 20 \text{ млн } \$.$$

28. Фирма произвежда и продава мишки за компютър. Ако p е цената в лв. за една мишка, а x – месечния обем продажби в хил. броя, функцията на търсене има вида $x = \frac{400}{p+5} - 8$.

а) Намерете минималното количество, което е по-голямо от всяко възможно количество на продажби. Намерете цената, при която мишките ще спрат да се продават.

б) Намерете ценовата еластичност при цена от 15 лв. за брой. Нужно ли е да се променя тази цена, за да нарастнат постъпленията от продажби.

в) Ако цената, максимализираща печалбата е 15 лв., а себестойността не зависи от обема на продажбите, да се намери тази себестойност.

29. Компания произвежда и предлага пълнозърнест хляб. Статистически анализ е показал, че еластичността на търсенето е -2 при цена 1,50 лв. и $-2{,}4$ при цена 2,70 лв.

а) Намерете ценовата еластичност на търсене при предположение, че тя е линейна функция на цената.

б) Намерете функцията на търсене, ако при цена от 1,50 лв. се търсят 30000 бр.

в) При каква цена е максималния приход от продажби и какъв е той (може да се използва приближението $e \approx 2{,}7$).

г) При каква цена компанията продава с най-голяма печалба, ако себестойността на един брой пълнозърнест хляб е 1 лв. (може да се използва приближението $\sqrt{2} \approx 1{,}4$).

30. **Крива на опита.** За организирането на един производствен цикъл във фирма (траещ една работна седмица) са необходими 6000 лв. Първата седмица са произведени 1000 изделия, а втората – 1560. Да се моделира функцията на разходите за производството на тези изделия и да се определи производството през третата седмица, при положение, че:

а) няма други ограничения;

б) смята се, че повече от 2400 изделия седмично не могат да се произведат.

И в двата случая да се определи колко изделия трябва да бъдат произведени (и за колко седмици), за да бъде достигната себестойност от три лв. за брой.

Нека фирмата да има монополни позиции на пазара и функцията на търсене на продукцията ѝ е

$$x = \frac{196}{p^2}.$$

В случаите а) и б) да се определят оптималните стойности на количеството, цената, приходите, разходите и печалбата.

Решение.

а) При положение, че липсват допълнителни ограничения, видът на разходната функция е

$$C(x) = ax^{\alpha}, \alpha \in (0{,}1),$$

като коефициентите на степенната функция a и α ще намерим от дадените условия. Това, че през първата седмица са произведени 1000 изделия означава, че $C(1) = 6$, защото разходите през първата седмица са 6000 лв. за 1000 произведени бройки. Тъй като $C(1) = a1^{\alpha} = 6$, то $a = 6$ и $C(x) = 6x^{\alpha}, \alpha \in (0{,}1)$. Остава да намерим α. Тъй като през втората седмица са произведени 1560 изделия, то през първата и втората седмица са произведени общо 2560 изделия, като за това са похарчени 12000 лв.; това означава, че $C(2{,}56) = 12$. Като заместим, получаваме $C(2{,}56) = 6 \cdot 2{,}56^{\alpha} = 12 \Longrightarrow 2{,}56^{\alpha} = 2$. Логаритмувайки последното равенство, ще имаме

$$\alpha \ln 2{,}56 = \ln 2 \Longrightarrow \alpha = \frac{\ln 2}{\ln 2{,}56} = \frac{0{,}69}{0{,}94} = 0{,}734.$$

Така окончателният вид на функцията на разходите е

$$C(x) = 6x^{0{,}734}.$$

За да отговорим на въпроса колко изделия са произведени през третата седмица, ще трябва да пресметнем производството през първите три седмици. Тъй като за седмица се правят по 6000 лв. разходи, то за първите три седмици разходите възлизат на 18000 лв., следователно ще имаме

$$C(x) = 6x^{0{,}734} = 18 \quad \text{или} \quad x^{0{,}734} = 3.$$

Логаритмуваме последното равенство и получаваме

$$0{,}734 \ln x = \ln 3 \Longrightarrow \ln x = \frac{\ln 3}{0{,}734} = \frac{1{,}1}{0{,}734} = 1{,}5.$$

След антилогаритмуване ще имаме

$$x = e^{1{,}5} = 4{,}48.$$

Доколкото през първите три седмици са произведени 4480 изделия, а през първите две – 2560, то през третата седмица произведените изделия са 1920.

Сега ще трябва да отговорим на въпроса: колко изделия трябва да бъдат произведени (и за колко седмици), за да бъде достигната себестойност от три лв. за брой. Себестойността е разходът за един брой, т.е. функцията на средните разходи $AC(x)$. Ще имаме

$$AC(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{6x^{0{,}734}}{x} = \frac{6}{x^{0{,}266}} = 3 \Longrightarrow x^{0{,}266} = 2.$$

Логаритмуваме последното равенство и получаваме

$$0{,}266 \ln x = \ln 2 \Longrightarrow \ln x = \frac{\ln 2}{0{,}266} = \frac{0{,}69}{0{,}266} = 2{,}59.$$

След антилогаритмуване ще имаме

$$x = e^{2{,}59} = 13{,}33.$$

Сега да пресметнем разходите за производството на тези 13330 изделия. Ще имаме

$$C(13{,}33) = 6 \cdot 13{,}33^{0{,}734} = 40{,}16,$$

Следователно разходите са 40160 лв., и доколкото разходите са по 6000 лв. на седмица, то ще имаме $40{,}16/6 = 6{,}69$ седмици. Ако предположим, че седмиците трябва да са цяло число, тогава получаваме, че за 7 седмици ще можем да произведем определен брой изделия със себестойност под 3 лв. за да определим този брой изделия ще трябва да решим уравнението $C(x) = 42$. Имаме

$$C(x) = 6x^{0{,}734} = 42 \quad \text{или} \quad x^{0{,}734} = 7.$$

Логаритмуваме последното равенство и получаваме

$$0{,}734 \ln x = \ln 7 \Longrightarrow \ln x = \frac{\ln 7}{0{,}734} = \frac{1{,}946}{0{,}734} = 2{,}65.$$

След антилогаритмуване ще имаме

$$x = e^{2{,}65} = 14{,}154.$$

Така получихме, че за първите седем седмици ще бъдат произведени 14154 изделия. Да пресметнем тяхната себестойност. Ще имаме

$$AC(14{,}154) = \frac{6}{14{,}154^{0{,}266}} = 2{,}965.$$

Да намерим обратната функция на търсене за функцията $x = 196/p^2$. Коренуваме и получаваме $\sqrt{x} = 14/p$ или $p(x) = 14/\sqrt{x}$. Тогава функцията на приходите ще бъде

$$R(x) = xp(x) = x\frac{14}{\sqrt{x}} = 14\sqrt{x}.$$

Да припомним, че монополът максимализира печалбата си ако произведеното от него количество изравнява маргиналните приходи $R'(x)$ с маргиналните разходи $C'(x)$. Да пресметнем маргиналните приходи:

$$R'(x) = \frac{7}{\sqrt{x}}$$

и маргиналните разходи:

$$C'(x) = (6x^{0{,}734})' = \frac{6 \cdot 0{,}734}{x^{0{,}266}} = \frac{4{,}404}{x^{0{,}266}}.$$

Тъй като фирмата е монопол, тя трябва да произведе такова количеството продукция, което да изравни маргиналните приходи $R'(x)$ с маргиналните разходи $C'(x)$. Ще имаме

$$R'(x) = C'(x) \Leftrightarrow \frac{7}{\sqrt{x}} = \frac{4{,}404}{x^{0{,}266}} \Leftrightarrow 7x^{0{,}266} = 4{,}404\sqrt{x}.$$

Разделяме двете страни на горното равенство на $4{,}404x^{0{,}266}$ и получаваме

$$x^{0{,}5-0{,}266} = \frac{7}{4{,}404} \Leftrightarrow x^{0{,}234} = 1{,}59.$$

Логаритмуваме последното равенство и получаваме

$$0{,}234 \ln x = \ln 1{,}59 \Rightarrow \ln x = \frac{\ln 1{,}59}{0{,}234} = \frac{0{,}464}{0{,}234} = 1{,}98.$$

След антилогаритмуване ще имаме

$$x = e^{1{,}98} = 7{,}243.$$

Цената на която монополът ще продава продукцията си се определя от обратната функция на търсене:

$$p = p(7{,}243) = 14/\sqrt{7{,}243} = 14/2{,}692 = 5{,}2.$$

Така за приходите на фирмата получаваме $R = px = 5{,}2 \cdot 7{,}243 = 37{,}664$, а за разходите

$$C = C(7{,}243) = 6 \cdot 7{,}243^{0{,}734} = 25{,}664.$$

Максималната печалба ще възлиза на $\Pi = R - C = 37{,}664 - 25{,}664 = 12$.

Тъй като разходите възлизат на $25{,}664$ хил. лв., а разходите за една седмица са 6 хил. лв., то ще имаме $25{,}664/6 = 4{,}277$ производствени седмици. Ако предположим, че седмиците трябва да са цяло число, тогава получаваме, че за 4 седмици производство ще имаме максимална печалба (това е най-близкото цяло число до 4,277, за това можем да очакваме, че максималната печалба ще се получи при 4 седмици, а не при 5). За да определим оптималния брой изделия ще трябва да решим уравнението $C(x) = 24$. Имаме

$$C(x) = 6x^{0{,}734} = 24 \quad \text{или} \quad x^{0{,}734} = 4.$$

Логаритмуваме последното равенство и получаваме

$$0{,}734 \ln x = \ln 4 \Rightarrow \ln x = \frac{\ln 4}{0{,}734} = \frac{1{,}386}{0{,}734} = 1{,}888.$$

След антилогаритмуване ще имаме

$$x = e^{1,888} = 6,606.$$

Така получихме, че за първите седем седмици ще бъдат произведени 6606 изделия. Сега ще използваме обратната функция на търсене за определяне на цената:

$$p = p(6,606) = 14/\sqrt{6,606} = 14/2,57 = 5,45.$$

Така за приходите на фирмата получаваме $R = px = 5,45 \cdot 6,606 = 36$, а разходите са 24. Максималната печалба ще възлиза на $\Pi = R - C = 36 - 24 = 12$.

б) При предположението, че за седмица (с фиксирани разходи от 6000 лв.) могат да се произведат най-много 2400 изделия, би следвало да очакваме пределна себестойност от 6000/2400= 2,5 лв. за брой. Тогава функцията на средните разходи ще бъде

$$AC(x) = \frac{C(x)}{x} = 2,5 + \frac{a}{x^{1-\alpha}} \quad \text{за} \quad \alpha \in (0,1),$$

следователно ще имаме функция на разходите от вида

$$C(x) = 2,5x + ax^{\alpha}.$$

Коефициентите на тази квазилинейно-степенна функция ще се определят от данните на задачата $C(1) = 6$ и $C(2,56) = 12$. От първото условие получаваме

$$C(1) = 2,5 \cdot 1 + a \cdot 1^{\alpha} = 6 \Longrightarrow a = 3,5 \quad \text{и} \quad C(x) = 2,5x + 3,5x^{\alpha},$$

а от второто –

$$C(2,56) = 2,5 \cdot 2,56 + 3,5 \cdot 2,56^{\alpha} = 12 \Longrightarrow 2,56^{\alpha} = \frac{12 - 6,4}{3,5} = 1,6.$$

Тъй като $1,6^2 = 2,56$, то $\alpha = 1/2$ и

$$C(x) = 2,5x + 3,5x^{0,5} = 2,5x + 3,5\sqrt{x}.$$

За да определим произведеното количество през третата седмица, ще трябва да решим уравнението

$$2,5x + 3,5\sqrt{x} = 18.$$

Ако положим $z = \sqrt{x}$ ще получим квадратното уравнение

$$2{,}5z^2 + 3{,}5z - 18 = 0$$

с положителен корен

$$z = \frac{-3{,}5 + \sqrt{3{,}5^2 + 180}}{5} = \frac{-3{,}5 + \sqrt{192{,}25}}{5} = \frac{-3{,}5 + 13{,}865}{5} = 2{,}073.$$

Тогава за количеството x получаваме

$$x = z^2 = 2{,}073^2 = 4{,}297.$$

С други думи, през първите три седмици са произведени 4297 изделия, а през първите две – 2560. Тогава през третата седмица ще се произведат $4297 - 2560 = 1737$ изделия.

За да определим колко изделия (и колко седмици) трябва да се произведат, за да бъде достигната себестойност (среден разход) от 3 лв. за брой, ще трябва да решим уравнението

$$AC(x) = 2{,}5 + \frac{3{,}5}{\sqrt{x}} = 3 \Leftrightarrow \frac{3{,}5}{\sqrt{x}} = 0{,}5 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 7 \text{ и } x = 49.$$

Тогава разходите за производството на това количество ще бъдат

$$C(49) = 2{,}5 \cdot 49 + 3{,}5\sqrt{49} = 122{,}5 + 24{,}5 = 147.$$

Тъй като разходите за една производствена седмица са 6 хил. лв., то за $147/6 = 24{,}5$ седмици ще се натрупат разходи от 147 хил. лв. Ако предположим, че седмиците трябва да са цяло число, тогава получаваме, че за 25 седмици ще можем да произведем определен брой изделия със себестойност под 3 лв. За да определим този брой изделия ще трябва да решим уравнението $C(x) = 150$. Имаме

$$2{,}5x + 3{,}5\sqrt{x} = 150.$$

Ако положим $z = \sqrt{x}$ ще получим квадратното уравнение

$$2{,}5z^2 + 3{,}5z - 150 = 0$$

с положителен корен

$$z = \frac{-3{,}5 + \sqrt{3{,}5^2 + 1500}}{5} = \frac{-3{,}5 + \sqrt{1512{,}25}}{5} = \frac{-3{,}5 + 38{,}888}{5} = 7{,}078.$$

Тогава за количеството x получаваме

$$x = z^2 = 7{,}078^2 = 50{,}1.$$

Три това произведено количество себестойността (средният разход) ще бъде

$$AC(50{,}1) = 2{,}5 + \frac{3{,}5}{\sqrt{50{,}1}} = 2{,}5 + \frac{3{,}5}{7{,}078} = 2{,}995.$$

За да определим оптималното количество за монопола, ще трябва да изравним маргиналните приходи $R'(x)$ с маргиналните разходи $C'(x)$. Маргиналните приходи са същите, както в а) ($R'(x) = 7/\sqrt{x}$), а маргиналните разходи са

$$C'(x) = \left(2{,}5x + 3{,}5\sqrt{x}\right)' = 2{,}5 + \frac{1{,}75}{\sqrt{x}}.$$

Тогава от равновесното условие за монопола

$$\frac{7}{\sqrt{x}} = 2{,}5 + \frac{1{,}75}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \frac{5{,}25}{\sqrt{x}} = 2{,}5 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{5{,}25}{2{,}5} = 2{,}1 \text{ и } x = 4{,}41.$$

Цената на която монополът ще продава продукцията си се определя от обратната функция на търсене:

$$p = p(4{,}41) = 14/\sqrt{4{,}41} = 14/2{,}1 = 6{,}667.$$

Така за приходите на фирмата получаваме $R = px = 6{,}667 \cdot 4{,}41 = 29{,}4$, а за разходите

$$C = C(4{,}41) = 2{,}5 \cdot 4{,}41 + 3{,}5 \cdot 2{,}1 = 18{,}375.$$

Тогава максималната печалба ще бъде $\Pi = R - C = 29{,}4 - 18{,}375 = 11{,}025$.

Тъй като разходите възлизат на 18,375 хил. лв., а разходите за една седмица са 6 хил. лв., то ще имаме $18{,}375/6 = 3{,}0625$ производствени седмици. Ако предположим, че седмиците трябва да са цяло число, тогава получаваме, че за 3 седмици производство ще имаме максимална печалба. За да определим оптималния брой изделия ще трябва да решим уравнението $C(x) = 28$. Това уравнение вече е решено, имаме $x = 4{,}297$ ($\sqrt{x} = 2{,}073$). Цената се определя от обратната функция на търсене:

$$p = p(4{,}297) = 14/\sqrt{4{,}297} = 14/2{,}073 = 6{,}753.$$

Така за приходите на фирмата получаваме $R = px = 6{,}753 \cdot 4{,}295 = 29{,}017$, а тъй като разходите са $C = 18$, то за максималната печалба получаваме $\Pi = R - C = 29{,}017 - 18 = 11{,}017$.

31. **Различни функции на разходите.** Дадена е функцията на разходи на фирмата: 1) $C(q) = 10 + 5q$; 2) $(q) = 20 + 5q + \sqrt{q}$; 3) $C(q) = 30 + 2q +$

$0{,}075q^2$; 4) $C(q) = 40 + 3q + 0{,}02q^3$. Да се намерят функциите на средни общи разходи, средни променливи разходи и маргинални разходи. Да се намери критичната цена и съответното ѝ критичното количество (ако съществува). За тези функции на разходите, допускащи максимализиране на печалбата, да се намери функцията на предлагане и функцията на печалбата (от цената).

Решение.

1) За линейната разходна функция $C(q) = 10 + 5q$ получаваме функция на средните разходи

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{10 + 5q}{q} = \frac{10}{q} + 5,$$

функция на средните променливи разходи

$$AVC(q) = \frac{VC(q)}{q} = \frac{5q}{q} = 5$$

и функция на маргиналните разходи $MC(q) = C'(q) = 5$. За критичната цена ще имаме

$$p_k = inf\{AC(q)\} = inf\left\{\frac{10}{q} + 5\right\} = 5 = \lim_{q\to\infty}\left(\frac{10}{q} + 5\right),$$

което означава, че тази критична цена не се достига от никакво количество, т.е. няма критично количество. За всяка цена $p > p_k = 5$ е възможно фирмата да реализира печалба, която нараства неограничено с неограниченото нарастване на q. Поради това, задачата за максимализиране на печалбата на конкурентна фирма с такава разходна функция няма решение. Това важи за всички разходни функции с постоянни средни променливи разходи.

2) За вдлъбнатата разходна функция $C(q) = 20 + 5q + \sqrt{q}$ (вдлъбната е, защото $C''(q) = -0{,}5q^{-1{,}5} < 0$) получаваме функция на средните разходи

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{20 + 5q + \sqrt{q}}{q} = \frac{20}{q} + 5 + \frac{1}{\sqrt{q}},$$

функция на средните променливи разходи

$$AVC(q) = \frac{VC(q)}{q} = \frac{5q + \sqrt{q}}{q} = 5 + \frac{1}{\sqrt{q}}$$

и функция на маргиналните разходи

$$MC(q) = C'(q) = 5 + \frac{1}{\sqrt{q}}.$$

За критичната цена ще имаме

$$p_k = inf\{AC(q)\} = inf\left\{\frac{20}{q} + 5 + \frac{1}{\sqrt{q}}\right\} = 5 = \lim_{q\to\infty}\left(\frac{10}{q} + 5 + \frac{1}{\sqrt{q}}\right),$$

което означава, че тази критична цена не се достига от никакво количество, т.е. няма критично количество. За всяка цена $p > p_k = 5$ е възможно фирмата да реализира печалба, която нараства неограничено с неограниченото нарастване на q. Поради това, задачата за максимализиране на печалбата на конкурентна фирма с такава разходна функция няма решение. Това важи за всички разходни функции с намаляващи средни променливи разходи.

3) За изпъкналата разходна функция $C(q) = 30 + 2q + 0{,}075q^2$ (изпъкнала е защото $C''(q) = 0{,}15 > 0$) получаваме функция на средните разходи

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{30 + 2q + 0{,}075q^2}{q} = \frac{30}{q} + 2 + 0{,}075q,$$

функция на средните променливи разходи

$$AVC(q) = \frac{VC(q)}{q} = \frac{2q + 0{,}075q^2}{q} = 2 + 0{,}075q$$

и функция на маргиналните разходи

$$MC(q) = C'(q) = 2 + 0{,}15q.$$

За критичната цена ще имаме

$$p_k = inf\{AC(q)\} = inf\left\{\frac{30}{q} + 2 + 0{,}075q\right\} = min\left\{\frac{30}{q} + 2 + 0{,}075q\right\} = AC_{min}.$$

Да намерим абсолютния минимум на средните разходи AC_{min}. Условието от първи ред е

$$AC'(q) = -\frac{30}{q^2} + 0{,}075 = 0 \Leftrightarrow q = 20.$$

Тогава въпросният абсолютен минимум (и критичната цена) ще бъде

$$p_k = AC_{min} = AC(20) = \frac{30}{20} + 2 + 0{,}075 \cdot 20 = 1{,}5 + 2 + 1{,}5 = 5.$$

Така получихме, че критичната цена е $p_k = 5$ и съответното ѝ критично количество е $q_k = 20$. Това означава, че за всяка цена $p < p_k = 5$ фирмата работи на загуба, независимо от произведеното количество; за $p = p_k = 5$ и $q = q_k = 20$ фирмата има нулева печалба, а за всички други количества – загуба и за $p > p_k = 5$ при определени количества може да реализира печалба.

Функцията на предлагане се определя от условието от първи ред за максимализиране на печалбата

$$p = MC(q) = C'(q) = 2 + 0{,}15q.$$

Това е обратната функция на предлагане, следователно функцията на предлагане ще бъде

$$q = \frac{20}{3}(p - 2).$$

За да получим печалбата на конкурентната фирма (при положение, че тя максимализира печалбата си) ще трябва в израза за печалбата

$$\Pi = R - C = pq - (30 + 2q + 0{,}075q^2) = -0{,}075q^2 + (p - 2)q - 30$$

да заместим q с $\frac{20}{3}(p - 2)$. Получаваме

$$\Pi(p) = -0{,}075\left(\frac{20}{3}(p - 2)\right)^2 + \frac{20}{3}(p - 2)^2 - 30 = \frac{10}{3}(p - 2)^2 - 30.$$

Такава картина (наличие на абсолютен минимум на средните разходи и възможност за максимализиране на печалбата и от там наличие на функция на предлагане) получаваме при всички разходни функции с нарастващи средни променливи разходи.

4) За изпъкналата разходна функция $C(q) = 40 + 3q + 0{,}02q^3$ (изпъкнала е защото $C''(q) = 0{,}12q > 0$) получаваме функция на средните разходи

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{40 + 3q + 0{,}02q^3}{q} = \frac{40}{q} + 3 + 0{,}02q^2,$$

функция на средните променливи разходи

$$AVC(q) = \frac{VC(q)}{q} = \frac{3q + 0{,}02q^3}{q} = 3 + 0{,}02q^2$$

и функция на маргиналните разходи

$$MC(q) = C'(q) = 3 + 0{,}06q^2.$$

За критичната цена ще имаме

$$p_k = inf\{AC(q)\} = inf\left\{\frac{40}{q} + 3 + 0{,}02q^2\right\} = min\left\{\frac{40}{q} + 3 + 0{,}02q^2\right\} = AC_{min}.$$

Да намерим абсолютния минимум на средните разходи AC_{min}. Условието от първи ред е

$$AC'(q) = -\frac{40}{q^2} + 0{,}04q = 0 \Leftrightarrow q = 10.$$

Тогава въпросният абсолютен минимум (и критичната цена) ще бъде

$$p_k = AC_{min} = AC(10) = \frac{40}{10} + 3 + 0{,}02 \cdot 100 = 4 + 3 + 2 = 9.$$

Аналогично на предишния случай, получаваме, че критичната цена е $p_k = 9$ и съответното ѝ критично количество е $q_k = 10$. Това означава, че за всяка цена $p < p_k = 9$ фирмата работи на загуба, независимо от произведеното количество; за $p = p_k = 9$ и $q = q_k = 10$ фирмата има нулева печалба, а за всички други количества – загуба и за $p > p_k = 9$ при определени количества може да реализира печалба.

Функцията на предлагане се определя от условието от първи ред за максимализиране на печалбата

$$p = MC(q) = C'(q) = 3 + 0{,}06q^2.$$

Това е обратната функция на предлагане, следователно функцията на предлагане ще бъде

$$q = 10\sqrt{\frac{(p-3)}{6}}.$$

За да получим печалбата на конкурентната фирма (при положение, че тя максимализира печалбата си) ще трябва в израза за печалбата

$$\Pi = R - C = pq - (40 + 3q + 0{,}02q^3) = -0{,}02q^3 + (p-3)q - 40$$

да заместим q с $10\sqrt{\frac{(p-3)}{6}}$. Получаваме

$$\Pi(p) = -0{,}02\left(10\sqrt{\frac{(p-3)}{6}}\right)^3 + 10(p-3)\sqrt{\frac{(p-3)}{6}} - 40$$
$$= \frac{20}{3}(p-3)\sqrt{\frac{(p-3)}{6}} - 40.$$

32. **Извеждане на функцията на разходите от функцията на предлагане.** Известно е, че фирма предлага продукцията си с функция на предлагане $y(p) = -200 + 8p$, като критичната цена е 40 лв.

а) Да се изведе функцията на разходи на фирмата;

б) да се изрази функцията на печалба на фирмата $\pi = \pi(p)$.

Решение.

а) След като функцията на предлагане е $q = y(p) = -200 + 8p = 8(p - 25)$, то обратната функция на предлагане ще бъде

$$p = p(q) = 25 + \frac{q}{8}.$$

От друга страна равновесието на конкурентната фирма предполага равенство на цената с маргиналните разходи, т.е.

$$p = p(q) = MC(q) = C'(q).$$

От горните две равенства произтича диференциалното уравнение

$$C'(q) = 25 + \frac{q}{8}$$

След интегриране на последното, получаваме

$$C(q) = c_0 + 25q + \frac{q^2}{16},$$

където c_0 е интеграционна константа, която ще определим от допълнителното условие за критичната цена. В случай на изпъкнала разходна функция (такава, която допуска максимализиране на печалбата) критичната цена е абсолютния минимум на функцията на средните разходи $AC(q)$. Ще имаме

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{c_0 + 25q + \frac{q^2}{16}}{q} = \frac{c_0}{q} + 25 + \frac{q}{16}.$$

Условието от първи ред е

$$AC'(q) = -\frac{c_0}{q^2} + \frac{1}{16} = 0 \Leftrightarrow q = 4\sqrt{c_0}.$$

Тогава за критичната цена ще имаме

$$p_k = AC_{min} = AC\left(4\sqrt{c_0}\right) = \frac{c_0}{4\sqrt{c_0}} + 25 + \frac{4\sqrt{c_0}}{16} = 25 + \frac{\sqrt{c_0}}{2}.$$

Тъй като по условие $p_k = 40$, то от

$$25 + \frac{\sqrt{c_0}}{2} = 40 \Longrightarrow c_0 = 900 \quad \text{и} \quad C(q) = 900 + 25q + \frac{q^2}{16}.$$

За да изразим печалбата (при положение че тя е максимализирана) ще трябва в израза

$$\pi = pq - C(q) = pq - 25q - \frac{q^2}{16} - 900$$

да заместим q с $8(p-25)$ (от функцията на предлагане. Получаваме

$$\pi = \pi(p) = (p-25)\cdot 8(p-25) - \frac{\left(8(p-25)\right)^2}{16} - 900 = 4(p-25)^2 - 900.$$

33. **Фирмата и отрасъла.** В един отрасъл с функция на търсене $x = 32 - 5p$ функционират три групи фирми: 10 фирми , всяка от които има функция на разходите $C_1 = q_1 + 0{,}5{q_1}^2$; 10 фирми с функции на разходите $C_2 = 2q_2 + {q_2}^2$ и 15 фирми с функции на разходите $C_3 = 3q_3 + 1{,}5{q_3}^2$.

а) Да се намерят функциите на предлагане на фирмите и отрасловата функция на предлагане.

б) Да се намери цената на стоката и общото реализирано количество от нея при условие на съвършена конкуренция в отрасъла.

в) Да се намерят произведените количества от всяка от фирмите, приходите, разходите и печалбите им.

Решение.

Обратната функция на предлагане за всяка от фирмите от първата група ще бъде $p = {C_1}' = 1 + q_1$. Тогава функцията на фирмено предлагане е $q_1 = -1 + p$. Тъй като фирмите са общо 10 на брой с еднакви фирмени функции на предлагане, то общото предлагане за фирмите от първата група е $Y_1 = -10 + 10p$. Аналогично за всяка от фирмите от втората група получаваме обратна функция на фирмено предлагане $p = C_2{}' = 2 + 2q_2$, функция на фирмено предлагане $q_2 = -1 + 0{,}5p$ и фукция на общо предлагане за фирмите от групата $Y_2 = -10 + 5p$. За фирмите от третата група имаме $p = C_3{}' = 3 + 3q_3$, $q_3 = -1 + \frac{1}{3}p$ и $Y_3 = -15 + 5p$.

За да получим функцията на отраслово предлагане чрез агрегиране на функциите на групови предлагания Y_1, Y_2 и Y_3 трябва да отбележим, че $Y_1 \geq 0$ за $p \geq 1$; $Y_2 \geq 0$ за $p \geq 2$ и $Y_3 \geq 0$ за $p \geq 2$ (с други думи, фирмите от втората група предлагат стоката, ако цената ѝ е над 2 парични единици, за по-ниска цена – не предлагат).

Тогава за функцията на отраслово предлагане получаваме

$$Y(p) = \begin{cases} Y_1 = -10 + 10p \text{ при } p \in [1, 2) \\ Y_1 + Y_2 = -20 + 15p \text{ при } p \in [2, 3) \\ Y_1 + Y_2 + Y_3 = -35 + 20p \text{ при } p \in [3, +\infty) \end{cases}$$

За да получим равновесните цена и количество ще трябва да приравним полученото отраслово предлагане с отрасловото търсене. Ще разгледаме отделно трите интервала за p.

При $p \in [1, 2)$ имаме $x(p) = 32 - 5p = -10 + 10p = Y(p) \Longrightarrow p = 2{,}8 \notin [1, 2)$.

При $p \in [2, 3)$ $x(p) = 32 - 5p = -20 + 15p \Longrightarrow p = 2{,}6 \in [2, 3)$ и

при $p \in [3, +\infty)$ $x(p) = 32 - 5p = -35 + 20p \Longrightarrow p = 2{,}68 \notin [3, +\infty)$.

Така получаваме окончателно, че равновесната цена е $p = 2{,}6$, а равновесното количество $q = x(2{,}6) = Y(2{,}6) = 19$.

В интервала $p = 2{,}6 \in [2, 3)$ за отрасловото предлагане имаме $Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p)$. Тъй като $Y_1(2{,}6) = 16$ и $Y_2(2{,}6) = 3$, всяка от фирмите от първата група ще произвежда количество $q_1 = 1{,}6$, всяка от фирмите от втората група - $q_2 = 0{,}3$, а фирмите от третата група няма да произвеждат нищо ($q_3 = 0$).

Всяка фирма от първата група има приходи $R_1 = pq_1 = 2{,}6.1{,}6 = 4{,}16$, разходи $C_1 = C_1(1{,}6) = 1{,}6 + 0{,}5(1{,}6)^2 = 2{,}88$ и печалба $\pi_1 = R_1 - C_1 = 4{,}16 - 2{,}88 = 1{,}28$. За всяка фирма от втората група: приходи $R_2 = pq_2 = 2{,}6.0{,}3 = 0{,}78$, разходи $C_2 = C_2(0{,}3) = 2.0{,}3 + (0{,}3)^2 = 0{,}69$ и печалба $\pi_2 = R_2 - C_2 = 0{,}78 - 0{,}69 = 0{,}09$. За фирмите от третата група (поради липса на предлагане при тази цена) $R_3 = C_3 = \pi_3 = 0$.

34. **Неокласическа производствена функция на една ресурсна променлива – труд**. В една конкурентна фирма мениджмънта е установил, че при използване

на труд в размер на 1000 часа седмично се произвеждат 2000 изделия, а при 2000 часа – 3000. Съществуват два варианта за неокласическа производствена функция:

1) степенна функция $q = aL^{\alpha}$;

2) квадратна функция $q = aL - bL^2$.

а) да се намери (възстанови) производствената функция на фирмата;

б) да се намери функцията на предлагане на фирмата $q = q(p)$, ако установената тарифна ставка на работната заплата е 5 лв. за час.

в) да се изрази печалбата на фирмата (в условие на оптималното ѝ функциониране) като функция на цената p и да се пресметне печалбата при $p = 10$.

г) да се намери функцията на разходи на фирмата при положение, че те са само за труд.

Решение.

1) а) Предполагаме, че неокласическата производствена функция на една променлива е от вида

$$q = aL^{\alpha}\,, \alpha \in (0,1).$$

Коефициентите на тази степенна функция a и α ще намерим като използваме данните на задачата, имаме $q = 2$ при $L = 1$ и $q = 3$ при $L = 2$. От първото условие получаваме

$$2 = a1^{\alpha} \Longrightarrow a = 2 \ \text{ и } \ q = 2L^{\alpha},$$

а от второто –

$$3 = 2 \cdot 2^{\alpha} \Longrightarrow 2^{\alpha} = 1{,}5 \Longrightarrow \alpha = \frac{\ln 1{,}5}{\ln 2} = \frac{0{,}405}{0{,}693} = 0{,}584 \text{ и } q = 2L^{0{,}584}.$$

б) За да определим функцията на предлагане, ще използваме условието от първи ред за конкурентната фирма, а именно: маргиналната производителност на труда трябва да е равна на неговата относителна цена, или

$$q'(L) = \frac{w}{p},$$

където w е часовата тарифна ставка на работната заплата, а p – цената на произвежданата и предлагана стока. Заместваме $q'(L)$ с $2 \cdot 0{,}584L^{-0{,}416} = 1{,}168L^{-0{,}416}$ и w с 5 и получаваме

$$L^{0{,}416} = 0{,}234p.$$

Степенуваме двете страни на горното равенство с $1/0{,}416 = 2{,}4$:

$$(L^{0{,}416})^{\frac{1}{0{,}416}} = 0{,}234^{2{,}4}p^{2{,}4} \Rightarrow L = 0{,}03p^{2{,}4}.$$

След заместване на получения израз за L в производствената функция, ще имаме

$$q = 2(0{,}03p^{2{,}4})^{0{,}584} = 2 \cdot 0{,}03^{0{,}584}p^{1{,}4} = 0{,}258p^{1{,}4}.$$

в) Заместваме в израза за печалбата

$$\Pi(p) = R(p) - C(p) = pq(p) - wL(p)$$

$q(p)$ и $L(p)$ с получените в б) изрази и получаваме

$$\Pi(p) = p \cdot 0{,}258p^{1{,}4} - 5 \cdot 0{,}03p^{2{,}4} = 0{,}258p^{2{,}4} - 0{,}15p^{2{,}4} = 0{,}108p^{2{,}4}.$$

За цена $p = 10$ ще имаме

$$\Pi(10) = 0{,}108 \cdot 10^{2{,}4} = 27{,}13.$$

г) В израза за разходите

$$C(q) = wL(q)$$

заместваме $L(q)$ с обратната функция на производствената функция $q = 2L^{0{,}584}$ – $L = 0{,}305q^{1{,}712}$ и получаваме

$$C(q) = 1{,}525q^{1{,}712}.$$

Чрез получения израз за функцията на разходите можем да получим по още един начин израза за функцията на предлагане. Равновесното условие за фирмата-конкурент е

$$p = C'(q) = 1{,}525 \cdot 1{,}712q^{0{,}712} = 2{,}61q^{0{,}712}.$$

Това е изразът за обратната функция на предлагане. Като изразим q чрез p получаваме $q = 0{,}26p^{2{,}4}$ – функция на предлагане на фирмата (малката разлика произтича от грешки при закръгляне).

2) а) Предполагаме, че неокласическата производствена функция на една променлива е от вида

$$q = aL - bL^2.$$

Коефициентите на тази степенна функция a и b ще намерим като използваме данните на задачата, имаме $q = 2$ при $L = 1$ и $q = 3$ при $L = 2$. От първото условие получаваме

$$2 = a - b \Longrightarrow a = 2 + b \Longrightarrow q = (2 + b)L - bL^2.$$

а от второто –

$$4 = 2(2 + b) - 4b \Longrightarrow b = 0{,}5, a = 2{,}5 \quad \text{и} \quad q = 2{,}5L - 0{,}5L^2.$$

Тъй като

$$q'(L) = 2{,}5 - L > 0,$$

То производствената функция е дефинирана за $L < 2{,}5$.

б) приравняваме маргиналната производителност на труда с неговата относителна цена:

$$q'(L) = \frac{w}{p} \Longleftrightarrow 2{,}5 - L = \frac{5}{p} \quad \text{и} \quad L = 2{,}5 - \frac{5}{p}.$$

Заместваме така получения израз за L в производствената функция и получаваме

$$q(p) = q\big(L(p)\big) = 0{,}5\left(2{,}5 - \frac{5}{p}\right)\left(5 - \left(2{,}5 - \frac{5}{p}\right)\right) = 0{,}5\left(2{,}5 - \frac{5}{p}\right)\left(2{,}5 + \frac{5}{p}\right)$$
$$= \frac{3{,}125}{p^2}(p^2 - 4).$$

Изпълнено е очевидното неравенство $q > 0$ при $p > 2$ (за цени $p \leq 2$ няма предлагане.

в) Заместваме в израза за печалбата

$$\Pi(p) = R(p) - C(p) = pq(p) - wL(p)$$

$q(p)$ и $L(p)$ с получените в б) изрази и получаваме

$$\Pi(p) = p\frac{3{,}125}{p^2}(p^2 - 4) - 5\frac{2{,}5}{p}(p - 2) = \frac{3{,}125}{p}(p - 2)[(p + 2) - 4]$$
$$= \frac{3{,}125}{p}(p - 2)^2.$$

За цена $p = 10$ ще имаме

$$\Pi(10) = \frac{3{,}125}{10} 8^2 = 20.$$

г) В израза за разходите

$$C(q) = wL(q)$$

заместваме $L(q)$ с обратната функция на производствената функция, която се получава ако решим уравнението

$$0{,}5L^2 - 2{,}5L + q = 0.$$

Ще имаме

$$L(q) = 2{,}5 - \sqrt{6{,}25 - 2q}$$

Тогава за функцията на разходите получаваме

$$C(q) = wL(q) = 12{,}5 - 5\sqrt{6{,}25 - 2q}$$

35. **Неокласическа производствена функция на една ресурсна променлива – капитал**. В една конкурентна фирма мениджмънта е установил, че при използване на капитал в размер на 1000000 лв. се произвеждат 20000 изделия с разходи от 250000 лв., а при 2000000 лв. – 30000 с разходи от 350000 лв.. Съществуват два варианта за неокласическа производствена функция:

1) степенна функция $q = aK^{\alpha}$;

2) квадратна функция $q = aK - bK^2$.

а) да се намери (възстанови) производствената функция на фирмата;

б) да се намерят на разходите на фирмата, ако те са от вида $C = c_0 + vK$, където v е цената на капитала, а c_0 – фиксирани разходи, несвързани с капитала.

в) да се намери функцията на предлагане на фирмата $q = q(p)$.

г) да се изрази печалбата на фирмата (в условие на оптималното ѝ функциониране) като функция на цената p и да се пресметне печалбата при $p = 20$.

д) да се намери функцията на разходи $C = C(q)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аласдър Смит, Математическо въведение в икономиката, Университетско издателство „Св. Климент Охридски“, София, 2000, ISBN 954-07-1405-2

2. Асен Христов, Математическа Икономика - цикъл учебни дисциплини, http://www.fmi-plovdiv.org/manev/Asen/index.htm

3. Задачи по Экономике, http://ecson.ru/economics/

4. Провереные задачи, http://iloveeconomics.ru/zadachi/

5. Study Material, Foundation Programme BUSINESS ECONOMICS, Paper 3, The institute of Company Secretaries of India, New Delhi